ROZHLEDY MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÉ.

ROČNÍK XI. (1931/32). ČÍSLO 1.

O jistých geom. místech a příslušných konstrukcích kuželoseček.

Dr. *Jos. Klíma.*

Buďtež dány dvě přímky X a Y a mimo ně bod s. Libovolná přímka P jdoucí bodem s nechť protíná přímky X a Y v bodech x a y a určeme geom. místo bodů a a ${}^1a$, pro něž platí

$$\overline{sa} = \overline{s^1a} = \sqrt{\overline{sx} \,.\, \overline{sy}}.$$

Přímky X a Y zvolme za osy souřadné obecně kosoúhlé soustavy souřadné (obr. 1). Bod s mějž souřadnice (x_0, y_0). Přímka P má rovnici

$$y - y_0 = k\,(x - x_0).$$

Průsečíky této přímky s osami jsou

$$x\left(x_0 - \frac{y_0}{k},\ 0\right) \text{ a } y\,(0,\ y_0 - kx_0).$$

Promítneme-li body s, a, ${}^1a$ ve směru osy Y na osu X do bodů s', a', ${}^1a'$, platí též, je-li o průsečík obou os,

$$\overline{s'a'^2} = \overline{s'^1a'^2} = \overline{s'o} \,.\, \overline{s'x}.$$

Označíme-li souřadnice bodu $a\,(\xi, \eta)$, bude tedy $(\xi - x_0)^2 =$ $= x_0\,(-\,y_0/k)$ a stejně pro osu Y dostaneme $(\eta - y_0)^2 = y_0\,(-\,kx_0)$.

Vyloučíme-li k, dostaneme rovnici místa bodů a ve tvaru

$$(\xi - x_0)\,(\eta - y_0) = x_0 y_0,$$[1]

což je rovnice hyperboly mající střed v bodě $s\,(x_0, y_0)$, jejíž asymptoty M, N jsou rovnoběžny s osami X a Y a jež prochází bodem $o \equiv (XY)$.

---

[1]) Výsledek $(\xi - x_0)\,(\eta - y_0) = -\,x_0 y_0$ dává t. zv. hyperbolu komplementární k hyperbole uvažované v textu, jež s touto má tytéž asymptoty a osy, jen reálnost jejich se zaměnila. Tato naší úloze nevyhovuje, ježto úseky $\overline{sx}$ a $\overline{sy}$ v příslušném úhlu asymptot jsou opačných znamének a tedy body a, ${}^1a$ imaginární.

V obrazci máme pak konstrukci, jak omeziti osy A, B hyperboly, dány-li asymptoty M, N a bod o této.

Bodem o sestrojíme rovnoběžky X a Y s asymptotami, až protnou osu hlavní A v bodech t a v a tu hlavní poloosa

$$\overline{sI} = a = \sqrt{\overline{st}\,.\,\overline{sv}}.$$

Stejně vedlejší poloosa, která jest ovšem imag., jak vyplývá též ze smyslu délek $\overline{st}$ a $\overline{sv_1}$,

$$\overline{sII} = b = \sqrt{\overline{st_1}\,.\,\overline{sv_1}}.$$

Body a, ${}^1a$ na libovolné sečně P jdoucí bodem s jsou samodružné body involuce dané dvěma páry xy, su_∞, kde u_∞ jest úběžný bod této sečny, a tudíž s je středem involuce té.[2])

Přímky X a Y mohou býti též imaginární a pak jsou dány eliptickou involucí paprskovou RQ, ${}^1R^1Q$. Body a, ${}^1a$ na libovolné přímce P dostaneme pak jako pár involuce eliptické, vyťaté involucí paprskovou (RQ, ${}^1R^1Q$) na této přímce, který je půlen bodem s. Příslušným geom. místem je patrně elipsa, mající střed s, jejíž involuce sdružených průměrů je rovnoběžna s involucí určující imag. přímky X, Y. Specielně, je-li involuce RQ, ${}^1R^1Q$ pravoúhlá, byla by tím geom. místem *kružnice.*

Body x a y v obr. 1 jsou vzhledem k bodům a, ${}^1a$ harmonicky sdruženy a proto jsou konjugovanými (sdruženými) body vzhledem k hyperbole. Dostáváme tedy:

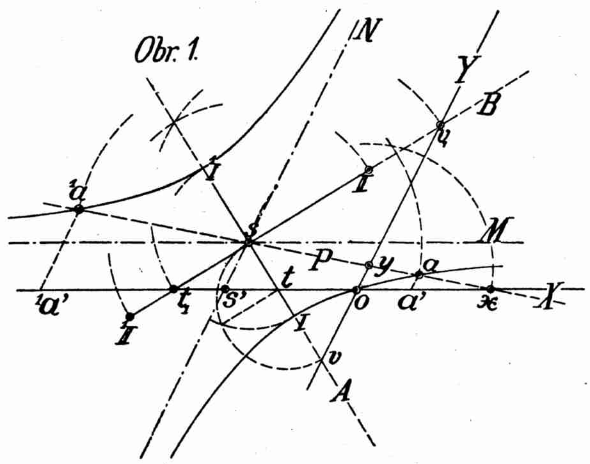
„*Body, v nichž libovolný průměr hyperboly protíná rovnoběžky s jejími asymptotami, vedenými libovolným bodem hyperboly, jsou konjugovány k hyperbole.*“

