Variační počet

jeho vývoj, jeho pokroky a jeho úloha v matematické fysice.

V. *Volterra.*

(Přednášky konané v r. 1931 na přírodovědeckých fakultách Karlovy a Masarykovy university).

Přeložil *Jan Potoček.*

První přednáška.

Obsah první přednášky.

1. Dějiny variačního počtu. 2. Obyčejné úlohy o maximu a minimu a variační počet. 3. Jakub Bernoulli. 4. Euler a jeho rovnice. 5. Lagrange. 6. Legendre, Jacobi. 7. Weierstrass. 8. Rovnice diferenciální, integrální a integrodiferenciální, které se odvozují z úloh variačního počtu. 9. Nové teorie navazující na variační počet. 10. Povšechný nástin nauky o funkcionálech. 11. Rovnice integrální a integrodiferenciální. 12. Komposice, záměnnost, addiční teorémy integrální. 13. Různé typy integrodiferenciálních rovnic. 14. Rovnice s funkcionálními derivacemi. 15. Isogenní funkcionály.

*

1. Nehodlám zde líčiti podrobně dějiny variačního počtu, chci pouze, dříve než přikročím na konci této přednášky a v přednášce příští k vlastnímu tématu, vyložiti hlavní cesty, kterými se jeho vývoj ubíral, a etapy, jimiž prošel, dále různá odvětví matematiky, která se k němu vztahují a která z něho vznikla. Ostatně jsou jeho dějiny dosti podrobně vylíčeny v různých učebnicích variačního počtu a v mnoha učebnicích počtu diferenciálního a integrálního. Zvláště upozorňuji na dílo Todhunterovo (1) „History of the Calculus of Variations“, v němž je vyložen vývoj teorií souvisících s variačním počtem v 19. století od Lagrangea až k Jacobimu a k jeho nejbližším následovníkům.

2. Úlohy o maximech a minimech byly známy už ve starověku. U Euklida a u starověkých matematiků lze pro to nalézti mnoho dokladů. Avšak obecné metody k jejich rozřešení mohly býti nalezeny teprve, když byla vybudována analytická geometrie a diferenciální počet. Pravidlo, jak určiti maxima a minima nějaké funkce z jejích derivací, připisuje se všeobecně Fermatovi.

Ale ačkoliv Lagrange uvedl obecné řešení úlohy variačního počtu na totéž pravidlo, přece se tato úloha podstatně liší od úlohy nalézti maxima a minima funkce o jedné nebo několika proměnných. Začněme s příkladem, jenž se vyskytuje v dějinách jako první toho druhu. Newton (2) si položil úlohu, nalézti rotační těleso nejmenšího odporu, t. j. jaký tvar je nutno dáti průřezu rotačního tělesa, které koná v kapalině postupný pohyb rovnoběžně se svou osou, aby se setkávalo s odporem co možná nejmenším. Tato úloha je velmi důležitá pro balistiku a pro konstrukci lodí.

Srovnáme-li tuto úlohu s úlohou určiti úsečku křivky, která odpovídá maximu pořadnice, vidíme, že v této úloze hledáme číslo, kdežto v oné hledáme profil, to jest křivku, což znamená funkci.

Podobně si všimněme jiné klasické úlohy: úlohy Jana Bernoulliho (3) o brachystochroně. Jest nalézti ve svislé rovině křivku spojující dva dané body tak, aby těžký bod po křivce padající proběhl ji v čase co možná nejkratším. I zde je to, co hledáme, křivka, to jest funkce, která ji vyjadřuje. Stejný tvar mají úlohy isoperimetrické, kterými se první zabýval obecně Jakub Bernoulli (4) a z nichž nejjednodušší jest nalézti uzavřenou rovinnou křivku dané délky takovou, aby obsah plochy jí omezené byl co možná největší.

Všechny tyto úlohy o maximech a minimech, v nichž jsou neznámými prvky funkce, tvoří variační počet. Přechod od obyčejných úloh diferenciálního počtu o maximech a minimech k úlohám počtu variačního lze názorně objasniti na jistém přechodu od konečna k nekonečnu, jenž jest pro nová odvětví matematiky příznačný.

Mějme na příklad na mysli úlohu určiti rovinný mnohoúhelník o n stranách takový, aby při daném obvodu byl jeho plošný obsah maximum. Buďte $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_n, y_n$ souřadnice jeho vrcholů. Jeho plošný obsah a jeho obvod budou dány vzorci

$$A = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x_i, & x_{i+1} \\ y_i, & y_{i+1}\end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i\,\Delta y_i - y_i\,\Delta x_i), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}, \tag{2}$$

kdež

$$x_{n+1} = x_1, \quad y_{n+1} = y_1,$$
$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

Jestliže však přejdeme od úlohy o mnohoúhelníku maximální plochy a konstantního obvodu k úloze najíti takovou uzavřenou křivku C dané délky l, aby plocha jí omezená byla co největší, máme

$$A = \tfrac{1}{2}\int_C (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \tag{3}$$

s podmínkou

$$\int_C \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = l = \text{const.} \tag{4}$$

Zde se již nevyskytují neznámé v konečném počtu, nýbrž neznámými jsou souřadnice všech bodů křivky (jichž jest nekonečně mnoho), to jest máme zde úlohu variačního počtu, v níž neznámou jest funkce nebo křivka.

V úloze o mnohoúhelníku stačilo určiti veličiny $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots, x_n, y_n$ závislé na indexu i, jenž nabývá n hodnot, a to čísel celých; u křivky však je nutno určiti souřadnice x, y všech bodů křivky vázaných vztahy

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad x(b) = x(a), \quad y(b) = y(a),$$

v nichž veličiny x, y závisí na parametru t, jenž se mění spojitě v intervalu (a, b). Spojitý parametr t nahrazuje nespojitý index i. Podobně jsou konečné součty vystupující ve vzorcích (1) a (2) nahrazeny ve vzorcích (3) a (4) integrály, v nichž jest parametr t integrační proměnnou. Postup, kterého jsme v tomto zvláštním případě užili, abychom přešli od úlohy s konečným počtem neznámých k úloze, v níž je neznámou funkce, vede nás k obecnému pravidlu, podle něhož nahrazujeme indexy nespojité indexy spojitými neboli parametry, a součty, které se k těmto indexům vztahují, integrály, v nichž jsou parametry integračními proměnnými.

Je však třeba dobře rozlišovati tyto úlohy od jiných úloh zcela jiného druhu, v nichž se však také určují neznámé funkce. Tak na příklad lze hledati křivky $y = y(x)$, které mají konstantní subtangentu a. Vyjde pak diferenciální rovnice

$$a \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y.$$

V této rovnici nevystupuje žádný integrál, v němž by se vyskytovaly zároveň všechny hodnoty y odpovídající nekonečně mnoha hodnotám x. Tato rovnice vyjadřuje pouze vztah mezi hodnotou y v jednom bodě a hodnotou v bodě nekonečně blízkém, charakterisovaném derivací $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

Obecněji všechny úlohy, které vedou k diferenciálním rovnicím tvaru

$$\mathrm{f}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

vyjadřují vztahy mezi y v nějakém bodě a v bodech nekonečně blízkých.

Docela jiného druhu je však úloha najíti rovinnou křivku $y = y(x)$, procházející dvěma danými body $x_0, y_0; x_1, y_1$ tak aby plošný obsah plochy vytvořené její rotací kolem osy x byl co nejmenší. Neboť plošný obsah je dán vzorcem

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 - y'^2}\, \mathrm{d}x$$

a tedy závisí na všech hodnotách y v intervalu (x_0, x_1).

4. Zakladatelé počtu variačního snažili se velice právě o to, aby nevybočili z mezí obyčejného integrálního počtu, aby totiž převedli úlohy variačního počtu na integraci diferenciálních rovnic.

Vskutku se jim podařilo, že nepřekročili hranic obyčejného infinitesimálního počtu, neboť jednak omezili druh úloh, jimiž se zabývali, jednak pojednávali o celé otázce způsobem, který v mnoha případech není docela přesný.

