Příspěvek k neeuklidovské geometrii.

L. Illingerová.

(Došlo 20. června 1932.)

V zimním semestru 1931/32 měla jsem v semináři pro filosofii matematiky referát o noetických problémech v neeuklidovských geometriích. Při té příležitosti narazila jsem na zdánlivý rozpor vzniklý v různých zobrazeních neeuklidovské roviny, který chci v tomto článku objasniti. Budu se zde zabývati hlavně kružnicemi, a to v rovině hyperbolické, v níž se vyskytují tři druhy kružnic (cykly, horocykly a ekvidistanty)[1]; naproti tomu v rovině eliptické a v rovinách parabolických jest jediný druh kružnic.

V Kleinově zobrazení jest kružnice kuželosečkou, která se dvojnásobně dotýká „absolutní kuželosečky"[2]) a jest tedy určena dalšími třemi podmínkami (str. 102). Řešme na př. úlohu: třemi body hyperbolické roviny proložiti kružnici! Úloha, sestrojiti kuželosečku, která by procházela třemi danými body a dotýkala se dvojnásobně jiné dané kuželosečky, jest, jak známo, čtyřznačná: Třemi obecně položenými body hyperbolické roviny lze proložiti čtyři kružnice.

V zobrazení Poincaréově, které jest konformní s geometrií v rovině euklidovské a při němž se absolutní útvar zobrazí jako osa X, kružnice se jeví opět jako kružnice: cykly osu X neprotínají, horocykly se jí dotýkají a ekvidistanty ji protínají (str. 142, 143). Třemi body lze však proložiti jedinou kružnici. Zdálo by se tedy, že v Poincaréově zobrazení hyperbolické roviny lze třemi body proložiti jen jedinou kružnici, což jest výsledek odporující předcházejícímu, neboť zřejmě vlastnosti hyperbolické roviny nesmějí záviseti na tom, jakého druhu zobrazení bylo použito. V těchto dvou zobrazeních jest tedy zdánlivý rozpor, který vysvětlíme. Kromě toho rozřešíme některé úlohy o kružnicích v hyperbolické rovině.

Nejprve uvedu jednoduchou konstrukci kružnic třemi body v Kleinově zobrazení. Bude to vlastně, jak bylo výše řečeno, řešení úlohy: třemi danými body a, b, c proložiti kuželosečku ^1K tak, aby se dvojnásobně dotýkala kuželosečky K! Obě kuželosečky K, ^1K patří do svazku, jehož jedna složená kuželosečka

---

[1]) Viz Dr. V. Hlavatý: Úvod do neeuklidovské geometrie (Edice Kruh, 1926) str. 104; v dalším uvádím pouze stránky této knížky.

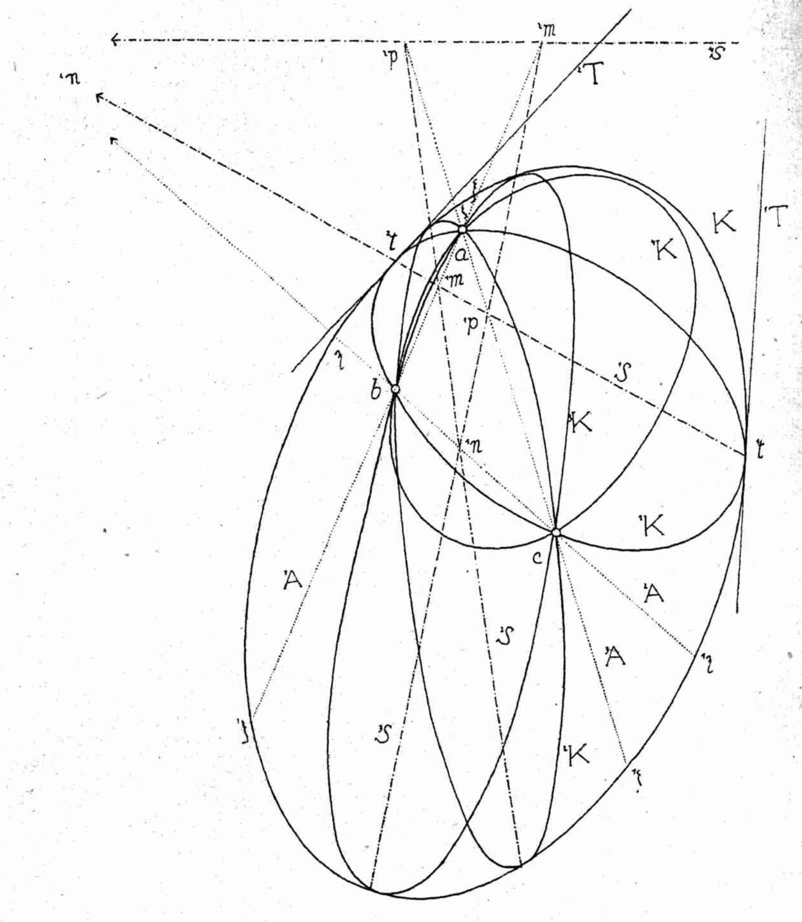
[2]) Uvozovkami označujeme euklidovský model neeuklidovského útvaru.

