O rozměrech vesmíru a jeho instabilitě.

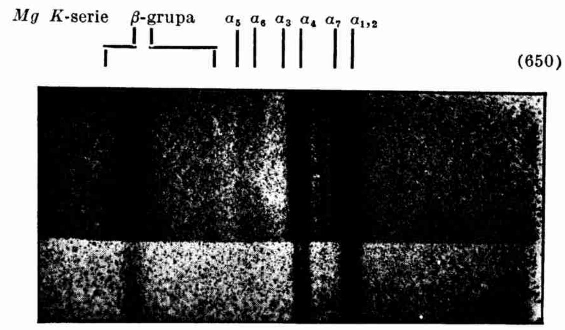
Referuje *Hubert Slouka.*

(Došlo 30. března 1932.)

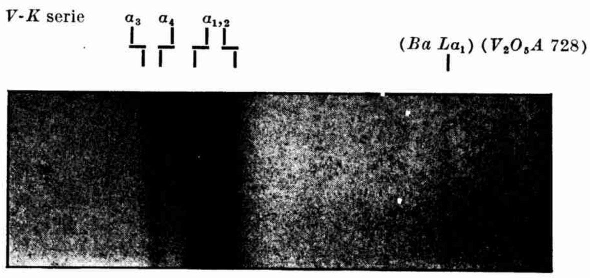
Velké radiální rychlosti mimogalaktických mlhovin po prvé pozorované a přesně změřené americkým hvězdářem V. M. Slipherem roku 1922 vymykaly se veškerým dosavadním zkušenostem a astronomové nemohli si tento úkaz dlouho vysvětliti. Měření konaná v letech následujících potvrdila, že radiální rychlosti mimogalaktických objektů jsou téměř vesměs positivní a nepoměrně velké oproti měřeným radiálním rychlostem objektů bližších. Tak nalezena střední radiální rychlost 40 mimogalaktických mlhovin + 620 *km/sec*, největší pak u N. G. C. 584 ve Velrybě + 1800 *km/sec.* Sedm osmin z těchto objektů se nám vzdaluje, fakt, který aspoň částečně se podařilo teprve teorii relativity vysvětliti. Byla také nadhozena otázka, zda pozorované posuvy ve spektrech jsou skutečně vysvětlitelné Dopplerovým zjevem, je-li totiž $d\lambda/\lambda$ konstantní v mezích pozorovacích chyb. Tuto otázku zkoumal K. Lundmark na Wrightových spektrogramech mlhoviny v Andromedě zhotovených na Lickově hvězdárně a nalezl, že pozorované posuvy se dají vskutku Dopplerovým principem vysvětliti. Další problém, který je nemenší důležitosti, je zodpovědění otázky, zda tento velký pozorovaný Dopplerův posuv vzniká jen následkem pohybu příslušného tělesa v zorné přímce, či je způsoben jinou příčinou. Laboratorními pokusy byl Dopplerův princip dokázán pro rychlosti menší než 1 *km/sec*, astronomickými pokusy pak až do 100 *km/sec*, rychlosti, které bylo možno pomoci zákonů nebeské mechaniky verifikovati. Možno tedy pozorované posuvy přisouditi jak pohybu ve směru zorného paprsku (neb příslušné složce), tak i tomuto pohybu ve spojení s jiným zjevem, jak učiněno Silbersteinem, který vznik určitého zlomku posuvu přisoudil vlivu zakřivení prostoru-času v de Sitterově vesmíru a poloměr tohoto zakřivení určil.

V. Dolejšek-M. Engelmannová:

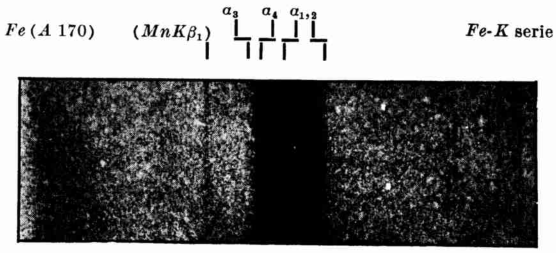
Mikrofotometrické studium „ionisačních“ linií *K*-serie.



