Variační počet

jeho vývoj, jeho pokroky a jeho úloha v matematické fysice.

V. *Volterra.*

Druhá přednáška.

Obsah druhé přednášky.

1. Dirichletův problém. 2. Dirichlet, Riemann, Weierstrass, Neumann, Schwarz, Poincaré, Fredholm. 3. Arzelà, Hilbert a jejich následovníci. 4. Tonelli a polospojitost. Staré a nové metody variačního počtu. 5. Polospojitost funkcionálů zdola a shora. Nové metody Tonelliho. 6. Převedení otázek o přírodních dějích na úlohy o minimu. Filosofické myšlenky Maupertuisovy, Lagrangeovy, Hamiltonovy, Jacobiho, Gaussovy a Hertzovy. 7. Hamiltonův princip a princip variované akce. Věta Greenova. 8. Rozšíření kanonických rovnic na obecné úlohy variačního počtu i pro několik nezávisle proměnných. 9. Rozšíření věty Hostinského o invarianci kanonických rovnic. 10. Zvláštní případy. 11. Zobecnění Jacobiho rovnice na případ mnohonásobných integrálů. 12. Jiná zobecnění kanonických rovnic a věty Jacobiho. 13. Rovnice elektromagnetických polí. Převedení na úlohy variačního počtu. 14. Obecné myšlenky pana Hostinského o transformaci rovnic matematické fysiky. 15. Variační počet, Hamiltonův princip a relativita.

1. Budeme nyní zkoumati vztahy, které jsou mezi variačním počtem a otázkami matematické fysiky a mechaniky.

Tak můžeme projíti mnoha i právě nejnovějšími oblastmi těchto věd a zároveň můžeme viděti — jak jsem řekl na konci předešlé přednášky — jakou úlohu měla nauka o funkcionálech v nejnovějším vývoji variačního počtu.

Začneme s velmi důležitým problémem matematické fysiky, totiž s problémem Dirichletovým; můžeme jej považovati za typický, neboť v mnoha případech dochází se k otázkám obdobným. Je zajímavo všimnouti si, že Dirichletův princip je otázka, dotýkající se té části matematické fysiky, která by se mohla nazvati její logikou. Tímto principem se totiž dokazuje, že existuje funkce $V(x, y)$ spojitá, mající parciální derivace prvního a druhého řádu, která vyhovuje Laplaceově diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

a nabývá na okraji dvojrozměrného oboru daných hodnot.

V případě funkce o třech proměnných zní diferenciální rovnice

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

a obor je třírozměrný.

S tímto principem setkáváme se v teorii rovnice pro vedení tepla, v nauce o elektřině, o pružnosti atd. Také se s ním setkáváme v analyse v nauce o funkcích.

K důkazu Dirichletova principu užívalo se několika způsobů. Otázku tu lze převésti na tuto úlohu: Dokázati, že mezi funkcemi spojitými V (x, y), které nabývají na okraji dvojrozměrné oblasti Ω daných hodnot, a pro něž má integrál

$$I = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega$$

smysl, existuje jedna taková, že tento integrál nabývá pro ni minima.

Takto stává se Dirichletův problém úlohou variačního počtu. Neboť hledáme-li Eulerovu rovnici pro tento případ, dostaneme Laplaceovu rovnici.

2. Snadno lze poznati, že předešlý integrál je vždy kladný nebo rovný nule, a na základě toho domnívali se Dirichlet a Riemann, že tento poznatek stačí k důkazu o existenci jeho minima. Weierstrass však ukázal, že tento způsob uvažování byl zcela mylný, a od té doby byly hledány jiné cesty k důkazu Dirichletova principu.

Užívalo se způsobů, které vůbec neměly co dělati s variačním počtem. Mnozí autoři sledovali metodu Neumannovu a rozšířili ji na mnohé jiné případy, pak metodu Schvarzovu a Poincaréovu (méthode du balayage). Konečně velmi úspěšné metody založené na integrálních rovnicích, jichž užil poprvé Fredholm, a jež daly podnět velmi mnohým pracem.

3. Ale zároveň utvořil se nový směr, který se vrátil ke staré myšlence, užíti variačního počtu. Arzelà první se pokusil, veden jsa myšlenkami o funkcionálech, jež se zároveň ponenáhlu vyvíjely, o přesný důkaz, že za jistých podmínek minimum existuje. Práce, které obsahují konečné výsledky Arzelàovy, pocházejí z roku 1897 (1), ačkoli jeho postřehy a studie jsou starší.

Později roku 1900 uveřejnil Hilbert (2) úplný a přesný důkaz, obdržev výsledek definitivní, čehož Arzelà nedosáhl. Ale Hilbert mohl dosíci úspěchu jen tím, že se držel cesty oním ražené. Po práci Hilbertově přišly četné práce Leviho, Fubiniho, Lebesgueovy, Zarembovy a jiné. Ale všechny tyto práce jsou založeny na zvláštních podmínkách problému a neotvírají nové obecné cesty. Ta byla objevena teprve, když se poznalo, že užité metody děkují za svůj úspěch té vlastnosti integrálu I, že je polospojitý.

4. Tonelli pojal úlohy variačního počtu jako zvláštní otázky z nauky o funkcionálech a vložil do základů variačního počtu novou metodu založenou na pojmu polospojitosti. Možno tudíž říci, že

variační počet je jenom kapitolou z nauky o funkcionálech, vymezenou tím, že

1. jedná jen o těch funkcionálech, které jsou vyjádřeny omezenými integrály,

2. jedná o takových úlohách o maximu a minimu těchto funkcionálů, které vedou k diferenciálním rovnicím.

Nauka o funkcionálech je takto omezena se dvou stran.

Tak byl variační počet uveden na docela novou dráhu, na níž se Eulerovy diferenciální rovnice opomíjejí a o úloze se uvažuje přímo.

Ostatně v mnoha případech nedává metoda diferenciálních rovnic hledaného řešení. Užívá-li se této metody, je nutno

1. najíti rovnice Eulerovy,

2. určiti křivky nebo plochy, které těmto rovnicím vyhovují, a které splňují okrajové podmínky, nebo aspoň dokázati, že takové křivky a plochy existují,

3. dokázati, že tyto křivky skutečně dávají maximum nebo minimum, to jest, že vyhovují podmínkám postačujícím pro existenci maxim a minim, a rozlišiti, kdy nastává maximum a kdy minimum.

Avšak ve velmi mnoha případech, i když obdržíme rovnice Eulerovy, způsobují ostatní otázky obtíže nepřekonatelné, nebo aspoň velmi značné. Viděli jsme to na příkladě, který jsme právě připomenuli, totiž na Dirichletově problému. V mnoha případech, zvláště v mechanice a v matematické fysice, jest užitečné otázku obrátiti. Místo abychom studovali úlohy variačního počtu, převádějíce je na diferenciální rovnice, je výhodné převésti úlohy, které patří na první pohled mezi úlohy z oboru diferenciálních rovnic, na úlohy variačního počtu.

Je to důležité po stránce abych tak řekl filosofické a také, jak hned uvidíme, po stránce praktické.

Tedy vytvoření nových metod variačního počtu není důležité jenom pro tento počet, nýbrž má také veliký význam proto, že dává nové metody pro studium nauky o diferenciálních rovnicích a velkého množství úloh, které se na ni vztahují. To také budí nový zájem o nauku, která může slouti ryzí naukou o funkcionálech.

5. Mluvili jsme před chvilkou o polospojitosti. Je nutno, abychom se s touto vlastností seznámili podrobněji. Nejdříve byla zavedena do studia obyčejných funkcí, ale to se stalo teprve, když pronikla do nauky o funkcionálech, jak jsme to viděli na integrálu I.

Poprvé zavedl polospojitost u obyčejných funkcí Baire. Funkce bodu je v jistém oboru spojitá, můžeme-li ji *změniti* o tak málo, jak jen chceme, jen když pošinutí bodu nepřesáhne určité meze.

Nějaká funkce je polospojitá zdola, *nezmenšuje-li se*, nebo zmenšuje-li se méně než o hodnotu libovolně malou, pokud pošinutí bodu nedosahuje jisté mezní hodnoty.

Stejně se definují funkce polospojité shora.