skládá se ze společných tečen ${}^1T$, ${}^2T$ a druhé dvě splývají ve spojnici ${}^1S$ společných bodů ${}^1t$, ${}^2t$ (obr. 1). Protneme-li tento svazek libovolnou přímkou, vzniká na ní bodová involuce, jejíž jeden samodružný bod leží nutně na ${}^1S$, neboť dvojnásobně počítaná přímka ${}^1S$ jest kuželosečkou svazku. Jsou-li v našem případě dány tři body a, b, c pro hledanou kuželosečku ${}^1K$, dostaneme na přímkách ${}^1A \equiv ab$, ${}^2A \equiv bc$, ${}^3A \equiv ca$ involuce $(a, b;\ \xi, {}^1\xi; \ldots)$ resp. $(b, c;\ \eta, {}^1\eta; \ldots)$, $(c, a;\ \zeta, {}^1\zeta; \ldots)$ se třemi dvojicemi samodružných bodů ${}^1m$, ${}^2m$; ${}^1n$, ${}^2n$; ${}^1p$, ${}^2p$. Těchto šest bodů leží po třech na čtyřech přímkách ${}^1S$, ${}^2S$, ${}^3S$, ${}^4S$, které jsou již spojnicemi dotyčných bodů hledané kuželosečky ${}^1K$, resp. ${}^2K$, ${}^3K$, ${}^4K$ s danou kuželosečkou K (obr. 1). Tři z těchto přímek ${}^1S$, ${}^2S$, ${}^3S$ protínají kuželosečku K reálně, neboť tři body ${}^1m$, ${}^1n$, ${}^1p$ leží uvnitř kuželosečky K; ostatní tři ${}^2m$, ${}^2n$, ${}^2p$ leží vně K a jejich spojnice ${}^4S$ protíná ji buď také reálně nebo imaginárně. Je-li kuželosečka K absolutní kuželosečkou hyperbolické roviny, jsou tři kružnice naší úlohy ekvidistanty, čtvrtá jest buď ekvidistanta, nebo cykl (podle polohy bodů a, b, c). Přímky S jsou poláry „středů" hledaných kružnic vzhledem k absolutní kuželosečce. Protíná-li přímka S kuželosečku K reálně, jest kružnice (v tomto případě ekvidistanta) rozdělena přímkou S na dvě části tak, že z jedné nelze přejíti na druhou, poněvadž nemůžeme přecházeti elementy nevlastní (t. j. nekonečně vzdálené).