Mysleme si, že předchozí konstrukci centrálně promítneme tak, že úběžná přímka promítne se v přímku U (obr. 2), tu dostaneme následující vytvoření obecné kuželosečky: Dány dvě přímky X, Y, bod s mimo ně a přímka U. Bodem s veďme libovolnou sečnu P, jež protíná přímky X a Y v bodech x a y a přímku U v bodě u. Sestrojíme-li samodružné body a, ${}^1a$ involuce (xy, ou), pak jejich geometrickým místem je kuželosečka, která se dotýká spojnice M bodu s s průsečíkem $m \equiv (UX)$ v bodě m a spojnice N bodu s s průsečíkem $n \equiv (UY)$ v bodě n a prochází bodem $o \equiv (XY)$. Ježto body x, y jsou opět harmonicky sdruženy s dvojnými body a, ${}^1a$, jsou ony body též konjugovány podle kuželosečky. I dostáváme obecnější větu:

---

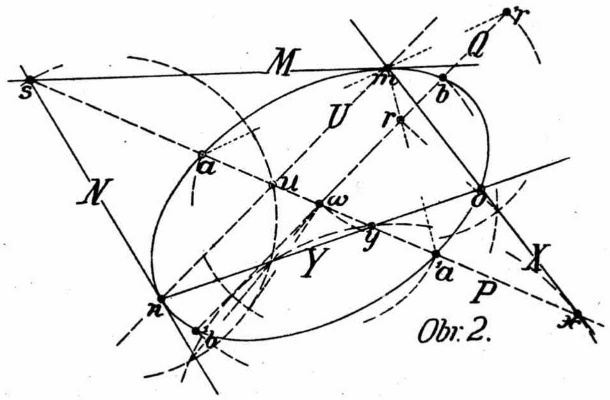
[2]) Body x, y na přímce P, pro něž platí $\overline{sx}\,.\,\overline{sy} =$ konst., tvoří páry involuce, jež má reálné dvojné body a, ${}^1a$, je-li konst. kladná; v případě konst. záporné jsou tyto imaginární. Páry x, y jsou k dvojbodům a, ${}^1a$ harmonicky sdruženy. Jednotlivé kružnice svazku kružnic vytínají na libovolné přímce páry involuce bodové a tohoto užíváme ke konstrukci dvojných bodů a středu involuce (střed involuce je bod, který tvoří její pár s úběžným bodem přímky).

„Spojnice libovolného bodu kuželosečky s dotyčnými body dvou tečen vytínají na libovolné přímce jdoucí průsečíkem těch tečen pár sdružených bodů vzhledem k té kuželosečce.“



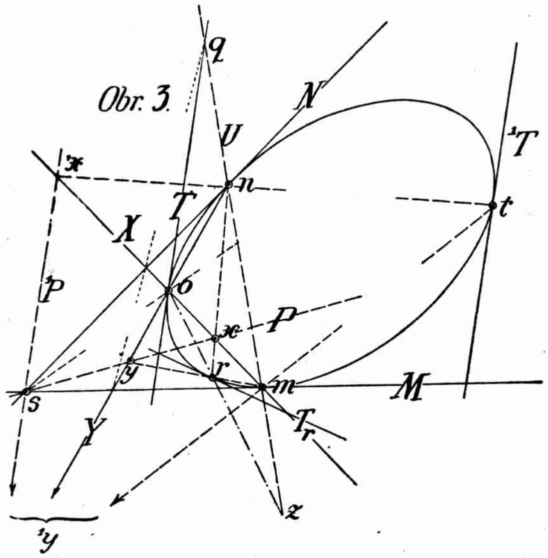
Obr. 1.

