Příspěvek k teorii funkcí prostých.

(Výtah z disertace.)

Lad. Špaček.

(Došlo 30. května 1932.)

V této práci odvodím některé podmínky, postačující k tomu, aby daná funkce byla prostá.

1. Mějme funkci $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, která je pro $|z| < 1$ regulární a různá od nuly mimo počátek, kde má jednoduchý nulový bod, a *není* prostá.[1]) Pak jest možno podle známé věty nalézti takové číslo r $(0 < r < 1)$, že křivka $w(t) = f(re^{it})$ $(0 \leqq t < 2\pi)$ není jednoduchá; budiž tedy na př. $w(t_1) = w(t_2)$ $(0 \leqq t_1 < t_2 < 2\pi)$. Protože se podle předpokladu $w(t) = f(re^{it})$ nerovná nule pro žádné t, jest možno zvoliti hodnotu logaritmu tak, aby $\log w(t) = \log f(re^{it})$ byl spojitou funkcí proměnné t; z rovnice $w(t_1) = w(t_2)$ pak plyne, že, proběhne-li t interval $< t_1, t_2 >$, změní se $\log f(re^{it})$ o $2k\pi i$ (k je číslo celé).

Z rovnice $\log f(z) = \log z + \log \frac{f(z)}{z}$ je zřejmo, protože $\frac{f(z)}{z}$ nemá uvnitř jednotkové kružnice nulových bodů, že, probíhá-li t interval $< t_2, t_2 - 2k\pi >$, změní se $\log f(re^{it})$ o $-2k\pi i$. Proběhne-li tedy t interval $< t_1, t_2 - 2k\pi >$ (při čemž bod $z = re^{it}$ opíše křivku $\mathfrak{L}$), $\log f(re^{it})$ se nezmění; při tom z podmínky $0 \leqq t_1 < t_2 < 2\pi$ plyne, že $t_1 \neq t_2 - 2k\pi$. Jest tedy

$$\int_{\mathfrak{L}} \frac{d}{dz} (\log f(z))\, dz = \int_{\mathfrak{L}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{t_1}^{t_2 - 2k\pi} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}\, ire^{it}\, dt = 0. \qquad (1)$$

Mějme nyní funkci $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, která je pro $|z| < 1$ regulární, od nuly různá kromě počátku, kde má jedno-

[1]) Budu nazývati stručně „prostou“ takovou funkci, která je pro $|z| < 1$ regulární a nenabývá v žádné dvojici bodů uvnitř jednotkové kružnice téže hodnoty.

duchý nulový bod a ke které lze nalézti takové číslo α_0, že je pro $|z| < 1$

$$\Re\left(\alpha_0 \frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right) > 0 \tag{2}$$

(toto číslo α_0 je zřejmě od nuly různé a z (2) pro $z \to 0$ dokonce plyne, že je $\Re(\alpha_0) > 0$). Píšeme-li poslední integrál z (1) ve tvaru

$$\frac{i}{\alpha_0} \int_{t_1}^{t_2 - 2k\pi} \alpha_0 \frac{re^{it} f'(re^{it})}{f(re^{it})}\, dt$$

je zřejmo, že tato funkce nemůže býti neprostá.

Předpoklad, že funkce $f(z)$ je pro $|z| < 1$ regulární a od nuly různá kromě počátku, kde má jednoduchý nulový bod, smíme vynechati, předpokládáme-li, že funkce

$$\psi(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} \tag{3}$$

jest regulární pro $|z| < 1$ a rovna jedné pro $z = 0$; neboť z (3) plyne

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \frac{\psi(z) - 1}{z}$$

$$\log f(z) = \log z + \int_0^z \frac{\psi(z) - 1}{z}\, dz + \log C$$

$$f(z) = Cze^{\int_0^z \frac{\psi(z)-1}{z} dz}$$

z čehož je naše tvrzení patrno.

Dokázali jsme tedy základní větu: Jestliže výraz $\frac{z\,f'(z)}{f(z)}$ jest pro $|z| < 1$ regulární, pro $z = 0$ roven jedné a jestliže lze nalézti takové číslo α_0, aby pro $|z| < 1$ platilo $\Re\left(\alpha_0 \frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right) > 0$, jest funkce $f(z)$ prostá.