Má-li hledaná kružnice býti horocyklem, pak polára „středu" dotýká se absolutní kuželosečky v bodě, v němž má horocykl styk třetího řádu s absolutní kuželosečkou. Horocykl jest určen dvěma body nebo bodem a směrem. Obě konstrukce provedeme. Konstrukce horocyklu daného dvěma body a, b jest: Na spojnici ab najdeme samodružné body involuce, jejíž jednou dvojicí jsou body a, b a druhou dvojici tvoří průsečíky této spojnice s absolutní kuželosečkou. Tečny vedené ze samodružných bodů této involuce k absolutní kuželosečce jsou již poláry „středů" horocyklů. V dotyčných bodech těchto tečen mají horocykly čtyřbodový dotyk s absolutní kuželosečkou. Výsledky jsou čtyři, dva reálné a dva imaginární. Konstrukce horocyklu daného bodem a směrem (t. j. bodem a tečnou v něm) jest: Postup stejný jako při řešení předchozí úlohy, pouze s tím rozdílem, že zde body a, b splynuly v jediný bod, a jejich spojnice stala se tečnou. Na tečně najdeme bod polárně sdružený k danému vzhledem k absolutní kuželosečce a z něho vedeme tečny k absolutní kuželosečce; úloha má dva reálné výsledky.

Nyní přejdeme od zobrazení Kleinova k zobrazení Poincaréovu a dokážeme, že i zde má daná úloha (t. j. konstrukce kružnice třemi body) čtyři řešení.

Nejprve si zavedeme pomocné zobrazení, které budeme nazývati zobrazením intermediernim. K tomu použijeme transformačních rovnic, které Hlavatý uvádí ve své knize pro přechod z Klei-



Obr. 1.

nova zobrazení do zobrazení Poincaréova (na str. 141 a 142). Je-li absolutní kuželosečka Kleinova zobrazení dána rovnicí

$$\eta\zeta - \xi^2 = 0, \qquad (1)$$

zavedeme nové souřadnice u_1, u_2 tak, že $u_1 =$ konst. je rovnice horocyklu a $u_2 =$ konst. rovnice kolmice na tento horocykl. Zavedeme-li místo homogenních souřadnic ξ, η, ζ nehomogenní

$X = \frac{\xi}{\zeta}$, $Y = \frac{\eta}{\zeta}$, má absolutní kuželosečka rovnici

$$Y - X^2 = 0. \tag{2}$$

Užijeme-li rovnic pro horocyklický pohyb (str. 119), jest rovnice

$$Y - X^2 = e^{-2u_1} \tag{3}$$

rovnicí svazku horocyklů bodem (středem) o souřadnicích (0, 0, 1), při čemž u_1, jest parametr svazku; pro $u_1 = \infty$ jest rovnice (3) rovnicí absolutní kuželosečky. — Pro bod o_1 (1, 0, 0), který leží vně absolutní kuželosečky, a tedy pro všechny body ležící vně jest $Y - X^2 < 0$, pro body uvnitř jest $Y - X^2 > 0$; e^{-u_1} má proto reálnou hodnotu pro body uvnitř absolutní kuželosečky, imaginární pro body vně. Omezíme se na horocykly, to jest na kuželosečky (3), uvnitř absolutní kuželosečky. Ortogonální trajektorie horocyklů jsou přímky procházející jejich středem O_3 (0, 0, 1); $X = u_2$ jest rovnice svazku ortogonálních trajektorií svazku horocyklů, u_2 jest jeho parametr. Zavedeme-li vztahy

$$x = u_2, \quad y = e^{-u_1}, \tag{4}$$

jest podle právě řečeného pro body uvnitř absolutní kuželosečky $y^2 > 0$, pro body vně absolutní kuželosečky $y^2 < 0$ a transformační rovnice pro přechod z Kleinova zobrazení do zobrazení intermediérního zní

$$X = x, \quad Y = x^2 + y^2 \tag{5}$$

a obráceně $$x = X, \quad y = \pm\sqrt{Y - X^2}. \tag{5'}$$

Rovnice absolutní kuželosečky (2) přejde transformací (5) v rovnici $y^2 = 0$, což jest dvojnásobně počítaná osa X.

Rovnice přímky v Kleinově rovině $AX + BY + C = 0$ přejde transformací (5) v rovnici

$$Ax + B(x^2 + y^2) + C = 0. \tag{6}$$

což jest v intermediérním zobrazení rovnice kružnice se středem na ose X; ve zvláštním případě, pro $B = 0$, jest rovnice (6) rovnicí přímky kolmé k ose X. Dvě „různoběžky" se protínají reálně mimo osu X, dvě „rovnoběžky" mají společný bod na ose X a dvě mimoběžky se protínají imaginárně.