Nuže, pojem polospojitosti shora a zdola byl rozšířen na funkcionály. Toto rozšíření je však mnohem důležitější, než jak by se mohlo na první pohled myslit. Neboť kdežto se u funkcí obyčejných vyskytuje zpravidla spojitost, vyskytuje se u funkcionálů nejčastěji polospojitost. Souvisí to s věcí, kterou jsme již uvedli, že se totiž může nějaká křivka přiblížiti k jiné křivce, aniž se tvar prvé křivky přiblíží ke tvaru druhé. Řekli jsme sice, že u funkcí čar musíme rozeznávati několik druhů spojitostí různých řádů, ale funkce čar a ploch, které se vyskytují obecně ve variačním počtu, jsou buďto polospojité shora nebo zdola. Tonelli položil tuto vlastnost do základu variačního počtu.

Na druhé straně lze dokázati, že existuje-li zvláštní tvar křivky, pro který nabývá funkce čar maxima nebo minima, musí býti funkce čar polospojitá vzhledem k této zvláštní funkci.

Mezi funkcemi čar, které vyhovují podmínkám pravidelnosti, jsou takové, že existuje nekonečná posloupnost čar, pro něž jde funkcionál k své limitě horní (nebo k své limitě dolní), (posloupnost dávající maximum nebo posloupnost dávající minimum).*) Nuže u pravidelných funkcí čar tohoto druhu lze dokázati jednu základní vlastnost. Předpokládejme, že funkce je polospojitá zdola, a že existuje posloupnost dávající minimum, jež má mezní křivku; pak lze dokázati, že minimum existuje. Obdobná věta platí pro maximum. Takto lze dokázati o velmi mnoha úlohách variačního počtu, že mají řešení. Vlastnosti toho řešení dají se odvoditi z prvé variace.

Jakmile je jednou dokázáno, že řešení existuje, lze je vypočítati několika způsoby, buď metodou postupných aproximací, nebo rozvojem v řadu (řadu Fourierovu atd.). Tak dostáváme nová řešení úloh variačního počtu a znovu nalézáme řešení známá a vypočtená podle starých metod.

Tak lze nalézti nová řešení velmi mnoha diferenciálních rovnic a mnoha úloh na příklad z mechaniky obyčejné i z mechaniky nebeské.

Tyto metody vyložil Tonelli v několika pojednáních a v díle, které se v krátké době stalo klasickým. (3).

6. Snaha převésti přírodní problémy na úlohy o minimu byla tu vždy, neboť vždy se myslí, že příroda hledí šetřiti ve svých projevech co možná nejvíce něčím, co při průběhu nějakého přírodního děje vydává.

Touto filosofickou myšlenkou řídili se mnozí učenci, kteří dokázali, že na příklad mnohé zjevy optické vedou k úlohám o minimu.

Odtud vyšel Maupertuis (4), který se ve svém slavném díle domníval, že objevil jeden ze základních principů přírodních, jejž

*) Succession maximisante ou succession minimisante.

nazval principem nejmenší akce, a jenž byl určen, aby se stal základem dynamiky.

Maupertuis stavěl na filosofickém principu, že příroda jedná vždy co nejjednodušeji, a opíraje se o tuto zásadu snažil se odvoditi všechny zákony pohybu i klidu z jediné metafysické myšlenky. Descartes hleděl odvoditi všechno z principu o zachování hybnosti a Leibniz z principu o živé síle. Maupertuis definuje nejprve akci a hledí odvoditi všechno z principu nejmenší akce. Užívá ho ke studiu rázů těles nepružných i pružných. Připomíná Fermatův princip o odrazu světla a objevuje vztah mezi ním a mezi svým principem.

Je ihned patrno, že Maupertuisův princip obsahuje mnohem více, než principy Descartův a Leibnizův, neboť tyto podávají jenom integrály rovnic dynamiky, kdežto Maupertuisův princip je rovnocenný s těmito rovnicemi samými.

Lagrange vybudoval dynamiku na jiných základech a dokázal princip nejmenší akce jakožto jejich důsledek. Tak vrátil opět dynamiku variačnímu počtu, k jehož vytvoření byl sám přispěl.

Hamilton propracoval tuto otázku a způsobil její rozvoj tím, že objevil princip, jenž sluje (princip) Hamiltonův, nebo-li princip stacionární akce, a že propracoval princip variované akce.*) (5).

Konečně Jacobi vytvořil soustavnou teorii tím, že došel k rovnici, která byla nedávno tak značně zobecněna a jejíž dosah roste den ze dne.

Všechny tyto principy mohou býti rozšířeny s jedné strany na obecné otázky variačního počtu, i na ty, které nesouvisí s mechanikou, s druhé strany na parciální rovnice matematické fysiky i na rovnice integro-diferenciální, jenom když se užije metod teorie funkcionálů.

Všechno to jsou věci dobře známé a běžné, a není nutno, abych se jimi déle zabýval. Rád bych jen upozornil na jiný princip, který se také vyslovuje jako zásada o minimu. Je to Gaussův princip nejmenšího nutkání. Z tohoto principu vychází mechanika, která vzbudila veliký zájem a byla kdysi důležitá: mechanika Hertzova.

7. Ačkoliv to jsou věci velmi známé, připomeňme přece na okamžik tyto různé principy a uveďme také různé základní věty matematické fysiky. Ukážeme, že různé tyto teorie mohou býti spojeny v jeden celek teorie variačního počtu.

1. *Hamiltonův princip.* Je-li T živá síla nějaké soustavy, P potenciál sil, platí, že variace integrálu

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T + P)\,\mathrm{d}t$$

v Lagrangeově smyslu je rovna nule, jsou-li variace parametrů, definujících stav soustavy, rovny nule v mezních okamžicích pro t_0 a t_1.

*) Le principe de l'action variée.

2. *Kanonické rovnice.* Jsou-li $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ parametry soustavy, a položíme-li

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i,$$

(Poissonovy proměnné, nebo-li *momenty soustavy*) a vyjádříme-li (T) veličinami p_i a q_i, při čemž klademe

$$H = (T) - P,$$

dostaneme rovnice

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

To jsou *kanonické rovnice.*

3. *Princip variované akce.* Považujeme-li integrál I za funkci hodnot $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ pro horní mez a horní meze t, máme

$$\frac{\partial I}{\partial q_i} = p_i,$$

a $I\,(t, q_1, \ldots, q_\nu)$ vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H = 0,$$

v níž jsme dosadili v H za $p_1, \ldots, p_\nu$ výrazy $\partial I/\partial q_1, \ldots \partial I/\partial q_\nu$.

4. *Jacobiho princip.* Je-li $\mathrm{V}\,(t, q_1, q_2, \ldots, q_\nu, a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$, kde $a_1, \ldots, a_\nu$ jsou libovolné konstanty, obecný integrál rovnice

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_\nu, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_\nu}, t\right) = 0,$$

v níž jsme nahradili veličiny $p_1 \ldots p_\nu$ výrazy $\partial \mathrm{V}/\partial q_1 \ldots \partial \mathrm{V}/\partial q_\nu$, pak jsou integrály kanonických rovnic dány rovnicemi

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_i} = b_i,$$

kde b_i jsou nové libovolné konstanty.

5. *Greenovo lemma a Greenova věta.* Jsou-li U, V dvě funkce, které obdržíme, položíme-li první variaci integrálu

$$I = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega$$

rovnu nule, platí

Greenovo lemma $$\int_\sigma \left(U \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}\right) \mathrm{d}\sigma = 0,$$

Greenova věta $4\pi V = \int\limits_{\sigma} \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma,$

kde σ je okraj Ω a n vnitřní normála k tomuto okraji.

Integrace Laplaceovy rovnice

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

jež odpovídá Eulerově rovnici v předešlé úloze variačního počtu, zakládá se na větě Greenově a na existenci elementární funkce $\frac{1}{r}$.

Se zřetelem na další výklady o zobecnění Greenovy věty není nezajímavo všimnouti si věty obdobné větě Greenově, která odpovídá úlohám variačního počtu pro jednoduché integrály.