Podmínky, aby $\frac{z\,f'(z)}{f(z)}$ bylo pro $|z| < 1$ regulární a pro $z = 0$ rovno jedné, jsou zřejmě nutné; naproti tomu uvidíme, že podmínka $\Re\left(\alpha_0 \frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right) > 0$ není nutná. Podmínka, aby $\frac{z\,f'(z)}{f(z)}$ bylo pro $z = 0$ rovno jedné, je ekvivalentní s podmínkou, aby $f(z)$ mělo tvar $a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,\ a_1 \neq 0$.

2. Z odvozené věty můžeme získati podmínky pro koeficienty, postačující, aby funkce jimi určená byla prostá, užijeme-li Carathéodory-Schurova vyšetření funkcí, nabývajících pouze hodnot s kladnou reálnou částí a funkcí, nabývajících pouze hodnot z vnitřku jednotkové kružnice. Nejvhodnější tvar jejich výsledku pro naše vyšetřování je tento[2]): Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby podíl $\frac{\mathrm{g}(z)}{\mathrm{h}(z)}$ funkcí $\mathrm{g}(z) = b_0 + b_1 z + \dots$ a $\mathrm{h}(z) = c_0 + c_1 z + \dots$ byl pro $|z| < 1$ regulární a nabýval pouze hodnot z vnitřku jedničkové kružnice, je, aby determinanty

$$\delta_n = \begin{vmatrix} \bar{c}_0 & 0 & 0 \dots 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_0 & 0 \dots 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-2} \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_1 & \bar{c}_0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{c}_{n-1} & \bar{c}_{n-2} & \bar{c}_{n-3} \,.\, \bar{c}_0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \\ \bar{b}_0 & 0 & 0 \dots 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_0 & 0 \dots 0 & 0 & c_0 & \dots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{b}_{n-1} & \bar{b}_{n-2} & \bar{b}_{n-3} \,.\,.\, \bar{b}_0 & 0 & 0 & \dots & c_0 \end{vmatrix}$$

byly buď kladné pro všechna n nebo kladné pro $n \leqq N \geqq 1$ a rovny nule pro $n > N$. Z transformace $w = \frac{w' - 1}{w' + 1}$ (převádějící pravou půlrovinu roviny w' na vnitřek jednotkové kružnice roviny w) plyne, že k tomu, aby $\alpha_0 \frac{z\,\mathrm{f}'(z)}{\mathrm{f}(z)}$ bylo pro $|z| < 1$ regulární a aby platilo pro $|z| < 1$ $\Re\left(\alpha_0 \frac{z\,\mathrm{f}'(z)}{\mathrm{f}(z)}\right) > 0$, je nutno a stačí, aby

$$\frac{\alpha_0 \mathrm{f}'(z) - \frac{\mathrm{f}(z)}{z}}{\alpha_0 \mathrm{f}'(z) + \frac{\mathrm{f}(z)}{z}}$$

bylo pro $|z| < 1$ regulární a mělo absolutní hodnotu menší než jedna. Označíme-li tedy $\tau_n(\alpha_0)$ determinant δ_n, ve kterém jsme položili $(\alpha_0(\nu + 1) + 1)\, a_{\nu+1}$ za c_ν a $(\alpha_0(\nu + 1) - 1)\, a_{\nu+1}$ za b_ν, plyne z věty Carathéodory-Schurovy, že funkce $\mathrm{f}(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ je prostá, jestliže lze nalézti takové číslo α_0, aby bylo buď $\tau_n(\alpha_0) > 0$ pro všechna n nebo

[2]) Viz Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal für die reine und angewandte Mathematik, sv. 147 (1917), str. 221.

$\tau_n(\alpha_0) > 0$ pro $n \leqq N \geqq 1$ a $\tau_n(\alpha_0) = 0$ pro $n > N$ (požadavek, aby bylo $a_1 \neq 0$, plyne z podmínky $N \geqq 1$ čili $\tau_1 = |a_1|^2 \cdot 4\Re(\alpha_0) \neq \neq 0$).

