O jistých parabolických plochách v $2n$-rozměrných eukleidovských prostorech.

O. Borůvka.

(Došlo 7. září 1932.)

1. V nedávno vyšlém pojednání[1]) studoval jsem ve čtyřrozměrném eukleidovském prostoru nadkružnice (t. j. křivky, jejichž všechny tři skalární křivosti jsou od nuly různé konstanty) a jistou třídu ploch obsahující mimo jiné zvláštní plochy přímkové, t. zv. plochy *přiřazené* nadkružnicím.

Výsledky v cit. pojednání uvedené, pokud se týkají nadkružnic, rozšířil p. M. Sypták na prostory o $2n$ a $2n + 1$ ($n \geq 2$) dimensích.[2]) V tomto článku ukáži, jak pojem ploch přiřazených nadkružnicím se rozšíří a jak nejdůležitější výsledky o nich se zobecní na prostory o $2n$ dimensích.

2. Připomeňme nejprve tyto výsledky o nadkružnicích. V eukleidovském prostoru o $2n$ (≥ 4) dimensích buď Γ libovolná nadkružnice (t. j. křivka, jejíž všechny skalární křivosti jsou od nuly různé konstanty). n-rozměrný prostor určený první, třetí, pátou atd. až $2n - 1$-ou normálou nadkružnice Γ v libovolném jejím bodě P jest t. zv. *kolmý prostor* nadkružnice Γ v bodě P. Nadkružnice Γ má *střed* (t. j. bod, jímž procházejí všechny její kolmé prostory) a n vzájemně totálně kolmých *osových rovin* (t. j. rovin, které se zachovají každým pohybem Γ v sebe); tyto procházejí středem Γ. Kolmý prostor nadkružnice Γ v libovolném jejím bodě P seče každou osovou rovinu právě v přímce, procházející (ovšem) středem Γ; o takové přímce pravíme, že má *osový směr* přiřazený bodu P. Každému bodu nadkružnice jest tedy přiřazeno n osových směrů, každý v jedné osové rovině.

Při vhodné volbě souřadného systému můžeme rovnice Γ psáti ve tvaru

$$X_{2\nu-1} = y_\nu \sin p_\nu x, \quad X_{2\nu} = y_\nu \cos p_\nu x \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

při čemž X jsou pravoúhlé souřadnice, x jest parametr na nadkružnici a y_ν, p_ν vhodné, od nuly různé konstanty, $p_\nu \neq p_\mu$ pro $\nu \neq \mu$. Naopak, každá křivka daná rovnicemi tvaru (1) (y_ν, p_ν

[1]) Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. (Spisy vydávané přírod. fakultou Masarykovy univ., čís. 146, 1931.)

[2]) M. Sypták, Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espaces euclidiens à p dimensions. (C. R. Acad. Sci. Paris *195*, 298—299, 1932).

konst. $\neq 0$, $p_\nu \neq p_\mu$ pro $\nu \neq \mu$) jest nadkružnice. Střed nadkružnice jest pak počátek souřadnic a k-tá ($k = 1, 2, \ldots, n$) osová rovina má rovnice $X_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $\nu \neq 2k - 1, 2k$. Osový směr v k-té osové rovině přiřazený libovolnému bodu nadkružnice, určenému hodnotou x parametru, má směrové kosiny

$$\varepsilon_{2\nu-1} \sin p_\nu x, \quad \varepsilon_{2\nu} \cos p_\nu x \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

při čemž

$$\varepsilon_{2\nu-1}, \ \varepsilon_{2\nu} = 0 \text{ pro } \nu \neq k \text{ a } \varepsilon_{2k-1}, \ \varepsilon_{2k} = 1.$$

3. *Plochy přiřazené nadkružnici Γ* definuji takto: Taková plocha jest místem přímek procházejících nadkružnicí Γ tak, že přímka procházející libovolným bodem P nadkružnice má osový směr přiřazený bodu P v jedné, pro všechny přímky téže osové rovině.

Podle toho jest celkem n ploch přiřazených nadkružnici Γ; tyto se protínají podél Γ a povrchové přímky každé z nich jsou rovnoběžné s jednou osovou rovinou.

Ze vzorců (1) a (2) plyne bezprostředně, že vzhledem k systému souřadnému, při němž má Γ rovnice (1), jsou rovnice k-té plochy přiřazené nadkružnici Γ dány opět vzorci (1), při čemž však mimo x i y_k jest považovati za neodvisle proměnnou.

Zřejmě můžeme vždy rovnice jedné plochy přiřazené nadkružnici Γ předpokládati ve tvaru

$$X_1 = y \sin x, \ X_2 = y \cos x, \ X_3 = y_2 \sin p_2 x, \ X_4 = y_2 \cos p_2 x, \ldots, \\ X_{2n} = y_n \cos p_n x, \tag{3}$$

při čemž x, y jsou neodvisle proměnné a p_μ, y_μ vhodné konstanty ($p_\mu \neq 0, 1$, $p_\mu \neq p_\varrho$ pro $\mu \neq \varrho$).

V dalším budu pro jednoduchost mluviti o plochách přiřazených nadkružnicím v širším smyslu tom, že vypustím podmínku $p_\mu \neq 1$. Plochy, o něž se tím rozšíří třída obecných (t. j. s $p_\mu \neq 1$) ploch přiřazených nadkružnicím se mohou považovati za limitní případ těchto a nebylo by nesnadné je rovněž definovati geometrickou konstrukcí (pro $n = 2$ v.[1]) str. 30).

4. Z řady geometrických vlastností uvažovaných ploch, jež plynou bezprostředně ze vzorců (3), vytknu jenom následující:

Každá plocha přiřazená nadkružnici připouští grupu ∞^1 pohybů v sebe, tutéž jako nadkružnice, jíž jest přiřazena. Trajektorie této grupy na ploše jsou nadkružnice a plocha je přiřazena každé z nich.