Mějme na mysli integrál

$$I = \int\limits_{t_0}^{t_1} F\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) dt$$

a položme

$$\delta I = 0;$$

dostaneme Eulerovu rovnici

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q'} = 0.$$

Nahradíme-li všude q jiným řešením x, platí

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0.$$

Násobíme-li první rovnici veličinou x, druhou pak q a integrujeme-li od t_0 do t_1, dostaneme

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial q} x - \frac{\partial F}{\partial x} q \right) dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(x \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q'} - q \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} \right) dt = 0$$

a integrací po částech

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial q} x - \frac{\partial F}{\partial x} q + \frac{\partial F}{\partial q'} x' - \frac{\partial F}{\partial x'} q' \right) dt = \left(x \frac{\partial F}{\partial q'} - q \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_{t_0}^{t_1}.$$

Je-li identicky

$$\frac{\partial F}{\partial q} x - \frac{\partial F}{\partial x} q + \frac{\partial F}{\partial q'} x' - \frac{\partial F}{\partial x'} q' = 0,$$

obdržíme

$$\left(x \frac{\partial F}{\partial q'} - q \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_{t_1} - \left(x \frac{\partial F}{\partial q'} - q \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_{t_0} = 0.$$

Tuto rovnici psali jsme za předpokladu, že funkce x, q, x', q' jsou spojité. Předpokládejme, že x, q, q' jsou spojité v intervalu (t, t_1) a že x' je nespojité pro $t = \tau$, kde $t_0 < \tau < t_1$. Bude

$$\left(x \frac{\partial F}{\partial q'} - q \frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{t_1} - \left(x \frac{\partial F}{\partial q'} - q \frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{t_0} = \vartheta q(\tau), \tag{b}$$

kde ϑ je rozdíl mezních hodnot, jichž nabývá $\partial F/\partial x'$, blíží-li se t k τ hodnotami většími nebo menšími než τ.

Takto lze pomocí vzorce (*b*) integrovati Eulerovu rovnici vztahující se na tuto úlohu variačního počtu, známe-li jedno řešení, které je nespojité. Neboť právě toto nespojité řešení jest *elementární řešení* (6).

8. Přejděme nyní k různým zobecněním rozličných těchto principů, metod a vět. Začneme s tím, že budeme uvažovati o rozšíření úlohy 1 na nejobecnější úlohy variačního počtu.

Jacobi dokázal, že je možno uvésti diferenciální rovnice, které obdržíme, kladouce první variaci jednoduchého integrálu rovnu nule, na kanonický tvar, na nějž uvedl Hamilton základní rovnice dynamiky. Dokážeme, že je možno všechny diferenciální rovnice, které plynou z úloh variačního počtu vztahujících se na mnohonásobné integrály, uvésti na společný tvar, jenž odpovídá tvaru Hamiltonově, a redukuje se naň v případě jedné nezávisle proměnné (7).

Buďtež $y_1, y_2, \ldots, y_p$ funkce n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a budiž F funkce veličin $x_1 \ldots, x_n$, dále veličin $y_1, y_2, \ldots, y_p$ a jejich parciálních derivací. Můžeme předpokládati, že $y_1, y_2, \ldots, y_p$ jsou nezávislé, nebo že mezi nimi a jejich derivacemi platí vztahy

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0, \ldots, F_r = 0. \tag{1}$$

Zaveďme jako pomocné proměnné parciální derivace veličin y_1, $y_2, \ldots, y_p$ řádu nižšího, než je nejvyšší index u funkcí $F, F_1, F_2, \ldots, F_r$. Označme souhrn proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_p$ a proměnných pomocných písmeny

$$z_1, z_2, \ldots, z_m.$$

Bude pak F funkcí proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_m$ a jejich prvních derivací

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = z_k^{(i)}.$$

Mezi všemi těmi funkcemi budou platiti vztahy

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0, \ldots, F_r = 0,\ F_{r+1} = 0, \ldots, F_s = 0,$$

z nichž prvních r jsou právě vztahy (1), ostatní pak jsou lineární rovnice mezi veličinami z_i a $z_k^{(i)}$.

Chceme nyní vyjádřiti, že variace integrálu

$$I = \int \mathrm{F}\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

je rovna nule.

Položíme-li

$$\Phi = \mathrm{F} + \sum_1^s{}_i \lambda_i \mathrm{F}_i \tag{1a}$$

dostaneme rovnice

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_1^n{}_k \dfrac{\partial}{\partial x_k} \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_k^{(i)}} - \dfrac{\partial \Phi}{\mathrm{d} z_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m), \\ \mathrm{F}_1 = 0,\ \mathrm{F}_2 = 0, \ldots, \mathrm{F}_s = 0. \end{array}\right.$$

Jestliže ve Φ chybí veličiny $z_k^{(i)}$ až na $z_{i_1}^{(i)}, z_{i_2}^{(i)}, \ldots, z_{i_v}^{(i)}$, napíší se tyto rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_1}^{(i)}} + \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_2}^{(i)}} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_{i_v}} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_v}^{(i)}} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \tag{2}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\mathrm{F}_1 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots, \mathrm{F}_s = 0. \tag{2a}$$

Položme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_g}^{(i)}} = p_{i_g}^{(i)},\quad i = 1, 2, \ldots, m;\quad g = 1, 2, \ldots, v \tag{2b}$$

a předpokládejme, že soustavu utvořenou těmito rovnicemi a rovnicemi (2*a*) lze rozřešiti podle veličin λ_k a $z_{i_g}^{(i)}$; dosaďme takto obdržená řešení do vztahu

$$H = -H_1 = \Phi - \sum_1^m{}_i \sum_1^v{}_g z_{i_g}^{(i)} p_{i_g}^{(i)}. \tag{3}$$

Provedeme-li variaci se zřetelem na vztahy (2*b*), obdržíme

$$\sum_1^m{}_i \left(\frac{\partial H_1}{\partial z_i} \delta z_i + \sum_1^v{}_g \frac{\partial H_1}{\partial p_{i_g}^{(i)}} \delta p_{i_g}^{(i)} \right) = \sum_1^m{}_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \delta z_i - \sum_1^v{}_g z_{i_g} \delta p_{i_g} \right),$$

odkudž plynou ze zřetelem na rovnice (2) rovnice, které lze zváti kanonickými:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1^v{}_g \dfrac{\partial p_{i_g}^{(i)}}{\partial x_{i_g}} = \dfrac{\partial H_1}{\partial z_i} \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial x_{i_g}} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial p_{i_g}^{(i)}}, \end{array}\right. \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m,\ g = 1, 2, \ldots, v).$$

Můžeme dokázati i výrok opačný, to jest: máme-li rovnice tohoto tvaru, můžeme je vždy odvoditi z nějaké úlohy variačního počtu. Neboť je vskutku dostaneme tím, že položíme rovnu nule variaci integrálu

$$\int \left(\sum_1^m {}_i z_i \sum_1^v {}_g \frac{\partial p_{i_g}{}^{(i)}}{\partial x_{i_g}} - H_1 \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Vraťme se k základním rovnicím (4) a předpokládejme, že máme dvě jejich řešení, která označíme z_i, $p_{i_g}{}^{(i)}$ a u_i, $q_{i_g}{}^{(i)}$. Budiž S_n obor n-rozměrný v prostoru $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a S_{n-1} obor $(n-1)$-rozměrný, jenž tvoří jeho okraj. Velmi jednoduchými výpočty dostaneme tuto větu o reciprocitě:

$$\int_{S_{n-1}} \sum_1^m {}_i z_i \sum_1^v {}_g q_{i_g}{}^{(i)} \cos \nu\, x_i \, \mathrm{d}S_{n-1} - \int_{S_{n-1}} \sum_1^m {}_i u_i \sum_1^v {}_g p_{i_g}{}^{(i)} \cos \nu\, x_i \, \mathrm{d}S_{n-1} =$$

$$= \int_{S_n} \sum_1^m {}_i \left(u_i \frac{\partial H_1}{\partial z_i} + \sum_1^v {}_g q_{i_g}{}^{(i)} \frac{\partial H_1}{\partial p_{i_g}{}^{(i)}} \right) \mathrm{d}S_n -$$

$$- \int_{S_n} \sum_1^m {}_i \left(z_i \frac{\partial H_1}{\partial u_i} + \sum_1^v {}_g p_{i_g}{}^{(i)} \frac{\partial H_1}{\partial q_{i_g}{}^{(i)}} \right) \mathrm{d}S_n;$$

ν je zde normála k nadprostoru S_{n-1} mířená dovnitř S_n. Tato věta jest jenom rozšířením věty Greenovy. Je-li H homogenní funkce druhého stupně, je pravá strana rovna nule. Odtud lze odvoditi na příklad Bettiho větu o vnitřní rovnováze pružných těles.