Z rovnice

$$\alpha_0 \frac{z\,f'(z)}{f(z)} = \varphi(z)$$

čili

$$\alpha_0\, z\, f'(z) - f(z)\, \varphi(z) = 0$$

plyne podle věty o neurčitých součinitelích (je-li $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ a $\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots$) $\alpha_0 (n-1) a_n - \alpha_1 a_{n-1} - \ldots$

$$- \alpha_{n-1} = 0 \quad n = 2, 3, \ldots; \tag{4}$$

o koeficientech α_ν funkce $\varphi(z)$, nabývající pouze hodnot s reálnou částí kladnou, platí podle známé věty

$$|\alpha_\nu| \leqq 2\Re(\alpha_0) \leqq 2|\alpha_0| \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Předpokládáme-li, že pro $\nu < n$ platí $|a_\nu| \leqq \nu$, plyne z (4)

$$|a_n| \leqq \frac{1}{n-1} \cdot 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n;$$

protože pak pro $n = 2$ plyne z (4) $|a_2| \leqq 2$, je pro funkce $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, hovící podmínce (2), dokázán vztah

$$|a_n| \leqq n \tag{6}$$

3. Uvedu ještě dvojí zobecnění základní věty.

Budiž $z(\zeta)$ funkce regulární v jednotkové kružnici a zobrazující ji na „naříznutou" jednotkovou kružnici (t. j. jednoduše souvislou oblast, která vznikne z jednotkové kružnice vynecháním bodového množství $\mathfrak{M}$, jehož každý[3]) bod je bodem zhuštění bodů nevynechaných) a zachovávající počátek; inversní funkci k $z(\zeta)$ označme $\zeta(z)$.

Není-li funkce $f(z)$ prostá, takže platí $f(z_1) = f(z_2)$, $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$, $z_1 \neq z_2$, lze podle známých vět ke každému bodu z jistého okolí kteréhokoli z obou bodů z_1, z_2 nalézti takový bod z okolí druhého, že v obou těchto bodech nabývá $f(z)$ téže hodnoty. Lze tedy nalézti také dva body této vlastnosti od sebe různé, z nichž ani jeden nepatří k $\mathfrak{M}$. Z toho plyne, že funkce $F(\zeta) = f(z(\zeta))$ není prostá.

Užijeme-li základní věty na funkci $F(\zeta)$, vidíme, že funkci $\psi(z) = \dfrac{z\,f'(z)}{f(z)}$ v základní větě smíme nahraditi funkcí $\chi(\zeta) = \zeta \dfrac{f'(z(\zeta))}{f(z(\zeta))} z'(\zeta)$; uvážíme-li dále, že, je-li $\psi(z)$ v jednotkové kruž-

[3]) Následující věta by zůstala v platnosti, i kdyby pouze všechny body množství $\mathfrak{M}$, *ležící vně jisté kružnice* $|z| \leqq r < 1$, byly body zhuštění bodů nevynechaných.

nici regulární a v počátku rovno jedné, platí to i pro $\chi(\zeta)$ a zavedeme-li do $\chi(\zeta)$ proměnnou z vztahem $\zeta = \zeta(z)$, můžeme vysloviti zobecněnou větu takto: Funkce $f(z)$ je prostá, jestliže $\frac{z\,f'(z)}{f(z)}$ je pro $|z| < 1$ regulární a pro $z = 0$ rovno jedné a jestliže jest možno nalézti takovou funkci $\zeta(z)$, zobrazující naříznutou jednotkovou kružnici roviny z prostě na jednotkovou kružnici a zachovávající počátek, a takové číslo α_0, aby pro z z jednotkové kružnice po vynechání příslušného zářezu platilo $\Re\left(\alpha_0 \frac{z\,f'(z)}{f(z)} \frac{\zeta(z)}{z\,\zeta'(z)}\right) > 0$.

Druhé zobecnění dostaneme, uvážíme-li, že funkce $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ je prostá, je-li prostá některá z funkcí $F(z) = f\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right) - f(\alpha) = A_1 z + \ldots$ ($|\alpha| < 1$); užitím základního kriteria na funkce $F(z)$ dostaneme obecnější postačující podmínky pro to, aby funkce $f(z)$ byla prostá.

