K příbuznosti (2, 2) v základních útvarech.

F. Vyčichlo.

(Došlo 6. června 1932.)

Uvažujme příbuznost (2,2) dvou řad bodových na mimoběžných přímkách U, U_1. Jest známo, že jest stanovena osmi družinami sobě příslušných bodů. Spojnice těchto družin stanoví nekonečné množství ploch 2. stupně, jež se jich dotýkají. Každá z těchto ploch P, jež se uvedených osmi přímek dotýká, vede k dané příbuznosti. Každá tečna plochy P, která přímky U a U_1 protíná, činí tak v družině sobě příslušných bodů. Tyto tečny vytvořují zborcenou plochu 4. stupně S opsanou všem zmíněným plochám 2. stupně. Přímky U a U_1 jsou na ploše S dvojnými přímkami. Jiných dvojných prvků tato plocha neobsahuje. Kdyby na ní ležel dvojný bod mimo U a U_1, pak by příčka jím vedená k U a U_1 musela náležeti ploše majíc s ní více než 4 jednoduché body společné. Přímka by byla dvojnou přímkou plochy a v dané příbuznosti by jednomu bodu dvojnému na U příslušel taktéž bod dvojný na U_1 a příbuznost daná by nebyla obecná.

Pomocí přímek na ploše P provádí R. Sturm*) důkaz věty, která praví: *Dvojpoměr bodů rozvětvení v jednom útvaru rovná se dvojpoměru bodů rozvětvení v druhém útvaru a rovněž dvojpoměr bodů dvojných v jednom útvaru rovná se dvojpoměru dvojných bodů v druhém útvaru.*

Podáme zde důkaz této věty poněkud odlišný a ryze geometrický. Přímka U nechť protne plochu P v bodech a, b, přímka U_1 v bodech c_1, d_1. Přímky na P těmito body procházející a náležející jedné řadě buďtež příslušné: A, B, C_1, D_1; přímky těmito body v řadě druhé na P buďtež: A', B', C'_1, D'_1; body, v nichž se tyto přímky protínají označme podle tohoto schema

	A	B	C_1	D_1
A'	a	b_0	c_3	d_2
B'	a_0	b	c_2	d_3
C'_1	a_3	b_2	c_1	d_0
D'_1	a_2	b_3	c_0	d_1

*) Geometr. Verwandschaften I. Bd. pg. 258.

Body rozvětvení na U jsou a, b a průsečíky c, d tečných rovin $(C_1D'_1)$, $(D_1C'_1)$ položených přímkou U_1 k ploše P, s přímkou U; obdobně body rozvětvení na U_1 jsou c_1, d_1 a průsečíky a_1b_1 tečných rovin (AB'), (BA') přímkou U k ploše P položených, s přímkou U_1. Následkem toho protíná přímka $\overline{a_3d_3}$ přímku U v bodě d, přímku U_1 v bodě a_1, přímka $\overline{b_3c_3}$ přímku U v bodě c, přímku U_1 v bodě d_1.

Uvažujme nyní přímky $\overline{ad_1}$, $\overline{bc_1}$, $\overline{cb_1}$, $\overline{da_1}$, jež protínají vesměs jak U, tak U_1. Přímka $\overline{c_3d_3}$ protíná přímku $\overline{ad_1}$, jelikož s ní leží v rovině (D_1A'), ona protíná přímku $\overline{bc_1}$, poněvadž s ní leží v rovině (C_1B'); dále protíná přímku $\overline{cb_1}$ v bodě c_3 a přímku $\overline{da_1}$ v bodě d_3. Přímka $\overline{a_3b_3}$ protíná $\overline{ad_1}$, jelikož s ní leží v rovině (AD'_1); ona protíná též $\overline{bc_1}$, jelikož s ní leží v rovině (BC'_1); dále protíná $\overline{cb_1}$ v bodě b_3 a $\overline{da_1}$ v a_3.

Z toho soudíme, že přímky $\overline{ad_1}$, $\overline{bc_1}$, $\overline{cb_1}$, $\overline{da_1}$, leží na ploše 2. stupně náležejíce téže řadě přímek; plocha ta obsahuje jejich transversály U, U_1, $\overline{c_3d_3}$, $\overline{a_3b_3}$, z řady druhé. Přímky řady jedné vytínají z přímek řady druhé promětné řady bodové; jest tedy

$$abcd \;\pi\; d_1c_1b_1a_1, \text{ takže}$$
$$(a_1b_1c_1d_1) = (abcd).$$

Tím jest správnost prvé části uvedené věty dokázána.