Toho lze užíti k omezení páru sdružených průměrů, dána-li kuželosečka dvěma tečnami M, N s dotyčnými body m, n a bodem o. Spojnice průsečíku $s \equiv (MN)$ s půlícím bodem u tětivy $\overline{mn}$ je



Obr. 2.

průměr P kuželosečky, na němž známe dva páry konjugovaných bodů kuželosečky. Prvý pár je s, u a druhý x, y je vyťat spojnicemi $X \equiv \overline{om}$ a $Y \equiv \overline{on}$. Střed ω a samodružné body a, ${}^1a$ této involuce konjugovaných bodů jsou středem kuželosečky a konce průměru P.[3]) Sdružený průměr Q k tomuto je rovnoběžný s tětivou $\overline{mn}$ a omezí se užitím páru sdružených bodů r a ${}^1r$, jež vytínají spojnice bodů a, ${}^1a$ s bodem ku př. m, což je zvláštní případ hořejší věty, ježto průměr Q prochází úběžným průsečíkem tečen sestrojených ke kuželosečce v bodech a a ${}^1a$. Délka poloprůměru $\overline{\omega b} = \overline{\omega^1 b} = \sqrt{\overline{\omega r} \,.\, \overline{\omega^1 r}}$.

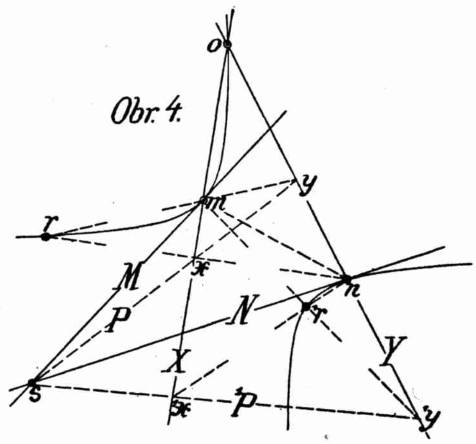


Obr. 3.

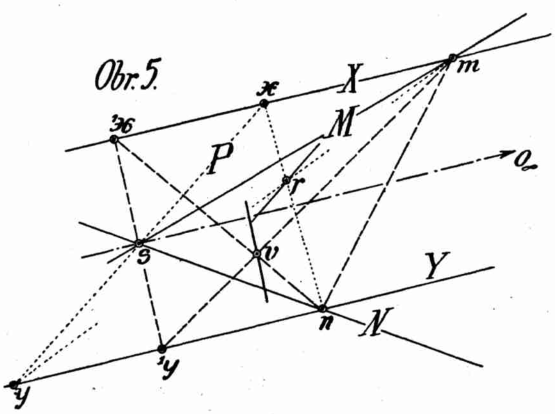
Věty uvedené lze užíti též k jednoduché konstrukci bodů kuželosečky určené tečnami M, N s dotyč. body m, n a bodem o (obr. 3). Bod o spojíme s body m a n přímkami X a Y a tyto protneme libovolnou přímkou P, jdoucí průsečíkem s tečen M a N v bodech x a y, jež jsou přidruženy ke kuželosečce a tedy jejich spojnice s body n resp. m protínají se v dalším bodě r kuželosečky. Body m, n, o, r jsou vrcholy čtyřúhelníka vepsaného kuželosečce a tudíž přímka P je polárou bodu $z \equiv (\overline{mn}, \overline{or})$ podle kuželosečky. Přejde-li přímka P ve spojnici $\overline{so}$, pak bod r splyne s o a spojnice $\overline{ro}$ přejde v tečnu T v bodě o a průsečík její q se spojnicí $U \equiv \overline{mn}$ je harmonicky přidružen k průsečíku $(U, \overline{so})$ vzhledem k bodům m, n. Bod q dostaneme jako průsečík spojnice $[(\overline{XN}), (\overline{YM})]$

[3]) Střed ω je na chordále dvou libovolných kružnic, z nichž jedna jde body s a u a druhá body x, y. Délka $\overline{\omega a} = \overline{\omega^1 a}$ se rovná délce tečny sestrojené z ω k těmto kružnicím.

s přímkou U. Ježto $\overline{ro}$ prochází bodem z, musí se tečny T_r a T v r a o protínati na poláře P. Tak možno si zjednati libovolný počet bodů kuželosečky a v nich tečny. V obraze sestrojen ještě bod t, v němž tečna ${}^1T$ je rovnoběžná s tečnou T. Příslušná přímka ${}^1P$ je rovnoběžná s T.



V obr. 4 dána kuželosečka pěti body m, n, o, r, ${}^1r$ a ukázáno, jak konstrukce její převedena na předchozí případ. Spojnice



$\overline{mo} \equiv X$ a $\overline{no} \equiv Y$ jsou proťaty spojnicemi $\overline{nr}$ resp. $\overline{mr}$ v bodech x a y, jejichž spojnice $P \equiv \overline{xy}$ jde průsečíkem s tečen M, N sestrojených ke kuželosečce v bodech m, n. Podobně bod ${}^1r$ dá body ${}^1x$, ${}^1y$

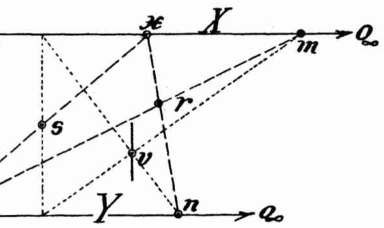
---

[4]) Geometrie polohy dává tyto výsledky ovšem též na základě vytvoření kuželosečky.