Rovnice kružnice o středu $s\,(s_1, s_2, s_3)$ a poloměru (hyperbolickém) r v hyperbolické rovině při Kleinově zobrazení jest v souřadnicích homogenních

$$f_{\xi s}{}^2 = f_{\xi\xi} f_{ss} \operatorname{Cos}^2 r \tag{7}$$

(str. 101), při čemž

$$f_{\xi} f_{\xi} = \eta\zeta - \xi^2, \quad f_{ss} = s_2 s_3 - s_1{}^2, \quad f_{\xi s} = \tfrac{1}{2}(\eta s_3 + \zeta s_2 - 2\xi s_1).$$

Jsou-li s, t nehomogenní souřadnice „středu" kružnice v intermedierním zobrazení, jest vzhledem k (5)

$$\frac{s_1}{s_3} = s, \frac{s_2}{s_3} = s^2 + t^2. \qquad (5'')$$

Použitím rovnic (5), (5″) přejde rovnice (7), kterou můžeme psát ve tvaru

$$[\tfrac{1}{2}(t + Y - 2Xs)]^2 = (Y - X^2)(t - s^2) \operatorname{Cos}^2 r \qquad (7')$$

ve tvar

$$(x^2 + y^2 + s^2 + t^2 - 2xs)^2 = 4y^2t^2 \operatorname{Cos}^2 r, \text{ čili} \qquad (8)$$

$$x^2 + y^2 + s^2 + t^2 - 2xs = 2\varepsilon yt \operatorname{Cos} r, \quad \varepsilon = \pm 1; \qquad (9)$$

z toho

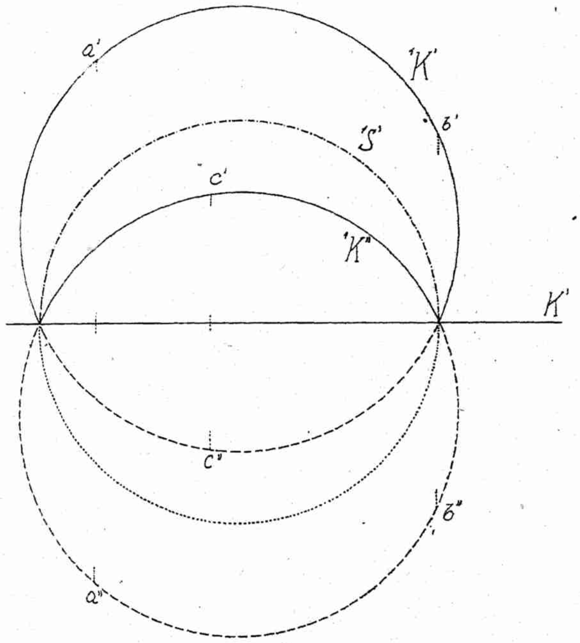
$$(x - s)^2 + (y - \varepsilon t \operatorname{Cos} r)^2 = t^2 \operatorname{Sin}^2 r. \qquad (10)$$

Kružnice Kleinovy roviny přejde, jak plyne z rovnice (10), do dvou kružnic souměrně položených podle osy X (pro $\varepsilon = +1$, nebo $\varepsilon = -1$). Transformací (5) přejde každý bod do dvou bodů souměrně položených podle osy X. Mezi zobrazením Kleinovým a intermedierním jest tedy jedno-dvojznačná korespondence. Transformací našich bodů a, b, c získáme v intermedierním zobrazení tři dvojice bodů a', a'', b', b'', c', c'' a jimi proložíme čtyři dvojice kružnic. ${}^1K \equiv (a'b'c') + (a''b''c'')$, ${}^2K \equiv (a'b'c'') + (a''b''c')$, ${}^3K \equiv (a'b''c') + (a''b'c'')$, ${}^4K \equiv (a'b''c'') + (a''b'c')$.