Podíváme-li se na otázku s obecného hlediska, dostaneme se mnohem dále než k diferenciálním rovnicím a v mnohých případech musíme dokonce opustiti metodu, která vede k diferenciálním rovnicím, a uvažovati o problému s jiného stanoviska.

To vše, jak brzy uvidíme, ukáže nám úlohu, kterou mají v nové analyse teorie, které teprve nedávno spatřily světlo světa.

3. Vraťme se krok zpět. Jakub Bernoulli první začal se soustavně zabývati úlohami variačního počtu. Od něho pochází tento princip: Má-li nějaká křivka tu vlastnost, že propůjčuje nějaké veličině hodnotu maximální nebo minimální, pak každý jakkoli malý její element má tutéž vlastnost. Na příklad každý element brachystochrony jest opět brachystochrona.

Lze tedy nahraditi nekonečně malý element oblouku lomenou čarou a snažiti se určiti jeho vrcholy, čímž se úloha převede na úlohu obyčejného diferenciálního počtu.

4. Euler (5) s analytickou dovedností a nevyrovnatelnou virtuositou rozšířil principy užité Bernoullim na rozsáhlou třídu úloh.

Nejdříve rozdělil tyto úlohy na dvě veliké skupiny, totiž na úlohy spočívající v tom, že se má dáti jednomu integrálu hodnota maximální či minimální, při čemž jsou předepsány jisté okrajové podmínky, a na úlohy spočívající v tom, že jeden integrál má nabýti maxima či minima, při čemž jiný integrál nebo několik jiných integrálů mají míti dané konstantní hodnoty. Tyto druhé úlohy právě slují úlohy isoperimetrické. Euler udal pravidlo, podle něhož lze převésti úlohy isoperimetrické na úlohy první; při tom předpokládal nejprve integrál tvaru

$$\int_a^b f(x, y, y')\,dx,$$

kde $y(x)$ je hledaná funkce a y' její derivace, a pak rozšířil své výsledky na integrály tvaru

$$\int_a^b f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,dx,$$

kde $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ jsou postupné derivace funkce $y(x)$. Našel rovnici, která sluje rovnice Eulerova a zní

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \ldots = 0.$$

5. Lagrange (6) našel znovu několika způsoby Eulerovy výsledky a rozšířil je. Abychom poznali myšlenkový vývoj, který jej dovedl k variačnímu počtu, stačí čísti jeho Théorie des fonctions analytiques a Leçons sur le calcul des fonctions. Tato díla patří však mezi poslední práce v jeho životě, kdežto vytvoření variačního počtu je dílo jeho mládí. Své první práce o tomto předmětě uveřejnil v Miscellanea Taurinensia, to jest v prvních svazcích Memoirů Turinské akademie, kterou právě před tím založil. Tyto práce právě dokázaly tehdejším učencům celou mohutnost jeho genia. V těchto výzkumech pokračoval po celý svůj život a souhrn jeho myšlenek nachází své vrcholné vyjádření v jeho analytické mechanice, v níž má metoda variací tak důležitou úlohu.

Budiž $y = y_0(x)$ křivka procházející pevnými body A a B, jež propůjčuje integrálu

$$I = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

minimální hodnotu. Abychom dokázali tuto vlastnost minima, musíme srovnati hodnotu, které nabývá I s hodnotou, které nabývá pro ostatní křivky $y = y(x)$, procházející body A a B. Rozdíl

$$y(x) - y_0(x)$$

nazývá Lagrange variací a má při tom na mysli tak malé změny křivky, že je lze považovati za nekonečně malé a že lze jeho mocniny řádu vyššího zanedbati vůči mocninám řádu nižšího. Změníme-li úsečku x o nekonečně malou hodnotu dx, při čemž neopustíme spojitou křivku $y = y(x)$, vzroste pořadnice y o nekonečně malou hodnotu dy. Tento přírůstek je něco docela jiného, než variace, při níž opouštíme původní křivku, nebo jinak řečeno deformujeme ji. Lagrange značí variaci symbolem δy a buduje počet docela nový, ale obyčejnému diferenciálnímu počtu zcela obdobný.

Už myšlenka zavésti nový symbol k označení variace a odlišiti ji tak od diferenciálu dy jest podle Cauchyho velikou zásluhou Lagrangeovou. A skutečně volba vhodného a jasného označení značí velikou výhodu v matematice, která nemá, bohužel, jako ostatní vědy názvosloví a označení jednotného a všeobecně přijatého.

Na základě variace δy funkce y definuje se variace integrálu I, která může býti rozložena na variace různého řádu, právě tak jako diferenciál. Tak máme variaci první δI, variaci druhou $\delta^2 I$, třetí $\delta^3 I$ a tak dále, tak jako máme diferenciál první dI, druhý $d^2 I$, třetí $d^3 I$.

K určení maxim a minim je nutno položiti podle Lagrangea

$$\delta I = 0.$$

Tím obdržíme pro maxima a minima integrálu I Eulerovu diferenciální rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \ldots = 0.$$

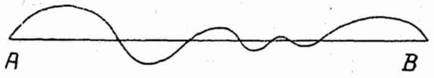
6. Ale tím, jak Legendre první na to upozornil, obdržíme podmínku nutnou, nikoli však postačující, a tak vzniká problém, jenž způsobuje veliké obtíže. Celé další období sahající od Lagrangea až k Jacobimu (7) je věnováno pouze studiu této otázky a rozlišování maxim a minim. Práce Jacobiho vynikají zde svou elegancí a důležitostí výsledků.

7. Weierstrassem (8) začíná se nové období variačního počtu.

Abychom prohloubili a pochopili celou otázku, musíme se na ni podívati s hlediska mnohem obecnějšího než Weierstrass a učiniti, abych tak řekl, vpád do oblasti funkcionálů, o nichž jsme již měli příležitost mluviti, k nimž se však brzy vrátíme, abychom pojednali o mnohých podrobnostech.

Ve variačním počtu jest integrál I funkcionálem, to jest závisí na všech hodnotách y v intervalu (a, b). Neboť prvkem, který zastupuje ve funkcionálu proměnnou, jest funkce. Nebo chceme-li to vyjádřiti geometricky ještě případněji, je to čára, která nahrazuje u funkcí čar (funkcionálů) bod z obyčejné nauky o funkcích.

Avšak křivka je prvek mnohem složitější než bod; neboť křivka má tvar, kterého bod nemá. Tak se křivka může neomezeně přiblížiti jiné křivce, aniž se jí při tom přiblíží tvarem. To je něco tak běžného, že by nebylo ani nutno uváděti k tomu příklad, ale pro větší srozumitelnost představme si úsečku AB a vlnovku mezi jejími koncovými body.



Můžeme přiblížiti všechny body vlnovky bodům úsečky, aniž by se směry tečen vlnovky přiblížily směru AB. Přejdeme-li od pojmu křivky k pojmu funkce, uvidíme, že se může funkce přiblížiti jiné funkci tak jak jen chceme, aniž se derivace jedné funkce přiblíží derivacím druhé. Avšak integrál I nezávisí jenom na hodnotách y, nýbrž také na jejích derivacích. A proto také i když se y blíží neomezeně funkci y_0, nemusí se

$$I = \int_a^b f(x, y, y', y'' \ldots)\, dx$$

blížiti neomezeně integrálu

$$I_0 = \int_a^b f(x, y_0, y'_0, y''_0 \ldots)\, dx.$$

Z toho všeho plynou různé druhy spojitosti u funkcí čar (funkcionálů), které se nevyskytují u obyčejných funkcí bodu. A vskutku máme v nauce o funkcionálech spojitosti různých řádů (9).

To právě tvoří podstatný rozdíl mezi úlohami variačního počtu a úlohami o obyčejných maximech a minimech; neboť kdežto v těchto znaménko při druhém diferenciálu slouží k rozlišení maxim od minim, v úlohách variačního počtu nestačí znaménko při druhé variaci, abychom obdrželi podobné rozlišení.

