K jisté transformaci obyčejné Volterrovy integro-diferenciální rovnice.

Otomar Pankraz.

(Došlo 12. ledna 1932.)

Pan prof. E. Schoenbaum odvodil ze statistických úvah obyčejnou integro-diferenciální rovnici pro neznámou funkci $\varphi(x)$ v uzavřeném intervalu $< a, b >$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x) \cdot \varphi(x) + \int_a^x K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

s počáteční podmínkou

$$\varphi(a) = A,$$

kterou substitucí

$$\varphi(x) = e^{\int_a^x f(z)\, dz} \cdot u(x) \tag{2}$$

redukuje na rovnici

$$u(x) = A + \int_a^x H(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi, \tag{3}$$

při čemž

$$H(x, \xi) = \int_\xi^x e^{-\int_\xi^t f(z) dz} \cdot K(t, \xi)\, dt. \tag{4}$$

O všech funkcích předpokládáme, že jsou spojité.

V „Aktuárských vědách", roč. I., č. 4*) položil jsem si otázku, do jaké míry tato substituce má vliv na jádro rovnice, zvolíme-li

*) V tomto článku se vyskytlo několik tiskových chyb, které ruší četbu.

za $f(x)$ speciální funkci a to $f(x) =$ konst. Zjistíme, že pak platí: *Rovnice (1) dá se redukovat substitucí (2) na rovnici (3) tehdy a jen tehdy, jestliže jádro $K(x, \xi)$ jest tvaru $K \equiv K(x - \xi)$.*

V následujícím podám zcela jednoduchý důkaz tohoto tvrzení.

[1.] Důkaz se opírá o některé základní pojmy z Volterrovy teorie permutačních funkcí. Jsou-li na $a \leq \xi \leq x \leq b$ dány dvě spojité funkce $F(x, \xi)$ a $G(x, \xi)$, nazývá je Volterra *funkcemi permutačními* (záměnnými), jestliže platí

$$\int_\xi^x F(x, z)\, G(z, \xi)\, dz = \int_\xi^x G(x, z)\, F(z, \xi)\, dz$$

pro každý bod definičního oboru. Symbolicky identitu píše

$$\overset{*}{F}\overset{*}{G} = \overset{*}{G}\overset{*}{F}.$$

Abych podal základy Volterrovy teorie p. f. ve formě pokud možno ucelené, budu postupovati následovně: V teorii p. f. (v podání Volterrově) jest třeba uvažovat dvojí druh objektů: 1. reálné spojité funkce (obecně) dvou proměnných, a 2. objekty, o jejichž povaze stačí jedině věděti, že lze s nimi počítati podle zcela určitých pravidel. Každý objekt z obou druhů nahradím příslušným symbolem a budu uvažovati souhrn všech těchto symbolů. Protože a priori vím, že aspoň některé symboly mohu bezprostředně obsahově interpretovat jako reálné spojité funkce, budu také mluviti o „souhrnu určitých elementů" místo o „souhrnu určitých symbolů". Na to budu se symboly počítati podle základních aritmetických pravidel (jako kdyby to byla čísla reálná) a teprve ve výsledku přejdu k obsahové interpretaci symbolů.

Buďtež tedy dány objekty, které nazvu „*permutačními elementy*". Je-li nějaký objekt e permutačním elementem, označím jej $\overset{*}{e}$. O povaze těchto elementů postulujeme:

(I.) *Postulát formální: Libovolné dva permutační elementy lze navzájem sečíst, odečíst, znásobit a dělit v aritmetickém smyslu.*

Definice: Operace aritmetické v (I.) nazvu také operacemi permutačními.

(II.) *Postulát obsahový: Jestliže permutačními elementy jsou dvě reálné spojité funkce $F(x, \xi)$ a $G(x, \xi)$ definované v oboru $a \leq \xi \leq x \leq b$, pak permutační násobení těchto funkcí jest identické s integrální operací*

$$\overset{*}{F}\overset{*}{G} = \int_\xi^x F(x, z)\, G(z, \xi)\, dz$$

platnou pro každý bod oboru.

Dá se ukázati, že tyto postuláty postačí, abychom bezesporně odvodili všechny výsledky teorie p. f., jak jsou na př. podány v knize ,,Volterra-Pérés: Leçons sur la composition et les fonctions permutables, 1924".

Budiž na tomto místě učiněna následující zásadní poznámka. Volterrova teorie p. f. souvisí s obecnější teorií nekonečných matic. Výsledky, ke kterým tato teorie dospěla, jsou celkem chudé a v teorii nekonečných matic jsou to jen zajímavé speciální případy.

[2.] Z vět o permutačních funkcí potřebujeme následující:

1. Mezi permutačními elementy existuje jeden jediný element, označme jej $\overset{*}{1}{}^0$, takový, že

$$\overset{*}{e} \,.\, \overset{*}{1}{}^0 = \overset{*}{e},$$

kde $\overset{*}{e}$ jest libovolný p. element.

