Gaussovo pentagramma mirificum v Lobačevského geometrii.

Em. Klier.

(Došlo 29. října 1932.)

Ve sférické geometrii lze danému pravoúhlému trojúhelníku přiřaditi čtyři další pravoúhlé trojúhelníky, jež tvoří s původním uzavřený řetězec, jehož užití vede k známému Gaussovu pentagrammatu a Neperovu pravidlu.[1]) Poněvadž pak Lobačevského geometrii lze interpretovati jako geometrii na kouli o imaginárním poloměru, dá se očekávati i v hyperbolické geometrii podobný řetězec pravoúhlých trojúhelníků a příslušné pravidlo.

Lobačevský udává již způsob přiřazení takových pravoúhlých trojúhelníků a Engel[2]) prvý odvodil celý cyklus a příslušné pravidlo, jež Liebmann nazývá Neper-Engelovým.[3]) Liebmann odvozuje cyklus trojúhelníků užívaje čtyrúhelníku o třech pravých úhlech, kdežto autoři předešlí užívali prostorové hyperbolické geometrie.

V pojednání: Das Pentagramma mirificum und die nichteuklidischen Parallelen[4]) chtěje najíti společné východisko pro řetězec trojúhelníků v geometrii eliptické a hyperbolické vychází Liebmann z geometrie eliptické interpretované jako geometrie na kouli čili jako geometrie sférické. V ní lze přiřaditi pravoúhlému trojúhelníku jistý čtyrúhelník se třemi pravými úhly, který pak doplňuje na oktant kulový. Zavedením fundamentální kuželosečky Cayleyovy jeví se tento oktant jakožto polární trojúhelník vzhledem k základní kuželosečce. Je-li kuželosečka reálnou, máme případ geometrie Lobačevského, a je-li jeden vrchol polárního trojúhelníku uvnitř kuželosečky, tedy v oblasti zobrazující reálné elementy; pak druhé dva vrcholy polárného trojúhelníku jsou mimo kuželosečku a tedy v části zobrazující imaginární prvky. Aby dostal Liebmann přidružený čtyrúhelník se všemi reálnými vrcholy, užívá poněkud umělého obratu. Na základě zmíněného zobrazení a metriky určuje pak početně všechny prvky přiřazeného čtyrúhelníku, z něhož lze odvoditi přiřazený trojúhelník k původnímu a opakováním sestrojiti řetězec pravoúhlých trojúhelníků obdobný

---

1) Viz na př. Dr. Gerhard Hessenberg: Ebene u. sphärische Trigonometrie. (Sammlung Göschen.) Str. 115.

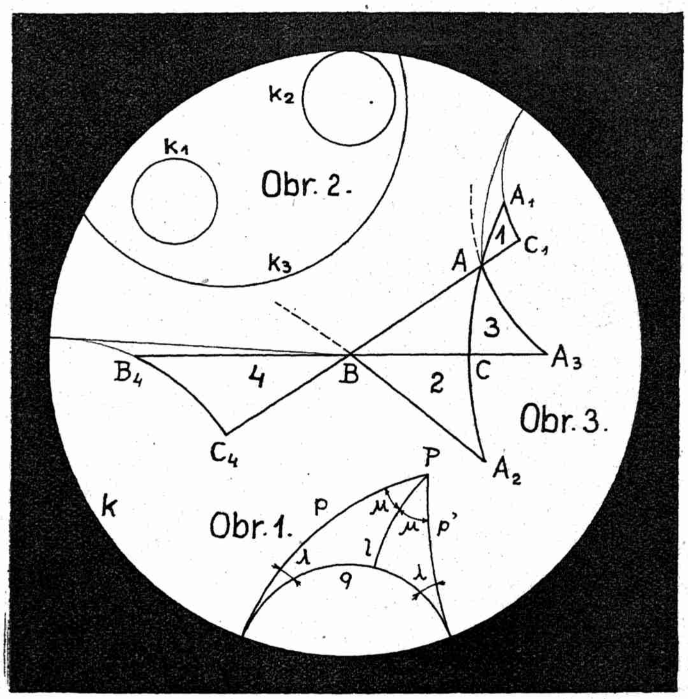
2) Engel - Lobatschefskij: Zwei geometrische Abhandlungen. Str. 346.