To také podrobil Weierstrass rozboru a začal pochybovati o výsledcích obdržených od Lagrangea a Legendrea až k Jacobimu a udal novou podmínku pro určení existence maxima nebo minima. Tato podmínka stanoví znaménka jisté funkce zvané funkcí Weierstrassovou.

Weierstrass způsobil také další pokroky ve variačním počtu tím, že ukázal, jak se silně omezoval obor úloh tím, že se v případě rovinných křivek brala rovnice křivky ve tvaru

$$y = y(x),$$

a jak se dají úvahy velice rozšířiti, píší-li se rovnice křivky ve tvaru parametrickém (viz II. přednášku, odstavec 8.)

$$y = y(t), \qquad x = x(t).$$

Stejně je nutno nahraditi integrál

$$I = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

z něhož se dosud vycházelo, integrálem jiným

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), x'(t), y'(t))\, dt.$$

Vedle díla Weierstrassova nelze přehlížeti práci Darbouxovu. Tento veliký matematik zabýval se mezi svými výzkumy o teorii ploch geodetickými čarami a určil postačující podmínky, aby geodetická čára byla skutečně nejkratší vzdáleností dvou bodů na ploše. Metody, jichž užíval, lišily se podstatně od metod Weierstrassových, neboť užíval zvláštních souřadnic křivočarých, čímž se úloha velice zjednodušuje.

Metody Darbouxovy byly rozšířeny na problémy mechaniky a dílo Kneserovo dodalo jim takové obecnosti, že je lze srovnávati s metodami Weierstrassovými (10).

Všechny tyto metody odvedly nauku o variačním počtu daleko od primitivního a klasického tvaru, který jí dal Lagrange.

8. Dříve než budu pokračovati o nejnovějších pokrocích ve variačním počtu, rád bych něco poznamenal.

Všechno to, o čem jsme dosud mluvili, týkalo se takových úloh variačního počtu, které vedou k diferenciálním rovnicím a jejichž řešení lze obdržeti metodou diferenciálních rovnic.

Vskutku všechny úlohy o maximech a minimech integrálů tvaru

$$I = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1 \ldots y'_n \ldots y_1^{(m)} \ldots y_n^{(m)} \ldots)\, dx$$

i úlohy povahy isoperimetrické, to jest takové, v nichž integrály

$$I_1 = \int_a^b F_1(x, y_1, \ldots)\, dx$$

$$I_2 = \int_a^b F_2(x, y_1, \ldots)\, dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_k = \int_a^b F_k(x, y_1, \ldots)\, dx$$

zachovávají konstantní hodnoty, i konečně úlohy, které obdržíme, uvažujeme-li o funkcích o několika proměnných, jako je na příklad úloha dáti hodnotu maximální nebo minimální integrálu dvojnému

$$\int_a^b \int_c^d F(x, y, z\,(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}, \ldots)\, dx\, dy$$

— ty všechny úlohy vedou vždy k diferenciálním rovnicím. Jenom takovéto úlohy řešil Lagrange a všichni jeho následovníci, o nichž jsme dosud mluvili.

Jsou však ještě jiné druhy úloh v analyse, které závisí přímo na úlohách variačního počtu.

Roku 1884 ukázal jsem, jaký je vztah mezi úlohami variačního počtu a integrálními rovnicemi (11). Až do té doby byly sice integrální rovnice předmětem mnoha studií, ale nikde se o nich nejednalo soustavně. Důkladně byla prostudována jenom Abelova rovnice tautochron a ostatní rovnice, které se daly na rovnici Abelovu převésti.

Téhož roku 1884 objevilo se zároveň v Acta Mathematica pojednání Soninovo, které rozšiřovalo do jisté míry úlohu Abelovu, aniž se uchylovalo s cesty jím ražené. Ale i to jednalo jen o velmi zvláštním případě a neobjevilo žádného vztahu mezi problémem integrálních rovnic a ostatními problémy analyse. Zajímavé studie Hilbertovy objevily se asi dvacet let později (12).

Všechno, co dělali Liouville, Joachimsthal, Schlömilch, Beltrami, Dini a mnoho jiných matematiků, nebylo nic jiného, než že obměňovali metodu Abelovu a že podávali různá její užití, aniž při tom vykročili z oblasti Abelovy rovnice. Myslím tedy, že je třeba se zájmem sledovati vztah, který jsem objevil mezi dvěma skupinami problémů analyse, které se sobě na první pohled ani zdaleka nepodobají.

Vizme nejprve příklad, který jsem uvedl. Vyšel jsem z integrální rovnice

$$\varphi(x) = \int_0^a \mathrm{f}(\alpha)\, \mathrm{F}(\alpha, x)\, \mathrm{d}\alpha, \quad 0 < \alpha < a, \tag{a}$$

kde $\mathrm{F}(\alpha, x)$ je symetrická funkce veličin α a x. Je to tedy táž rovnice, která by se dnes podle prací Fredholmových, vyšlých asi dvacet let později, nazvala rovnicí Fredholmovou druhého druhu se symetrickým jádrem. O ní jsem dokázal, že ji lze odvoditi, položí-li se rovnou nule variace integrálu

$$P = \tfrac{1}{2} \int_0^a \mathrm{d}\alpha \int_0^a \mathrm{f}(\alpha)\, \mathrm{f}(x)\, \mathrm{F}(\alpha, x)\, \mathrm{d}x - \int_0^a \varphi(x)\, \mathrm{f}(x)\, \mathrm{d}x,$$

při čemž funkci $\mathrm{f}(x)$ považujeme za proměnnou, kdežto ostatní se nemění.

Je to velmi elementární a velmi jednoduchý případ z rozsáhlých skupin rovnic integrálních a rovnic integro-diferenciálních, které lze obdržeti z nejobecnějších úloh variačního počtu.

V učebnicích teorie funkcionálů uvádí se mnoho příkladů; podám zde jen dva.

Zabývejme se integrálem

$$\int_a^b \int_a^b \mathrm{f}(t, u, y(t), y(u))\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u.$$

Utvoříme-li jeho variaci a položíme-li ji rovnu nule, dostaneme integrální rovnici

$$\int_a^b (\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2)\, \mathrm{d}t = 0,$$

kde

$$\mathrm{f}_1 = \frac{\partial \mathrm{f}(x, t, y(x), y(t))}{\partial y(x)}, \quad \mathrm{f}_2 = \frac{\partial \mathrm{f}(t, x, y(t), y(x))}{\partial y(x)}.$$

Nebo vezměme integrál

$$\int_a^b \int_a^b \mathrm{f}(t, x, y(t), y(x), y'(t), y'(x))\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x$$

a položme

$$\mathrm{f}_1 = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y(t)},\ \mathrm{f}_2 = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y(x)},\ \mathrm{f}_3 = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y'(t)},\ \mathrm{f}_4 = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y'(x)}.$$

Položíme-li jeho variaci rovnu nule, obdržíme integrací po částech rovnici integro-diferenciální

$$\int_a^b (\overline{\mathrm{f}}_1 + \mathrm{f}_2)\, \mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^b (\overline{\mathrm{f}}_3 + \mathrm{f}_4)\, \mathrm{d}t = 0,$$

kde $\overline{\mathrm{f}}_1$ a $\overline{\mathrm{f}}_3$ dostaneme z f_1 a f_3 tím, že v nich x a t zaměníme.

Ale myšlenka sama nebudila by na prvý pohled skutečného zájmu, kdyby se neukázalo, jak jí užíti.

Způsob, kterým jsem jí užil, záležel v tom, že jsem dokázal, že řešení integrální rovnice (a) lze převésti — ať je φ jakékoli — na řešení integrální rovnice

$$\psi\,(z, x) = \int_0^z \lambda\,(z, \alpha)\, \mathrm{F}(\alpha, x)\, \mathrm{d}\alpha,$$

kde se za $\psi\,(z, x)$ bere speciální funkce $\nu(x)$, dá-li se f vyjádřiti na základě funkce $\lambda\,(z, \alpha)$ jednoduchým integrálním vztahem.