a jejich spojnice ${}^1P \equiv \overline{{}^1x{}^1y}$ určuje s P bod s. Tím úloha převedena na případ v obr. 3.[4])

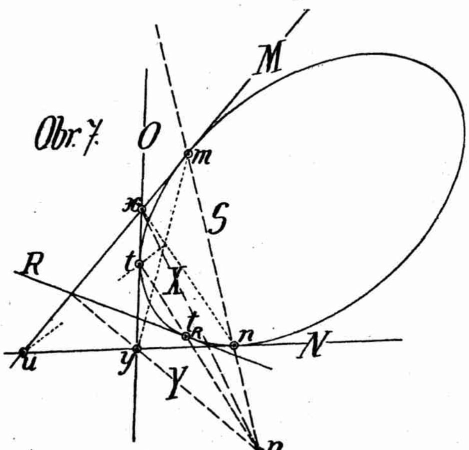
Z toho vyplývají jednoduché konstrukce pro parabolu určenou dvěma tečnami M, N s dotyčnými body m, n (obr. 5), jejichž průsečík označen opět s. Spojnice tohoto bodu s s půlícím bodem dotyčné tětivy $\overline{mn}$ udává směr osy a tedy úběžný bod o_∞ paraboly,

Obr. 6



v němž tečna T splývá s úběžnou přímkou. Přímky X a Y obecného případu jsou tu rovnoběžky vedené body m a n se směrem osy. Libovolná přímka P bodem s vedená seče tyto rovnoběžky v bodech x a y a jejich spojnice s n resp. m protínají se v bodě r para-

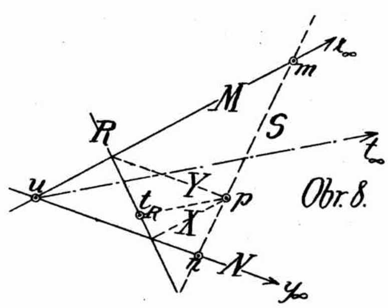
Obr. 7



boly, v němž tečna je rovnoběžná s přímkou P. Odtud vyplývá velice jednoduchá konstrukce tečny k parabole, dané dvěma tečnami s dotyčnými body, rovnoběžné s daným směrem P. Specielně zvolíme-li P kolmo ke směru osy $(\overline{{}^1x{}^1y} \perp \overline{so_\infty})$, dostaneme vrchol v paraboly.

V obr. 6 vyznačena na základě předchozího jednoduchá konstrukce vrcholu paraboly, dané třemi body m, n, r a směrem osy $X \parallel Y$. Dvěma body m, n sestrojíme rovnoběžky X, Y s tímto směrem a vzdálenost průsečíků $x \equiv (X, \overline{nr})$ a $y \equiv (Y, mr)$ rozpůlíme bodem s, jímž by procházely tečny v bodech m a n a konstrukce vrcholu v je patrná z předchozího.

Ke všem těmto konstrukcím patří konstrukce duální. Tak v obr. 7 ukázána konstrukce kuželosečky dané dvěma tečnami M, N s dotyč. body m, n a tečnou O. Útvary duální k útvarům v obr. 3 označeny týmiž písmeny, jen malá zaměněna za velká a obráceně, ježto bodům odpovídají přímky a přímkám body. Spojíme-li libovolný bod p spojnice S dotyčných bodů m, n s průsečíky $x \equiv (MO)$ a $y \equiv (NO)$ přímkami X, Y, jsou tyto



sdruženy harmonicky podle kuželosečky[5]) a vytínají na tečně N resp. M body, jejichž spojnice je další tečna R kuželosečky. Její dotyčný bod t_R je s bodem dotyku t tečny O na přímce jdoucí bodem p.

Je-li tečna O úběžnou přímkou roviny, máme dánu parabolu opět dvěma tečnami M, N s dotyčnými body m, n (obr. 8). Další tečnu R dostaneme, vedeme-li libovolným bodem p na $S \equiv \overline{mn}$ rovnoběžky X, Y s tečnami M resp. N a průsečíky jejich s tečnami N resp. M spojíme. Bod dotyku t_R je na rovnoběžce se směrem osy jdoucí bodem p.

Kdyby M, N byly asymptoty hyperboly a O libovolná tečna, dostaneme snadno další tečny, z kteréžto konstrukce se obdrží známá vlastnost, že tečny hyperboly omezují s asymptotami hyperboly trojúhelníky stálého obsahu.

Jak z těchto konstrukcí vyplynou jiné, na př. sestrojiti kuželosečku z pěti tečen, tečny s dotyčným bodem a tří tečen atd., nechť čtenář si laskavě provede sám.

---

[5]) T. j. pól každé z nich je na druhé.