3) Liebmann: Nichteuklidische Geometrie.

4) Sitzungsberichte der mathem.-physik. Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1912. Str. 273 a násl.

jako Gaussův. Pojednání končí užitím pentagrammatu v geometrii eliptické k důkazu Studyovy věty, týkající se zobrazení přímek eliptického prostoru.

V následujícím podám vyvození řetězce pravoúhlých trojúhelníků bez přidružených čtyrúhelníků, s hlediska společného geometrii hyperbolické i sférické a pravidlo Neper-Engelovo v pozměněné formě. V této formě nenalezl jsem zmíněné pravidlo v literatuře; domnívám se však, že lépe odpovídá duchu Lobačevského geometrie než pravidlo Neper-Engelovo.



Ze vzorců sférické geometrie dostaneme příslušné vzorce geometrie Lobačevského tak, že goniometrické funkce stran nahradíme funkcemi hyperbolickými, funkce úhlů ponecháme. Tak zejména pro pravoúhlý trojúhelník o stranách l, m, n a úhlech λ, μ bude

$$\operatorname{Cos} n = \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m = \operatorname{cotg} \lambda \operatorname{cotg} \mu. \tag{1}$$

$$\cos \lambda = \sin \mu \operatorname{Cos} l. \tag{2}$$

Je-li vésti rovnoběžku p k dané přímce q daným bodem P, jenž od přímky q má kolmou vzdálenost l, pak v příslušném trojúhelníku pravoúhlém (obr. 1) bude $\lambda = 0$, příslušný úhel μ nazývá se úhlem rovnoběžnosti a označuje se $\Pi(l)$ jakožto příslušný úsečce l, takže $\mu = \Pi(l)$ a podle (2) je

$$\sin \Pi(l) = \frac{1}{\operatorname{Cos} l}. \tag{3}$$

Z této rovnice plyne dále

$$\cos \Pi(l) = \operatorname{Tg} l \qquad \operatorname{cotg} \Pi(l) = \operatorname{Sin} l. \tag{3'}$$

Opačně pak označuje se úsečka l příslušná k úhlu rovnoběžnosti μ symbolem $\Delta\mu$, takže platí:

$$\mu = \Pi(l) = \Pi[\Delta(\mu)], \tag{4}$$

$$l = \Delta(\mu) = \Delta[\Pi(l)]. \tag{4'}$$

Symbolem Π zavádějí se úhly místo úseček a symbolem Δ úsečky místo úhlů, čímž dociluje se ve vzorcích jakési homogenity, a to buď v úhlech nebo v úsečkách.

Budiž dán pravoúhlý trojúhelník ABC o stranách a, b, c a úhlech α, β. Z něho odvodíme další pravoúhlý trojúhelník takto:

Pro k-tý trojúhelník označme jeho prvky indexem k, při čemž původní trojúhelník označme jako nultý. Pak místo jednotlivých prvků zaveďme veličiny x se dvěma indexy podle tohoto schematu:

$$x_k^\lambda = c_k, \quad \Delta\beta_k, \quad \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b_k)], \quad \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a_k)], \quad \Delta\alpha_k \tag{5}$$

pro $\lambda = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5.$

Výtvarný zákon pro řetězec trojúhelníků pak je dán vztahem

$$x_{k+1}^\lambda = x_k^{\lambda+3}, \tag{6}$$

při čemž položíme ještě podmínku periodicity v indexu λ a to:

$$x_k^{\lambda+5} = x_k^\lambda. \tag{7}$$

Z rovnic (6), (7) plyne však opětovným užíváním (6):

$$\begin{aligned} x_{k+1}^\lambda &= x_k^{\lambda+3} = x_{k-1}^{\lambda+6} = x_{k-1}^{\lambda+1} = x_{k-2}^{\lambda+4} = x_{k-3}^{\lambda+7} = x_{k-3}^{\lambda+2} = \\ &= x_{k-4}^{\lambda+5} = x_{k-4}^\lambda \end{aligned} \tag{7'}$$

Na př. pro $k = 4$ je $x_5^\lambda = x_0^\lambda$. Pátým krokem se tedy prvky opakují.