Této věty lze užíti v řešení některých otázek matematické fysiky, zvláště elektrostatiky.

9. Než přijdeme k nejnovějším výzkumům v oboru variačního počtu, poznamenejme, že jestliže variační počet vytvořil nauku o funkcionálech, naopak zase zavedení obecných pojmů této nauky do počtu variačního způsobilo ve variačním počtu úplný převrat tím, že jej zcela přeměnilo a obnovilo.

Tento zjev v dějinách analyse je tedy obdobný jiným zjevům v dějinách matematiky. Tak na příklad jestliže pojem rychlosti a zrychlení dal vznik pojmům fluxí a derivací, naopak zase infinitesimální počet tím vytvořený přeměnil a obnovil celou mechaniku.

10. Podáme nyní v dalších odstavcích *úhrnný* nárys funkcionální analysy.

Obecná definice funkcionálu vyslovuje se takto: *Pravíme, že veličina z je funkcionálem funkce $x(t)$ v intervalu (a, b), závisí-li na všech hodnotách, kterých nabývá $x(t)$, mění-li se t v intervalu (a, b)*; nebo také, je-li dáno pravidlo, podle něhož je přiřazena ke každé funkci definované v intervalu (a, b) (nezávisle proměnné v jistém funkcionálním oboru) jedna a jenom jedna hodnota z dokonale určená. Píšeme

$$z = \mathop{\mathrm{F}}_a^b[x(t)].$$

Závisí-li $x(t)$ na jiných proměnných $\alpha, \beta, \ldots$, píšeme

$$z = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{F}}}[(x\,(t, \alpha, \beta, \ldots)] = z\,(\alpha, \beta, \ldots),$$

abychom naznačili, že se funkční operátor F vztahuje na veličinu x považovanou za funkci jediné proměnné t, kdežto veličiny $\alpha, \beta, \ldots$, jsou konstanty. F je pak obyčejnou funkcí veličin $\alpha, \beta, \ldots$, a nezávisí na t.

Funkcionál z může také obsahovati jisté parametry $\lambda, \mu, \ldots$:

$$z = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{F}}}[x(t)\ ;\ \lambda, \mu \ldots].$$

Je-li tomu tak, jest z funkcionálem funkce $x(t)$ pro každou soustavu hodnot $\lambda, \mu, \ldots$; je-li však funkce $x(t)$ dána pevně, je veličina z obyčejnou funkcí proměnných $\lambda, \mu, \ldots$ Můžeme říci: Je-li dána funkce $x(t)$, přiřazuje jí operátor F jinou funkci

$$z\,(\lambda, \mu, \ldots) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{F}}}[x(t);\ \lambda, \mu, \ldots].$$

Můžeme také uvažovati o veličinách z, které závisí na všech hodnotách, jichž nabývá jedna nebo několik funkcí $\varphi_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2\,(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots$ o několika proměnných, při čemž jsou ty funkce definovány po řadě v oborech $C_1, C_2, \ldots$:

$$z = \mathrm{F}[\varphi_1, (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi_2\,(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots];$$

v tomto symbolu neoznačujeme obory C_i.

Tento pojem funkcionálu zahrnuje v sobě funkce čar a obecněji funkce nadprostorů.

Abychom definovali derivaci funkcionálu $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{F}}}[y(t)]$, dejme funkci $y(t)$ přírůstek $\delta y(t) = \vartheta(t)$, jenž nemění znaménka, a takový, že $|\vartheta(t)| < \varepsilon$ a že $\vartheta(t) = 0$ mimo interval (m, n) délky h obsažený v intervalu (a, b) a obsahující bod ξ ve svém vnitřku; přepokládejme, že

1. poměr $\Delta\mathrm{F}/\varepsilon h$ je vždy menší než konečné číslo M,
2. položíme-li $\sigma = \int_m^n \vartheta(t)\,\mathrm{d}t$, existuje pro poměr $\Delta\mathrm{F}/\sigma$ mezní hodnota určitá a konečná, blíží-li se ε a h zároveň k nule, při čemž interval (m, n) stále obsahuje bod ξ,
3. poměr $\Delta\mathrm{F}/\sigma$ jde k své limitě stejnoměrně pro všechny možné funkce $y(t)$ a všechny body ξ.

Limita tohoto poměru je funkcionál funkce $y(t)$, závisící na parametru ξ; značíme ji symbolem*)

*) Meze intervalu (a, b) vynecháváme.

$$\mathrm{F}'[y(t);\ \xi]$$

a nazýváme ji *první derivací funkcionálu* F *vzhledem k funkci* $y(t)$ *v bodě* ξ.

U obyčejné funkce $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ o n proměnných máme n parciálních derivací $\partial f/\partial y_i$, které závisí na nespojitém indexu i. U funkcionálu F je index i nahrazen spojitým parametrem ξ, a bylo dokázáno roku 1887 (13), že veličina

$$\delta \mathrm{F} = \int_a^b \mathrm{F}'[y(t);\ \xi]\ \delta y(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

(zcela obdobná totálnímu diferenciálu obyčejné funkce), jež jest lineárním funkcionálem funkce $\delta y(t) = \varepsilon\eta(t)$, má tuto vlastnost: Rozdíl mezi δF a přírůstkem ΔF (příslušným přírůstku $\delta y(t)$ funkce $y(t)$) je nekonečně malá veličina řádu vyššího než ε. Nazýváme δF *diferenciálem nebo první variací* funkce F. První variaci funkce F odpovídající variaci $\varphi(\xi)$ funkce $y(\xi)$ můžeme počítati podle vzorce

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \mathrm{F}[(y(t) + \varepsilon\varphi(t)]\right)_{\varepsilon=0} = \int_a^b \mathrm{F}'[y(t);\ \xi]\ \varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Má-li první derivace $\mathrm{F}'[(y(t), \xi_1]$ opět derivaci, lze utvořiti druhou derivaci $\mathrm{F}''[y(t), \xi_1, \xi_2]$, jež jest symetrickou funkcí proměnných ξ_1 a ξ_2. Obecně bude derivace n-tého řádu funkcionálu F symetrická funkce parametrů $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ a bude

$$\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\varepsilon^n} \mathrm{F}[y(t) + \varepsilon\varphi(t)]\right)_{\varepsilon=0} =$$

$$\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{F}^{(n)}[y(t);\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\ \varphi(\xi_1)\,\varphi(\xi_2) \ldots \varphi(\xi_n)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

Považujme funkce y a φ ve funkcionálu $\mathrm{F}[y(t) + \varepsilon\varphi(t)]$ za neproměnné; F bude pak obyčejnou funkcí proměnné ε. Tato funkce má derivace až řádu n-tého, má-li je funkcionál F a obráceně.

Je-li možné rozvinouti funkci $f(\varepsilon)$ v Taylorovu řadu, obdržíme pro F z rozvoje $f(1)$:

$$\mathrm{F}[y(t) + \varphi(t)] = \mathrm{F}[y(t)] +$$

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n!} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{F}^{(n)}[y(t);\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\ \varphi(\xi_1)\,\varphi(\xi_2) \ldots \varphi(\xi_n)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_n,$$

což je řada obdobná *Taylorově řadě* pro funkce obyčejné.

