10. V tomto pojednání poukázal jsem k souvislosti polynomů Laguerrových s funkcemi Kummerovými a polynomy Jacobiho a odvodil jsem rozvoj výrazu

$$x^k e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}} dx$$

v řetězec a dokázal jsem, že jmenovatel n-tého přibližného zlomku jest právě Laguerrův polynom $L_{n,k+1}(x)$ Tento výsledek jest zevšeobecněním výsledku Laguerrova a Nielsenova nalezeného pro $k = 0$ a způsob důkazu jest od obou autorů odlišný. V posledním odstavci odvozena součtová formule pro polynomy Laguerrovy.

*

Sur les polynomes généralisés de Laguerre.

(Extrait de l'article précédent.)

J'établis par une méthode différente de celle de Laguerre, le développement de la fonction:

$$x^k e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}} dx$$

en fraction continue. Le dénominateur de la n-ième réduite $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$ est le polynome généralisé de Laguerre: $L_{n,k+1}(x)$ fourni par le développement de la fonction génératrice: (1).

L'équation différentielle (I) et la relation de récurrence (VI) liant trois polynômes consecutifs, sont caractéristiques pour les polynômes en question. L'ensemble de ces deux relations constitue la base pour la considération suivante. Considérons l'expression S (formule IX du texte). Soit $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$ la n-ième reduite du polynôme S.

Les fonctions $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ satisfont à l'équation différentielle (23):

$$x(\varphi'_n \psi_n - \varphi_n \psi'_n) - (k + x)\varphi_n \psi_n + x\varphi_n^2 + r = 0$$

où $r = \frac{n!\,(k+n)!}{(k-1)!}$ dont l'intégrale est donnée par (25), où $p - q = r$.

On voit par la forme de l'équation différentielle (23) que:

1. l'équation $\psi_n(x) = 0$ a toutes ces racines distinctes, tout diviseur commun de $\psi_n(x)$ et $\varphi'_n(x)$ devrait être diviseur de r.

2. par le même raisonement on voit que les polynômes $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ n'ont de diviseur commun.

Quand on fait la dérivée de l'équation (23) en se rapportant aux propriétés (1) et (2) des polynômes $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ on retrouve deux équations:

$$x\,\psi''_n + (1+k+x)\;\psi'_n = a\,\psi_n \tag{28}$$

et son adjointe:

$$x\varphi''_n + (1-k-x)\;\varphi'_n - \varphi_n + \psi_n + 2x\,\psi'_n = a\,\varphi_n$$

et $a=n$, le coefficient de x^n en $\psi_n(x)$ étant égal à l'unité.

Le simple rapprochement des deux équations (28) et (I) donne le résultat:

$$\psi_n(x) = L_{n,k+1}(x).$$

Puisque la limite du reste R_n (XII) dans le second membre de (25) devient égale à zéro, en voit que $\dfrac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$ est en effet la n-ième réduite du développement:

$$x^k e^x \int\limits_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^k}\,dx$$

en fraction continue.

Les relations de récurrence (VI) et (VII) vérifiées par les deux fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ donnent immédiatemment le développement (XIII) et par l'integration par parties nous obtenons par conséquent, la fraction continue (XIV), d'accord avec le résultat antérieur donné pour $k=0$ par Laguerre, loc. cit. Ce résultat constitue une analogie à celui pour des polynômes d'Hermite.

A la fin du mémoire l'auteur établit la formule d'addition pour les polynômes de Laguerre sous la forme:

$$L_{\mu,pk}(x_1+x_2+\ldots+x_p) = [L_k(x_1)+L_k(x_2)+\ldots+L_k(x_p)]^\mu$$

en convenant de remplacer dans le développement du second membre une puissance telle que $[L_k(x_i)]^r$ par $L_{r,k}(x)$. Cette formule, d'une forme très condensée, avait été donnée par N. Nielsen et J. Kampé de Fériet pour les polynômes d'Hermite.[2])

---

[1]) J. Kampé de Fériet: Sur une formule des polynômes d'Hermite. Det. Kgl. Dankse Videnskabernes Selskab. M.—f. M. V. 2. 1923.

[2]) N. Nielsen: Recherches sur les polynômes d'Hermite. Ibid. 1. 6. 1918.