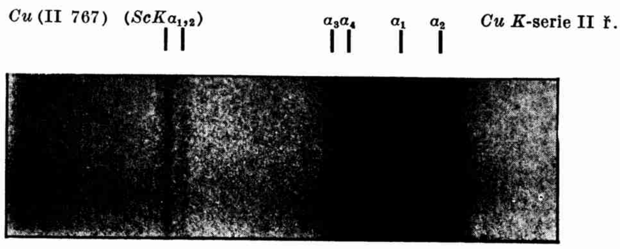
Obr. 1.



Obr. 2*a*.



Obr. 3*a*.



Obr. 4*a*.

Podle teorie relativity může existovati homogenní vesmír, jehož poloměr R jest konstantní a zakřivení stále kladné. Všechny body takového eliptického prostoru jsou pak úplně rovnocenné; přímky vycházející z určitého bodu vracejí se po proběhnutí dráhy o délce πR zpět ku svému východisku a obsah takového prostoru má konečnou hodnotu $\pi^2 R^3$.

Statické gravitační pole při stejnoměrném rozdělení hmoty bez vnitřního napětí má pak jen dvoje řešení, první je Einsteinovo, kde hustota hmoty je větší než 0 a vede k určitému vztahu mezi touto hustotou a poloměrem vesmíru. Takto předpověděna existence obrovských hmot ve vesmíru, což později dokázáno z pozorování vzdáleností a rozměrů spirálních mlhovin. Představuje nám tedy Einsteinův vesmír rozdělení hmoty stejnoměrné hustoty v uzavřeném prostoru, nalézající se v rovnovážném stavu při vyrovnaných silách gravitačních a kosmické repulse. Tuto kosmickou repulsi zavedl Einstein roku 1917 do svých gravitačních rovnic přidáním t. zv. „kosmického členu" λ, jejíž význam se teprve projeví při dostatečně velkých vzdálenostech. Pak píšeme místo původního $G_{\mu\nu} = 0$ zákon $G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$, který nevyjadřuje vlastně nic jiného než, že zkoumáme a měříme vesmír přístroji, které samy o sobě jsou jeho části.

Řešení de Sitterovo je rozdílné od Einsteinova, neboť předpokládá hustotu hmoty = 0 a tedy hmotu úplně zanedbává. Výborně však vysvětluje a původně předpovědělo velké a převážně positivní (což znamená vzdalování se dotyčného objektu) rychlosti vzdálených mimogalaktických mlhovin jako jednoduchý důsledek vlastností gravitačního pole, aniž se při tom předpokládá, že jsme v určitém bodě vesmíru o vyjímečných vlastnostech.

Roku 1917, ze které doby je de Sitterova práce, byly známy jen tři radiální rychlosti spirálních mlhovin. Slipherova měření z roku 1922 de Sitterovu předpověď velkých positivních rychlostí mimogalaktických mlhovin potvrdila. Poznáno, že téměř všechny spirální mlhoviny se od nás vzdalují rychlostí, která se vzdáleností roste, jak dokázal Hubble, přibližně podle vzorce

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = 1{\cdot}6 \, . \, 10^{-17} \, sec^{-1},$$

t. j. asi 500 *km* za vteř. na jeden megaparsec. Pohybujíce se touto rychlostí zdvojnásobí spirální mlhoviny každých 1400 milionů let svou vzdálenost, zjev, který vedl k názoru, že vesmír se rozpíná. Teoretické odůvodnění této instability vesmíru podařilo se teprve roku 1927 Abbé G. Lemaîtrovi, jehož práce však zůstala až do 1930 neznáma. Lemaître, podobně jako jiní, snažil se nalézti střední řešení mezi Einsteinovým a de Sitterovým, neboť oba jejich modely vesmíru byly vlastně limitní případy, jeden vesmír obsahoval hmoty, ale žádný pohyb, druhý zase pohyb, avšak žádnou hmotu. Věc se komplikovala de Sitterovým podáním určité transformace při počítání času, které souvislost jeho modelu vesmíru s Einsteinovým nečinilo zřejmé. Jiná střední řešení byla nalezena, tak r. 1922 A. Friedmanem a r. 1929 H. P. Robertsonem; v těchto pracích se však astronomický význam problému dostatečně neuplatnil.