Výše napsaný vzorec pro δF vyhovuje jenom tehdy, má-li F *diferenciál pravidelný*, to jest takový, že se dá vyjádřiti integrálem. V obecnějším případě mohou se vyskytovati výjimečné body, v nichž se stává funkcionální derivace nekonečnou; pro tyto body vznikají nové členy, které je nutno k výše obdrženému výrazu pro δF přičísti, totiž součet tvaru

$$\Sigma_i \, \alpha_i \, \delta y(\tau_i),$$

kde τ_i jsou ty výjimečné body; součet integrálu a tohoto součtu tvoří *diferenciál nepravidelný*. Přihází se to někdy v obyčejné úloze variačního počtu; variace integrálu je rovna součtu integrálu (jenž pochází z variace podél intervalu) a konečné řady (jež vzniká variací v koncových bodech integračního intervalu).*)

11. Nechť má funkcionál F$[y(t)]$ derivaci. Abychom našli funkci $y(t)$, pro niž nabývá F maxima nebo minima, utvořme variaci δF

$$\delta \mathrm{F} = \int_a^b \mathrm{F}'[y(t); x] \, \delta y(x) \, \mathrm{d}x.$$

Variace δF má býti rovna nule, ať je funkce $\delta y(x)$ jakákoli; tedy

$$\mathrm{F}'[y(t); x] = 0$$

pro každou hodnotu x. Rovnici tohoto typu lze považovati za zobecnění obyčejné soustavy n rovnic pro n neznámých:

$$\mathrm{f}_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = z_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vskutku, zavedeme-li dva spojité parametry x a t, proměnné mezi a a b, místo nespojitých indexů i a k těch n funkcí f_i a n neznámých y_k, stane se z $\mathrm{f}_i\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ funkcionál funkce $y(t)$; tento funkcionál závisí také na spojitém parametru x, jenž zastupuje index i, a naše soustava n rovnic je nahrazena funkcionální rovnicí

$$\Phi[y(t); x] = z(x),$$

v níž je $y(t)$ neznámá funkce. Úloha rozřešiti tuto rovnici odpovídá tak úloze rozřešiti n rovnic pro n neznámých y_k.

Jsou-li tyto rovnice lineární, je funkcionál Φ lineární. Je-li lineární funkcionál pravidelný (to jest má-li pravidelný diferenciál), máme *integrální rovnici prvního druhu* (typu Fredholmova)

$$\int_a^b \mathrm{K}(x, t) \, y(t) \, \mathrm{d}t = z(x).$$

Má-li funkcionál výjimečný bod $t = x$, máme integrální rovnici tvaru

$$\int_a^b \mathrm{K}(x, t) \, y(t) \, \mathrm{d}t + a_0 \, y(x) + a_1 \, y'(x) + \ldots + a_n \, y^{(n)}(x) = z(x).$$

Je-li $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, $a_0 = 1$, máme *Fredholmovu rovnici*

*) Není to případ nejobecnější, neboť se mohou vyskytovati ještě jiné členy.

druhého druhu; je-li $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, $a_0 = a(x)$, máme *rovnici třetího druhu.*

Vyskytují-li se členy $a_i y^{(i)}(x)$, obdržíme rovnici *integro-diferenciální.*

Závisí-li lineární funkcionál $\Phi[y(t); x]$ na všech hodnotách funkce $y(t)$, kde t se mění v mezích a a x $(a \leq x \leq b)$, vznikne buďto *Volterrova rovnice prvního druhu*

$$\int_a^x \mathrm{K}(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}t = z(x),$$

nebo *Volterrova rovnice druhého druhu*

$$\int_a^x \mathrm{K}(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}t + y(x) = z(x).$$

12. U rozsáhlé třídy rovnic integrálních a integrodiferenciálních obdržíme řešení, užijeme-li funkcí, jež vzniknou z jiných funkcí operací, zvanou skládáním. Jsou-li dány dvě funkce $\mathrm{f}(x, y)$ a $\mathrm{g}(x, y)$ dvou proměnných, pak funkce $\mathrm{h}(x, y)$, definovaná vztahem

$$\mathrm{h}(x, y) = \int_x^y \mathrm{f}(x, \xi)\, \mathrm{g}(\xi, y)\, \mathrm{d}\xi,$$

jež jest funkcionálem obou funkcí, sluje *kompoziční součin prvního druhu**) funkcí f a g a značí se $\mathrm{h} = \overset{**}{\mathrm{fg}}$; operace, kterou jsme právě definovali a která znamená přechod od funkcí f a g k funkci h, sluje *skládání prvního druhu***) funkcí f a g. Vezmeme-li za integrační meze dvě konstanty a a b, nazývá se funkce

$$\mathrm{k}(x, y) = \overset{****}{\mathrm{f\,g}} = \int_a^b \mathrm{f}(x, \xi)\, \mathrm{g}(\xi, y)\, \mathrm{d}\xi$$

kompozičním součinem druhého druhu. Tyto úkony skládání obdržíme, rozšíříme-li pojem násobení dvou matic $\| a_{ir} \|$, $\| b_{rs} \|$, $(i, r, s = 1, 2, \ldots, n)$, nebo pojem skládání jim odpovídajících lineárních substitucí, na případ, že proměnných je nekonečně mnoho. Skládání druhého druhu odpovídá případu obecné čtvercové matice, kdežto skládání prvního druhu odpovídá matici $\| a_{ir} \|$, kde $a_{ir} = 0$ pro $r > i$.

Dvě funkce f a g jsou *záměnné prvního druhu****), je-li

$$\overset{**}{\mathrm{fg}} = \overset{**}{\mathrm{gf}}.$$

*) Produit de composition de première espèce.
**) Composition de première espèce.
***) Fonctions permutables de première espèce.

Komposiční součiny dvou, tří, nebo více záměnných funkcí jsou záměnné mezi sebou i s danými funkcemi. Úkon skládání je associativní, to jest

$$(\overset{**}{\mathrm{fg}})\,\overset{*}{\mathrm{h}} = \overset{*}{\mathrm{f}}(\overset{**}{\mathrm{gh}})$$

a distributivní:

$$\overset{*}{\mathrm{f}}\overset{*}{\overline{(\mathrm{g}+\mathrm{h})}} = \overset{**}{\mathrm{fg}} + \overset{**}{\mathrm{fh}},$$

ať jsou funkce f, g, h jakékoli (záměnné, čili nic). Skládání druhého druhu má vlastnosti obdobné.

Položme $\overset{*}{\mathrm{f}}{}^1 = \mathrm{f}$; vzorec

$$\overset{*}{\mathrm{f}}{}^n = \overset{*}{\mathrm{f}}{}^{n-1}\overset{*}{\mathrm{f}},$$

kde n je libovolné celé číslo větší než jedna, dává *n-tou komposiční mocninu**) dané funkce $\mathrm{f}(x, y)$. Tyto komposiční mocniny jsou mezi sebou záměnné a řídí se početními pravidly, která se tvarem neliší od pravidel pro obyčejné mocniny.

Součet několika výrazů tvaru

$$a\overset{*}{\mathrm{f}}_1{}^{n_1}\overset{*}{\mathrm{f}}_2{}^{n_2}\ldots\overset{*}{\mathrm{f}}_i{}^{n_i} \quad (n_1, n_2 \ldots n_i \text{ celá kladná}),$$

které obdržíme skládáním několika komposičních mocnin a násobením konstantou a, sluje *komposiční mnohočlen prvního druhu*;**) jsou-li funkce f_i mezi sebou záměnné, je i mnohočlen s nimi záměnný. Pravidla pro počítání s těmito mnohočleny jsou táž, jako pro počítání s obyčejnými mnohočleny o proměnných $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \ldots$ Evans (14) první se zabýval touto algebrou záměnných funkcí.