Chceme-li získati jedno-jednoznačný vztah, musíme se v rovnici (5′) omeziti na jedno znaménko (zvolíme +) a tím získáme zobrazení Poincaréovo. Každému bodu Kleinova zobrazení odpovídá jediný bod, a to nad osou X ($y > 0$). Obraz celého útvaru v Poincaréově rovině získáme, jestliže uvažujeme v intermedierním zobrazení polorovinu nad osou X. Poněvadž každý útvar Kleinovy roviny přejde, jak bylo dokázáno, do roviny intermedierní do dvou útvarů souměrně podle osy X položených, obdržíme celý útvar v rovině Poincaréově zrcadlením na ose X oné části, která je pod osou X (v obr. 2 sestrojena kružnice ${}^1K$). Všechny poznatky získané pro intermedierní zobrazení platí v rovině Poincaréově, omezíme-li se na část roviny nad osou X. Tři z výše uvedených kružnic ${}^2K$, ${}^3K$, ${}^4K$ jsou zřejmě obrazy ekvidistant, čtvrtá ${}^1K$ jest buď cykl nebo ekvidistanta, podle polohy bodů a', b', c'. Obrazy polár S „středů" kružnic Kleinovy roviny jsou v Poincaréově rovině půlkružnice, jež mají středy na ose X a procházejí průsečíky kružnice s osou X. Tak jako v Kleinově zobrazení nemůžeme ani zde přecházeti z jedné části ekvidistanty na druhou, jsou-li odděleny polárou S (v obr. 2 polára ${}^1S'$ rozděluje kružnici proloženou body a', b', c' (a'', b'', c'') na dvě části ${}^1K'$, ${}^1K''$ tak, že na př. z bodu c' nelze přejíti do bodu b'). Polára středu cyklu jest zde zřejmě imaginární. Jak bylo výše dokázáno, jest pro body, které leží vně absolutní kuželosečky Kleinovy roviny, $y = e^{-u_1}$ imaginární:

Ideální útvary Kleinovy roviny (t. j. ty, které leží vně absolutní kuželosečky) stávají se v zobrazení Poincaréově imaginárními.

Konstrukce horocyklu daného dvěma body a' (a''), b' (b'') v zobrazení intermedierním a tedy i v rovině Poincaréově dává rovněž dvě řešení reálná (konstrukce kružnice dané dvěma body a', b' a tečnou X jest dvojznačná) a dvě řešení imaginární (pro



Obr. 2.

a', b'', X). Zobrazí-li se body a, b do bodů a', b' tak, že spojnice $\overline{a'b'}$ je rovnoběžná s osou X, jest tato spojnice již jedním reálným řešením naší úlohy. Položme si otázku: Co odpovídá v Kleinově zobrazení obecně položené přímce roviny Poincaréovy? Vedle přímky $ax + by + c = 0$ musíme uvažovati zároveň přímku $ax - by + c = 0$ (zrcadlením na ose X přejde prvá přímka v druhou). Transformací (5′) dostaneme rovnici:

$$(a^2 + b^2) X^2 + 2acX - b^2Y + c^2 = 0;$$

jest to kuželosečka, která se absolutní kuželosečky dotýká v bodě (0, 1, 0). Zdánlivý rozpor, o kterém jsme se zmínili na počátku, je tedy způsoben záměnou zobrazení Poincaréova a intermediemího.

Pohybuje-li se v euklidovské rovině konstantní úhel α tak, že jeho ramena MN stále procházejí dvěma pevnými body m, n, probíhá jeho vrchol v kružnici. Hledejme geometrické místo těchto vrcholů v hyperbolické rovině! Úhel dvou přímek v Kleinově zobrazení jest dán vzorcem

$$\alpha = \frac{i}{2} \log A \quad (\text{str. } 82),$$

při čemž A jest dvojpoměr paprsků MN vzhledem k tečnám vedeným z průsečíku (MN) k absolutní kuželosečce. Pro konstantní α jest $A = e^{-2i\alpha} = k$. Je-li absolutní kuželosečka dána rovnicí v homogenních souřadnicích $\eta\zeta - \xi^2 = 0$, zvolíme vhodně body m, n, třeba na přímce $\xi = 0 : m\,(0, 1, 1)$, $n\,(0, a, 1)$. Z proměnného bodu $v\,(x, y, z)$ vedeme k absolutní kuželosečce tečny. Jejich rovnice jest

$${}^{1,2}T = (\eta\zeta - \xi^2)\,(yz - x^2) - (\tfrac{1}{2}y\zeta + \tfrac{1}{2}z\eta - x\xi)^2 = 0.$$