Lineární element plochy (3) jest

$$ds^2 = dy^2 + (y^2 + y_2^2 p_2^2 + \ldots + y_n^2 p_n^2)\, dx^2$$

a tedy:

Trajektorie grupy pohybů plochy v sebe na ploše sekou kolmo *povrchové přímky. Každá z uvažovaných ploch se dá deformovati na vhodnou plochu šroubovou.*

5. Nyní půjde o to *charakterisovati* plochy přiřazené nadkružnicím lokálními vlastnostmi. Za tím účelem objasním po př. zavedu několik pojmů, které v dalším budu potřebovati.

V uvažovaném $2n$-rozměrném prostoru[3]) uvažujme libovolnou plochu (M) patřící do toho prostoru a na ní libovolný bod M. V bodě M má uvažovaná plocha určitý počet oskulačních prostorů: oskulační prostor řádu 1, 2 atd. Oskulační prostor plochy řádu k v bodě M jest lineární prostor nejmenší dimense obsahující oskulační prostory k-tého řádu v bodě M všech křivek na ploše procházejících tím bodem. Je-li s_k dimense oskulačního prostoru k-tého řádu plochy v bodě M, jest v každém bodě dostatečně blízkém bodu M, dimense oskulačního prostoru k-tého řádu plochy $\geqq s_k$; bod M jest *regulární*, platí-li $= s_k$. Předpokládáme, že uvažovaná plocha (M) má jenom regulární body. Pak existuje přirozené číslo N takové, že $s_1 < s_2 < \ldots < s_N = 2n$ a oskulační prostory řádu $\geqq N$ plochy mají všechny dimensi $2n$; pravíme, že N jest počet oskulačních prostorů plochy (M).

V libovolném bodě M plochy *k-tý hlavní prostor* plochy, $1 \leqq k \leqq N - 1$, jest lineární prostor totálně kolmý v bodě M na oskulační prostor plochy k-tého řádu v bodě M a obsažený v osk. prostoru plochy $k + 1$-ho řádu v tom bodě.

Tedy jest v každém bodě plochy (M) právě $N - 1$ hlavních prostorů plochy, a to řádu $1, 2, \ldots, N - 1$ a k-tý hlavní prostor plochy má právě $s_{k+1} - s_k$ $(\geqq 1)$ dimensí.

Uvažujme nyní na ploše libovolnou křivku, procházející bodem M. Ta má v bodě M určitý počet $(\leq 2n - 1)$ vektorů křivosti: vektor první křivosti, druhé křivosti atd. Vektor k-té křivosti má směr vhodně orientované k-té normály křivky v bodě M a jeho délka a_k (> 0) jest k-tá skalární křivost křivky v bodě M. Vektor k-té křivosti křivky v bodě M leží v oskulačním prostoru plochy řádu $k + 1$ v bodě M.

Ortogonální průmět vektoru, který má směr vektoru k-té křivosti v bodě M a délku $a_1 . a_2 \ldots a_k$, do k-tého hlavního prostoru $(1 \leqq k \leqq N - 1)$ plochy v bodě M, jest t. zv. *vektor k-té normální křivosti* uvažované *křivky v bodě M*. Vrcholy vektorů k-té normální křivosti v bodě M všech křivek na ploše jdoucích tím bodem tvoří t. zv. *charakteristiku k-té normální křivosti plochy v bodě M*. V každém bodě plochy (M) jest právě $N - 1$ charakteristik normálních křivostí, a to první, druhé atd.

Dá se ukázati, že všechny charakteristiky normální křivosti

[3]) Pojmy po př. obecné výsledky v tomto odstavci uvedené mají smysl po př. platí obecněji pro n $(\geqq 4)$ rozměrný prostor.

v každém bodě plochy jsou racionální uzavřené *křivky*.[4]) Zvláště charakteristika první normální křivosti jest vždy elipsa. Má-li k-tý hlavní prostor plochy v bodě M právě jednu dimensi, redukuje se ovšem charakteristika k-té normální křivosti plochy v bodě M na úsečku. Bod M plochy nazývá se *parabolický*, jestliže charakteristika první normální křivosti plochy v bodě M prochází bodem M. Plocha (M) nazývá se *parabolická*, jestliže každý její bod jest parabolický.

6. Hledejme nyní všechny plochy patřící do $2n$-rozměrného prostoru, z nichž každá (M) má tyto lokální vlastnosti:

1^0 (M) jest zvláštní plocha parabolická taková, že charakteristika první normální křivosti v každém bodě M plochy má v M jeden vrchol a poměr jejích os jest týž v každém bodě plochy;

2^0 oskulační prostor k-tého řádu ($k = 3, 4, \ldots, 2n - 2$) v každém bodě M plochy jest právě $k + 2$ rozměrný.

Je-li $n = 2$, jde-li tedy o prostor čtyřrozměrný, a má-li plocha (M) vlastnost 1^0, neexistují pro ni oskulační prostory řádu $\geqq 3$. Takové plochy právě studoval jsem v cit. pojednání[1]) a našel jsem je všechny; zvláště platí, že obecné plochy přiřazené nadkružnicím jsou charakterisovány vlastností 1^0 a tím, že poměr délek os charakteristiky první normální křivosti (poměr délky osy, jejíž žádný koncový bod není v příslušném bodě M na ploše k délce osy druhé) jest $\neq 2$. Budu tedy v dalším předpokládati $n \geqq 3$.