V původním trojúhelníku prodlužme odvěsnu b a přeponu c přes vrchol A, který označme B_1. Na prodlouženou přeponu nanesme délku $B_1C_1 = a_1 = \Delta\,(\alpha_0 + \varepsilon_0)$ jakožto odvěsnu nového trojúhelníku. Při tom ε_0 je defekt původního trojúhelníku a je $\varepsilon_0 = \pi - (\alpha_0 + \beta_0 + \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi - \alpha_0 - \beta_0$. V bodě C_1 vztyčíme kolmici na a_1, jež protne prodlouženou odvěsnu b ve vrcholu A_1. V novém trojúhelníku je tedy $\beta_1 = \alpha_0$. Pokračujeme-li stejným způsobem dále, takže vždy

$$\beta_k = \alpha_{k-1}, \quad a_k = \Delta\,(\alpha_{k-1} + \varepsilon_{k-1}) = \Delta\,(\tfrac{1}{2}\pi - \beta_{k-1}) \tag{7''}$$

dostaneme čtyři různé trojúhelníky a pátý shodný s původním.[5] Z rovnic (5), (6), (7) určíme ostatní prvky. Tak na př. položme $k = 0$, $\lambda = 3$, takže podle (6) a (7)

$$x_1{}^3 = x_0{}^6 = x_0{}^1,$$

podle (5)

$$\Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b_1)] = c_0,$$

podle (4), (4')

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b_1) = \Pi(c_0)$$

čili

$$\Pi(b_1) = \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(c_0)$$

a tudíž

$$b_1 = \Delta[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(c)].$$

Tak dostaneme cyklus trojúhelníků, jejichž prvky jsou:

0	c	β	a	b	α	
1	$\Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a)]$	α	$\Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \beta]$	$\Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(c)]$	$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b)$	
2	$\Delta\beta$	$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b)$	$\Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \alpha]$	a	$\Pi(c)$	(8)
3	$\Delta\alpha$	$\Pi(c)$	b	$\Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \beta]$	$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a)$	
4	$\Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b)]$	$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a)$	$\Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(c)]$	$\Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \alpha]$	β	

Že tomu skutečně tak je, lze se přesvědčiti přímým výpočtem jednotlivých trojúhelníků.

Ve sférické geometrii místo (5) nastupuje schema

$$x_k{}^\lambda = c_k,\ \beta_k,\ \tfrac{1}{2}\pi - a_k,\ \tfrac{1}{2}\pi - b_k,\ \alpha_k \qquad (5')$$

pro $\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

a trojúhelníky konstruují se tak, že

$$\beta_k = \alpha_{k-1},\quad b_k = \alpha_{k-1} + \varepsilon_{k-1} = \tfrac{1}{2}\pi - \beta_{k-1}$$

(na rozdíl od hyperbolické, kde bylo $a_k = \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \beta_{k-1}]$), při čemž $\varepsilon_K = \tfrac{1}{2}\pi - \alpha_K - \beta_K$ značí úhlový exces. Trojúhelníky tvoří pak řetězec, který se v sebe uzavírá.[6] Důsledkem tohoto řetězce je pak známé pravidlo Neperovo.