Dále stanovíme dvojpoměr $(MN{}^1T{}^2T)$, který se rovná dvojpoměru průsečíků těchto paprsků s přímkou $\xi = 0$. Stanovíme oba průsečíky ${}^1t$, ${}^2t$ tečen ${}^1T$, ${}^2T$ s přímkou $\xi = 0$ a dvojpoměr $(mn{}^1t{}^2t)$ na přímce $\xi = 0$ má být konstantní.

Body ${}^1t$, ${}^2t$ mají souřadnice:

$${}^1t\,(0,\ yz - 2x^2 + 2x\sqrt{x^2 - yz},\ z^2),$$
$${}^2t\,(0,\ yz - 2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - yz},\ z^2),$$

$$(mn{}^1t{}^2t) =$$
$$\frac{(z^2 - yz + 2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - yz})\,(az^2 - yz + 2x^2 + 2x\sqrt{x^2 - yz})}{(z^2 - yz + 2x^2 + 2x\sqrt{x^2 - yz})\,(az^2 - yz + 2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - yz})} =$$
$$= k.$$

Vynásobíme-li a položíme $\frac{x}{z} = X$, $\frac{y}{z} = Y$, jest rovnice hledaného geometrického místa v nehomogenních souřadnicích:

$$\begin{aligned}&[Y^2 + (2X^2 - Y)\,(a + 1) + a]^2\,(1 - k)^2 - \\ &- 4X^2\,(a - 1)^2\,(1 + k)^2\,(X^2 - Y) = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

Nalezená křivka jest stupně čtvrtého K^4. Libovolná kružnice procházející body m, n protíná ji mimo body m, n ještě v šesti bodech. Lze tedy říci: Každému úhlu α jest na libovolné kružnici K^2 přiřazeno šest bodů takových, že se z nich dva pevné body m, n, které leží na K^2, promítají pod úhlem α. Pro $\alpha = 0$ jest $k = 1$

a křivka K^4 se rozpadne na absolutní kuželosečku a dvojnásobnou spojnici bodů m, n. Pro $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ jest $k = e^{\pm \pi i} = -1$ a křivka K^4 jest dvojnásobně počítanou kuželosečkou:

$$Y^2 + (2X^2 - Y)(a + 1) + a = 0.$$

Jsou-li ramena MN úhlu α vzájemně kolmá, pak jsou polárně sdružená vzhledem k absolutní kuželosečce (str. 86). Pohybuje-li se pravý úhel, vytvořují obě ramena dva paprskové svazky vzájemně projektivní o středech m, n; výtvorem těchto svazků jest skutečně kuželosečka.

Do roviny Poincaréovy se přímky M, N zobrazí do polokružnic $M'N'$ se středy na X. Budeme zde tedy hledati geometrické místo bodů, v nichž se kružnice procházející pevnými body m', n' (M' bodem m', N' bodem n') protínají pod konstantním úhlem α. Transformací (5) převedeme body m, n do bodů m', n'. Jejich souřadnice budou: $m'(0, 1)$, $n'(0, \sqrt{a})$. Užijeme-li pro výpočet úhlu vzorce Laguerrova:

$$\alpha = \frac{i}{2} \log \lambda,$$

při čemž $\lambda = (M', N', {}^1I', {}^2I')$ jest dvojpoměr paprsků M', N' vzhledem k isotropickým paprskům ${}^1I'$, ${}^2I'$, jdoucím průsečíkem $(M'N')$.