7. Předpokládejme, že existují plochy mající vlastnosti 1^0, 2^0 a buď (M) jedna z nich. Každému jejímu bodu M přiřaďme $2n$ jednotkových, vzájemně kolmých vektorů $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_{2n}$. Vzhledem k (pohyblivému) systému souřadnému M; $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_{2n}$ můžeme vyjádřiti vektory dM, $d\mathfrak{e}_\nu$ vzorci tvaru

$$
\begin{aligned}
dM &= \omega_1 \mathfrak{e}_1 + \omega_2 \mathfrak{e}_2 + \ldots + \omega_{2n} \mathfrak{e}_{2n}; \\
d\mathfrak{e}_\nu &= \omega_{\nu 1} \mathfrak{e}_1 + \omega_{\nu 2} \mathfrak{e}_2 + \ldots + \omega_{\nu, 2n} \mathfrak{e}_{2n}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n)
\end{aligned} \tag{4}
$$

při čemž ω jsou lineární formy v diferenciálech proměnných, od nichž závisí pohyblivý systém. Vzhledem k tomu, že vektory $\mathfrak{e}_\nu$ jsou jednotkové a vzájemně kolmé, splněny jsou rovnice

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{5}$$

Mimo to splňují formy ω kvadratické relace[5]) [podmínky integrability systému (4)]

---

[4]) Důkaz této věty a různé úvahy k ní se vztahující jest v mém pojednání Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions á courbure constante I. (Spisy vyd. přírod. fakultou Masarykovy univ., čís. 165, 1932.)

[5]) V. na př. E. Cartan, La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à n dimensions (Bull. de la Soc. math. de France, t. XLIV; 1916; p. 67).

$$\omega'_\nu = [\omega_1\omega_{1\nu}] + [\omega_2\omega_{2\nu}] + \ldots + [\omega_{2n}\omega_{2n,\nu}];$$
$$\omega'_{\mu\nu} = [\omega_{\mu 1}\omega_{1\nu}] + [\omega_{\mu 2}\omega_{2\nu}] + \ldots + [\omega_{\mu,2n}\omega_{2n,\nu}]. \qquad (6)$$

Poznamenejme, že lineární element plochy (M) jest

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_{2n}^2.$$

V každém bodě M plochy jest vzhledem k vlastnosti 1^0 plochy (M) první hlavní prostor plochy rovina; vzhledem k vlastnosti 2^0 jest druhý a každý další hlavní prostor plochy přímka a existuje celkem $N = 2n - 2$ oskulačních prostorů a tedy $2n - 3$ charakteristik normálních křivostí, jež jsou mimo první, úsečkami.

Volbu pohyblivého systému určeme nyní blíže těmito podmínkami: V každém bodě M plochy zvolme příslušné vektory e_1, e_2 v tečné rovině plochy; vektory e_3, e_4 v první hlavní rovině plochy, a to tak, že e_3 jest ve směru tečny charakteristiky první normální křivosti v bodě M, e_4 ve směru osy charakteristiky první normální křivosti, jejíž koncový bod jest M; vektor e_5 v druhé hlavní přímce plochy; vektor e_6 v třetí hlavni přímce plochy atd.; vektor e_{2n} v $2n$ — 3-tí hlavní přímce plochy.

Vektory e_1, e_2 přiřazené libovolnému bodu M plochy jsou zřejmě v tečné rovině plochy v bodě M, když a jen když

$$\omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_{2n} = 0. \qquad (7)$$

Podle (6) platí pak kvadratické relace

$$[\omega_1\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}] = [\omega_1\omega_{14}] + [\omega_2\omega_{24}] = \ldots$$
$$\ldots = [\omega_1\omega_{1,2n}] + [\omega_2\omega_{2,2n}] = 0$$

a tudíž $\omega_{1\nu}$, $\omega_{2\nu}$ $(\nu = 3, 4, \ldots, 2n)$ jsou lineárními kombinacemi forem ω_1, ω_2 tvaru

$$\omega_{1\nu} = p_{2\nu 0}\omega_1 + p_{1\nu 1}\omega_2,$$
$$\omega_{2\nu} = p_{1\nu 1}\omega_1 + p_{0\nu 2}\omega_2, \quad (\nu = 3, 4, \ldots, 2n) \qquad (8)$$

při čemž p jsou funkcemi proměnných, od nichž závisí pohyblivý systém souřadný.

Abychom vyjádřili zmíněnou volbu vektorů e_3, e_4 a dalších, uvažujme na ploše libovolný bod M a libovolnou křivku jdoucí bodem M, jejichž prvních $2n$ — 3 skalárních křivostí jest v bodě M různo od nuly. Takové křivky na ploše bodem M procházejí v libovolném směru (v tečné rovině).

Buď σ oblouk na uvažované křivce. Na ní jsou formy ω, vyskytující se v (4) formami v $d\sigma$ a zvláště, je-li Θ úhel, který v bodě M svírá tečna uvažované křivky s vektorem e_1, jest

$$\omega_1 = d\sigma \cos \Theta, \quad \omega_2 = d\sigma \sin \Theta. \qquad (9)$$

Ze vzorců (4), (7), (8), (9) plyne pak snadno

$$M'' = \ldots + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4 + \ldots + \xi_{2n} e_{2n}, \tag{10}$$

při čemž derivace na levé straně jest podle σ, vynechaný výraz jest lineární kombinace vektorů e_1, e_2 a

$$\xi_\nu = p_{2\nu 0} \cos^2 \Theta + 2p_{1\nu 1} \cos \Theta \sin \Theta + p_{0\nu 2} \sin^2 \Theta$$
$$(\nu = 3, 4, \ldots, 2n).$$