Pomocí tohoto zobecnění můžeme ukázati, že podmínka $\Re\left(\alpha_0 \frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right) > 0$ není nutná k tomu, aby funkce $f(z)$ byla prostá. Vezměme prostou funkci $F(z) = \frac{z}{1-z^2}$ [4] a utvořme z ní funkci $f(z) = F\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}z}\right) - F(\tfrac{1}{2}) = \frac{5}{3}\frac{z\,(1+\frac{4}{5}z)}{1-z^2}$, která jest tedy také prostá. Výraz $\frac{z\,f'(z)}{f(z)} = \psi(z)$ jest roven $\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+\frac{4}{5}z}$. Klademe-li $z = -e^{it}$, můžeme pro $t \neq 0$, π psáti $\psi(-e^{it}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \operatorname{cotg} \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} - 5 + \varepsilon(t)$, $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. Blíží se tedy $\psi(-e^{it})$ jednak k horní (pro $t \to +0$), jednak k dolní (pro $t \to -0$) části přímky $\Re(z) = -4$; protože mimo to $\psi(0) = 1$, není možno pro žádné α_0 splniti podmínku (2).

4. Mějme prostou funkci $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$; jestliže se při libovolném r $(0 < r < 1)$ při obíhání kružnice $|z| = r$ v kladném smyslu průvodič bodu $f(z)$ otáčí kolem počátku stále v kladném smyslu, nazývá se tato funkce hvězdovitou. Analyticky je tato vlastnost vyjádřena podmínkou $\Re\left(\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right) > 0$.

Ze základní věty plyne, že můžeme předpoklad, že funkce $f(z)$ je prostá, vynechati, předpokládáme-li na př., že funkce $\frac{z\,f'(z)}{f(z)}$ je pro $|z| < 1$ regulární a že $a_1 \neq 0$, takže můžeme vysloviti větu:

[4]) Tento příklad mi byl písemně sdělen p. prof. Kösslerem.

Funkce $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ je hvězdovitá tehdy a jen tehdy, jestliže $a_1 \neq 0$ a jestliže funkce

$$\varphi(z) = \frac{z\, f'(z)}{f(z)} \tag{7}$$

je pro $|z| < 1$ regulární a nabývá pouze hodnot s kladnou reálnou částí. Požadavek $a_1 \neq 0$ je ekvivalentní s požadavkem $\varphi(0) = 1$.

Použitím transformace $w = \dfrac{w' - 1}{w' + 1}$ a Schwarzova lemmatu[5]) můžeme podmínku $\varphi(z)$ regulární a $\Re(\varphi(z)) > 0$ pro $|z| < 1$ nahraditi podmínkou $\dfrac{1}{z}\,\dfrac{f'(z) - \frac{f(z)}{z}}{f'(z) + \frac{f(z)}{z}}$ regulární a $\left|\dfrac{1}{z}\,\dfrac{f'(z) - \frac{f(z)}{z}}{f'(z) + \frac{f(z)}{z}}\right| \leqq 1$ pro $|z| < 1$. Z věty Schurovy pak plyne věta:

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby funkce $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ byla hvězdovitá, je, aby $a_1 \neq 0$ a aby determinanty

$$\sigma_n = \begin{vmatrix} 2\bar{a}_1 & 0 & \dots & 0 & a_2 & 2a_3 & \dots & (n-1)\,a_n \\ 3\bar{a}_2 & 2\bar{a}_1 & \dots & 0 & 0 & a_2 & \dots & (n-2)\,a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n\bar{a}_{n-1} & (n-1)\,\bar{a}_{n-2} & \dots & 2\bar{a}_1 & 0 & 0 & \dots & a_2 \\ \bar{a}_2 & 0 & \dots & 0 & 2a_1 & 3a_2 & \dots & na_{n-1} \\ 2\bar{a}_3 & \bar{a}_2 & \dots & 0 & 0 & 2a_1 & \dots & (n-1)\,a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)\,\bar{a}_n & (n-2)\,\bar{a}_{n-1} & \dots & \bar{a}_2 & 0 & 0 & \dots & 2a_1 \end{vmatrix}$$

byly buď kladné pro všechna n nebo kladné pro $n \leqq N$ a rovny nule pro $n > N$.

