Některá další užití Steiner-Pelzovy paraboly.

Dr. *Josef Klíma.*

(Došlo 11. listopadu 1931.)

Byl to hlavně Pelz, který ve svých pojednáních[1]) ukázal při kuželosečkách hojná a konstruktivně velice výhodná užití paraboly, jež je obalena kolmo sdruženými polárami k paprskům svazku. Parabolu tu znal již Chasles,[2]) ale podle Pelze označuje se Steinerovou, ježto Steiner více se s ní zabýval.[3])

V následujícím chci ukázati, jak lze této paraboly užíti k důkazu některých vět.

a) V projektivní diferenciální geometrii definuje prof. Čech element třetího řádu rovinné křivky K v bodě t projektivitou (polaritou) mezi řadou bodovou na tečně T křivky K v bodě t a paprskovým svazkem o středu t.[4])

K stanovení prvku druhého řádu (tří soumezných bodů) křivky K v bodě t postačí znáti prvý střed křivosti k_1 v tom bodě. Abychom znali prvek třetího řádu (čtyři soumezné body), třeba znáti ještě druhý střed křivosti k_2 v bodě t, což je střed křivosti evoluty E křivky K v bodě k_1.[5]) Z tohoto druhého určení prvku třetího řádu lze obdržeti Čechovo takto: Čtyřmi soumeznými body v bodě t křivky K jde ∞^1 kuželoseček, tvořících svazek, který má týž průměr S, spojující bod t s bodem s na k_1k_2, kde, jak známo,

[1]) „Über die Achsenbestimmung der Kegelschnitte“, Akademie der Wissenschaften in Wien, 1876, „Die Krümmungshalbmesser — Konstrukzionen der Kegelschnitte als Korollarien eines Steiner'schen Satzes“, Věstník král. české společnosti nauk v Praze, roč. 1879, „Bemerkungen zu den Krümmungs — Halbmesser — Konstrukzionen der Kegelschnitte als Korollarien eines Steiner'schen Satzes“ tamtéž roč. 1882.

[2]) „Traité des sections coniques“, Paris, roku 1865, str. 145 a další.

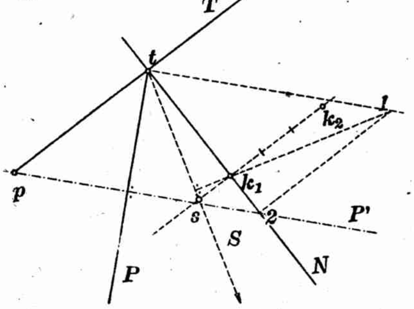
[3]) Steiner-Schrötter: „Vorlesungen über synthetische Geometrie“, díl II, 3. vyd. z roku 1898, str. 204.

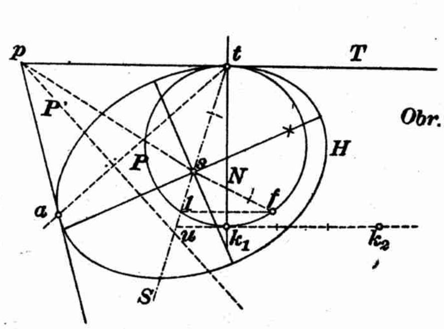
[4]) Čech: „O křivkovém plošném elementu třetího řádu projektivního prostoru“, Čas. pro pěstování matematiky, roč. L, str. 219.

[5]) Viz na př. práci prof. Sobotky: „Zur Krümmung der Kegelschnittevoluten und Konstruktion des Kegelschnittes durch fünf benachbarte Punkte einer ebenen Kurve“, Věstník společ. nauk, roč. 1902, XVII.

$k_2s : k_1s = 4 : 1$ (obr. 1). Všechny tyto kuželosečky mají pro bod t tutéž Steiner.-Pelzovu parabolu P^2, ježto tato jest určena tečnami T, N $(t \ldots N \perp T)$, poslední dotýká se v k_1, a přímkou S jako řídicí přímkou. Libovolné přímce P, jdoucí bodem t, přináleží tudíž týž pól p ke všem kuželosečkám svazku, který je na tečně T v průsečíku s tečnou P' paraboly P^2, kolmou k P. Tečnu P' dostaneme, jestliže v t vztyčíme $t1$ kolmo k P, až protne kolmici z k_1 na S v bodě 1. Tečna P' jde pak bodem 2 na N, kde $21 \parallel T$. Ježto $12 \#\, tp$, je též patrno, jak obráceně k bodu p jednoznačně stanovíme P. Když $P \equiv T$, pak $p \equiv t$. Naopak projektivita $T(p \ldots t \ldots)$