Vyslovíme nyní obecnou větu, která udává, za jakých podmínek jsou určeny úlohy, jimiž jsme se právě zabývali.

Buďte Z_i, $P_{i_g}{}^{(i)}$ integrály rovnic (4) takové, že kvadratické formy

$$\sum_i \sum_k \frac{\partial^2 H_1}{\partial Z_i \, \partial Z_k} \alpha_i \alpha_k, \quad \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_{i_g}{}^{(i)} \, \partial P_{k_l}{}^{(k)}} \beta_{i_g} \beta_{k_g}$$

jsou formy definitní s opačnými znaménky; pak všechny integrály z_i, $p_{ig}{}^{(i)}$ v oboru S_n, které jsou takové, že

$$|z_i - Z_i| < \lambda, \quad |p_{i_g}{}^{(i)} - P_{i_g}{}^{(i)}| < \mu,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m, \quad g = 1, 2, \ldots, v,$$

kde λ a μ jsou čísla menší než určitá mezní hodnota, budou určeny, jsou-li známy na okraji S_{n-1} hodnoty z_i, nebo součty

$$\sum_1^v {}_g p_{i_g}{}^{(i)} \cos \nu\, x_{i_g} = P_i.$$

9. Můžeme pokračovati v zobecnění, které jsme právě provedli pro případ několika proměnných, a studovati otázku invariance.

K tomu cíli budeme sledovati cestu, kterou naznačil pan Hostinský (8).

Vraťme se k rovnicím (2) a předpokládejme, že $F_1, F_2, \ldots, F_s$ chybějí, to jest

$$\Phi = F;$$

rovnice ty pak přejdou v

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial z_k^{(i)}} - \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Bude

$$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_p, z_1^{(1)} \ldots z_n^{(p)}),$$

a předešlé rovnice obdržíme z rovnice variačního počtu $\delta I = 0$, kde

$$I = \iint_S \ldots \int F \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Zaveďme nyní proměnné $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tím, že položíme

$$x_i = x_i (u_1, u_2 \ldots u_n)$$

za předpokladu

$$D = \frac{\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)}{\mathrm{d}(u_1, \ldots, u_n)} \lessgtr 0.$$

Bude

$$\frac{\partial z_i}{\partial u_k} = \sum_g \frac{\partial z_i}{\partial x_g} \frac{\partial x_g}{\partial u_k},$$

z čehož

$$z_g^{(i)} = \frac{\partial z_i}{\partial x_g} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}(x_1 \ldots z_i \ldots x_n)}{\mathrm{d}(u_1 \ldots\ldots u_n)}}{\dfrac{\mathrm{d}(x_1 \ldots\ldots x_n)}{\mathrm{d}(u_1 \ldots\ldots u_n)}}.$$

Zde se předpokládá, že jsou v čitateli na pravé straně nahrazeny veličiny x_g veličinami z_i. Obdržíme pak

$$F = F\left((z_1, z_2 \ldots z_p, x_1, x_2 \ldots x_n, \frac{\partial z_1}{\partial u_1} \ldots \frac{\partial z_p}{\partial u_n}, \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial u_n}\right),$$

a položíme-li

$$x_1 \ldots x_n = z_{p+1} \ldots z_{p+n},$$

budeme míti

$$F = \overline{F}\left(z_1, z_2 \ldots z_{p+n}, \frac{\partial z_1}{\partial u_1}, \ldots \frac{\partial z_{p+n}}{\partial u_n}\right),$$

$$I = \iint_\Sigma \ldots \int \overline{F}\left((z_1, z_2 \ldots z_{p+n}, \frac{\partial z_1}{\partial u_1} \ldots \frac{\partial z_{p+n}}{\partial u_n}\right) \frac{\mathrm{d}(z_{p+1} \ldots z_{p+n})}{\mathrm{d}(u_1 \ldots u_n)}$$
$$\mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n.$$

Píšeme-li $\dfrac{\partial z_i}{\partial u_r} = \zeta_r^{(i)}$, vyjde

$$\bar{F}(z_1, z_2 \ldots z_{p+n}, \zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \ldots, \zeta_n^{p+n}) \frac{d(z_{p+1} \ldots z_{p+n})}{d(u_1 \ldots u_n)} =$$

$$= f(z_1, z_2, \ldots, z_{p+n}, \zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \ldots, \zeta_n^{(p+n)}),$$

kde f je homogenní funkce prvního stupně veličin

$$\zeta_t^{(1)}, \zeta_t^{(2)} \ldots \zeta_t^{(p+n)}, \quad (t = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Neboť každé $z_g^{(i)}$ lze psáti ve tvaru

$$\frac{\dfrac{d(z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_n})}{d(u_1, u_2, \ldots, u_n)}}{\dfrac{d(z_{p+1}, \ldots, z_{p+n})}{d(u_1, u_2, \ldots, u_n)}},$$

kde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ jsou čísla vybraná z řady čísel $1, 2, \ldots, p+n$. Tedy každé $z_g^{(i)}$ bude homogenní funkce stupně 0 vzhledem k proměnným (5) a tedy F právě tak jako $\bar{F}$ budou homogenní a stupně nultého vzhledem k týmž proměnným. Avšak determinant

$$\frac{d(z_{p+1} \ldots z_{p+n})}{d(u_1 \ldots u_n)}$$

je prvního stupně, takže i f bude homogenní funkce prvního stupně.

Proto právě

$$\sum_1^{p+n}{}_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_g^{(i)}} \zeta_g^{(i)} = f.$$

Na druhé straně platí se zřetelem na dobře známé vlastnosti determinantů

$$\sum_1^{p+n}{}_i \zeta_g^{(i)} \frac{\partial}{\partial \zeta_k^{(i)}} \frac{(d(z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_n})}{d(u_1, u_2, \ldots, u_n)} =$$

$$= \sum_1^{n}{}_s \zeta_g^{(i_s)} \frac{\partial}{\partial \zeta_k^{(i_s)}} \frac{d(z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_n})}{d(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = 0, \quad (k \gtrless g),$$

tudíž

$$\sum_1^{p+n}{}_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} \zeta_g^{(i)} = 0, \quad (k \gtrless g).$$

Uvažujme nyní o úloze variačního počtu

$$\delta I = 0;$$

obdržíme $p + n$ rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} - \sum_i^{n}{}_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p+n).$$

Tyto rovnice nejsou nezávislé, neboť jejich levé strany vyhovují n lineárním homogenním rovnicím, jejichž determinant je různý od nuly.

Neboť

$$\sum_{1}^{p+n}{}_i\, \zeta_g^{(i)} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} - \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}}\right) =$$

$$= \sum_{1}^{p+n}{}_i \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \zeta_g^{(i)} + \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} \frac{\partial \zeta_k^{(i)}}{\partial u_g}\right) -$$

$$- \sum_{1}^{p+n}{}_i \left(\sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} \frac{\partial \zeta_g^{(i)}}{\partial u_k} + \zeta_g^{(i)} \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}}\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u_g} - \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{1}^{p+n}{}_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} \zeta_g^{(i)} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u_g} - \frac{\partial}{\partial u_g} \sum_{1}^{p+n}{}_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_g^{(i)}} \zeta_g^{(i)} = \frac{\partial f}{\partial u_g} - \frac{\partial f}{\partial u_g}.$$

Je tedy identicky splněno n rovnic lineárních a homogenních

$$\sum_{1}^{p+n}{}_i\, \zeta_g^{(i)} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} - \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}}\right) = 0,$$

a determinant z koeficientů $\zeta_g^{(i)}$ je právě determinant D, který není roven nule. Proveďme nyní transformaci

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi_1 (Z_1, Z_2, \ldots, Z_{p+n}) \\ z_2 &= \varphi_2 (Z_1, Z_2, \ldots, Z_{p+n}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{p+n} &= \varphi_{p+n} (Z_1, Z_2, \ldots, Z_{p+n}) \end{aligned} \tag{6}$$

Máme identicky

$$f\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial u_1} \ldots \frac{\partial z_{p+n}}{\partial u_n}\right) = \Phi\left(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \frac{\partial Z_1}{\partial u_1} \ldots \frac{\partial Z_{p+n}}{\partial u_n}\right).$$

f je homogenní funkce prvního stupně veličin $\partial z_1/\partial u_k \ldots \partial z_{p+n}/\partial u_k$, a poněvadž vztahy mezi veličinami $\partial z_i/\partial u_k$ a $\partial Z_i/\partial u_k$ jsou lineární a homogenní, bude i Φ homogenní funkce prvního stupně veličin $\partial Z_1/\partial u_k, \ldots, \partial Z_{p+n}/\partial u_k$.