Avšak vektor M'' jest v oskulační rovině uvažované křivky v bodě M a tedy v oskulačním prostoru druhého řádu plochy v bodě M. Tento jest podle učiněné volby vektorů e určen vektory e_1, e_2, e_3, e_4. Tedy jest pro $\nu = 5, 6, \ldots, 2n$: $\xi_\nu = 0$ a ježto Θ jest libovolné, $p_{2\nu 0} = p_{1\nu 1} = p_{0\nu 2} = 0$. Tedy jest

$$\begin{aligned} \omega_{15} &= \omega_{16} = \ldots = \omega_{1,2n} = 0; \\ \omega_{25} &= \omega_{26} = \ldots = \omega_{2,2n} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Dále však platí v bodě M uvažované křivky Frenetovy vzorce

$$\begin{aligned} M' &= t, \\ t' &= a_1 n_1, \\ n'_\nu &= -a_\nu n_{\nu-1} + a_{\nu+1} n_{\nu+1}, \\ &(\nu = 1, 2, \ldots, 2n - 1;\ n_0 \equiv t,\ a_{2n} = 0) \end{aligned} \tag{12}$$

při čemž t, n_r jsou jednotkové vektory ve směru tečny a jednotlivých normál křivky, a_ν jsou její skalární křivosti a derivace na levé straně jsou podle σ.

Ze vzorců (12) plyne zvláště pro bod M

$$M'' = a_1 n_1,$$

takže podle (10) ξ_3, ξ_4 jsou složky vektoru první normální křivosti uvažované křivky v bodě M do směru vektorů e_3, e_4. Tedy jsou parametrické rovnice charakteristiky první normální křivosti plochy v bodě M vzhledem k e_3, e_4 dány vzorci

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \frac{p_{230} + p_{032}}{2} + \frac{p_{230} - p_{032}}{2} \cos 2\Theta + p_{131} \sin 2\Theta, \\ \xi_4 &= \frac{p_{240} + p_{042}}{2} + \frac{p_{240} - p_{042}}{2} \cos 2\Theta + p_{141} \sin 2\Theta, \end{aligned} \tag{13}$$

v nichž Θ je parametr.

Vektory e_1, e_2 přiřazené bodu M jsou v tečné rovině určeny až na rotace okolo bodu M. Provedeme-li případně vhodnou rotaci, docílíme, že libovolně zvolený bod na charakteristice první normální křivosti v. bodě M, daný svými souřadnicemi ξ_3, ξ_4 určen jest hodnotou $\Theta = \frac{1}{2}\pi$ parametru. Vzhledem k vlastnosti 1⁰ plochy (M) jest bod M ($\xi_3 = \xi_4 = 0$) na charakteristice (13). Můžeme tedy předpokládati, a pak jsou vektory e_1, e_2 až na orientaci (t. j. až na vektory opačného směru) úplně určeny, že jest určen hodnotou $\Theta = \frac{1}{2}\pi$ parametru. Podle vlastnosti 1° plochy (M) jest pak bod $\Theta = \frac{1}{2}\pi$ elipsy (13) jedním jejím vrcholem a podle učiněné volby vektorů e_3, e_4 jest přímka $\xi_3 = 0$ ($\xi_4 = 0$) jedna její osa (její tečna v bodě $\Theta = \frac{1}{2}\pi$). Tedy jest

$$p_{032} = p_{042} = p_{230} = p_{141} = 0$$

a $2\,|\,p_{131}\,|$, $|\,p_{240}\,|$ jsou délky obou os charakteristiky. Při vhodné orientaci vektorů e_3, e_4 můžeme předpokládati $p_{131}, p_{240} > 0$ a je-li k vhodná kladná konstanta, jest podle 1° $2p_{131} = kp_{240}$. Pro jednoduchost označení pišme ještě $2m_1$ místo p_{240}. Máme pak podle (8)

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= km_1\omega_2; \qquad & \omega_{14} &= 2m_1\omega_1; \\ \omega_{23} &= km_1\omega_1; & \omega_{24} &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Rovnice (14) a (11) vyjadřují vlastnost 1° plochy (M) a uvažovanou volbu vektorů e_3, e_4. Vedou na tyto kvadratické relace

$$\begin{gathered} [\omega_2 \frac{\mathrm{d}m_1}{m_1}] - 2\,[\omega_1\,(\omega_{12} + \frac{1}{k}\,\omega_{34})] = 0; \\ [\omega_1 \frac{\mathrm{d}m_1}{m_1}] + 2\,[\omega_2\omega_{12}] = 0; \\ 2\,[\omega_1 \frac{\mathrm{d}m_1}{m_1}] + [\omega_2\,(2\omega_{12} + k\omega_{34})] = 0; \\ [\omega_1\,(2\omega_{12} + k\omega_{34})] = 0; \\ k\,[\omega_2\omega_{35}] + 2\,[\omega_1\omega_{45}] = k\,[\omega_2\omega_{36}] + 2\,[\omega_1\omega_{46}] = \ldots \\ = k\,[\omega_2\omega_{3,2n}] + 2\,[\omega_1\omega_{4,2n}] = 0; \\ [\omega_1\omega_{35}] = [\omega_1\omega_{36}] = \ldots = [\omega_1\omega_{3,2n}] = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Tudíž jsou formy $\omega_{3\nu}$, $\omega_{4\nu}$ ($\nu = 5, 6, \ldots, 2n$) lineárními kombinacemi ω_1, ω_2 tvaru

$$\begin{aligned} \omega_{3\nu} &= p_{3\nu 0}\omega_1; \\ \omega_{4\nu} &= p_{1\nu 2}\omega_1 + \tfrac{1}{2}kp_{3\nu 0}\omega_2, \quad (\nu = 5, 6, \ldots, 2n) \end{aligned} \tag{16}$$

při čemž p jsou funkcemi proměnných, od nichž závisí systém souřadný.