Obr. 1





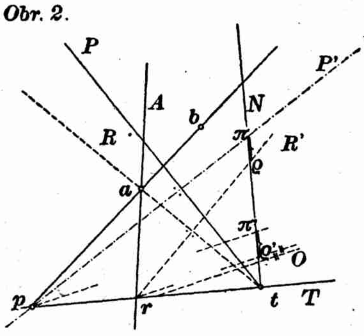
Obr. 1a)

$\overline{\wedge}\, t\,(P \ldots T \ldots)$ stanoví St.-Pelzovu parabolu P^2 a tím též k_1, k_2. Přímce N odpovídá dotyčný bod tečny T se St.-Pelzovou parabolou P^2. Je zde zřejmá geometrická souvislost obou určení prvku třetího řádu křivky K v bodě t. Projektivita (polarita) ta je singulární, jestliže bod t je bodem obratu křivky K, ježto k_1 je úběžným bodem normály N, parabola P^2 skládá se z bodů t a $k_1\infty$ a singulární prvky jsou tu t, T.

V obr. 1a) ukázáno, jak lze snadno konstruovati kuželosečku H, jež má s křivkou K v bodě t společný prvek třetího řádu (hyperoskuluje K) a jde daným ještě bodem a. Dán-li prvek třetího řádu prvým a druhým středem křivosti k_1, k_2, určíme průměr S kuželosečky H $(k_1u = \frac{1}{3}k_2k_1)$. Steiner-Pelzova parabola P^2 bodu t má ohnisko f na kružnici, opsané nad tk_1 jako průměrem, a to souměrně položené k průsečíku 1 kružnice s S vzhledem k N $(\widehat{k_1f} = \widehat{k_11})$. Tečna P' k P^2, sestrojená kolmo k $P \equiv ta$, určí pól p přímky P. Průměr, jdoucí bodem p kuželosečky H, dá její střed s a její osy jsou tečnami k P^2 z s, jež se snadno určí i omezí. Jak by se sestrojila kuželosečka hyperoskulující, dána-li pro ni tečna místo bodu a, je patrno.

Při prostorové křivce K určuje Čech prvek třetího řádu v obecném jejím bodě t s tečnou T a oskulační rovinou ω, jistou parabolickou trilinearitou mezi řadou bodů p na tečně T, svazkem rovin ϱ o ose T a svazkem paprskovým o středu t a rovině ω. I to lze synteticky ukázati takto: Proložme přímkou T libovolnou rovinu ϱ a promítněme křivku K ze dvou bodů ${}^1s$, ${}^2s$ této roviny! Obě kuželové plochy promítací (${}^1sK$), (${}^2sK$) mají společnou tečnou rovinu ϱ a dotýkají se vzájemně v bodě t. Pronik obou kuželových ploch má v bodě t dvojný bod a křivka K je částí tohoto proniku. Libovolná rovina, obsahující tečnu T, protíná tudíž obě kuželové plochy v oskulujících se křivkách a oskulační rovina ω křivky K pak v křivkách, majících společný prvek řádu třetího, jemuž přináleží podle předchozího jistá polarita $t\,(P\ldots) \barwedge T\,(p\ldots)$. Měníme-li jeden z bodů ${}^1s$, ${}^2s$ v rovině ϱ a druhý ponecháme, je patrno, že středové průměty křivky K z bodů téže roviny ϱ na oskulační rovinu ω křivky mají společný prvek třetího řádu, t. j. hyperoskulují se. Ježto středové průměty křivky K z bodů její oskulační roviny ω mají v průmětu bodu t obrat, dostáváme tak k určení prvku třetího řádu křivky K Čechovu charakteristickou trilinearitu o singulární trojině t, T, ω.