Lemaître vyšel z názoru, že de Sitterovo řešení neodpovídá všem požadavkům problému, neboť rozdělení prostor-času v prostor a čas ruší homogenitu, i když prostor je homogenní s konstantním positivním zakřivením a rovněž tak prostor-čas, kde všechny děje jsou úplně ekvivalentní. Rozdělení prostor-času v prostor a čas zavedením souřadnic s určitým počátkem ruší homogenitu, částice (hmotný bod) v klidu ve středu prostoru opisuje geodetickou čáru vesmíru, kdežto částice nalézající se v klidu jinde než ve středu tuto geodetickou čáru opsati nemůže. Zavedením souřadnic s patřičně odpovídajícím rozdělením prostoru a času tak, aby byla zachována homogenita vesmíru, nalezl Lemaître, že neobdržíme již statické pole, nýbrž tento náš nový vesmír bude stejného tvaru jako Einsteinův, avšak s měnícím se poloměrem podle určitého zákona. Při hledání řešení spojujícího v sobě výhody řešení Einsteinova i de Sitterova uvažoval Lemaître podmínky v Einsteinově vesmíru, kde poloměr prostoru se libovolně mění. Řešení, které obdržel, vysvětluje, jak de Sitter a Eddington ukázali, jsoucnost velkých radiálních rychlostí u mimogalaktických mlhovin. Lemaître představoval si vesmír jako zředěný plyn, jehož molekuly jsou mimogalaktické mlhoviny v tak velkém počtu, že možno mluviti o hustotě, avšak tak homogeního rozložení, že vliv místních zhuštění se dá zanedbati.

Pro určitý interval ve třírozměrném eliptickém neb sférickém prostoru o jednotkovém poloměru zakřivení platí

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Theta^2)$$
$$= d\chi^2 + \sin^2 \chi \, (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Theta^2),$$

kde $\sin \chi = r$, pak možno psáti pro čtyřrozměrný prostor-čas

$$ds^2 = - R^2 \, d\sigma^2 + f dt^2, \tag{1}$$

kde R je poloměr zakřivení prostoru a χ, ψ, Θ prostorové souřadnice (úhly).

Pak řešení Einsteinovo (A) a de Sitterovo (B) zní

$$R = \text{const.} \qquad f = \text{const} = c^2, \tag{A}$$
$$R = \text{const} \qquad f = c^2 (1 - r^2) = c^2 \cos \chi. \tag{B}$$

V Lemaîtrově řešení (C) je však

$$R = R(t) \text{ a } f = \text{const} = c^2 \qquad (C)$$

a gravitační rovnice pro hustotu ϱ a tlak p, jak je nalezl Lemaître

$$8\pi\varrho = -\lambda + 3\left\{\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\right\} \qquad \mathrm{I}$$

$$8\pi p = \lambda - \left\{\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\right\} - \frac{2}{R}\frac{d^2R}{dt^2}; \qquad \mathrm{II}$$

z obou rovnic plyne

$$\frac{6}{R}\frac{d^2R}{dt^2} = 2\lambda - 8\pi(\varrho + 3p). \qquad \mathrm{III}$$

Podle kinetické teorie plynů je tlak p roven dvěma třetinám kinetické energie v objemové jednotce. V našem případě musíme připočísti tlak záření v prostoru. p je tvořeno z individuálních pohybů hvězdných vesmírů, hvězd a atomů a mění se při rozpínání se vesmíru, jak Lemaître dokázal, adiabaticky. Rozpínání vesmíru není však způsobeno tlakem, neboť nastává, i když $p = 0$. Pak píšeme rovnici III

$$3\frac{d^2R}{dt^2} = R(\lambda - 4\pi\varrho)$$

a v rovnováze, při Einsteinově řešení musí nutně

$$\varrho = \frac{\lambda}{4\pi}.$$

Jakékoliv porušení rovnováhy tak, že

$$\varrho < \frac{\lambda}{4\pi},$$

učiní

$$\frac{d^2R}{dt^2} > 0$$

a R roste, vesmír se rozpíná; hustota se zmenšuje a tím rychleji nastává rozpínání. Stabilita je porušena v každém případě, neboť podobný úkaz nastane, je-li tu i jen nepatrný přebytek hmoty. Podobně, kdyby ϱ bylo z určité příčiny větší než odpovídá Einsteinovu řešení, nastalo by smršťování vesmíru.