Abychom vyjádřili volbu vektoru e_5, uvažujme na ploše libovolný bod M a křivku jím jdoucí — jako dříve. Z předcházejících vzorců plyne snadno

$$M''' = \ldots + \xi_5 e_5 + \xi_6 e_6 + \ldots + \xi_{2n} e_{2n}, \tag{17}$$

při čemž derivace na levé straně jest podle σ, vynechaný výraz jest lineární kombinace vektorů e_1, e_2, e_3, e_4 a

$$\xi_\nu = 2m_1 p_{1\nu 2} \cos^3\Theta + 3km_1\,p_{3\nu 0}\cos^2\Theta\sin\Theta, \quad (\nu = 5, 6, \ldots, 2n)$$

Avšak vektor M''' jest v oskulačním prostoru třetího řádu uvažované křivky v bodě M a tedy v oskulačním prostoru třetího řádu plochy v bodě M. Tento jest podle učiněné volby vektorů e určen vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5$. Tedy jest pro $\nu = 6, \ldots, 2n$: $\xi_\nu = 0$ a ježto Θ jest libovolné, $p_{1\nu 2} = p_{3\nu 0} = 0$. Tedy jest

$$\begin{aligned} \omega_{36} &= \ldots = \omega_{3,2n} = 0, \\ \omega_{46} &= \ldots = \omega_{4,2n} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Dále však plyne z Frenetových vzorců pro bod M:

$$M''' = \ldots + a_1 a_2 \mathbf{n}_2,$$

při čemž vynechaný výraz jest lineární kombinací vektorů $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_1$ a tedy vektorů $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$. Tedy podle (17) jest ξ_5 složka vektoru druhé normální křivosti uvažované křivky v bodě M do směru vektoru $\mathbf{e}_5$.

Rovnice (18) vedou na kvadratické relace

$$[\omega_{35}\omega_{5\nu}] = [\omega_{45}\omega_{5\nu}] = 0 \quad (\nu = 6, \ldots, 2n),$$

t. j. vzhledem k (16)

$$p_{350}\,[\omega_1\omega_{5\nu}] = 0; \; p_{152}\,[\omega_1\omega_{5\nu}] + \tfrac{1}{2}k p_{350}\,[\omega_2\omega_{5\nu}] = 0, \quad (\nu = 6, \ldots, 2n).$$

Odtud plyne bezprostředně, že je-li $p_{350} \neq 0$, jest $\omega_{5\nu} = 0$ a tedy plocha (M) patří do prostoru o nejvýše pěti rozměrech — což je proti předpokladu. Tedy jest

$$p_{350} = 0,$$

a pak nutně $p_{152} \neq 0$, neboť jinak by plocha (M) patřila do čtyřrozměrného prostoru; vhodnou orientací vektoru $\mathbf{e}_5$ můžeme dokonce docíliti $p_{152} > 0$. Pišme pro jednoduchost m_2 (> 0) místo p_{152}. Parametrická rovnice charakteristiky druhé normální křivosti vzhledem k $\mathbf{e}_5$ jest pak dána vzorcem

$$\xi_5 = 2m_1 \,.\, m_2 \cos^3 \Theta,$$

při čemž Θ je parametr a $4m_1 \,.\, m_2$ jest délka charakteristiky.

Dále máme

$$\omega_{35} = 0; \quad \omega_{45} = m_2\omega_1 \tag{19}$$

a tyto rovnice spolu s (18) a předcházejícími vyjadřují vlastnost 1⁰ plochy (M) a vlastnost 2⁰ týkající se oskulačního prostoru třetího řádu a současně učiněnou volbu vektorů $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5$ (a i jejich orientaci, až na orientaci $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$). Poznamenejme, že rovnice (19) a (18) vedou na kvadratické relace

$$[\omega_1\omega_{34}] = 0; \; [\omega_1 \frac{\mathrm{d}m_2}{m_2}] + [\omega_2\omega_{12}] = 0; \; [\omega_1\omega_{5\nu}] = 0 \; (\nu = 6, \ldots, 2n). \tag{20}$$

Pokračujme nyní úplnou indukcí. Buď j přirozené, $3 \leqq j \leqq 2n - 3$ a předpokládejme, že

1. rovnice

$$\begin{aligned} &\omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_{2n} = 0; \\ &\omega_{13} = km_1\omega_2; \quad \omega_{14} = 2m_1\omega_1; \quad \omega_{1\nu} = 0, \qquad (21) \\ &\omega_{23} = km_1\omega_1; \quad \omega_{24} = 0; \quad \omega_{2\nu} = 0; \quad (m_1 > 0;\ \nu = 5, 6, \ldots, 2n); \\ &\omega_{35} = 0; \quad \omega_{3\nu} = 0; \quad (\nu = 6, \ldots, 2n); \\ &\omega_{\alpha+1,\alpha+2} = m_{\alpha-1}\omega_1; \quad \omega_{\alpha+1,\nu} = 0; \\ &(\alpha = 3, \ldots, j;\ m_{\alpha-1} > 0;\ \nu = \alpha + 3, \ldots, 2n), \end{aligned}$$

při čemž $m_{\alpha-1}$ jsou funkcemi proměnných, od nichž závisí pohyblivý systém, vyjadřují vlastnost 1° plochy (M) a vlastnost 2°, týkající se oskulačních prostorů řádu $3, \ldots, j$ a současně učiněnou volbu vektorů $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{j+2}$ (a i jejich orientaci až na orientaci vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$);

2. parametrická rovnice charakteristiky α — 1-vé normální křivosti vzhledem k vektoru $\mathbf{e}_{\alpha+2}$ jest

$$\xi_{\alpha+2} = 2m_1 \,.\, m_2 \ldots m_{\alpha-1} \cos^\alpha \Theta \quad (\alpha = 3, \ldots, j),$$

v nichž Θ jest parametr.