Symboly $\overset{*}{1}{}^0$; $\overset{*}{\mathrm{f}}{}^0$; $\overset{*}{\mathrm{g}}{}^0$ jsou určeny rovnostmi

$$\overset{*}{\mathrm{f}}{}^0\overset{*}{\mathrm{h}} = \overset{*}{\mathrm{h}}\overset{*}{\mathrm{f}}{}^0 = \mathrm{h};\quad \overset{*}{\mathrm{f}}{}^0 = \overset{*}{\mathrm{g}}{}^0 = \overset{*}{1}{}^0 = 1.$$

Konverguje-li mocninná řada o proměnných z_r

$$\varphi\,(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{1}^{\infty}{}_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, a_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}$$

pro dosti malé hodnoty $|z_r|$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, konverguje řada

$$\Sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, a_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, \overset{*}{\mathrm{f}}_1{}^{i_1}\overset{*}{\mathrm{f}}_2{}^{i_2}\ldots\overset{*}{\mathrm{f}}_n{}^{i_n}$$

pro libovolné funkce f_r (jen když jsou ohraničené) a vyjadřuje funkci proměnných x a y záměnnou se všemi funkcemi f_r, jsou-li tyto funkce záměnné mezi sebou. Součet řady je funkcionálem funkcí f_r, který můžeme označiti $\varphi\,(\overset{*}{\mathrm{f}}_1, \overset{*}{\mathrm{f}}_2, \ldots, \overset{*}{\mathrm{f}}_n)$ a nazvati komposiční funkcí.

Tak odpovídá každé analytické funkci (mocninné řadě)

*) $n$ième puissance de composition.
**) Polynôme de composition de première espèce.

funkcionál. Na příklad, řadě

$$z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots$$

odpovídá funkcionál

$$\mathrm{f} + \overset{*}{\mathrm{f}}{}^2 + \overset{*}{\mathrm{f}}{}^3 + \ldots + \overset{*}{\mathrm{f}}{}^n + \ldots$$

Platí-li pro analytické funkce $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

$$\varphi_3(z_1 \ldots z_n) = \varphi_1(z_1 \ldots z_n)\, \varphi_2(z_1 \ldots z_n),$$

platí pro příslušné komposiční součty, že komposiční součin

$$\varphi_1(\overset{*}{\mathrm{f}}_1 \ldots \overset{*}{\mathrm{f}}_n) \text{ a } \varphi_2(\overset{*}{\mathrm{f}}_1 \ldots \overset{*}{\mathrm{f}}_n) \text{ je } \varphi_3(\overset{*}{\mathrm{f}}_1 \ldots \overset{*}{\mathrm{f}}_n).$$

Addiční teorémy pro obyčejné analytické funkce přejdou v integrální addiční teorémy pro příslušné funkcionály.

Uvažujme na příklad o řadě

$$e^{\lambda z} = 1 + \lambda z + \frac{\lambda^2}{2!} z^2 + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} z^n + \ldots,$$

jež obsahuje parametr λ. Platí vzorec

$$e^{\lambda z} e^{\mu z} = e^{(\lambda+\mu)z}.$$

Příslušná komposiční řada

$$u\,(\lambda;\, x,\, y) = \overset{*}{1}{}^0 + \lambda \mathrm{f} + \frac{\lambda^2}{2!} \overset{*}{\mathrm{f}}{}^2 + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} \overset{*}{\mathrm{f}}{}^n + \ldots$$

bude míti vlastnost vyjádřenou vzorcem

$$\overset{*}{u}\,(\lambda;\, x,\, y)\, \overset{*}{u}\,(\mu;\, x,\, y) = \overset{*}{u}\,(\lambda + \mu;\, x,\, y).$$

Řada

$$v\,(\lambda;\, x,\, y) = \lambda \mathrm{f} + \frac{\lambda^2}{2!} \overset{*}{\mathrm{f}}{}^2 + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} \overset{*}{\mathrm{f}}{}^n + \ldots,$$

kterou obdržíme odečtením jedné od $u\,(\lambda;\, x,\, y)$, vyhovuje vzorci

$$v\,(\lambda + \mu;\, x,\, y) = v\,(\lambda;\, x,\, y) + v\,(\mu;\, x,\, y) + \int_x^y v\,(\lambda;\, x,\, \xi)\, v\,(\mu;\, \xi,\, y)\mathrm{d}\xi,$$

což jest *integrální addiční teorém* pro funkci $v\,(\lambda;\, x,\, y)$.

Předpokládejme nyní, že je dána rovnice tvaru

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0,$$

nebo

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n}^{\infty} {}_{0} \; a_{i_1 i_2 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n} = 0,$$

kde řada konverguje v okolí počátku, a že jest $a_{0,0 \ldots 0} = 0$, $a_{0,0,\ldots,1} \neq 0$.

Je-li tomu tak, lze z rovnice vyjádřiti veličinu z_n jako implicitní funkci $\psi(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ pravidelnou v okolí bodu $z_1 = z_2 = \ldots$ $\ldots = z_{n-1} = 0$ a v něm rovnou nule. Máme tedy

$$z = \psi(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) = \sum_0^\infty b_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-1}^{i_{n-1}}$$

s $b_{0, 0, \ldots, 0} = 0$. Uvažujeme-li o příslušné rovnici integrální

$$\varphi(\overset{*}{\mathrm{f}}_1, \overset{*}{\mathrm{f}}_2, \ldots, \overset{*}{\mathrm{f}}_n) = \sum_0^\infty a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \overset{*}{\mathrm{f}}_1{}^{i_1} \overset{*}{\mathrm{f}}_2{}^{i_2} \ldots \overset{*}{\mathrm{f}}_n{}^{i_n} = 0,$$

můžeme ji rozřešiti pro f_n. Řešení je dáno vzorcem

$$\mathrm{f}_n = \psi(\overset{*}{\mathrm{f}}_1, \overset{*}{\mathrm{f}}_2, \ldots, \overset{*}{\mathrm{f}}_{n-1}) = \sum_0^\infty b_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \overset{*}{\mathrm{f}}_1{}^{i_1} \overset{*}{\mathrm{f}}_2{}^{i_2} \ldots \overset{*}{\mathrm{f}}_{n-1}{}^{i_{n-1}}$$

a je záměnné s $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_{n-1}$.

Kdežto mocninná řada pro z_n je konvergentní jenom pro dosti malé hodnoty $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, komposiční řada pro f_n konverguje vždy, jsou-li jen funkce f_r konečné.

Vezměme jako jednoduchý příklad řadu

$$\mathrm{g} = \mathrm{f} + \frac{\overset{*}{\mathrm{f}}{}^2}{2!} + \frac{\overset{*}{\mathrm{f}}{}^3}{3!} + \ldots + \frac{\overset{*}{\mathrm{f}}{}^n}{n!} + \ldots, \tag{A}$$

odpovídající Maclaurinově řadě pro funkci $r = e^z - 1$. Z této rovnice obdržíme $z = \log(1 + r)$. Rozvineme-li $\log(1 + r)$ v Maclaurinovu řadu a nahradíme pak mocniny r komposičními mocninami funkce g, obdržíme řešení integrální rovnice (A) dané řadou

$$\mathrm{f} = \mathrm{g} - \frac{\overset{*}{\mathrm{g}}{}^2}{2} + \frac{\overset{*}{\mathrm{g}}{}^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\overset{*}{\mathrm{g}}{}^n}{n} + \ldots,$$

jež konverguje pro každou konečnou funkci g.

Metodami právě užitými lze ukázati (15), že integrální rovnice m-tého stupně

$$(a_m \overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\varphi}_m) \overset{*}{\mathrm{f}}{}^m + (a_{m-1} \overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\varphi}_{m-1}) \overset{*}{\mathrm{f}}{}^{m-1} + \ldots + (a_1 \overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\varphi}_1) \mathrm{f} = \varphi_0,$$

kde f je neznámá funkce, má vždy, je-li $a_1 \neq 0$, jedno a jen jedno řešení.

13. Je-li dána obyčejná soustava algebraických rovnic, přejde se, jak jsme již viděli, k rovnici funkcionální tím, že se počet neznámých zvětšuje přes všechny meze. Podobně se přejde od soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvého řádu tím, že se počet neznámých funkcí zvětšuje přes všechny meze, k *obyčejné integro-diferenciální rovnici prvního řádu:*

$$\frac{\partial y\,(x,\,\xi)}{\partial x} = \mathrm{F}[y(x,\overset{b}{\underset{a}{t}});\,x,\,\xi],$$

kde y je neznámá funkce. Rovnici tu lze rozšířiti metodou postupných aproximací.