Uvažujme dále o rychlosti a způsobu rozpínání se vesmíru. Klademe jako dříve $p = 0$ a následující označení

R_e, M_e poloměr a hmota Einsteinova vesmíru,

R , M poloměr a hmota uvažovaného systému.

Z Einsteinových výsledků plyne

$$\frac{2}{\pi} M_e = R_e \tag{2}$$

$$R_e = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Celkový obsah sférického světa je $2\pi^2 R_e^3$, hustota pak

$$\varrho_e = \frac{1}{4\pi R_e^2} = \frac{\lambda}{4\pi}.$$

Hmota je v tomto případě měřena v gravitačních jednotkách, tak, že hmota Slunce je přibližně 1·5 *km.* Z (I) plyne

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + 1 = \frac{R^2}{3}(\lambda + 8\pi\varrho)$$

$$= \frac{R^2}{3}\lambda + \frac{4M}{3\pi R}$$

a tedy

$$\left(\frac{dR}{dt}\right) = \sqrt{(\tfrac{1}{3}R^2\lambda - 1 + 4M/3\pi R}. \tag{IV}$$

Pak možno uvažovati tři různé případy:

a) Je-li $M > M_e$, nezmizí pravá strana rovnice IV pro kteroukoliv hodnotu $R > 0$ a soustava může se rozpínati od velmi malého k velkému poloměru. Pro minimum IV nalézáme

$$\tfrac{2}{3} R\lambda - \frac{4M}{3\pi R^2} = 0,$$

takže

$$R^3 = \frac{2M}{\pi\lambda},$$

neb používajíce předchozích vztahů

$$\frac{R}{R_e} = \sqrt[3]{\frac{M}{M_e}}.$$

Prochází-li rostoucí R touto hodnotou, zmenšuje se poměr rozpínání a roste pak znovu. Použití tohoto případu ve skutečnosti je však obtížné, neboť předpokládá okamžitý vznik vesmíru.

b) Je-li $M < M_e$, vymizí pravá strana pro dvě positivní hodnoty R, na př. pro R_1 a R_2 a pro všechny mezihodnoty je imaginární. Pak buď vesmír počínaje se rozpínati konečnou rychlostí dosáhne poloměru R_1 a znovu se smrští, aneb smršťuje se konečnou rychlostí, jíž od začátku k poloměru R_2, a po dosažení této hodnoty znovu se rozpíná. Přijmeme-li tento druhý případ (*b*) jako skutečný v našem vesmíru, budeme předpokládati, že tento vznikl s poloměrem R_2, kdy původně bylo $dR/dt = 0$, a od té doby se neustále rozpínal.

c) Třetí případ je limitní, kde $M = M_e$, pak R_1 a R_2 splývají v hodnotu R_e. Eddington nepovažuje tento třetí případ za vhodnější k vysvětlení našeho vesmíru; tvrdí, že nekonečně dlouhé doby je třeba, než nastane vývoj vesmíru; pak ale postup vývoje děje se podle *b)*.

Význam Dopplerova principu v rozpínajícím se vesmíru objasní nám následující úvaha. Pro světelný paprsek plyne z rovnice (1) pro ds^2

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R},$$

kde σ_1 a σ_2 se vztahují ku prostorovým souřadnicím. Předpokládejme, že světlo vychází z bodu σ_1 a je pozorováno v σ_2. O δt_1 později ze σ_1 vyslaný paprsek dosáhne σ_2 v čase $t_2 + \delta t_2$. Pak platí

$$\frac{\delta t_2}{R_2} - \frac{\delta t_1}{R_1} = 0,$$

$$\frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1,$$

kde R_1 a R_2 jsou hodnoty pro poloměr R v čase vyslání paprsku t_1 a v čase pozorování t_2. Je-li δt_1 perioda vyslaného světla a δt_2 perioda světla pozorovaného, pak se jejich poměr rovná poměru poloměrů vesmíru v okamžiku pozorování a v okamžiku vyslání paprsku. Tento poměr je dán rudým posuvem ve spektru, který, jak již bylo uvedeno, činí přibližně 500 *km/sec* na jeden megaparsec, t. j. asi $\frac{1}{2000}$ světelné rychlosti na vzdálenost jednoho milionu světelných let. Můžeme tedy psáti

$$\frac{\delta t_2}{\delta t_1} = \frac{2001}{2000}$$

pro časový interval $t_2 - t_1 = 1{,}000.000$ let. Z toho plyne, že se poloměr vesmíru zvětšil v poměru 1 : 2000 v posledních 1,000.000 letech, v době geologické se tedy zdvojnásobil.