Tyto předpoklady jsou fakta, jak jsme právě viděli, pro $j = 3$. Ukažme, že z nich plyne platnost výroků 1. a 2. pozměněných tak, že v nich místo j čteme $j + 1$; avšak s výhradou, že v případě $j = 2n - 3$ vynecháme rovnice $\omega_{\alpha+1,\nu} = 0$, $\alpha = j + 1 = 2n - 2$, $\nu = \alpha + 3, \ldots, 2n$ (jež nemají smyslu).

Vskutku, především skupina rovnic napsaných v posledním řádku (21) pro $\alpha = j$ vede na kvadratické relace

$$[\omega_1 \frac{dm_{j-1}}{m_{j-1}}] + [\omega_2\omega_{12}] = 0; \ [\omega_1\omega_{j+2,\nu}] = 0, \ (\nu = j + 3, \ldots, 2n, \qquad (22)$$

takže zvláště formy $\omega_{j+2,\nu}$ jsou lineárními kombinacemi forem ω_1, ω_2 tvaru

$$\omega_{j+2,\nu} = m_{\nu-3}\omega_1, \quad (\nu = j + 3, \ldots, 2n)$$

při čemž $m_{\nu-3}$ jsou funkcemi proměnných, od nichž závisí pohyblivý systém.

Uvažujme opět na ploše libovolný bod M a křivku jím jdoucí — jako dříve. Z rovnic (21) plyne snadno

$$M^{(j+1)} = \ldots + \xi_{j+3}\mathbf{e}_{j+3} + \ldots + \xi_{2n}\mathbf{e}_{2n}, \qquad (23)$$

při čemž derivace na levé straně jest podle σ, vynechaný výraz jest lineární kombinace vektorů $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{j+2}$ a

$$\xi_\nu = 2m_1 \,.\, m_2 \ldots m_{j-1} \,.\, m_{\nu-3} \cos^{j+1} \Theta, \quad (\nu = j + 3, \ldots, 2n).$$

Avšak vektor $M^{(j+1)}$ jest v oskulačním prostoru $j + 1$-ho řádu plochy v bodě M a tento jest podle učiněné volby vektorů $\mathbf{e}$ určen vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{j+3}$. Tedy jest *v případě* $j < 2n - 3$ pro $\nu =$

$= j + 4, \ldots, 2n : \xi_\nu = 0$ a ježto Θ jest libovolné, $m_{\nu-3} = 0$; tedy jest při vhodné orientaci vektoru e_{j+3}

$$\omega_{j+2,j+3} = m_j\omega_1; \quad \omega_{j+2,\nu} = 0, \quad (m_j > 0; \ \nu = j + 4, \ldots, 2n), \tag{24}$$

kdežto *v případě* $j = 2n - 3$ jest poslední skupinu rovnic (24) vynechati. Tedy platí s uvedenou výhradou výrok 1., i když v něm místo j čteme $j + 1$.

Dále plyne snadno z Frenetových rovnic

$$M^{(j+1)} = \ldots + a_1 \, . \, a_2 \ldots a_j \mathrm{n}_j,$$

při čemž vynechaný výraz jest lineární kombinací vektorů $\mathrm{t}, \mathrm{n}_1, \ldots, \mathrm{n}_{j-1}$ a tedy vektorů $e_1, \ldots, e_{j+2}$. Tedy jest podle (23) ξ_{j+3} složka vektoru j-té normální křivosti uvažované křivky v bodě M do směru vektoru e_{j+3} a tedy parametrická rovnice charakteristiky j-té normální křivosti jest

$$\xi_{j+3} = 2m_1 \, . \, m_2 \ldots m_j \cos^{j+1} \Theta,$$

při čemž Θ je parametr. Tedy platí výrok 2., i když v něm místo j čteme $j + 1$.

Tedy jsou vlastnosti 1^0 a 2^0 plochy (M) a současně učiněná volba vektorů e (a i jejich orientace až na orientaci vektorů e_1, e_2) vyjádřeny rovnicemi (21), čteme-li v nich $j = 2n - 2$ a vypustíme rovnice $\omega_{2n-1,\nu} = 0$, $\nu = 2n + 1, \ldots, 2n$. Mimo to platí výrok 2. pro $j = 2n - 2$.

Považujeme-li rovnice (4) za definující formy ω v proměnných M, e, systém rovnic (21), pro $j = 2n - 2$, spolu s rovnicemi (5) definují uvažované plochy (existují-li) a spolu příslušný pohyblivý systém. Vedou na tyto podmínky integrability [jež snadno plynou z (15), (20), (22)]

$$[\omega_2 \frac{\mathrm{d}m_1}{m_1}] = 0; \qquad [\omega_1 \frac{\mathrm{d}m_1}{m_1}] + k\,[\omega_2\omega_{34}] = 0;$$

$$[\omega_1 \frac{\mathrm{d}m_1}{m_1}] + 2\,[\omega_2\omega_{12}] = 0; \qquad [\omega_1\omega_{12}] = [\omega_1\omega_{34}] = 0;$$

$$[\omega_1 \frac{\mathrm{d}m_{\alpha-1}}{m_{\alpha-1}}] + [\omega_2\omega_{12}] = 0; \quad \alpha = 3, 4, \ldots, 2n - 2.$$

Tyto relace ukazují, že systém rovnic, o nějž jde, není v involuci a že můžeme jej prodloužiti rovnicemi

$$\frac{\mathrm{d}m_1}{m_1} = 2n_1\omega_2; \quad \omega_{12} = n_1\omega_1; \quad \omega_{34} = \frac{2}{k} n_1\omega_1; \quad \mathrm{d}n_1 = (n_1^2 - k^2 m_1^2)\,\omega_2,$$

při čemž n_1 ($\neq 0$) jest nová proměnná.