Provedením variace obdržíme

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i + \sum_k \sum_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} \delta \frac{\partial z_i}{\partial u_k} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial Z_i} \delta Z_i + \sum_k \sum_i \frac{\partial f}{\partial Z_k^{(i)}} \delta \frac{\partial Z_i}{\partial u_k},$$

z čehož plyne integrací

$$\iint_S \ldots \int \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i + \sum_k \sum_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} \delta \frac{\partial z_i}{\partial u_k}\right) du_1 du_2 \ldots du_n =$$

$$= \iint_S \ldots \int \left(\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial Z_i} \delta Z_i + \sum_k \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial Z_k^{(i)}} \delta \frac{\partial Z_i}{\partial u_k}\right) du_1 du_2 \ldots du,$$

nebo-li po integraci po částech, je-li $\delta z_i = 0$ na okraji oblasti S,

$$\iint_S \ldots \int \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} - \sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} \right) \delta z_i \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n =$$

$$= \iint_S \ldots \int \sum_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z_i} - \sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial \Phi}{\partial Z_k^{(i)}} \right) \delta Z_i \, \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n =$$

$$= \iint_S \ldots \int \sum_g \sum_i \frac{\partial \varphi_g}{\partial Z_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_g} - \sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(g)}} \right) \delta Z_i \, \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n.$$

Z porovnání koeficientů při Z_i na obou stranách poslední rovnosti plyne, že platí identicky

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z_i} - \sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial \Phi}{\partial Z_k^{(i)}} = \sum_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial Z_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_g} - \sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(g)}} \right).$$

To je důkazem, že rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial z_g} - \sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(g)}} = 0$$

nemění transformací (6) svého tvaru a jsou tedy invariantní.

Tím je Hostinského věta rozšířena na případ několika nezávisle proměnných.

10. Tak jsme tedy zobecnili pro nejobecnější úlohy variačního počtu

1. kanonický tvar,
2. větu Greenovu a obdobnou větu Bettiho.

Uveďme některé zvláštní případy nalezených obecných vět. Předpokládejme nejprve, že je jen jedna nezávisle proměnná x; pak již nebudou veličiny $z_k^{(i)}$ záviseti na indexu k a budeme je moci psáti $z^{(i)}$.

Podobně budou veličiny $p_{i_k}^{(i)}$ nezávislé na indexu i_k a budeme je moci psáti $p^{(i)}$, takže základní rovnice nabudou tvaru

$$\frac{\mathrm{d}p^{(i)}}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial H_1}{\partial z_i}, \quad \frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial H_1}{\partial p^{(i)}},$$

což jsou obyčejné kanonické rovnice.

Předpokládejme, že se funkce $y_1, y_2, \ldots, y_p$ omezí na jedinou, kterou označíme z, proměnné pak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na pouhé dvě x_1 a x_2; $F_1 = 0, \ldots F_n = 0$ buďtež identitami a buď

$$F = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2 \right\} = \tfrac{1}{2}(z_1{}^2 + z_2{}^2);$$

bude

$$p_1 = z_1, \quad p_2 = z_2,$$

$$H_1 = \tfrac{1}{2}(z_1{}^2 + z_2{}^2) - p_1 z_1 - p_2 z_2 = -\tfrac{1}{2}(p_1{}^2 + p_2{}^2),$$

a kanonické rovnice přejdou v

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x_1}-\frac{\partial p_2}{\partial x_2}=0,$$

$$p_1=z_1=\frac{\partial z}{\partial x_1},\quad p_2=z_2=\frac{\partial z}{\partial x_2},$$

takže

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2{}^2}=0.$$

11. Přistupme nyní k zobecnění principu variované akce. K tomu si stačí připomenouti, že považujeme jednoduchý integrál za závislý na hodnotách daných parametrům v mezních bodech integračního intervalu a na mezích tohoto intervalu. Přejdeme-li k integrálu mnohonásobnému, bude jej nutno považovati za závislý na integračním oboru, jenž je dán svým okrajem, a na hodnotách daných na tomto okraji neznámými funkcemi.

Diferenciální rovnice Jacobiho bude nahrazena rovnicí, v níž se objeví funkcionální derivace integrálu vzaté vzhledem k okraji, považovanému za proměnný prostor, a vzhledem k funkcím daným na okraji. Bude to parciální rovnice, o níž jsme mluvili v minulé přednášce. Od té doby, co jsem uveřejnil své první práce, je ve zvyku uvažovati o veličinách závislých na okraji jistého oboru. Připomínám při té příležitosti klasické práce Hadamardovy, Lévyho a Hostinského o Greenových funkcích považovaných za závislé na okraji oblasti, v níž jsou definovány; v nedávné době zabýval se Krall obdobnými otázkami v nauce o pružnosti.

Nebudu jednati o této otázce s nejobecnějšího hlediska, nýbrž promluvím o zvláštním případě, jenž se vztahuje k příkladu naposled uvedenému, a jenž, třeba že je velmi jednoduchý, udává způsob, kterým lze provésti rozšíření na nejobecnější případ (7).

Vraťme se k rovnicím (4) za předpokladu, že $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$ chybějí, že funkce $z_1 \ldots z_m$ jsou omezeny na jedinou z, a že z proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zůstávají jen dvě x_1, x_2. Budeme pak míti

$$\Phi=\mathrm{F},\quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_1}=p_1,\quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_2}=p_2,\quad H_1=\mathrm{F}-\frac{\partial z}{\partial x_1}p_1-\frac{\partial z}{\partial x_2}p_2,$$

a kanonické rovnice přejdou v tyto:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial p_2}{\partial x_2}=\frac{\partial H_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=-\frac{\partial H_1}{\partial p_1},\quad \frac{\partial z}{\partial x_2}=-\frac{\partial H_1}{\partial p_2}.$$

Dále budeme předpokládati jako v případě předešlém, že hodnoty z (zůstávající v jistých mezích) dané na okraji L celého oboru σ v jisté části roviny x_1, x_2, určují funkce z, p_1, p_2 uvnitř toho oboru. Buďtež $z = \mathrm{f}(s)$ hodnoty funkce z dané podél uzavřené rovinné křivky L; z, p_1 a p_2 budou funkce veličin x_1, x_2, určené v σ. Utvořme výraz

$$\mathrm{F} = H_1 - p_1 \frac{\partial H_1}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial H_1}{\partial p_2}$$

a nahraďme v něm veličiny z, p_1 a p_2 předešlými funkcemi. F bude funkcí proměnných x_1 a x_2. Vypočtěme

$$\mathrm{V} = \int_\sigma \left(H_1 - p_1 \frac{\partial H_1}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial H_1}{\partial p_2}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

Obdržíme funkci závislou na křivce L a na hodnotách $\mathrm{f}(s)$ funkce z, dané na této křivce; můžeme proto psáti

$$\mathrm{V} = |[L, \mathrm{f}]\,.$$

Předpokládejme, že pozměníme křivku L tím, že pošineme maličko každý její bod kolmo na ni směrem dovnitř oboru σ. Budeme moci předpokládati, že se tímto pošinutím funkce f nezmění. Změna funkce V bude vyjádřena vzorcem

$$\delta \mathrm{V} = \int_L \mathrm{V}'_L(s) \delta n \mathrm{d}s,$$

kde δn znamená pošinutí. $\mathrm{V}'_L(s)$ je funkcionální derivace funkce V vzhledem ke křivce L v bodě s.