Nechť je
$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{1}{R_A},$$

pak z předchozího plyne

$$R_A = 2 \,.\, 10^9 \text{ svět. let.}$$

Pomocí rovnice (2) můžeme pak vypočísti, že myšlený Einsteinův vesmír o poloměru R_A by měl hmotu

$$2 \times 10^{22} \odot$$

a hustotu

$$\varrho_A = 3 \,.\, 10^{-28}\, g/cm^3.$$

V okolí Slunce je hustota řádu 10^{-24} a vzhledem k obrovské prázdnotě mezi mimogalaktickými soustavami je skutečná hustota našeho vesmíru značně menší než ϱ_A.

Lemaîtrův model vesmíru nám podává ukázku, jak se vesmír vyvíjel, vznikl pravděpodobně jako Einsteinův vesmír v rovnováze; tato jsouc porušena způsobila jeho přechod v de Sitterův vesmír, jako konečný stupeň vývoje, kdy rozpínání učinilo hustotu tak nepatrnou, že jej můžeme považovati za prázdný vzhledem k působení gravitace. Z Lemaîtrových úvah plyne hodnota pro původní poloměr prostoru (Einsteinův vesmír) 1200 milionů let světelných a pro celkovou hmotu vesmíru $10^{22} \times \odot$. O dnešním poloměru vesmíru víme však, že je mnohem větší.

Příčina rozpínání vesmíru byla z počátku Lemaîtrem přisuzována záření, resp. světelnému tlaku. Ve vesmíru, který je v rovnováze, oblétne hmotou vyzářené světlo prostor a vrátí se k svému východisku, kde se shromažďuje neustále. Lemaître soudil, že zde možno hledati vznik rychlosti rozpínání vesmíru, kterou Einstein kladl rovnu nule a kterou pozorujeme v radiálních rychlostech mimogalaktických mlhovin.

Eddington pokládal vznik kondensací za možnou příčinu rozpínání vesmíru. V. H. McCrea a G. C. McVittie přišli však k protichůdnému názoru, kondensace měly by dříve způsobiti smršťování. Lemaître v poslední své práci (1931) podrobil tuto otázku novému zkoumání a nalezl, že vznik kondensací rovnovážný stav vesmíru neporušuje. Je to však zjev úzce související se vznikem kondensací, Lemaître ho nazývá „stagnace" vesmíru, který podle něho má býti příčinou rozpínání vesmíru. Pod stagnací vesmíru rozumí zachycení volné kinetické energie vznikajícími kondensacemi, je to vlastně zmenšení schopnosti výměny energie mezi vzdálenými částmi vesmíru.

Problém instability vesmíru a určení poloměru jeho zakřivení souvisí úzce s výsledky měřicí astronomie. Dosud byly určeny radiální rychlosti sotva padesáti mimogalaktických mlhovin, podle Hubbleova odhadu je 100-palcovým dalekohledem (reflektorem) hvězdárny na Mount Wilsonu viděti nejméně 2,000.000 mimogalaktických objektů. Určení radiálních rychlostí alespoň nepatrného zlomku tohoto nesmírného počtu může vésti k potvrzení předchozích úvah, ale může rovněž přinésti nové, teorií dosud nevysvětlené a netušené problémy.

Určení konstanty λ, která má pro rozměry vesmíru základní význam, podařilo se Eddingtonovi roku 1931 z rozboru Schrödingerovy rovnice

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t} = C\left\{m^2c^2 + \left(\frac{ih}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\psi + \frac{e^2}{r}\psi, \qquad (\alpha)$$

kde je přičleněn výraz pro potenciální energii e^2/r.