Podle schematu (8) je patrno, že přepona c nabývá hodnot, jež sloužily k určení veličin $x_k{}^\lambda$ podle vztahů (5). Z rovnice (6) pro $\lambda = 1$ dostaneme

$$x_{k+1}^{1} = x_k{}^4 \text{ čili } c_{k+1} = \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a_k)]. \qquad (9)$$

Z téže rovnice pro $\lambda = 3$

$$x_{k+1}^{3} = x_k{}^6 = x_k{}^1 \text{ čili } \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b_{k+1})] = c_k. \qquad (9')$$

Z řady rovnic (7') vztah $x_{k+1}^{\lambda} = x_{k-2}^{\lambda+4}$ dává pro $\lambda = 1$ resp. 2

$$c_{k+1} = \Delta\alpha_{k-2},\quad \Delta\beta_{k+1} = c_{k-2}. \qquad (9'')$$

[5]) Rovnice (7'') mohou sloužiti za východisko, neboť jsou specialisací rovnic (5), (6), (7), (7').

[6]) Dr. Gerhard Hessenberg: Ebene u. sphärische Geometrie. Str. 115.

Rovnice (9), (9′), (9″) lze spojiti ve tvar:

$$c_{k\pm1} = \varDelta\left[\tfrac{1}{2}\pi - \varPi\binom{a_k}{b_k}\right], \quad c_{k\pm3} = \varDelta\binom{\alpha_k}{\beta_k}. \tag{10}$$

Napišme nyní hodnoty pro c do kruhu, pentagrammatu, v pořadí daném pěticípou hvězdicí takto:

$$\begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & & 0 & & \\ \varDelta\alpha\ \ 3 & & & & 2\ \ \varDelta\beta \\ & 1 & & 4 & \\ & \varDelta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \varPi(a)] & & \varDelta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \varPi(b)]. & \end{array}$$

Poněvadž pak podle (1), (3), (3′) můžeme psáti rovnice:

$$\operatorname{Cos} c_k = \operatorname{Cos} a_k \operatorname{Cos} b_k = \frac{1}{\sin\varPi(a_k)\sin\varPi(b_k)} =$$

$$= \frac{1}{\cos[\tfrac{1}{2}\pi - \varPi(a_k)]\cos[\tfrac{1}{2}\pi - \varPi(b_k)]} = \tag{11}$$

$$= \operatorname{Cotg} \varDelta[\tfrac{1}{2}\pi - \varPi(a_k)] \operatorname{Cotg} \varDelta[\tfrac{1}{2}\pi - \varPi(b_k)],$$

$$\operatorname{Cos} c_k = \operatorname{cotg} \alpha_k \operatorname{cotg} \beta_k = \operatorname{Sin} \varDelta(\alpha_k) \operatorname{Sin} \varDelta(\beta_k) \tag{11′}$$

čili podle (10)

$$\operatorname{Cos} c_k = \operatorname{Cotg} c_{k+1} \operatorname{Cotg} c_{k-1} = \operatorname{Sin} c_{k+3} \operatorname{Sin} c_{k-3}, \tag{12}$$

můžeme vysloviti pravidlo:

Cos kteréhokoliv prvku pentagrammatu rovná se součinu Cotg prvků protilehlých nebo součinu Sin prvků přilehlých.

Toto pravidlo je úplně analogické s Neperovým. Rozdíl je pouze v tom, že hyperbolické funkce nahrazují goniometrické a že Cotg a Sin vyměňují si role se sin a cotg.

Užitím relací (3), (3′) lze (12) přepsat na tvar

$$\sin\varPi(c_k) = \cos\varPi(c_{k+1}) \cos\varPi(c_{k-1}) = \operatorname{tg}\varPi(c_{k+3}) \operatorname{tg}\varPi(c_{k-3}). \tag{13}$$

Užijeme-li tedy podle této rovnice symbolu $\varPi$ na zmíněné pentagramma, dostaneme

$$\begin{array}{ccccc} & & \varPi\,(c) & & \\ & & 0 & & \\ \alpha\ \ 3 & & & & 2\ \ \beta \\ & 1 & & 4 & \\ & \tfrac{1}{2}\pi - \varPi(a) & & \pi - \varPi\tfrac{1}{2}(b) & \end{array}$$

a pravidlo (13) přejde v Neper-Engelovo,[7]) pravící, že sin kteréhokoliv prvku rovná se součinu tg přilehlých nebo součinu cos proti-

[7]) Engel - Lobatschefskij: Zwei geometrische Abhandlungen.

lehlých prvků. Můžeme říci, že pravidlo Neper-Engelovo je pro pentagramma homogenní v úhlech, pravidlo (12) pro pentagramma homogenní v úsečkách.