Prodloužený systém jest pak

$$\begin{aligned}
&\omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_{2n} = 0;\\
&\omega_{13} = km_1\omega_2;\ \ \omega_{14} = 2m_1\omega_1;\ \ \omega_{1\nu} = 0; \qquad\qquad (25)\\
&\omega_{23} = km_1\omega_1;\ \ \omega_{24} = 0;\ \ \ \ \omega_{2\nu} = 0;\ \ (m_1 > 0;\ \nu = 5, 6, \ldots, 2n);\\
&\frac{\mathrm{d}m_1}{m_1} = 2n_1\omega_2;\ \ \omega_{12} = n_1\omega_1;\ \ \mathrm{d}n_1 = (n_1{}^2 - k^2m_1{}^2)\,\omega_2;\\
&\omega_{34} = \frac{2}{k}n_1\omega_1;\ \ \ \ \omega_{3\nu} = 0;\ \ \ \ (\nu = 5, 6, \ldots, 2n);\\
&\omega_{\alpha+1,\,\alpha+2} = m_{\alpha-1}\omega_1;\ \ \omega_{\alpha+1,\,\nu} = 0;\\
&(\alpha = 3, 4, \ldots, 2n-2;\ m_{\alpha-1} > 0;\ \nu = \alpha + 3, \ldots, 2n);
\end{aligned}$$

a definuje uvažované plochy. Jeho podmínky integrability jsou

$$[\omega_1\,(\frac{\mathrm{d}m_{\alpha-1}}{m_{\alpha-1}} - n_1\omega_2)] = 0 \qquad (26)$$

a ukazují, že systém (25) jest v involuci a jeho řešení závisí na $2n - 4$ funkcích jedné proměnné. Máme tedy tento výsledek:

Plochy ve 2n-rozměrném prostoru ($n \geqq 3$), z nichž každá (M) má tyto lokální vlastnosti:

1[0] *(M) jest zvláštní plocha parabolická taková, že charakteristika první normální křivosti v každém bodě M plochy má v M jeden vrchol a poměr jejích os jest týž v každém bodě plochy;*

2[0] *oskulační prostor k-tého řádu ($k = 3, 4, \ldots, 2n - 2$) v každém bodě M plochy jest právě $k + 2$ rozměrný,*

existují a závisí na $2n - 4$ funkcích jedné proměnné.

8. Tvrdím, že mezi uvažovanými plochami jsou všechny plochy přiřazené nadkružnicím a jsou *charakterisovány* tím, že připouštějí grupu ∞^1 pohybů v sebe.

Vskutku, uvažujme libovolnou plochu (*M*) soustavy (25) a předpokládejme, že připouští grupu ∞^1 pohybů v sebe. Trajektorie této grupy na ploše dají se definovati lineární relací mezi formami ω_1, ω_2 a na každé trajektorii jsou všechny invarianty plochy konstantní. Tedy zvláště m_1 je konstantní a tedy, ježto $n_1 \neq 0$, jest $\omega_2 = 0$ rovnice trajektorií. Tedy $m_{\alpha-1}$ ($\alpha = 3, \ldots, 2n - 2$) jest konstantní podél křivek $\omega_2 = 0$ a tedy jest, podle (26),

$$\frac{\mathrm{d}m_{\alpha-1}}{m_1} = n_1\omega_2, \quad (\alpha = 3, \ldots, 2n - 2). \qquad (27)$$

Jsou-li naopak na ploše (*M*) soustavy (25) splněny rovnice (27), závisí koeficienty příslušných rovnic (25) jenom na jednom parametru a příslušná plocha připouští grupu ∞^1 pohybů v sebe.

Avšak zřejmě systém rovnic (25), (27) dá se kompletně integrovati. Tedy existují v soustavě (25) plochy, které připouštějí grupu ∞^1 pohybů v sebe a závisí, jak je patrno, na $2n - 2$ konstantách, konstantu k v to počítaje. Jde o to, ukázati, že tyto plochy jsou přiřazené nadkružnicím.

9. Za tím účelem uvažujme jednu takovou plochu (M) a všimněme si především, že rovnice (25) obsahují $\omega'_2 = 0$, takže zvláště na ploše (M) jest ω_2 exaktní diferenciál. Odtud plyne snadno, že můžeme na (M) zvoliti neodvisle proměnné x, y tak, že

$$\omega_2 = \mathrm{d}y; \quad \omega_1 = \sqrt{y^2 + k_1^2}\,\mathrm{d}x;$$

$$n_1 = -\frac{y}{y^2 + k_1^2}; \quad km_1 = \frac{k_1}{y^2 + k_1^2}; \quad m_{\alpha-1} = \frac{k_{\alpha-1}}{\sqrt{y^2 + k_1^2}}.$$
$$(\alpha = 3, \ldots, 2n - 2)$$

při čemž $k_1, \ldots, k_{2n-3}$ jsou kladné konstanty.