Klademe
$$\alpha = \frac{hc}{2\pi e^2}, \quad \gamma = \frac{2\pi mc\alpha}{h} \qquad (\beta)$$

a obdržíme

$$\left(\alpha\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{i}{r}\right)\psi + \left\{\alpha^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + (i\gamma)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\psi = 0. \qquad (\gamma)$$

Po transformaci, jak ji provádí Dirac ve své knize „Quantum Mechanics", píše Eddington

$$\left\{i\left(\alpha\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{i}{r}\right) + i_{14}\,\alpha\frac{\partial}{\partial x} + i_{24}\,\alpha\frac{\partial}{\partial y} + i_{34}\,\alpha\frac{\partial}{\partial z} + i_4(i\gamma)\right\}\psi = 0 \quad (\delta)$$

a zakládá své úvahy na interpretaci γ ve tvaru

$$\gamma = \frac{\sqrt{N}}{R}, \qquad (\varepsilon)$$

kde N je počet elektronů ve vesmíru a R poloměr jeho zakřivení. Ku porovnání klade Eddington vedle sebe členy

$$i\left(\frac{i}{r}\right) \quad \text{a} \quad i_4\left(i\frac{\sqrt{N}}{R}\right)$$

a vyslovuje mínění: je-li energie určitého elektronu ve vzdálenosti r rovna i/r, pak je energie N elektronů ve vzdálenosti R (ve středu sférického vesmíru) rovna $i\sqrt{N}/R$.

Tuto souvislost nám objasní následující úvaha. Eddington dokázal ve své knize „Mathematical Theory of Relativity" § 66, že to, co zoveme metrem, v určitém místě a směru, je vždy konstantním zlomkem poloměru zakřivení prostoru-času dotyčného místa a směru, což vlastně jest jen slovním vyjádřením obsahu rovnice

$$G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}.$$

Jelikož v metrové míře vyjadřujeme také poloměr vodíkového atomu, můžeme stejně říci, že jeho konstantní délka jest určena jedině stejným poměrem k poloměru zakřivení prostoru v místě a směru, kde se tento atom nalézá. Eddington se snaží upraviti Schrödingerovu rovnici takovým způsobem, aby přímo vyjadřovala vztah lineárních rozměrů atomu k poloměru zakřivení prostoru.

K tomu účelu používá již uvedené analogie, kterou ve své původní práci se snaží i matematicky odůvodniti. Nebudeme zde Eddingtonovy úvahy obšírně reprodukovati, ale obrátíme se k výsledkům a k jejich souvislosti s pozorováním.

Z rovnic (β) a (ε) obdržíme

$$\frac{2\pi m c \alpha}{h} = \frac{\sqrt{N}}{R}.$$

Pro Einsteinův vesmír platí

$$\frac{GM_0}{c^2} = \tfrac{1}{2}\,\pi R,$$

kde M_0 je celková hmota vesmíru a G gravitační konstanta. Předpokládáme-li počet protonů rovný počtu elektronů, bude přibližně platit:

$$M_0 = NM',$$

kde M' je hmota protonu. Pak nalezneme

$$N = \tfrac{1}{2}\,\frac{\pi c^2 R}{GM'}$$

a

$$\left(\frac{2\pi m c \alpha}{h^2}\right) = \tfrac{1}{2}\,\frac{\pi c^2}{GM'}\cdot\frac{1}{R},$$

a ježto v Einsteinově vesmíru platí

$$\lambda = \frac{1}{R},$$

tedy

$$\lambda = \left(\frac{2GM'}{\pi}\right)^2\left(\frac{2\pi m \alpha}{h}\right)^4,$$

což po vyčíslení dá

$$\lambda = 9{\cdot}79\,.\,10^{-55}$$

a $\quad R = 1{\cdot}01\,.\,10^{27}\,cm = 328\,.\,10^6$ parsec $= 1070\,.\,10^6$ svět. let.

K porovnání uvedeme hodnoty pro R vypočtené z radiálních rychlostí Lundmarkem (R_I), Silbersteinem (R_{II}) a Sloukou (R_{III})

$$R_I = 31{\cdot}42\,.\,10^6 \text{ parsec},$$
$$R_{II} = 30{\cdot}88\,.\,10^6 \text{ parsec},$$
$$R_{III} = 24{\cdot}58\,.\,10^6 \text{ parsec};$$

tyto hodnoty jsou více než desetkráte menší, což se dalo očekávati, ježto bylo užito radiálních rychlostí kulových hvězdokup, které ještě náležejí k naší soustavě galaktické.

Podobně jako R nalezneme hmotu vesmíru M