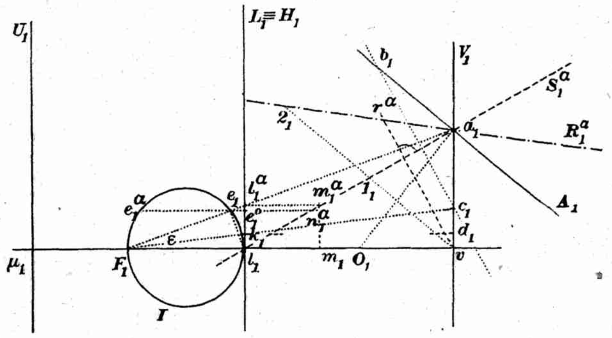
Poznámka k sestrojení normální křivky zborcené plochy šroubové.

F. Vyčichlo.

(Došlo 28. ledna 1932.)

Plocha šroubová P budiž vytknuta osou O a přímkou vytvořující V s daným parametrem p. Vyjadřme tuto plochu ortogonálním průmětem do roviny kolmé k O, jež obsahuje osu přímek O, V a buď dále v stopník přímky V na průmětně. Jest tudíž v pata kolmice spuštěné s průmětu O_1 osy O na průmět V_1 přímky V (obr. 1). Mění-li se přímka V na ploše, proběhne bod v normální křivku plochy. Naší úlohou bude sestrojiti elementárně oskulační kružnici této křivky v bodě v.



Obr. 1.

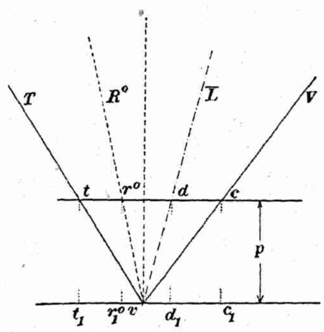
Rovina tečná α v libovolném bodě a přímky V uvažované plochy je stanovena přímkou V a tečnou A šroubové křivky příslušné bodu a. Protněme tuto rovinu rovinou rovnoběžnou k průmětně a mající od této vzdálenost $+p$ nebo $-p$, v přímce $\overline{bc}$, kde b je průsečík přímky A, c průsečík přímky V. Průmět spádové přímky S^α, vedené bodem a v rovině α, je kolmice spuštěná s a_1 na $\overline{b_1c_1}$, která nechť protne přímku $\overline{vO_1}$ v bodě l_1.

Přímky A a S^α jsou konjugované tečny plochy P a tedy také hyperboloidu H_V, který ji podél přímky V oskuluje. Náleží tedy přímka R^α, pro kterou $(AS^\alpha VR^\alpha) = -1$, tomuto hyperboloidu H_V.

Protne tudíž kolmice spuštěná s v na $\overline{a_1O_1}$ přímky $\overline{a_1l_1}$, R_1^α v bodech 1_1, 2_1, pro něž úsečka $\overline{1_12_1}$ rovná se úsečce $\overline{v_11_1}$.

Asymptotická rovina plochy H_V a příslušná přímce V protíná tudíž tuto plochu ještě v přímce U souměrně k V položené podle promítacího paprsku bodu l_1. Je tedy obrysem průmětu plochy H_V kuželosečka, která má bod v, jakož i symetrický k němu vzhledem k l_1 položený bod u_1 za vrcholy a bod O_1 za střed křivosti příslušný bodu v. Následkem toho druhá osa tohoto obrysu leží na přímce $\overline{H_1 \parallel V_1}$ vedené bodem 1_1 a čtverec poloosy rovná se tu součinu $\overline{vO_1} \,.\, \overline{vl_1}$.

Kolmice spuštěná s v na $\overline{a_1l_1}$ seče R_1^a v bodě r^a náležejícím stopě K_π plochy H_V na průmětně. Poněvadž kuželosečka K_π má v a u taktéž za vrcholy, je tím stanovena. Roviny rovnoběžné s průmětnou protínají H_V v kuželosečkách, jejichž středy leží na přímce L, pro kterou $L_1 \equiv H_1$, a jež je polárou vzhledem k ploše H_V nekonečně vzdálené přímky náležející průmětně. Hledejme přímku L.



Obr. 2.