Rozlišujeme různé druhy integrodiferenciálních rovnic. Jsou-li všechny derivace vzaty vzhledem k téže proměnné, sluje rovnice *obyčejná integro-diferenciální rovnice* řádu n, je-li n nejvyšší řád derivací v ní obsažených. Jsou-li derivace vzaty vzhledem k různým proměnným, máme *parciální rovnici integro-diferenciální*.

Jako příklad uveďme rovnici

$$\frac{\partial y\,(x,\,\xi)}{\partial x} = \int_a^b \mathrm{f}(x,\,\xi,\,t)\,y(x,\,t)\,\mathrm{d}t,$$

kterou studoval Schlesinger (16). O rovnicích tohoto druhu můžeme sestrojiti teorii zcela obdobnou teorii Fuchsově o soustavách lineárních diferenciálních rovnic.

Jiné rovnice integro-diferenciální obdržíme v úlohách o maximu nebo o minimu jistých funkcionálů, položíme-li funkcionální derivaci rovnu nule.

Viděli jsme již, že u rozsáhlé třídy funkcionálních rovnic můžeme sestrojiti řešení tím, že do obyčejných mocninných řad dosadíme místo obyčejných mocnin mocniny komposiční. Obdobného postupu lze užíti k řešení rovnic integro-diferenciálních. Budiž

$$\Phi\left(z_1,\,z_2,\,\ldots\,z_n;\,\varphi,\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_1},\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_2},\,\ldots\,\frac{\partial^{p_1+p_2+\,\cdots\,+p_n}\varphi}{\partial z_1^{p_1}\partial z_2^{p_2}\ldots\,\partial z_n^{p_n}}\ldots,\right) = 0$$

integro-diferenciální rovnice mezi nezávislými proměnnými $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_n$, neznámou funkcí $\varphi\,(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ a jejími derivacemi až do jistého řádu, a buď

$$\varphi(z_1,\,z_2,\,\ldots,\,z_n) = \Sigma a_{i_1,\,i_2\ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2}\ldots\,z_n^{i_n}$$

pravidelné analytické řešení této rovnice. Dosadíme-li $z_k\xi_k$ na místo z_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) a ψ/ξ_0 na místo φ, přejde rovnice ve

$$\Phi\left(z_1\xi_1,\,z_2\xi_2,\,\ldots,\,z_n\xi_n,\,\frac{\psi}{\xi_0},\,\frac{1}{\xi_0\xi_1}\,\frac{\partial\psi}{\partial z_1},\,\ldots\,\frac{1}{\xi_0\xi_1^{p_1}\ldots\,\xi_n^{p_n}}\,\times\right.$$
$$\left.\times\,\frac{\partial^{p_1+p_2+\,\cdots\,+p_n}}{\partial z_1^{p_1}\partial z_2^{p_2}\ldots\,\partial z_n^{p_n}}\right) = 0,$$

(veličiny ξ nezávisí na veličinách z), nebo po převedení na tvar celistvý

$$\psi\left(z_1,\,z_2,\,\ldots,\,z_n;\,\xi_0,\,\xi_1,\,\ldots,\,\xi_n;\,\psi,\,\frac{\partial\psi}{\partial z_1},\frac{\partial\psi}{\partial z_2},\,\ldots\right) = 0.$$

Této parciální rovnici vyhovuje

$$\psi = \xi_0\, \varphi(z_1\xi_1, z_2\xi_2, \ldots, z_n\xi_n).$$

Dosaďme nyní na místo $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ funkce $\mathrm{f}_0(x, y), \mathrm{f}_1(x, y), \ldots$ $\ldots, \mathrm{f}_n(x, y)$ libovolné, ale záměnné prvého druhu mezi sebou, a obyčejné součiny nahraďme komposičními. Nalezneme tak, že se integro-diferenciální rovnice

$$\overset{*}{\psi}\left((z_1, z_2, \ldots, z_n; \overset{*}{\mathrm{f}}_0, \overset{*}{\mathrm{f}}_1, \ldots, \overset{*}{\mathrm{f}}_n; \overset{*}{\psi}, \frac{\partial \overset{*}{\psi}}{\partial z_1}, \frac{\partial \overset{*}{\psi}}{\partial z_2}, \ldots\right) = 0,$$

kde $\psi(z_1, z_2, \ldots, z_n; x, y)$ je neznámá funkce, řeší vzorcem

$$\psi(z_1, z_2, \ldots, z_n; x, y) = \overset{*}{\mathrm{f}}_0\, \overset{*}{\varphi}(z_1\overset{*}{\mathrm{f}}_1, z_2\overset{*}{\mathrm{f}}_2, \ldots, z_n\overset{*}{\mathrm{f}}_n),$$

a že ψ je celistvá funkce proměnných $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Tuto větu lze rozšířiti na soustavy integro-diferenciálních rovnic, které se obdrží naznačeným způsobem ze soustavy diferenciálních rovnic, jejichž řešení je známo.

Uvažujme na příklad o této soustavě diferenciálních rovnic tvořené třemi eliptickými funkcemi sn, cn, dn:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{sn}\, z = \mathrm{cn}\, z\, \mathrm{dn}\, z \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{cn}\, z = -\,\mathrm{sn}\, z\, \mathrm{dn}\, z \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{dn}\, z = -\,k^2\, \mathrm{sn}\, z\, \mathrm{cn}\, z. \end{cases}$$

Položíme-li $\varphi_1 = \xi\, \mathrm{sn}\, \xi z$, $\varphi_2 = \xi\, \mathrm{cn}\, \xi z$, $\varphi_3 = \xi\, \mathrm{dn}\, \xi z$, máme

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}z} = \varphi_2\varphi_3, \quad \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}z} = -\,\varphi_3\varphi_1, \quad \frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}z} = -\,k^2\varphi_1\varphi_2;$$

veličiny φ_i vyjádří se Maclaurinovými řadami

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1\xi^2 z + a_2\xi^4 z^3 + \ldots \\ \varphi_2 &= b_1\xi \quad + b_2\xi^3 z^2 + \ldots \\ \varphi_3 &= c_1\xi \quad + c_2\xi^3 z^2 + \ldots, \end{aligned}$$

jež konvergují v okolí $\xi = 0$, $z = 0$. Dosaďme nyní na místo ξ libovolnou funkci $\mathrm{f}(x, y)$, a nahraďme obyčejné mocniny mocninami komposičními; místo řad Maclaurinových objeví se řady

$$\begin{aligned} \varphi_1(z; x, y) &= a_1\overset{*}{\mathrm{f}}{}^2 z + a_2\overset{*}{\mathrm{f}}{}^4 z^3 + \ldots \\ \varphi_2(z; x, y) &= b_1\mathrm{f} \quad + b_2\overset{*}{\mathrm{f}}{}^3 z^2 + \ldots \\ \varphi_3(z; x, y) &= c_1\mathrm{f} \quad + c_2\overset{*}{\mathrm{f}}{}^3 z^2 + \ldots, \end{aligned}$$

jež jsou celistvými funkcemi proměnné z a vyhovují soustavě integro-diferenciálních rovnic

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \int_x^y \varphi_2(z;\, x,\, \xi)\, \varphi_3\, (z;\, \xi,\, y)\, d\xi$$

$$\frac{d\varphi_2}{dz} = -\int_x^y \varphi_3(z;\, x,\, \xi)\, \varphi_1\, (z;\, \xi,\, y)\, d\xi$$

$$\frac{d\varphi_3}{dz} = -k^2\int_x^y \varphi_1(z;\, x,\, \xi)\, \varphi_2\, (z;\, \xi,\, y)\, d\xi.$$

14. V počtu funkcionálním přicházejí kromě rovnic integrálních nebo integro-diferenciálních *rovnice s funkcionálními derivacemi.*