Pišme pro stručnost e_1 místo $\dfrac{y\mathrm{e}_1 + k_1\mathrm{e}_3}{\sqrt{y^2 + k_1^2}}$ a e_3 místo $\dfrac{k_1\mathrm{e}_1 - y\mathrm{e}_3}{\sqrt{y^2 + k_1^2}}$, takže i nyní vektory $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_{2n}$ jsou jednotkové a vzájemně kolmé. Rovnice (25) vedou pak snadno na následující

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{e}_1 + \mathrm{d}y\,\mathrm{e}_2 + k_1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{e}_3;\\
\mathrm{de}_1 &= -\mathrm{d}x\,\mathrm{e}_2;\\
\mathrm{de}_2 &= \mathrm{d}x\,\mathrm{e}_1;\\
\mathrm{de}_3 &= \frac{2}{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{e}_4;\\
\mathrm{de}_4 &= -\frac{2}{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{e}_3 + k_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{e}_5;\\
\mathrm{de}_{\alpha+2} &= -k_{\alpha-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{e}_{\alpha+1} + k_\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{e}_{\alpha+3}; \quad (\alpha = 3, \ldots, 2n-2;\ k_{2n-2} = 0).
\end{aligned} \tag{28}$$

Rovnice (28) především ukazují, že v každém bodě M plochy rovina určená vektory $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ jest rovnoběžná s pevnou rovinou a prostor určený vektory $\mathrm{e}_3, \ldots, \mathrm{e}_{2n}$ jest rovnoběžný s pevným $2n - 2$-rozměrným prostorem. Zvolme pevný pravoúhlý systém souřadný tak, aby rovnice oné roviny vzhledem k němu byly $X_3 = \ldots = X_{2n} = 0$ a rovnice toho prostoru byly $X_1 = X_2 = 0$.

Ortogonální průměty vektorů $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ do roviny X_1, X_2 jsou pak vektory ekvipolentní s $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$. Tedy průmět vektoru $\mathrm{d}M$ do téže roviny má vzhledem k průmětům vektorů $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ tytéž složky jako $\mathrm{d}M$ vzhledem k $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$. Avšak je-li M^* průmět bodu M do roviny X_1X_2 jest zřejmě průmět vektoru $\mathrm{d}M$ do uvažované roviny roven $\mathrm{d}M^*$. Tedy jest podle (28)

$$\mathrm{d}M^* = y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{e}_1 + \mathrm{d}y\,\mathrm{e}_2 = y\,\mathrm{de}_2 + \mathrm{d}y\,\mathrm{e}_2 = \mathrm{d}(y\mathrm{e}_2). \tag{29}$$

Po případném provedení vhodné rotace souřadných vektorů v rovině X_1X_2 má průmět vektoru e_2 vzhledem ke zvolenému souřadnému systému směr $\sin x, \cos x, 0, 0, \ldots, 0$; tedy podle (29), po vhodné translaci v rovině X_1X_2, jsou složky bodu M^* vzhledem k uvažovanému systému $y \sin x$, $y \cos x$, $0, 0, \ldots, 0$.

Ortogonální průměty vektorů $e_3, \ldots, e_{2n}$ do prostoru $X_3, \ldots, X_{2n}$ jsou ekvipolentní s $e_3, \ldots, e_{2n}$. Tedy průmět vektoru dM do téhož prostoru má vzhledem k průmětům vektorů $e_3, \ldots, e_{2n}$ tytéž složky jako dM vzhledem k $e_3, \ldots, e_{2n}$. Avšak je-li M^{**} průmět bodu M do prostoru $X_3, \ldots, X_{2n}$ jest zřejmě průmět vektoru dM do uvažovaného prostoru roven dM^{**}. Tedy jest podle (28)

$$dM^{**} = k_1 \, dx \, e_3,$$
$$de_3 = \frac{2}{k} \, dx \, e_4; \text{ atd.}$$

Tedy bod M^{**} opisuje (obecnou) nadkružnici. Zvolíme-li tedy v prostoru $X_3, \ldots, X_{2n}$ vhodně souřadné vektory, jsou složky bodu M^{**} vzhledem k uvažovanému systému

$$0,\ 0,\ y_2 \sin p_2 x,\ y_2 \cos p_2 x, \ldots, y_n \sin p_n x,\ y_n \cos p_n x,$$

při čemž y, p jsou vhodné konstanty. Tedy jsou rovnice uvažované plochy

$$X_1 = y \sin x,\quad X_2 = y \cos x,\quad X_3 = y_2 \sin p_2 x,\quad X_4 = y_2 \cos p_2 x, \ldots$$
$$\ldots, X_{2n} = y_n \cos p_n x.$$

Tedy jsou plochy, o něž jde, přiřazené nadkružnicím, j. b. d.

Máme tedy tento výsledek:

Plochy 2n-rozměrného prostoru, přiřazené nadkružnicím, patří mezi plochy s vlastnostmi 1^0 *a* 2^0 *popsanými v teorému v odst. 7 a jsou mezi nimi charakterisovány tím, že připouštějí grupu* ∞^1 *pohybů v sebe.*

10. Jest nyní snadné charakterisovati plochy přiřazené nadkružnicím čistě lokálními vlastnostmi. Za tím účelem stačí vhodně interpretovati rovnice (27), které v systému (25) charakterisují právě plochy přiřazené nadkružnicím.

Všimněme si, že můžeme psáti rovnice (27) ve tvaru

$$2\,\frac{dm_2}{m_2} = 2\,\frac{dm_3}{m_3} = \ldots = 2\,\frac{dm_{2n-3}}{m_{2n-3}} = \frac{dm_1}{m_1}. \tag{30}$$

Tedy čtverce veličin $m_{\alpha-1}$ $(\alpha = 3, \ldots, 2n-2)$ v každém bodě plochy jsou úměrné (t. j. mají *konstantní* poměry) a jsou úměrné veličině m_1. Avšak snadno se vidí, že $m_{\alpha-1}$ jest poloviční nebo dvojnásobný poměr délky charakteristiky α — 1-vé normální křivosti k délce charakteristiky α — 2-hé normální křivosti (pro $\alpha = 3$: poloviční poměr délky charakteristiky druhé normální křivosti k délce jedné osy charakteristiky první normální křivosti) a m_1 jest poloviční délka jedné osy charakteristiky první normální křivosti v příslušném bodě plochy. Rovnice (30) a tedy i rovnice (27) vyjadřují, že v každém bodě plochy čtverce poměrů délek charakteristik dvou po sobě následujících normálních křivostí (délka charakteristiky