Body dvojné na U_1 jsou průsečíky α_1, β_1 tečných rovin (AA'), (BB') plochy P v bodech a, b, dále průsečík γ_1 přímky, která spojuje bod dotyku c_0 roviny $(C_1D'_1)$ s bodem c a potom průsečík δ_1 přímky, která spojuje bod dotyku d_0 roviny (C'_1D_1) s bodem d. Na přímce U jsou dvojné body γ, δ průsečíky s tečnými rovinami $(C_1C'_1)$, $(D_1D'_1)$, dále průsečík α přímky, která spojuje bod dotyku a_0 roviny (AB') s bodem a_1, a konečně průsečík β přímky, která spojuje bod dotyku b_0 roviny (BA') s bodem b_1.

Promítneme-li body αabd ležící na U z bodu a_0 na přímku $\overline{a_1d}$ a odtud na přímku U_1 z bodu d_2 obdržíme vztah

$$(\alpha abd) = a_1\alpha_1d_1b_1);$$

neboť $\overline{b_2d_2}$ je průsečnicí roviny (BA') s rovinou $(D_1C'_1)$ a tudíž seče U_1 v bodě b_1 a d je průsečíkem rovin (AB'), (BA'), $(D_1C'_1)$.

Tím dospíváme k relaci:

$$(abd\alpha) = (a_1b_1d_1\alpha_1). \tag{1}$$

Obdobně promítneme-li β, a, b, c, z bodu b_0 na přímku $\overline{b_3c_3}$ a odtud z bodu c_2 na U_1 obdržíme vztah:

$$\begin{aligned}(\beta abc) &= (b_1c_1\beta_1a_1), \text{ takže}\\ (abc\beta) &= (a_1b_1c_1\beta_1).\end{aligned} \tag{2}$$

Dále promítněme $\gamma_1\ b_1c_1d_1$ z bodu c_0 na $\overline{b_3c_3}$ a odtud z b_2 na U; tím obdržíme vztah

$$(\gamma_1 b_1 c_1 d_1) = (cd\gamma b), \text{ takže}$$
$$(bcd\gamma) = (b_1 c_1 d_1 \gamma_1) \tag{3}$$

konečně promítněme $\delta_1 a_1 c_1 d_1$ z bodu d_0 na $\overline{a_3d_3}$ a odtud z bodu a_2 na U, čímž obdržíme vztah:

$$(\delta_1 a_1 c_1 d_1) = (dca\delta) \text{ a tedy}$$
$$(acd\delta) = (a_1 c_1 d_1 \delta_1). \tag{4}$$

Z relace $(abcd) = (a_1b_1c_1d_1)$ a z rovnic (1) . . . (4) plyne:

$$abcd\alpha\beta\gamma\delta \ldots \pi\ a_1b_1c_1d_1\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 \ldots \tag{I}$$

Je tedy též

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1).$$

Relace $(abcd) = (a_1b_1c_1d_1)$ plyne ihned uvážíme-li, že $b_0aba_0c_0d_1c_1d_0$ jest osm asociovaných bodů na ploše P; neboť body $a_0bc_0c_1$ leží v rovině a rovněž $b_0ad_1d_0$ leží v rovině; následkem toho leží průsečné přímky protilehlých stěn v osmiúhelníku $b_0aba_0c_0d_1c_1d_0$ na ploše 2. stupně. Tyto přímky jsou $\overline{b_3c_3}$, $\overline{a_1d}$, $\overline{bc_1}$, $\overline{ad_1}$, což jsou právě ty přímky, k nimž jsme prve dospěli.

Když čtyři z osmi asociovaných bodů promítáme ze dvou přímek, které spojují ostatní čtyři, obdržíme prometné svazky. Pro náš případ plyne z toho, že transversály přímek U a U_1 z bodů $a_0b_0c_0d_0$ vycházející jsou čtyři přímky plochy 2. stupně, jsou to přímky $\overline{\alpha a_1}$, $\overline{\beta b_1}$, $\overline{c\gamma_1}$, $\overline{d\delta_1}$, takže

$$(\alpha\beta cd) = (a_1b_1\gamma_1\delta_1).$$

K bodům $ab\gamma\delta$ přímky U jsou na U_1 vzhledem k ploše P sdruženy body $\alpha_1\beta_1c_1d_1$, takže jest též

$$(\alpha_1\beta_1c_1d_1) = (ab\gamma\delta).$$

Promítněme dále řadu $a_1a_3d_3d$ jednak z c_2 na U a z d_0 na U_1, čímž obdržíme vztah

$$(c\gamma bd) = (a_1c_1d_1\delta_1),$$

jednak z a_0 na U a z b_2 na U_1, čímž obdržíme:

$$(\alpha abd) = (a_1c_1\beta_1b_1).$$

Když promítneme řadu $cc_3b_3b_1$ na přímku U z bodu b_0 a na přímku U_1 z bodu c_0 obdržíme:

$$(cab\beta) = (\gamma_1c_1d_1b_1),$$

potom na přímku U z bodu d_2, a na přímku U_1 z bodu c_0, obdržíme:

$$(ca\delta d) = (\gamma_1c_1d_1b_1),$$

a konečně na U z bodu b_2 a na U_1 z a_2 takže obdržíme vztah: