Všechna čísla ze systému $S$ jsou tudíž dělitelná číslem $\omega$; tedy platí $\omega/\varrho$, $\omega/\alpha$. Poněvadž $\varrho$ je Gaussovo prvočíslo, je buď $\omega = \varepsilon\varrho$ anebo $\omega = \varepsilon$, při čemž $\varepsilon$ je Gaussova jednotka. V prvém případě by $\frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{\varepsilon\varrho}$ bylo číslo Gaussovo, tedy také $\frac{\alpha}{\varrho}$, což je proti předpokladu $\varrho \times \alpha$. Tedy $\omega = \varepsilon$. Avšak $\omega$ je číslo ze systému $S$, tedy podle definice tohoto systému existují Gaussova čísla $\lambda$, $\mu$ taková, že $(\omega = \varepsilon)$ $\varepsilon = \lambda\varrho + \mu\alpha$. Násobme tuto rovnici číslem $\beta$:

$$\varepsilon\beta = \lambda\varrho\beta + \mu\alpha\beta.$$

Podle předpokladu je $\alpha\beta$ násobkem čísla $\varrho$, tedy $\alpha\beta = \varrho \,.\, \nu$, kde $\nu$ je číslo Gaussovo. Bude tudíž $\varepsilon\beta = \varrho\,(\lambda\beta + \mu\nu)$

a
$$\beta = \varrho\,\frac{\lambda\beta + \mu\nu}{\varepsilon}$$

$\left(\frac{\lambda\beta + \mu\nu}{\varepsilon}\right.$ je Gaussovo číslo, neboť $\frac{1}{\varepsilon}$ je Gaussova jednotka$\left.\right)$.

Tedy $\varrho/\beta$, c. b. d. (Pokračování.)

# Elipsy na nepřímkové ploše rotační 2. stupně.*)

Dr. *Jan Roháček.*

Účelem těchto řádků je odvoditi způsobem, studujícím škol středních přístupným, známou vlastnost, že eliptický řez na nepřímkové rot. ploše 2. stupně promítá se z vrcholu plochy na rovinu kolmou k ose do *kružnice.*

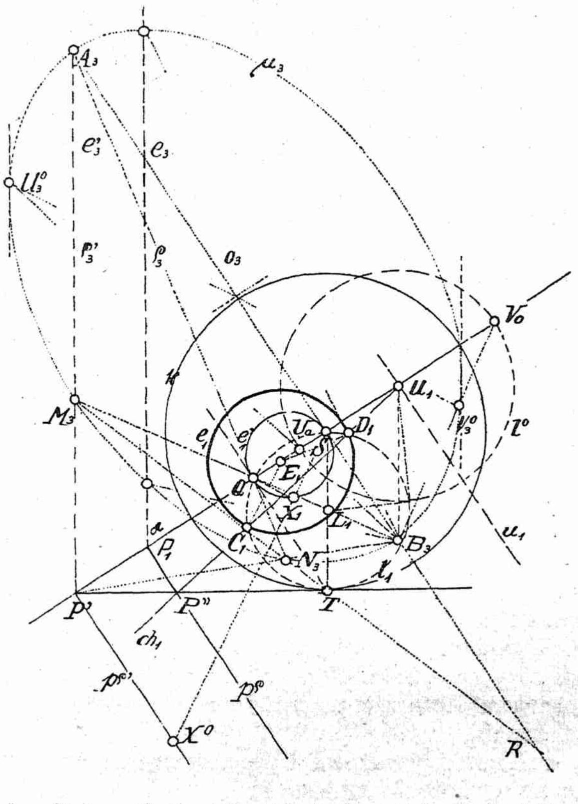
Rot. plocha 2. stupně budiž dána (obr. 1) povrchovou kružnicí $k$ $(S, r)$, ležící v průmětně, rotační osou $o$ a na ní vytknutými hlavními vrcholy $A$, $B$. Jsou-li vrcholy voleny na různých stranách průmětny, je plocha rot. *elipsoidem*, jsou-li na téže straně, je rot. *hyperboloidem dvojdílným* a je-li jeden z vrcholů úběžným bodem osy $o$, pak plocha je rot. *paraboloidem.*

Zvolená rovina $\varrho$, daná stopou $\chi^\varrho$ a odchylkou $\alpha$, protíná plochu uvažovanou, na př. elipsoid, v elipse $e$. Rovina rovnoběžná $\varrho' \parallel \varrho$, vedená vrcholem $A$, seče plochu v podobné elipse $e'$. (Řezy rovnoběžné na ploše kuželové jsou podobné; dvěma eliptickými řezy na elipsoidu — i rovnoběžnými — možno proložiti plochu kuželovou.) Stopa její budiž $\chi^{\varrho'} \parallel \chi^\varrho$.

Rovina $\varphi$, vedená osou plochy kolmo na sečné roviny protíná

*) O jiných a také podobných vlastnostech poučíte se v knize: Deskr. geometrie (II. díl): Kadeřávek-Klíma-Kounovský (odst. 220, str. 439 atd.), která vyšla nákladem JČMF.

plochu v meridiánu $\mu$, stopy v bodech resp. $P'$, $P_1$ a rovinu $\varrho'$ v průsečnici $\overline{AP'}$, jejímž průmětem je spojnice $\overline{P'S}$. Přímky $\overline{P'A}$ $\overline{P'B}$ vytínají na meridiánu $\mu$ průsečíky s plochou $M$, $N$ (provedeno ve sklopení). Jak patrno, body $A, B, N, M$ tvoří vepsaný čtyrúhelník, v němž úhlopříčky protínají se v bodě $Q$ a prodloužené strany v bodech $P'$, $R$, z nichž $R$ se nalézá na ose $o$. Body $P'$, $Q$, $R$



jsou vrcholy diagonálního trojúhelníka, jehož každá strana je polárou protilehlého vrcholu; tedy $\overline{P'Q}$ je polárou pólu $R$. Tato stojí na osu kolmo a ježto prochází bodem $P'$, je totožná s přímkou $\overline{P'S}$. Z toho vysvítá, že průsečík úhlopříček $Q$, který možno považovati za centrální průmět bodu $M$ z druhého vrcholu $B$, padne vždy na spojnici $\overline{P'S}$ a lze jej sestrojiti polárou pólu $P'$ vzhledem ke kružnici $k$.

Sestrojíme-li tedy z bodu $P'$ tečnu ke kružnici $k$ a z dotyčného bodu $T$ spustíme kolmici na $\overline{P'S}$, obdržíme bod $Q$. Ježto trojúhelník $STP'$ je pravoúhlý, platí podle věty Euklidovy

$$\overline{ST}^2 = \overline{SQ}\,.\,\overline{SP'} = r^2,$$

čili body $P'$, $Q$ jsou inversně sdružené ke kružnici $k$. Vytkneme-li nyní na stopě $p^{\varrho'}$ kdekoliv bod $X^0$, seče přímka $\overline{X^0A}$ plochu v bodě $X$, jehož centrální průmět $X_1$ je na spojnici $\overline{X^0S}$ stanoven polárou bodu $X^0$ vzhledem ke kružnici $k$, která $\overline{X^0S}$ kolmo seče a bodem $Q$ prochází. Vidíme, že trojúhelník $SQX_1$ je opět pravoúhlý, pročež geom. místem vrcholů $X_1$ pravého úhlu je kružnice $e'_1$, jakožto inversní útvar k přímce $p$ a jako centrální průmět elipsy $e'$.

Nyní je jasno, že podobná a rovnoběžně položená elipsa $e$, ve které rovina $\varrho$ seče plochu, promítá se z téhož středu $B$ na průmětnu do kružnice $e_1$, která má střed $E_1$ na $\overline{P'S}$. Abychom ji sestrojili, veďme pomocnou rovinu tečnou $\overline{P'T}$ a vrcholem $A$. Tato seče plochu v elipse $l$, jejímž centrálním průmětem je — podle předešlého — kružnice $l_1$, nad průměrem $\overline{ST}$ opsaná, a roviny $\varrho'$, $\varrho$ ve dvou rovnoběžných průsečnicích $\overline{P'A} \parallel ch$, vycházejících ze stopníků $P'$ resp. $P''$. Jejich středové obrazy, procházejí společným úběžníkem $U_1$, který na $\overline{P'S}$ sestrojíme průsečíkem paprsku, vedeného středem $B$ rovnoběžně se směrem $\overline{P'A}$. (Bod $U_1$ je zároveň centrálním průmětem bodu $M'$, který na meridiánu $\mu$ je s bodem $M$ podle středu plochy souměrně položen.) Přímka $u_1$ jdoucí bodem $U_1$ kolmo na $\overline{P'S}$ je společnou úběžnicí pro všechny směry dané rovinou $\varrho$. Přímka $\overline{P''U_1} \equiv ch_1$ seče kružnici $l_1$ ve dvou bodech $C_1$, $D_1$, jimiž hledaná kružnice $e_1$ prochází; střed její $E_1$ leží v průsečíku paprsku $\overline{PS}$ se symetrálou délky $\overline{C_1D_1}$.

Z obrázku je jasno, že bod $U_1$ je potenčním bodem jak kružnice $l_1$, tak kružnice $e'_1$ i všech kružnic $e_1$, do nichž se promítají rovnoběžné řezy s rovinou $\varrho$. Tedy vidíme, že eliptické rovnoběžné řezy na rotačním elipsoidu promítají se z vrcholu $B$ na průmětnu do svazku kružnic, který protíná pevnou kružnici $l_0$ (pro směr roviny $\varrho$), opsanou z úběžníku $U_1$ poloměrem délky tečny vedené středem $U_1$ ke kružnici $l_1$. Nulové kružnice $U_0$, $V_0$ svazku, body to, v nichž $l_0$ protíná $\overline{P'S}$, jsou centrálními průměty bodů, v nichž se tečné roviny rovnoběžné s rovinou $\varrho$ plochy dotýkají. Vedeme-li nyní ve svazku kružnic jakoukoliv kružnici $e''_1$, která kružnici $l_0$ ortogonálně protíná, možno nalézti rovinu $\varrho'' \parallel \varrho$ a její řez s plochou $e''$, tím, že stanovíme chordálu $ch'_1$ kružnic $e''_1$, $l_1$, která na stopě $\overline{P'T}$ vytíná bod $P'''$, kterým jde stopa $p^{\varrho''} \parallel p^{\varrho}$.

Věty o centrálních průmětech řezů na elipsoidu možno výhodně použíti při stanovení průsečíku přímky s plochou. Přímkou a jedním vrcholem plochy $A$ stanovená rovina seče elipsoid v elipse;