První příklad takových rovnic je dán vztahem

$$F'[y(\overset{a}{\underset{b}{t}});\, x] = \Phi[y(\overset{a}{\underset{b}{t}});\, x], \tag{α}$$

v němž je funkce Φ známá a funkce F funkce hledaná. Dá se dokázati, že nutná a postačující podmínka, aby bylo lze (α) integrovati, jest

$$\Phi'[y(\overset{a}{\underset{b}{t}});\, x,\, \xi] = \Phi'[y(\overset{a}{\underset{b}{t}});\, \xi,\, x];$$

je to podmínka obdobná podmínce vyjadřující, že lze integrovati soustavu

$$\frac{\partial f\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_r} = \varphi_r(y_1,\, y_2, \ldots, y_n);\; r = 1, 2, \ldots, n.$$

Je-li této podmínce vyhověno, určuje rovnice (α) funkcionál (pravidelný) F až na konstantu (hodnotu F pro určitou funkci $y_0(t)$) a její řešení lze psáti ((15) p. 43)

$$Fy(\overset{b}{\underset{a}{t}}) = Fy_0(\overset{b}{\underset{a}{t}}) + \int_{s_0}^{s} ds \int_a^b \Phi[\Theta(\overset{b}{\underset{a}{ts}});\, x]\, \frac{\partial \Theta(xs)}{\partial s}\, dx,$$

kde

$$\Theta\,(ts_0) = y_0(t), \qquad \Theta(ts) = y(t).$$

U jiných rovnic s funkcionálními derivacemi obsahuje obecný integrál místo konstanty funkcionál libovolný. Na příklad obecný integrál rovnice, kterou se zabývala sl. Freda

$$\int_a^b F'[y(\overset{b}{\underset{a}{t}});\, x]\, y(x)\, dx = rF[y(\overset{b}{\underset{a}{t}})], \quad (r = \text{číslo reálné}),$$

jež jest charakteristickou rovnicí pro pravidelné homogenní funkcionály r-tého stupně, může se psáti ve tvaru

$$\Phi\left[\frac{\overset{b}{\underset{a}{y(t)}}}{\int_a^b y(z)\,dz}\right]\cdot\int_a^b\ldots\int_a^b \mathrm{f}^{r_1}(\xi_1)\ldots\mathrm{f}^{r_s}(\xi_s)\,d\xi_1\ldots d\xi_s,$$

kde Φ je libovolný funkcionál, a $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = r$ (17), (18).

Mezi rovnicemi integro-diferenciálními a rovnicemi s funkcionálními derivacemi lze odvoditi obdobné vztahy, jako mezi soustavami obyčejných diferenciálních rovnic a rovnicemi parciálními (19).

Vyslovíme zde jen některé výsledky, které lze považovati za rozšíření vět známých z obyčejného diferenciálního počtu.

Řešení integro-diferenciální rovnice

$$\frac{\partial y(x\xi)}{\partial x} = \mathrm{F}[\overset{b}{\underset{a}{y(xt)}};\, x,\, \xi)]$$

je dáno rovnicí tvaru

$$y(x\xi) = \psi(\xi) + \Phi[\overset{b}{\underset{a}{\psi(t)}};\, x,\, \xi)],$$

(kde ψ je libovolná funkce), která dává, rozřešena podle ψ

$$\psi(\xi) = y(x\xi) + \Omega\,[\overset{b}{\underset{a}{y(xt)}};\, x,\, \xi].$$

Dosaďme na místo $y\,(zt)$ (proměnnou) funkci $\varphi(t)$; libovolný (pravidelný) funkcionál Θ závisící na hodnotách funkce

$$\vartheta(\xi) = \varphi(\xi) + \Omega[\overset{b}{\underset{a}{\varphi(t)}};\, x,\, \xi]$$

v intervalu (a, b) je funkcionál Λ funkce $\varphi(t)$, závislý ještě na parametru x a vyhovující rovnici s funkcionálními derivacemi

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \int_a^b \Lambda'\,[\overset{b}{\underset{a}{\varphi(t)}};\, x,\, \xi]\;\mathrm{F}[\overset{b}{\underset{a}{\varphi(t)}};\, x,\, \xi]\,d\xi = 0,$$

kde Λ' je funkcionální derivace funkcionálu Λ v bodě ξ; proto bude řešení této rovnice záviseti na řešení rovnice integro-diferenciální.

Buď tedy $\mathrm{H}\,[\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{f}(\xi)}};\, \overset{b}{\underset{a}{\varphi(\xi)}};\, t]$ funkcionál (pravidelný), závisící na funkcích f a φ a na parametru t; buďtež

$$\mathrm{H}'_f[\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{f}(\xi)}};\, \overset{b}{\underset{a}{\varphi(\xi)}};\, t,\, x] \text{ a } \mathrm{H}'_\varphi[\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{f}(\xi)}};\, \overset{b}{\underset{a}{\varphi(\xi)}};\, t,\, x]$$

jeho funkcionální derivace vzhledem k f a φ v bodě x. O soustavě rovnic integro-diferenciálních

$$\frac{\partial \mathrm{q}\,(tx)}{\partial t} = \mathrm{H}'_p[\mathrm{q}(t\overset{b}{\underset{a}{\xi}});\ \mathrm{p}(t\overset{b}{\underset{a}{\xi}});\ t,\ x]$$

$$\frac{\partial \mathrm{p}(tx)}{\partial t} = \mathrm{H}'_q[\mathrm{q}(t\overset{b}{\underset{a}{\xi}});\ \mathrm{p}(t\overset{b}{\underset{a}{\xi}});\ t,\ x]$$

a o rovnici s funkcionálními derivacemi

$$\frac{\partial \mathrm{V}[\mathrm{f}(\overset{b}{\underset{a}{\xi}});t]}{\partial t} + \mathrm{H}[\mathrm{f}(\overset{b}{\underset{a}{\xi}});\mathrm{V}'_f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}});t] = 0$$

(kde $\mathrm{V}'_f(\xi)$ je derivace v bodě ξ funkcionálu V funkce f, jenž závisí ještě na parametru t) lze dokázati větu obdobnou větě Hamilton-Jacobiho o kanonických soustavách v obyčejném diferenciálním počtu.

Mohli bychom se zabývati rovnicemi s funkcionálními derivacemi řádu vyššího, než prvního; na příklad byly objeveny zajímavé výsledky o lineárních rovnicích s funkcionálními derivacemi druhého řádu (17).

Hadamard (20) nalezl zajímavou rovnici s funkcionálními derivacemi pro Greenovu funkci; rovnice ta dává řešení Dirichletova problému pro rovinný obor; Greenova funkce je tu funkcionálem funkcí, jež dávají obvod dotyčného oboru. Zmíněná rovnice s funkcionálními derivacemi vyjadřuje, jak se mění Greenova funkce, mění-li se (nekonečně málo) okraj oboru.

15. Nemohu ukončiti tento všeobecný náčrt o funkcionálech a nezmíniti se o jejich užití v teorii funkcí, které bylo zavedeno teprve nedávno. Není možné rozšířiti Cauchyho pojem monogennosti na prostor o třech nebo více rozměrech, uvažujeme-li jenom o obyčejných funkcích jedné nebo několika proměnných. Mějme však na mysli funkcionál F závisící na tvaru a na poloze uzavřené křivky v třírozměrném prostoru a na smyslu, v němž se křivka probíhá. Předpokládejme, že dvě uzavřené křivky mají společnou část, která je probíhána opačnými směry podle toho, považujeme-li ji za část jedné křivky, nebo druhé. Můžeme nazvati křivku L, kterou obdržíme tím, že odstraníme společnou část a z obou zbývajících částí utvoříme křivku jedinou, součtem obou čar původních L_1, L_2 a psáti

$$L = L_1 + L_2.$$

Má-li funkcionál F vlastnost součtovou, to jest

$$\mathrm{F}[L] = \mathrm{F}[L_1] + \mathrm{F}[L_2],$$

pravíme o něm, že je prvého stupně. Pošiňme v jednom bodě A nekonečně malý prvek ds křivky nekonečně málo, takže opíše plochu dσ a buď dF nekonečně malá změna funkcionálu F. Po-