2. Budiž na $a \leq \xi \leq x \leq b$ spojitá reálná funkce $F(x, \xi)$ a utvořme všechny reálné spojité funkce $G(x, \xi)$, pro které $\overset{*}{F}\overset{*}{G} = \overset{*}{G}\overset{*}{F}$. Nechť (S_1) jest souhrn všech těchto funkcí. Pro každou funkci $G(x, \xi)$ z (S_1) naleznu element $\overset{*}{e}$, že platí $\overset{*}{G}\overset{*}{e} = \overset{*}{1}{}^0$. Buď (S_2) souhrn všech těchto elementů $\overset{*}{e}$. Nazveme pak $(S) = (S_1) + (S_2)$ *souhrnem všech permutačních elementů s danou funkcí* F. Dokáže se: (S) *jest grupa permutačních elementů. V každé grupě* (S) *existuje subgrupa těch elementů, které jsou sestrojeny jediné pomocí dané funkce* F.

3. *a*) Označíme-li $\overset{*}{F} \,.\, \overset{*}{F} = \overset{*}{F}{}^2$, obecně $\overset{*}{F}{}^{n-1} \,.\, \overset{*}{F} = \overset{*}{F}{}^n$ a $\overset{*}{F} = \overset{*}{F}{}^1 = F$, $\overset{*}{F} \,.\, \overset{*}{F}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^0$, pak zmíněná subgrupa jest vytvořena elementy $\overset{*}{F}{}^k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

b) Aby byla splněna relace $\overset{*}{F}\overset{*}{G} = \overset{*}{F}\overset{*}{G}$, kde $\overset{*}{F} \equiv \overset{*}{F}(x, \xi)$ jest spojitá funkce a $\overset{*}{G} \equiv 1$, jest nutné a postačí, aby $\overset{*}{F} \equiv F(x - \xi)$. Souhrn všech funkcí toho tvaru patří do grupy, kterou Volterra nazval *grupou uzavřeného cyklu.*

4. V dalším budeme hledati jen ta řešení integrálních rovnic, pro která platí následující princip: *Každá reálná funkce spojitá* $F(x, \xi)$ *v* $a \leq \xi \leq x \leq b$ *vyskytující se v rovnici integrální (a integro-diferenciální) patří do jisté grupy (subgrupy) permutačních elementů.*

[3.] Vraťme se k našemu tvrzení.

Relaci (4) můžeme psáti

$$H(x, \xi) = \overset{*}{1}\,\overset{*}{K}_1(x, \xi),$$

kde

$$K_1(x, \xi) = e^{-\int_\xi^x f(z)\,dz} \,.\, K(x, \xi).$$

Podle principu ve [2, 4], každá funkce dvou proměnných vyskytující se v rovnici integrální a integro-diferenciální, musí býti elementem z nějaké grupy p. elementů. Tedy také funkce $H(x, \xi)$ ve (3) musí náležet do nějaké (dosud neurčené) grupy (S). Budiž X libovolně zvolený element z (S). Potom musí

$$\overset{*}{H} \,.\, \overset{*}{X} = \overset{*}{X} \,.\, \overset{*}{H},$$

avšak

$$H = \overset{*}{1}\,\overset{*}{K}_1,$$

tedy po dosazení a dovolené úpravě

$$(\overset{*}{1}\,\overset{*}{K}_1)\,\overset{*}{X} = \overset{*}{1}\,(\overset{*}{X}\,\overset{*}{K}_1) = R.$$

Protože funkce R patří do (S), musí býti permutační s kterýmkoliv elementem, které v permutaci vstoupily, tedy

$$\overset{*}{1}\,\overset{*}{R} = \overset{*}{R}\,\overset{*}{1},$$

z čehož

$$\overset{*}{1}\,\overset{*}{X} = \overset{*}{X}\,\overset{*}{1},$$

což znamená, že grupa (S) jest identická s grupou uzavřeného cyklu a tedy také

$$\overset{*}{1}\,\overset{*}{K}_1 = \overset{*}{K}_1\,\overset{*}{1}.$$

Naopak, kdyby K_1 nebyla p. funkcí z grupy uzavřeného cyklu, nemohla by z tohoto cyklu býti funkce R a tedy neplatila by relace (4). To však znamená, že by substituce (2) nebyla přípustná, což jest proti předpokladu.

[4.] Zbývá dokázat: Jestliže K_1 patří do grupy uzavřeného cyklu, také K jest elementem z této grupy (a naopak). Toto tvrzení jest speciálním případem následující relace. Budiž dána pro každý bod uvažovaného oboru relace

$$e^{\int_\xi^x f(z)\,dz} \,.\, \varphi(x - \xi) = F(x - \xi); \tag{5}$$

jakého tvaru musí býti funkce f, aby (5) byla splněna? Pro φ (a F) jest nutné a postačí, aby

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0. \tag{6}$$