Obr. 2.



b) Důkaz a geometrický význam Smith-Mehmkeova dotykového invariantu j dvou dotýkajících se křivek. Mějme dvě dotýkající se křivky rovinné C_1, C_2 v bodě t a mysleme si kuželosečky K_1, K_2, jež v bodě t oskulují křivky C_1, C_2, jdou libovolným bodem a a dotýkají se v něm libovolné tečny A! Pak invariant dotyku j podle B. Segrea je roven dvojpoměru těchto dvou dvojnásob se dotýkajících kuželoseček a dvou kuželoseček složených svazku jimi určeného. Dvojpoměr ten nezávisí na poloze bodu a a tečny A.[6]) Pro důkaz a obecnější význam tohoto invariantu uvažujme o dvou kuželosečkách K_1, K_2, dotýkajících se v bodě t tečny T (obr. 2). Kuželosečky tyto určují svazek o základních bodech t, ${}^1t$ (${}^1t$ je soumezný bod k t na T), a, b (v obrazci kuželosečky K_1, K_2 nerýsovány a zvoleny jen body a, b). Steiner-Pelzovy paraboly bodu t vzhledem ke kuželosečkám svazku tvoří řadu o základních tečnách T, N ($t\ldots N \perp T$), P', kde P' je kolmo sdružená polára k poláře P bodu $p \equiv (T, ab)$. Řada těchto parabol je promětná se svazkem kuželoseček a body dotyku parabol

[6]) Viz Fubini-Čech: „Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces," str. 20.

s normálou N, což jsou středy křivosti kuželoseček svazku, tvoří tudíž řadu promětnou se svazkem kuželoseček. Vyplývá to též z konstrukce tohoto bodu dotyku, zvolíme-li v bodě a tečnu A k některé kuželosečce svazku. Kolmo sdružená polára R', jdoucí bodem $r \equiv (AT)$ kolmo k jeho poláře $R \equiv at$, vytíná na N bod ϱ a přímka P' bod π. Přenesme od t na T a N délky rp, $\varrho\pi$ v souhlasném směru s těmito úsečkami! Pak rovnoběžky, sestrojené body p, r se spojnicí O vytčených bodů, dají na N body π', ϱ'. Poloměr křivosti kuželosečky, vytčené ve svazku, $= \pi'\pi = \varrho'\varrho$. Ve svazku jsou dvě složené kuželosečky a to S_1 (ta, tb), S_2 (T, ab), z nichž prvá má střed křivosti v t a druhá v úběžném bodě normály N. Dvojpoměr kuželoseček (K_1, K_2, S_1, S_2) je tudíž roven poměru poloměrů křivosti kuželoseček K_1, K_2 v bodě t. Ježto prvý dvojpoměr je invariantní při jakékoliv projektivní transformaci, je i poměr poloměrů křivosti invariantní.

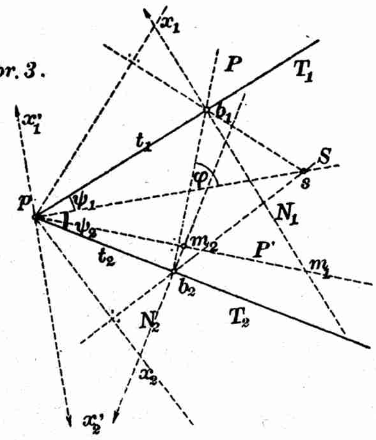
Místo bodů a, b možno zvoliti duálně dvě tečny A, B a dostaneme řadu kuželoseček K_1, K_2, dotýkajících se T v bodě t, a tečen A, B. I zde St.-Pelzovy paraboly pro bod t tvoří řadu projektivní s prvou řadou, mající základní tečny T, N a kolmou sdruženou poláru P' k spojnici bodu t s průsečíkem (AB). Invariant dotykový j je zde opět roven poměru poloměrů křivosti kuželoseček K_1, K_2 v bodě t a ten je stejný s dvojpoměrem obou kuželoseček K_1, K_2 a složených kuželoseček řady, určených těmito kuželosečkami K_1, K_2. Kuželosečky ty skládají se z párů bodových (AB), t a (AT), (BT).

Z obojího tohoto odvození je též patrný geometrický význam invariantu Smith-Mehmkeova nejen podle C. Segrea, ale i duální, totiž tento: Zvolme libovolnou přímku A a veďme z jejího bodu m, blízkého k průsečíku (AT), tečny U_1, U_2 ke křivkám C_1, C_2, dotýkající se těchto v okolí bodu t! Pak dvojpoměr (A, mt, U_1, U_2) má za limitu pro $m \equiv (AT)$ hodnotu invariantu j. Invariantu j lze výhodně užíti k stanovení zbývajícího průsečíku (tečny) kuželoseček K_1, K_2, jež se dotýkají v bodě t téže tečny T, mají v bodě tom dané středy křivosti s_1, s_2, známe-li ještě jejich společný bod (tečnu) s příslušnými tečnami A_1, A_2 (s příslušnými body dotyku a_1, a_2).