Rovnice kružnice M', která prochází bodem m' a proměnným bodem o souřadnicích (x, y, z) a má střed na ose X, v homogenních souřadnicích ξ, η, ζ zní

$$M' \equiv xz(\xi^2 + \eta^2) - \xi\zeta(x^2 + y^2 - z^2) - xz\zeta^2 = 0.$$

Rovnice kružnice N' bodem n' a bodem (x, y, z), jež má střed na X, jest

$$N' \equiv xz(\xi^2 + \eta^2) - \xi\zeta(x^2 - y^2 + az^2) - axz\zeta^2 = 0.$$

Tečny sestrojené k těmto kružnicím v průsečíku (x, y, z):

$${}^1T \equiv \xi\zeta(x^2 - y^2 + z^2) + 2xy\eta\zeta - xz(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

resp.

$${}^2T \equiv \xi\zeta(x^2 - y^2 + az^2) + 2xy\eta\zeta - xz(x^2 + y^2 + az^2) = 0.$$

Isotropické přímky bodem (x, y, z) mají rovnice:

$${}^1I' \equiv iz\xi - z\eta + \zeta(ix - y) = 0,$$
$${}^2I' \equiv iz\xi + z\eta - \zeta(ix + y) = 0.$$

Stanovíme dvojpoměr průsečíků $({}^1t, {}^2t, {}^1i, {}^2i)$ těchto čtyř přímek s přímkou $\xi = 0$.

$$^{1}t\,(0, x^2 + y^2 + z^2, 2yz), \quad ^{2}t\,(0, x^2 + y^2 + az^2, 2yz),$$
$$^{1}i\,(0, yz - ixz, z^2), \quad ^{2}i\,(0, yz + ixz, z^2).$$
$$(^{1}t^{2}t^{1}i^{2}i) =$$
$$= \frac{z^4 (x^2 + y^2 + z^2 - 2y^2 + 2ixy)(x^2 + y^2 + az^2 - 2y^2 - 2ixy)}{z^4 (x^2 + y^2 + z^2 - 2y^2 - 2ixy)(x^2 + y^2 + az^2 - 2y^2 + 2ixy)} =$$
$$= k.$$

Píšeme-li opět x, y místo $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, jest hledaná rovnice

$$[(x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)(a + 1) + a](1 - k) +$$
$$+ 2ixy\,(a - 1)(1 + k) = 0;$$

pro hyperbolickou rovinu musíme však uvažovati i křivku vzniklou zrcadlením na ose X, totiž

$$[(x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)(a + 1) + a](1 - k) -$$
$$- 2ixy\,(a - 1)(1 + k) = 0.$$

Výsledná rovnice zní:

$$[(x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)(a + 1) + a]^2 (1 - k)^2 +$$
$$+ 4x^2y^2 (a - 1)^2 (1 + k)^2 = 0 \equiv K'^4. \qquad (11')$$

Pro $a = 0$ obdržíme dvojnásobně počítanou spojnici obou bodů a přímku $y^2 = 0$, t. j. absolutní kuželosečka. Pro $\alpha = \pm \frac{1}{2}\pi$ jest křivka dvojnásobně počítanou „kuželosečkou" $(x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)(a + 1) + a = 0$. Provedeme-li na rovnici (11) transformaci (5), obdržíme (11′). Proložíme-li body m', n' libovolnou kružnici, získáme na ní opět šestibodové skupiny přiřazené jednotlivým úhlům.

Ukázali jsme, že v l a s t n o s t i h y p e r b o l i c k ý c h k r u ž n i c z d e z k o u m a n é j s o u n e z á v i s l é n a t o m, j a k é z o b r a z e n í v o l í m e. Zřejmě platí tato věta pro jakékoli vlastnosti kružnic, které nezávisí na volbě souřadného systému.

Jiná zobrazení hyperbolické roviny.

Promítneme-li polokouli ortogonálně do roviny rovníku, pak geometrie v hyperbolické rovině takto vzniklé jest konformní s geometrií na oné polokouli (str. 138). „Kružnice" této roviny, t. j. kuželosečky, které se dvojnásobně dotýkají rovníka, promítají se na kouli do kružnic: průměty cyklů neprotínají rovník, průměty horocyklů se ho dotýkají a průměty ekvidistant mají s ním dva body společné. Nezáleží na tom, kterou polovinu koule uvažujeme, poněvadž ortogonální průměty obou do roviny rovníka splývají. Máme-li třemi body v rovině rovníka proložiti kružnice, můžeme