Položme $\overline{vO_1} = m$, $\overline{vl_1} = n$ a protněme H_V rovinou rovnoběžnou s průmětnou a mající od ní vzdálenost p. Tato rovina seče V v bodě c a tečnu sestrojenou v bodě v ke křivce šroubové, kterou tento bod opíše, nechť protne v bodě t (obr. 2 je vzhledem k obr. 1 dvakráte větší); potom přímka R^0 harmonická k V vzhledem k tečně $\overline{vt}$ a promítacímu paprsku bodu v leží na ploše H_V. Je-li r^0 průsečík přímky R^0 s přímkou $\overline{ct}$ je r_1^0 harmonický k c_1 vzhledem k bodům v a t_1. Poněvadž $\overline{vc_1} = \overline{O_1l_1}$ jest $\overline{vc_1} = n - m$, $\overline{vt_1} = - m$, takže

$$-\frac{2}{m} = \frac{1}{n-m} + \frac{1}{\overline{vr_1^0}},$$

odkud plyne

$$\overline{vr_1^0} = -\frac{m(n-m)}{2n-m}.$$

Půlicí bod d_1 úsečky $\overline{c_1r_1^0}$ má od v vzdálenost

$$\overline{vd_1} = \tfrac{1}{2}(\overline{vc_1} + \overline{vr_1^0}) = \frac{(n-m)^2}{2n-m}.$$

Je-li d_1 průmětem bodu d na přímce $\overline{ct}$ ležícím, jest patrně přímka $\overline{vd}$ rovnoběžná s hledanou přímkou L.

Průměry procházející body na V těch kuželoseček plochy H_V, které leží v rovinách rovnoběžných k průmětně, vytvořují hyperbolický paraboloid, který má rovinu centrální plochy H_V náležející přímce V za jednu rovinu řídicí, která je rovinou promítací přímky V. Paraboloid proto obsahuje jednu přímku F kolmou k průmětně. Tvoří tudíž průměty uvažovaných průměrů svazek, jehož vrchol F_1 leží na přímce $\overline{vO_1}$. Ten z těchto průměrů, který prochází bodem c, seče L v bodě k, pro nějž $\overline{l_1k_1} = \overline{vd_1}$. Z podobných trojúhelníků $\triangle c_1vF_1$, $\triangle k_1l_1F_1$ plyne úměra

$$\overline{vc_1} : \overline{l_1k_1} = \overline{vF_1} : (\overline{l_1v_1} + \overline{vF_1}),$$

z níž dostaneme

$$\overline{vF_1} = 2n - m.$$

Leží tedy F_1 symetricky k bodu O_1 vzhledem k l_1.

Budiž dále K^a kuželosečka, ve které seče H_V rovina rovnoběžná s průmětnou a procházející bodem a, l^a budiž její střed. Kolmice s bodu $l_1{}^a$ na V_1 nechť protne $\overline{a_1l_1}$ v bodě $m_1{}^a$; z úměry

$$\overline{m_1{}^al_1{}^a} : \overline{vl_1} = \overline{l_1l_1{}^a} : \overline{va_1} = \overline{l_1k_1} : \overline{vc_1}$$

obdržíme

$$\overline{m_1{}^al_1{}^a} = \frac{n(n-m)}{2n-m}.$$

Protíná-li rovnoběžka k přímce V_1 bodem $m_1{}^a$ vedená přímku $\overline{vl_1}$ v bodě m_1, jest

$$vm_1 = \frac{n^2}{2n-m}.$$

Je patrno, že m_1 je středem křivosti křivky K_π pro bod v.

Určeme též střed křivosti $n_1{}^a$ kuželosečky $K_1{}^a$ pro bod a_1 tím, že patou e_1 kolmice s bodu l_1 na $a_1l_1{}^a$ spuštěné vedeme rovnoběžku k $\overline{vl_1}$, jež vytíná bod $n_1{}^a$ z přímky $\overline{a_1m_1{}^a}$. Protíná-li tato rovnoběžka přímku L_1 v bodě $e_1{}^0$, vyjádříme délku úsečky $\overline{e_1{}^0n_1{}^a}$ pomocí úměry

$$\overline{n_1{}^0e_1{}^a} : \overline{l_1e_1{}^0} = \overline{m_1{}^al_1{}^a} : \overline{l_1l_1{}^a}.$$

Označíme-li ε úhel přímky $\overline{F_1a_1}$ s přímkou $\overline{F_1v}$, jest

$$\overline{l_1e_1{}^0} = \overline{l_1F_1}\sin\varepsilon\cos\varepsilon,\quad \overline{m_1{}^al_1{}^a} = \frac{n(n-m)}{2n-m}\quad \text{a}\quad \overline{l_1l_1{}^a} = \overline{l_1F_1}\,\mathrm{tg}\,\varepsilon.$$

Dosazením těchto hodnot obdržíme z uvedené úměry

$$\frac{\overline{n_1{}^ae_1{}^0}}{\overline{l_1F_1}\cos^2\varepsilon} = \frac{n}{2n-m}.$$

Opišme nad $\overline{l_1F_1}$ jakožto průměrem kružnici I, tato prochází bodem e_1 a přímka $\overline{n_1{}^ae_1}$ ji protne ještě v bodě $e_1{}^a$. Jelikož $e_1{}^0e_1{}^a =$