Kreslíme-li cyklus trojúhelníků pro hyperbolickou rovinu, nedostaneme obrazec uzavřený jako v rovině sférické. Tam totiž odvěsny a_{k-1} a a_{k+1} stojí kolmo na prodloužené přeponě c_k a prodlouženy protínají se ve vrcholu, který je společný trojúhelníku $k + 2$-hému a $k + 3$-tímu. V Lobačevského geometrii však, mají-li dvě přímky společnou kolmici, neprotínají se vůbec. V obr. 3 zvolil jsem tudíž seskupení podle společných úhlů a odvěsen. K zobrazení užil jsem známé stereografické projekce koule o poloměru imaginárním.[8]) Celá rovina zobrazí se dovnitř kruhu k, jehož obvod zobrazuje body nekonečně vzdálené. Přímky zobrazují se jako kružnice protínající kolmo základní kružnici. Kružnice zobrazují se jako kružnice a hned vidíme (obr. 2), že rozeznáváme kružnice obyčejné (k_1), kružnice s jedním bodem v nekonečnu (k_2) zvané mezné kružnice či horocykly a kružnice se dvěma body v nekonečnu zvané ekvidistanty (k_3). Snadno řeší se v tomto zobrazení úloha: Vésti daným bodem rovnoběžku k dané přímce (obr. 1).

V obr. 3 označeny jsou trojúhelníky shodně podle schematu (8). Pro konstrukci je výhodno sestrojiti ve vrcholech A, B původního trojúhelníku přímky svírající s c úhly $\frac{1}{2}\pi - \beta$, $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ a vésti k nim rovnoběžky kolmé k c, které vytnou na prodloužené přeponě c odvěsny délek $\Delta\,[\frac{1}{2}\pi - \beta]$, $\Delta\,[\frac{1}{2}\pi - \alpha]$ a na prodloužených odvěsnách vrcholy A_1, B_4 trojúhelníku 1, 4. Vrcholy A, B původního trojúhelníku vedeme přímky svírající úhel $\Pi(c)$ s odvěsnami a protínající druhé, prodloužené odvěsny ve vrcholech A_3, A_2 trojúhelníků 3, 2.

Přeneseme-li úhel β k vrcholu A, úhel α k vrcholu B k prodlouženým odvěsnám b, a, jak v obr. 3 je naznačeno čárkovaně, dostaneme obrazec, který přechodem k nekonečně velkému poloměru koule dává pruhy nad stranami a, b, c mezi kolmicemi k nim a prostírající se do nekonečna. Je to specielní případ obrazce podobného, jímž dokazuje se Pythagorova věta, který vyjde ve článku: „Jednoduchý důkaz věty cosinové a zobecnění některých pouček“ v „Rozhledech matematicko-přírodovědeckých“.

Uveďme ještě jednoduchý příklad.

Nechť jedná se o pravoúhlý trojúhelník, jehož jedna odvěsna je α a přilehlý úhel $\beta = \frac{1}{4}\pi$. Podle pentagrammatu je

$$\operatorname{Cos} \Delta(\beta) = \operatorname{Cotg} \Delta(\alpha) \operatorname{Cotg} \Delta\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)],$$

[8]) Klein: Vorlesungen über die nichteuklidische Geometrie. Gotinky 1890/1892 (litograf.). — Hlavatý: Úvod do neeuklidovské geometrie (1926). — Zajímavá fysikální aplikace je ve článku: Prof. Dr. A. Dittrich: Rovnice Maxwellovy v prostoru Lobačevského. Časopis pro pěst. math. a fys. XL, 1910.