Změňme nyní funkci f, aniž změníme křivku L. Budeme míti

$$\delta \mathrm{V} = \int_\sigma \left(\frac{\partial H_1}{\partial z} \delta z + \frac{\partial H_1}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \delta p_2 - \frac{\partial H_1}{\partial p_1} \delta p_1 - \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \partial p_2 - \right.$$

$$\left. - p_1 \delta \frac{\partial H_1}{\partial p_1} - p_2 \delta \frac{\partial H_1}{\partial p_2}\right) \mathrm{d}\sigma = \int_\sigma \left(\frac{\partial H_1}{\partial z} \delta z + p_1 \delta \frac{\partial z}{\partial x_1} + p_2 \delta \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) d\sigma =$$

$$= \int_L (p_1 \cos n x_1 + p_2 \cos n x_2)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}s + \int_\sigma \left(\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \int_L (p_1 \cos n x_1 + p_2 \cos n x_2)\, \mathrm{df}\, \mathrm{d}s,$$

můžeme tedy psáti

$$\mathrm{V}'_\mathrm{f}(s) = p_1 \cos n x_1 + p_2 \cos n x_2,$$

kde n je normála ke křivce L.

Předpokládejme, že změníme křivku L, pošinouce její body dovnitř σ o δn, a že zároveň změníme hodnoty funkce f, vezmouce hodnoty z v bodech, jimiž křivka L má procházeti. Změna funkce V bude

$$\delta V = \int_L V'_L(s)\,\delta n\,ds + \int_L V'_f(s)\frac{\partial z}{\partial n}\,\partial n\,ds.$$

Na druhé straně plyne z definice funkce V, že

$$\delta V = -\int_L \left(H_1 - p_1\frac{\partial H_1}{\partial p_1} - p_2\frac{\partial H_1}{\partial p_2}\right)\delta n\,ds,$$

takže jest

$$V'_L(s) + V'_f(s)(z_1\cos nx_1 + z_2\cos nx_2) = -H_1 + p_1\frac{\partial H_1}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial H_1}{\partial p_2}. \quad (7)$$

Tudíž

$$\left\{\begin{array}{l} z_1\cos nx_2 - z_2\cos nx_1 = \dfrac{df}{ds} \\ p_1\cos nx_1 + p_2\cos nx_2 = V'_f(s) \\ p_1 = \dfrac{\partial F}{\partial z_1} \\ p_2 = \dfrac{\partial F}{\partial z_2}. \end{array}\right.$$

Z těchto rovnic můžeme vyjádřiti z_1, z_2, p_1, p_2 veličinami $\frac{df}{ds}$, $V'_f(s)$ a eliminací z_1, z_2, p_1, p_2 z rovnice (7) obdržíme rovnici

$$V'_L(s) + \varphi\left(V'_f(s), \frac{df(s)}{ds}, s, f(s)\right) = 0,$$

jež odpovídá rovnici Jacobiho.

12. Je třeba nyní ukázati, že se může zobecnění principů o nichž jsme mluvili, provésti nekonečně mnoha způsoby jinými.

Tak na příklad byl první tvar, jejž jsem dal teorii Jacobi-Hamiltonově, jiný než tvar, o němž jsem mluvil právě teď (10). Připomínám, že můžeme utvořiti zvláštní větev nauky o funkcionálech tím, že uvažujeme o zvláštních funkcích čar, které nazývám funkcemi prvního stupně.*)

*) Budiž F $[L]$ daný funkcionál čáry L. Pozměňme čáru L v okolí bodu $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ tak, aby nabyla tvaru L_1 a aby vytvořila při přechodu z tvaru L do L_1 nekonečně malou plochu Σ. Předpokládáme, že směry normál sestrojených v jednotlivých bodech této nekonečně malé plochy liší se všechny nekonečně málo od směru O_x. Limitu poměru (F $[L]$ — — F $[L]$) : Σ, když Σ se blíží nule, označíme

$$dF/d(y, z) = dF/d(x_2, x_3)$$

a nazveme ji derivací funkcionálu F $[L]$ podle roviny yz v okolí bodu (x_1, x_2, x_3). (Viz první přednášku, odst. 15.)

Tato teorie působila ve vývoji klasické nauky o funkcích dvojím směrem; jeden vedl k funkcím, které nazývám isogenními pro obdobu s Cauchyho monogenností, druhý k teorii funkcí konjugovaných, v níž se vyskytují nové invarianty docela jiného rázu, než invarianty klasické.

Nuže, mimo zobecnění teorie Jacobi-Hamiltonovy, které jsem právě vyložil, máme zobecnění jiné, jež se vztahuje na funkce čar. Napsal jsem o tom pojednání, které pak pan Fréchet velmi zobecnil.

Vyjádřeme, že variace dvojného integrálu

$$\iint\left(\sum p_{ik}\frac{\mathrm{d}(x_i, x_k)}{\mathrm{d}(u, v)} - H\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

se rovná nule; dostaneme diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}(x_i, x_k)}{\mathrm{d}(u, v)} = \frac{\partial H}{\partial p_{ik}}, \quad \sum\frac{\mathrm{d}(p_{ik}, x_k)}{\mathrm{d}(u, v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

kde $\mathrm{d}(u, v)/\mathrm{d}(x_i, x_k)$ jsou funkční determinanty. Nyní lze dokázati větu, která odpovídá větě Jacobiho, a zní takto:

Budiž

$$H\left(\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}(x_2, x_3)}, \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}(x_3, x_1)}, \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}(x_1, x_2)}, x_1, x_2, x_3\right) + h = 0$$

rovnice s funkcionálními derivacemi, kterou obdržíme, nahradíme-li v H p_{ik} výrazy $\mathrm{dF}/\mathrm{d}(x_i, x_k)$. Předešlé rovnice odpovídají rovnicím kanonickým a rovnice s funkcionálními derivacemi odpovídá rovnici Jacobiho. Mezi nimi je týž vztah, jako v klasické teorii Jacobiho.

13. Viděli jsme, jak je výhodné převésti nějakou úlohu na úlohu variačního počtu. Užijeme toho nyní k tomu, abychom uvedli elektrodynamické rovnice v závislost na variačním počtu. Poněvadž jsou rovnice, které chceme nalézti, prvého řádu, můžeme si položiti předběžnou úlohu: Nalézti, za jakých podmínek vede variační počet k rovnicím prvého řádu. Začneme proto s důkazem této věty (11):

Buďte $z_1, z_2, \ldots, z_m$ funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a pišme jako dříve

$$z_i^{(s)} = \frac{\partial z_s}{\partial x_i}.$$

Nutná a postačující podmínka, abychom dostali rovnice prvního řádu, položíme-li variaci integrálu

$$I = \iint\ldots\int \mathrm{F}(z_1 \ldots z_m, z_1^{(1)} \ldots z_n^{(m)}, x_1 \ldots x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

rovnou nule, jest, aby bylo

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + \sum_i\sum_k \mathrm{F}_i z_i^{(k)} + \sum_i\sum_k \mathrm{F}_{i_1, i_2}^{k_1, k_2}\frac{\mathrm{d}(z_{i_1}, z_{i_2})}{\mathrm{d}(x_{k_1}, x_{k_2})} +$$

$$+\ldots+\sum_i\sum_k \mathbf{F}_{i_1\ldots i_r}^{k_1\ldots k_r}\frac{d(z_{i_1}z_{i_2}\ldots z_{i_r})}{d(x_{k_1},x_{k_2}\ldots x_{k_r})},$$

kde $F_{i_1\ldots i_r}^{k_1\ldots k_r}$ jsou funkce proměnných $x_1\ldots x_n$.

Jest ihned patrno, že tato podmínka stačí; vskutku dostaneme diferenciální rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial z_i}-\sum_i\sum_k\frac{\partial \mathbf{F}_i^k}{\partial x_i}+\sum_r\sum_k\left(\frac{\partial \mathbf{F}_r^k}{\partial z_i}-\frac{\partial \mathbf{F}_i^k}{\partial z_r}-\sum_s\frac{\partial \mathbf{F}_{ir}^{sk}}{\partial x_s}\right)z_k^r+\ldots=0.$$

Chceme-li dojíti k rovnicím elektrodynamiky, vezměme za neznámé funkce*)

$$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6,$$

a za nezávisle proměnné

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

a pišme těch šest neznámých funkcí ve tvaru (předpokládáme, že člen změní znaménko, vyměníme-li jeho indexy)

$$z_1=H_{12}=\overset{*}{H}_{34},\ z_2=H_{13}=\overset{*}{H}_{42},\ z_3=H_{14}=\overset{*}{H}_{23},$$
$$z_4=H_{23}=\overset{*}{H}_{14},\ z_5=H_{34}=\overset{*}{H}_{12},\ z_6=H_{42}=\overset{*}{H}_{13},$$

totiž jako šest složek vektoru v šestirozměrném prostoru.

Vezměme F ve tvaru

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_0+\sum_{1}^{4}{}_i\sum_{1}^{6}{}_k\mathbf{F}_i^k\frac{\partial z_k}{dx_i},$$

kde $\mathbf{F}_i$ jsou funkce veličin $z_1,\ldots, z_n$. Abychom obdrželi rovnice elektromagnetického pole, stačí vzíti

$$\begin{aligned}\mathbf{F}=\frac{1}{2}\Bigg\{&H_{23}\left(\frac{\partial H_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial H_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial H_{14}}{\partial x_4}\right)\\
&+H_{31}\left(\frac{\partial H_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial H_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial H_{24}}{\partial x_4}\right)\\
&+H_{12}\left(\frac{\partial H_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial H_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial H_{34}}{\partial x_4}\right)\\
&-\overset{*}{H}_{23}\left(\frac{\partial \overset{*}{H}_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial \overset{*}{H}_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial \overset{*}{H}_{14}}{\partial x_4}\right)\\
&-\overset{*}{H}_{31}\left(\frac{\partial \overset{*}{H}_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \overset{*}{H}_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial \overset{*}{H}_{24}}{\partial x_4}\right)\\
&-\overset{*}{H}_{12}\left(\frac{\partial \overset{*}{H}_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial \overset{*}{H}_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial \overset{*}{H}_{34}}{\partial x_4}\right)\Bigg\},\end{aligned}$$

*) Postup, kterého zde užívám, je v podstatě týž, kterého jsem užil v roce 1891, ale tak upravený, aby vyšel Minkowského tvar pro rovnice elektrodynamiky.

a variace integrálu

$$\iiint \mathrm{F} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4$$

bude, vynecháme-li členy vztahující se ke kraji,

$$\begin{aligned}\iiiint \Big[& \delta H_{23} \left(\frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{14}}{\partial x_4} \right) \\ & + \delta H_{31} \left(\frac{\partial H_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{24}}{\partial x_4} \right) \\ & + \delta H_{12} \left(\frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{34}}{\partial x_4} \right) \\ & - \delta \overset{*}{H}_{23} \left(\frac{\partial \overset{*}{H}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{14}}{\partial x_4} \right) \\ & - \delta \overset{*}{H}_{31} \left(\frac{\partial \overset{*}{H}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{24}}{\partial x_4} \right) \\ & - \delta \overset{*}{H}_{12} \left(\frac{\partial \overset{*}{H}_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{34}}{\partial x_4} \right) \Big] \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4,\end{aligned}$$

odkudž dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{14}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial H_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{24}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{34}}{\partial x_4} &= 0 \end{aligned}$$

a rovnice obdobné, které z nich vzniknou, napíšeme-li hvězdičku nad každé písmeno H. Tyto rovnice, k nimž můžeme připojiti

$$\frac{\partial H_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{43}}{\partial x_3} = \varrho(x_1, x_2, x_3),$$

nejsou nic jiného, než Maxwellovy rovnice ve tvaru, který jim dal Minkowski.

Neboť položíme-li

$$x_4 = i \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon\lambda}},$$

$$H_{12} = \sqrt{\lambda} L_3, \; H_{13} = -\sqrt{\lambda} L_2, \; H_{14} = -i \sqrt{\varepsilon} X_1,$$

$$H_{23} = \sqrt{\lambda} L_1, \; H_{34} = -i \sqrt{\varepsilon} X_3, \; H_{42} = i \sqrt{\varepsilon} X_2,$$

nabudou tyto rovnice tvaru

$$\frac{\partial L_3}{\partial x_2} - \frac{\partial L_2}{\partial x_3} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial X_1}{\partial t} \qquad \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial L_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_3} - \frac{\partial L_3}{\partial x_1} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X_2}{\partial t} \qquad \frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} = \frac{\lambda}{c}\frac{\partial L_2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_1} - \frac{\partial L_1}{\partial x_2} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X_3}{\partial t} \qquad \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = \frac{\lambda}{c}\frac{\partial L_3}{\partial t},$$

což jsou Maxwellovy rovnice, k nimž lze připojiti rovnice

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x_3} = 0.$$

Mohli bychom se zabývati případem anisotropie, ale pak by bylo třeba, aby si byly elektrické i magnetické koeficienty úměrny; je však známo, že magnetické anisotropie není, a proto se musíme vrátiti k případu isotropie také elektrické. Mohli bychom také uvažovati o případu, že prostředí je vodivé.

Snadno lze nahlédnouti, že nemůžeme zde užíti úvah, které jsme právě provedli, neboť se týkají převodu na tvar kanonický.

Můžeme však postupovati jinak, chceme-li převésti elektrodynamické rovnice na variační počet užitím výrazů symetrických vzhledem ke čtyřem souřadnicím x_1, x_2, x_3, $x_4 = ict/\sqrt{\varepsilon\lambda}$. Položme tedy

$$K_i = \sum_{i+1}^{i+3}{}_s \frac{\partial H_{is}}{\partial x_s}, \quad \overset{*}{K}_i = \sum_{i+1}^{i+3}{}_s \frac{\partial \overset{*}{H}_{is}}{\partial x_s}, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$F = \frac{1}{2}\sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_s (\overset{*}{H}_{si} K_s - H_{si}\overset{*}{K}_s).$$

$$I = \iiiint \mathrm{F}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}x_4.$$

Učiníme-li

$$\delta I = 0,$$

obdržíme rovnice

$$\begin{aligned}
K_1 + K_4 + \overset{*}{K}_3 + \overset{*}{K}_2 &= 0\\
K_2 + K_1 - \overset{*}{K}_3 - \overset{*}{K}_4 &= 0\\
K_3 + K_2 + \overset{*}{K}_1 + \overset{*}{K}_4 &= 0\\
K_4 + K_3 - \overset{*}{K}_2 - \overset{*}{K}_1 &= 0\\
K_2 - K_4 + \overset{*}{K}_3 - \overset{*}{K}_1 &= 0\\
K_3 - K_1 + \overset{*}{K}_2 - \overset{*}{K}_4 &= 0,
\end{aligned}$$

odkudž plyne

$$3\overset{*}{K}_i + \overset{*}{K}_{i+1} - \overset{*}{K}_{i+2} + \overset{*}{K}_{i+3} = 0$$

a konečně

$$\overset{*}{K}_1 = -\overset{*}{K}_2 = \overset{*}{K}_3 = -\overset{*}{K}_4$$
$$K_1 = -K_2 = K_3 = -K_4.$$

Avšak

$$\sum_1^4 i\frac{\partial \mathrm{K}_i}{\partial x_i} = \sum_1^4 i\frac{\partial \overset{*}{\mathrm{K}}_i}{\partial x_i} = 0,$$

takže

$$\frac{\partial \mathrm{K}_i}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{K}_i}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathrm{K}_i}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathrm{K}_i}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial \overset{*}{\mathrm{K}}_i}{\partial x_1} - \frac{\partial \overset{*}{\mathrm{K}}_i}{\partial x_2} + \frac{\partial \overset{*}{\mathrm{K}}_i}{\partial x_3} - \frac{\partial \overset{*}{\mathrm{K}}_i}{\partial x_4} = 0,$$

a tedy

$$-\mathrm{K}_{i+1} = \mathrm{K}_i = \mathfrak{f}(x_1 - x_4, x_2 + x_4, x_3 - x_4),$$
$$-\overset{*}{\mathrm{K}}_{i+1} = \mathrm{K}_i = \overset{*}{\mathfrak{f}}(x_1 - x_4, x_2 + x_4, x_3 - x_4).$$

Je-li pro $x_4 = 0$ v nějakém oboru S $\mathfrak{f}(x_1, x_2, x_3) = 0$, $\overset{*}{\mathfrak{f}}(x_1, x_2, x_3) = 0$, budou ty čtyři veličiny K_i a čtyři $\overset{*}{\mathrm{K}}_i$ rovny nule pro $x_4 = h$ (kde h je libovolné) ve všech bodech oboru, který vznikne z oboru S zvětšením souřadnic jeho bodů o h.

14. Zde bych rád vyložil velice důležitou poznámku pana Hostinského, která dává výsledkům, s nimiž jsem vás právě seznámil, docela nový význam.

Pan Hostinský poznamenává, že se v nejnovější době mnoho psalo o invariantním tvaru rovnic matematické fysiky, na příklad rovnic Maxwellových. Nuže tato otázka těsně souvisí s otázkou, jak odvoditi diferenciální rovnice z úlohy variačního počtu. Vskutku se musí souhrn podmínek vyjadřujících, že variace jisté rovnice je rovna nule, transformovati v souhrn obdobných podmínek pro integrál přeměněný tím, že na proměnných provedeme libovolnou transformaci.

To vše se vztahuje na metody klasické. Na příklad můžeme transformovati rovnici Laplaceovu na křivočaré souřadnice, považujíce ji za odvozenou z úlohy variačního počtu, jíž jsme se zabývali před chvílí.

Pan Hostinský užil již s úspěchem této myšlenky k transformaci rovnic mechaniky (8).

A proto můžeme se zabývati převáděním rovnic elektrodynamických na úlohu variačního počtu, dávajíce se vésti myšlenkou pana Hostinského, jíž se takto dostává nového zájmu.

Při té příležitosti nechci opomenouti jinou poznámku, která může býti v mnoha případech užitečnou, užijeme-li jí spolu s poznámkou pana Hostinského.

Ukázal jsem, že úlohy variačního počtu vedou k vzorcům, jichž je Greenova formule jen velmi zvláštním případem. Nuže vraťme se k této formuli v nejelementárnějším a nejjednodušším případě Laplaceovy rovnice. Jsou-li U, V pravidelné funkce, lze ji psáti (viz odst. 7, č. 5).

$$\int_\sigma \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma + \int_S (U\Delta^2 V - V\Delta^2 U)\, dS = 0,$$

kde σ je okraj třírozměrného oboru S, nebo klademe-li $U = 1$.

$$\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma + \int_S \Delta^2 V dS = 0.$$

Prvý člen se transformuje, užijeme-li křivočarých souřadnic, bez obtíží, zachovávaje tvar plošného integrálu; užijeme-li však Gaussovy věty, lze jej převésti na integrál trojnásobný, jenž dává $\Delta^2 V$ v souřadnicích křivočarých. Podobného postupu užil jsem k transformaci rovnic pro vnitřní rovnováhu pružných těles a též k transformaci rovnic optiky (13). Může se ho užíti i v elektrodynamice a v mnoha jiných případech.

Ukáži nyní, v čem spočívají výhody těchto metod.

Chceme-li transformovati $\Delta^2 V$ užívajíce výrazu ΔV, máme tu výhodu, že počítáme s prvními derivacemi místo s druhými, setkáváme se však s diferenciálním parametrem kvadratickým, nikoli lineárním. Užíváme-li výrazu $\partial V/\partial n$, počítáme vždy s derivacemi prvními, zároveň však s výrazem lineárním. Můžeme říci, že ve všech ostatních úlohách matematické fysiky je tomu podobně.

15. Konečně chci velmi krátce ukázati, že můžeme dojíti k relativnosti, vyjdeme-li z principu variačního počtu, který jsme nazvali principem Hamiltonovým.

Máme-li na mysli pohyb jediného bodu, máme

$$T = \tfrac{1}{2} v^2, \quad m = \text{hmota} = 1,$$
$$P \text{ potenciál,}$$

a Hamiltonův princip zní

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0,$$

kde $L = T + P$, při čemž variace jsou v mezích integrálu rovny nule.

Transformujeme-li kartézské souřadnice y_1, y_2, y_3 v x_1, x_2, x_3 užitím rovnic

$$x_k = x_k(y_1, y_2, y_3, t), \quad y_k = y_k(x_1, x_2, x_3, t),$$

dostaneme Lagrangeovy rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial x'_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

které jsou invariantní.

L se skládá ze tří členů:

1. z členu L_2 druhého stupně v x'_1, x'_2, x'_3,
2. z členu L_1 prvního stupně v týchž veličinách,
3. z členu L_0, jenž na nich nezávisí.

Vskutku jest

$$y'_k = \frac{\partial y_k}{\partial t} + \sum \frac{\partial y_k}{\partial x_i} x'_i,$$

a dosadíme-li tyto výrazy do vzorce

$$\tfrac{1}{2}(y'^2_1 + y'^2_2 + y'^2_3),$$

vidíme, že prvé dva členy lze ihned vypočísti.

První člen najdeme, položíme-li ve vzorci

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{d}y_1^2 + \mathrm{d}y_2^2 + \mathrm{d}y_3^2)$$

$$\mathrm{d}y_k = \sum \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i;$$

budeme míti

$$\mathrm{d}l_0^2 = (\mathrm{d}y_1^2 + \mathrm{d}y_2^2 + \mathrm{d}y_3^2) = \Sigma\Sigma\, a_{ik}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_k$$

a

$$L_2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}l_0^2}{\mathrm{d}t^2}.$$

Podobně lze obdržeti ostatní dva členy L_1, L_0.

Počítejme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial x'_i} x'_i\right).$$

Najdeme

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \sum \frac{\partial L}{\partial x_i} x'_i + \sum \frac{\partial L}{\partial x'_i} x''_i - \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial x'_i} x'_i - \sum \frac{\partial L}{\partial x'_i} x''_i =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial x'_i}\right) x'_i = \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial x'_i} x'_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Vypočtěme nyní

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, \mathrm{d}t$$

za předpokladu, že t se též mění a že v mezích jest $\delta t = 0$. Pro část, která vznikne variací t, dostaneme výraz

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial t}\,\partial t + \sum \frac{\partial L}{\partial x'_i} \Delta x'_i + L \frac{\delta\, \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t,$$

kde $\Delta x'_i$ je variace veličiny x'_i vzniklá variací t.

Poněvadž jest

$$\Delta x'_i = \Delta \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t^2}\,\delta\,\mathrm{d}t,$$

přejde předešlý výraz v

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\,\delta t - \sum \frac{\partial L}{\partial x'_i}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\delta\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + L\frac{\delta\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t.$$

Avšak integrací po částech obdržíme

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum \frac{\partial L}{\partial x'_i}\,x'_i\,\delta\,\mathrm{d}t - L\,\delta\,\mathrm{d}t\right) = \int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum \frac{\partial L}{\partial x'_i}\,x'_i - L\right)\mathrm{d}t\,\delta t,$$

takže

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum \frac{\partial L}{\partial x'_i}\,x'_i - L\right)\right\}\mathrm{d}t\,\delta t = 0.$$

Z toho plyne, že variace nemá žádného vlivu na výpočet

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,\mathrm{d}t.$$

Proto můžeme uvažovati o čtyřech proměnných x_1, x_2, x_3, t stejně, nebo-li mysliti si děj v prostoru o čtyřech rozměrech, z nichž 3 jsou prostorové a jeden časový.

Bude pak nejobecnější transformace těch čtyř proměnných dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1\,(y_1, y_2, y_3, t)\\ x_2 &= x_2\,(y_1, y_2, y_3, t)\\ x_3 &= x_3\,(y_1, y_2, y_3, t)\\ x_0 &= x_0\,(y_1, y_2, y_3, t). \end{aligned}$$

Proměnnou t nahradíme proměnnou x_0, které budeme říkati místní čas, poněvadž závisí také na souřadnicích prostoru y_1, y_2, y_3.

K takové transformaci není již L invariantní. Můžeme si dáti úkol hledati tvar, který by se blížil tvaru L a jenž by měl tu povahu invariantu. Pak budeme moci říci, že skutečnosti odpovídá tento tvar a že tvar L je jenom jednoduché přiblížení.

K tomu cíli vezměme rychlost c takovou, aby bylo lze čísla

$$\frac{v^2}{c^2},\quad \frac{P}{c^2}$$

zanedbati vůči jedné. Můžeme zvoliti c = rychlost světla = $= 3 \,.\, 10^5$ km/sec. Zvolíme-li v téhož řádu jako je rychlost Země na její dráze, to jest $3 \,.\, 10$ km/sec, budeme míti

$$\frac{v}{c} = 10^{-4},\quad \frac{v^2}{c^2} = 10^{-8}.$$