7. Volterra: Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni. (Rend. Lincei, Vol. VI, 1⁰ sem. 1890.)

8. Hostinský: Sur les transformations des équations de la mécanique. Bulletin des Sciences Math. 2ème série t. 48, 1924.

9. Volterra: Leçons sur les fonctions des lignes. (Paris 1913) p. 57.

10. Volterra: Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni. Rend. Acc. dei Lincei Vol. VI, 1890, 1er Sém.

11. Volterra: Sopra le eq. fond. della elettrodinamica. (Rend. Lincei Vol. VII, 1er Sém. 1891.) — (N. Cimento S. III, Vol. XXIX, 1891.)

12. Minkowski: Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Göttingen Nachrichten 1908 p. 53; Gesammelte Abhandlungen Bd. II. p. 352.

13. Volterra: Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents. Acta Math. T. 16, 1892, Art. 1⁰, § 6. p. 165.

14. Levi-Civita: Rend. Sem. Mat. Roma 1920; Fondamenti di meccanica relativistica, Bologna 1928.

Poznámka k důkazu zákona reciprocity pro kvadratické zbytky.

Napsal *K. Petr.*

(Došlo 10. ledna 1933.)

Pro zákon reciprocity podána nepřehledná řada důkazů. Při tom snaha matematiků směřovala k tomu, podati důkaz nejstručnější a zároveň pochopení nejpřístupnější. Jeden z takových důkazů jest Frobeniův-Zellerův, který ve své knize „Úvod do elementární teorie číselné" podává prof. Rychlík (str. 72 a násl.). Příbuzné důkazy stručností vynikající podány od Kroneckra a jiných. V následujícím podáno nové — pokud mi ovšem známo — sestavení důkazu na základě pomůcek k tomu již dříve používaných.

Při tom lze hned podati důkaz věty obecnější, vztahující se k symbolu Jacobiově. Buďtež dvě čísla celá, lichá, kladná a nesoudělná P, Q. Utvořme řadu čísel

$$1 \,.\, Q,\ 2 \,.\, Q,\ 3 \,.\, Q, \ldots, \tfrac{1}{2}(P - 1)\, Q. \tag{1}$$

Odečtěme od jednotlivých členů této řady celočíselné násobky čísla P, tak aby zbytky po odečtení vznikající byly v absolutní hodnotě menší než $\frac{1}{2}P$. Budeme této operaci krátce říkati „dělení podle zbytku o nejmenší absolutní hodnotě". Provedeme-li dělení na př. na členu kQ, obdržíme zbytek r_k a máme tento vztah

$$kQ = p_k P + r_k, \quad 0 < k < \tfrac{1}{2}P, \quad 0 < |r_k| < \tfrac{1}{2}P, \tag{2}$$

k, p_k, r_k jsou čísla celá. Zbytky v řadě (1) tak vznikající tvoří řadu

$$r_1,\ r_2, \ldots, r_{\frac{1}{2}(P-1)}, \tag{3}$$

jež od řady

$$1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(P - 1)$$

se liší jednak pořádkem, jednak znaménky. Počet záporných členů v řadě (3) označíme μ. Pak definujeme

$$\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\mu}. \tag{4}$$

Pro takto definovaný symbol pak dokážeme zákon reciprocity.

K tomu cíli utvoříme součet rovnic (2) psaných pro $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \frac{1}{2}(P-1)$. Při tom zároveň člen r_k, který se shoduje až na znaménko s jedním z čísel $1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(P-1)$ na př. s l, dáme na levou stranu a sloučíme jej s lQ. Dostaneme tak vztah

$$\sum_{l=1}^{\frac{1}{2}(P-1)} l\,(Q \mp 1) = P \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(P-1)} p_k;$$

$Q \mp 1$ jest číslo sudé, neboť Q jest podle předpokladu liché; jest tedy na levé straně součet čísel sudých a tedy číslo sudé; jest tudíž i pravá strana číslo sudé, a jelikož P jest liché, *jest součet* $\sum_k p_k$ *číslo sudé.*

Provádíme-li dělení čísla kQ číslem P podle nejmenšího zbytku kladného, obdržíme místo (2) rovnici

$$kQ = p'_k P + r'_k, \quad 0 < k < \tfrac{1}{2}P, \quad 0 < r'_k < P;$$

k, p'_k, r'_k jsou čísla celá. Očividně jest $p'_k = p_k$, je-li ve (2) r_k kladné (pak i $r_k = r'_k$); je-li však r_k záporné, jest $p_k = p'_k + 1$. Jest tedy

$$\sum_k p_k = \sum_k p'_k + \mu, \quad \mu = \sum_k p_k - \sum_k p'_k \equiv \sum_k p'_k \pmod 2,$$
$$k = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(P-1).$$

Máme tudíž též ze (4)

$$\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\sum_k p'_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(P-1).$$

Avšak očividně jest

$$(-1)^{p'_k} = \operatorname{sign}(1 \,.\, P - kQ)\,(2 \,.\, P - kQ)\,(3 \,.\, P - kQ) \ldots$$
$$[\tfrac{1}{2}(Q-1)\,P - kQ]$$
$$= \operatorname{sign} \prod_l (lP - kQ), \quad l = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(Q-1).$$

Mohli bychom součin sice rozšířiti o další činitele vztahující se k větším l než vytčeným, avšak jest to zbytečno, neboť $lP - kQ > 0$, je-li $l > \frac{1}{2}(Q-1)$ a $k \leq \frac{1}{2}(P-1)$, a činitelé, jež bychom tak přibrali, jsou kladní a nemají vliv na znaménko. Jest tedy

$$\left(\frac{Q}{P}\right) = \operatorname{sign} \prod_k \prod_l (lP - kQ),$$
$$k = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(P-1), \quad l = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(Q-1).$$

Stejně však jest

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \operatorname{sign} \prod_k \prod_l (kQ - lP)$$