Abychom lépe viděli, jakých hodnot smějí koeficienty hvězdovitých funkcí nabývati, postupujeme takto: z rovnice (7), psané ve tvaru $z\,f'(z) - f(z)\,\varphi(z)$, plyne podle věty o neurčitých součinitelích (je-li $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ a $\varphi(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots$)

$$(\nu - 1)\, a_\nu - a_{\nu-1}\alpha_1 - \dots - \alpha_{\nu-1} = 0 \quad \nu = 2, 3, \dots \tag{8}$$

Jsou-li koeficienty $a_2, a_3, \dots, a_n$ tak zvoleny, aby existovala hvězdovitá funkce, začínající těmito koeficienty $1, a_2, \dots, a_n$, jsou koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, vypočtené z rovnic (8), psaných postupně pro $\nu = 2, 3, \dots, n$, takové, že existuje funkce $\varphi(z)$, reg. pro $|z| < 1$ a nabývající pro $|z| < 1$ pouze hodnot s kladnou

[5]) Za předpokladu $a_1 \neq 0$.

reálnou částí a začínající těmito koeficienty $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$; koeficient α_n pak smí nabývati všech hodnot uvnitř a na obvodu jisté kružnice (jak plyne na př. z Carathéodory-Toeplitzova vzorce)[6]), jejíž poloměr (závislý na $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ a tedy i $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$) je nejvýše roven dvěma (jak plyne ze vztahu (5)); zvolíme-li α_n na obvodu této kružnice, je tím funkce $\varphi(z)$ určena a má tvar $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \frac{1+\omega_\nu z}{1-\omega_\nu z}$, $|\omega_\nu| = 1$, $\lambda_\nu \geqq 0$ pro $\nu = 1, \ldots, n$, $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu = 1$. Přeneseme-li tyto věty pomocí (7) a (8) na funkce hvězdovité, dostaneme, že koeficient a_{n-1} smí nabývati všech hodnot uvnitř a na obvodu jisté kružnice, jejíž poloměr je roven nejvýše $\frac{2}{n}$; zvolíme-li a_{n+1} na obvodu této kružnice, jest tím hvězdovitá funkce určena a má tvar $\frac{z}{\prod_{\nu=1}^{n}(1-\omega_\nu z)^{\mu_\nu}}$, $|\omega_\nu| = 1$ $\mu_\nu \geqq 0$ pro $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu = 2$.

Mějme prostou funkci $F(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$; jestliže se pro libovolné r $(0 < r < 1)$ při obíhání kružnice $|z| = r$ v kladném smyslu tečna obrazu této kružnice otáčí stále v kladném smyslu, nazývá se tato funkce konvexní. Protože se dále zřejmě tato tečna, jejíž směr je dán vektorem $izF'(z)$, otočí při jednom oběhu kružnice $|z| = r$ o 2π, je funkce

$$f(z) = z\,F'(z) \tag{9}$$

hvězdovitá. Platí však také naopak, že, máme-li hvězdovitou funkci $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ a utvoříme-li z ní funkci $F(z)$ vztahem (9), jest tato funkce konvexní. Je zřejmo, že k tomu stačí dokázati, že je prostá. Kdyby však nebyla prostá, křivka $w(t) = F(re^{it})$ $o \leqq t < 2\pi$ by se (pro vhodné r) přetínala a rozpadala tedy na křivky $\mathfrak{L}_\nu$ $(\nu = 1, 2)$. Tečna každé z těchto křivek by se při jejím oběhu otočila (spojitě, protože podle (9) je zřejmě pro $|z| < 1$ $F'(z) \neq 0$) o více než π (neboť jinak by bylo možno najíti takové α, že by pro všechny vnitřní body křivky platilo $\Re(\alpha\, w'(t)) > 0$ a nebylo by tedy možno splniti podmínku uzavřenosti $\int_{(\mathfrak{L}_\nu)} w'(t)\, dt = 0$), což je ve sporu s tím, že se podle (9) při celém oběhu má otočiti o 2π.

Užitím vzájemně jednoznačného přiřazení funkcí konvexních $F(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$ a hvězdovitých $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ rovnicí (9) můžeme přenésti lehce věty o funkcích hvězdovitých na funkce konvexní.

---

[6]) Viz na př. Schur, loc. cit. str. 229.