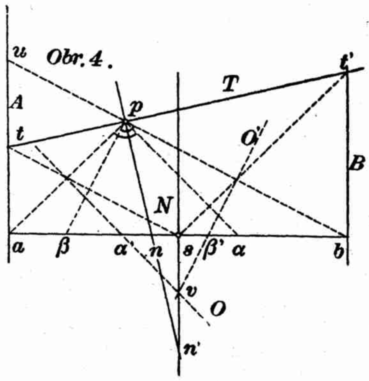
c) Dotýkají-li se kuželosečky tečen T_1, T_2 v bodech b_1, b_2, (obr. 3), pak poloměry křivosti v bodech b_1, b_2 každé z nich jsou v konstantním poměru, rovném poměru trojmocí délek tečen T_1, T_2 od bodů b_1, b_2 k jejich průsečíku $p \equiv (T_1T_2)$. Věta tato různě dokázána, na př. diferenciální geometrií podal důkaz Sucharda ve Věstníku společnosti nauk, roč. 1903, čís. VI a nazývá větu tu Lieovou, jenž prvou část věty té uveřejnil roku 1879. Podle „Encyklopedie“ III C 1, str. 76 větu tu nalezl prvý Liouville

r. 1844.[7]) Větu tuto lze dokázati též Steiner-Pelzovými parabolami bodů b_1, b_2 takto: Abychom vytkli určitou kuželosečku svazku, zvolme její střed s na průměru S, jdoucím bodem p a půlícím bodem tětivy $b_1 b_2$! Obě St.-Pelzovy paraboly bodů b_1, b_2 k této kuželosečce mají společnou tečnu P', jež je kolmo sdruženou polárou bodu p ($P' \perp P \equiv b_1 b_2$). Prvá parabola má mimo to tečny T_1, N_1 ($N_1 \perp T_1$) a řídicí přímku sb_1 a druhá tečny T_2, N_2 a řídicí přímku sb_2. Užijeme-li věty, že délky tečen paraboly mezi dvěma jejími tečnami promítají se na libovolnou přímku směrem

Obr. 3.



Obr. 4.



osy paraboly do stejných délek, bude poloměr křivosti v b_1 roven úseku $m_1 x_1$ normály N_1, kde $px_1 \perp sb_1$ a $m_1 \equiv (P'N_1)$ a poloměr křivosti v b_2 je roven podobně určené úsečce $m_2 x_2$ na N_2. Mění-li střed s svoji polohu na S, dostáváme všechny kuželosečky, dotýkající se vzájemně v b_1, b_2, a patrně body x_1 a x_2 na N_1 a N_2 probíhají dvě podobné řady, jak patrno pro polohu $s \equiv p$, kdy x_1 a x_2 jsou úběžnými body normál N_1, N_2. Pár bodový m_1, m_2 odpovídá si též v případě, že s je v půlicím bodě tětivy $b_1 b_2$. Je tudíž $m_1 x_1 : m_2 x_2 = = \ldots = $ konst. Hodnotu té konstanty dostaneme snadno v případě paraboly svazku, t. j. když s splyne s úběžným bodem průměru S a pak příslušné body x'_1, x'_2 jsou na $x'_1 x'_2 p \perp S$. Označíme-li $b_1 p = t_1$, $b_2 p = t_2$, $\sphericalangle ST_1 = \psi_1$, $\sphericalangle ST_2 = \psi_2$, $\sphericalangle SP = \varphi$, jest

$$m_1 x'_1 = \frac{t_1 \sin \varphi}{\sin \psi_1 \sin (\varphi - \psi_1)}, \quad m_2 x'_2 = \frac{t_2 \sin \varphi}{\sin \psi_2 \sin (\varphi - \psi_2)}.$$

Ježto však $\sin \psi_2 : \sin \psi_1 = t_1 : t_2$ a $\sin (\varphi - \psi_2) : \sin (\varphi - \psi_1) = t_1 : t_2$, je $m_1 x'_1 : m_2 x'_2 = t_1^3 : t_2^3$, čímž jest citovaná věta dokázána.

[7]) Jiná odvození viz: Mannheim „Cours de géométrie descriptive", str. 211; Staudt: „Beiträge zur Geometrie der Lage", str. 283.