

Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1932

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0061|log4

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ROČNÍK 61.

SEŠIT 1.

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

Část matematickou řídí BOHUMIL BYDŽOVSKÝ s redakční radou:
EDUARDEM ČEHEM, KARLEM PETREM a KARLEM RYCHLÍKEM

Část fyzikální řídí AUGUST ŽÁČEK s redakční radou:
VÁCLAVEM DOLEJŠKEM, BOHUSLAVEM HOSTINSKÝM
a FRANTIŠKEM ZÁVIŠKOU.

Přílohu didakticko-metodickou řídí JAROSLAV FRIEDRICH.

Rozhledy matematicko-přírodovědecké řídí JAN SCHUSTER.

Bibliografické zprávy a Věstník řídí MILOSLAV VALOUCH.

VYDÁVÁ

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ZA PODPORY MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY.



V PRAZE 1931.

TISKEM A NÁKLADEM VLASTNÍM.

24476

2.8.31

8. 11. 31 I, 7

Journal Tchécoslovaque de Mathématique et Physique.

Éditeur: Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha II-1559, Tchécoslovaquie.

Obsah seš. 1. — Sommaire du fasc. 1.

Rozhledy matematicko-přírodovědecké, čís. 1 — Revue des sciences mathématiques et naturelles, No. 1.

Jos. Klíma: O jistých geom. místech a příslušných konstrukcích kuželoseček. (Sur certaines lieux géométriques et les constructions des coniques correspondantes.)	1
Jan Schuster: O obsahu trojúhelníka. (Sur l'aire du triangle.)	8
Marie Volcová: Měření rychlosti světla pomocí Kerrova elektrooptického zjevu. (Mesure de la vitesse de la lumière à l'aide du phénomène électrooptique de Kerr.)	10
Arnošt Dittrich: Čínská měření slunovratu. (Détermination du solstice chez les Chinois.)	17
Václav Špaček: Původní vývěva Guerickova. (La pompe originale de Guericke.)	25
Úlohy. (Problèmes.)	28
Vypsání cen za řešení. (Concours.)	

Bibliografické zprávy, čís. 1 — Notes bibliographiques, No. 1.

Věstník JČMF, čís. 1 — Bulletin, No. 1.

Upozornění pp. příspěvatelům. Příspěvky literární, jakož i zprávy týkající se obsahu »Časopisu« jest zasílati redaktorům přímo nebo prostřednictvím spolkové kanceláře.

Přesahují-li příspěvky dva tiskové archy, jest třeba k jejich otištění schválení výboru. Recenze knih cizojazyčných buďtež stručné (ne přes 1 tiskovou stránku). Ke každému článku budiž připojen stručný výtah, pokud možno v jazyce francouzském. Přeje-li si autor písemné zprávy od redakce, nechť přiloží známku na odpověď.

Rukopis budiž psán čitelně, pokud lze strojem, po jedné straně a náležitě upraven k tisku; fecká písmena buďtež psána červeně neb aspoň červeně podtržena. Slova, jež mají býti vytištěna **tučně**, dlužno podtrhnouti úsečkou — *kursivou*, vlnitě — *prostrkaná*, čárkovaně. Neobvyklé značky, cizí písmena, odlišné vyznačování typografické úpravy a pod. je nutno na začátku rukopisu vysvětliti. Funkční znaky se tisknou písmem obyčejným, argumenty kursivou. Pravopis řídí se zásadami obsaženými v »Pravidlech českého pravopisu«. Obrazce schopné reprodukce buďtež nakresleny ve zvětšení trojnásobném, jinak se zhotoví neb opraví na náklad autorův. Autorské korektury připsují se autorům k tíži. Rukopisy článků nepřijatých do tisku se nevracejí. Korektury (autorům se posílá **jen** korektura sloupcová) buďtež vráceny co nejdříve. Autoři se snažně žádají, aby korekturu prováděli **co nejpečlivěji**. Za obsah článku odpovídá jeho autor.

Každý autor vědeckého článku obdrží bezplatně **25 separátů** svého článku (vyjímaje články referující). Přeje-li si autor větší počet separátů než uvedených 25, musí je objednat zvlášť tím, že objednávku napíše zřetelně na sloupcovou korekturu svého článku. Ceny za každých dalších 25 separátů: $\frac{1}{4}$ archu 8 Kč, $\frac{1}{2}$ archu 16 Kč, $\frac{3}{4}$ archu 24 Kč, 1 archu 32 Kč.

Toto číslo vyšlo 20. října 1931.

O konstrukcích ploch 2. stupně, daných imaginární kuželosečkou a sdruženě imaginárními body neb tečnými rovinami.

Napsal Dr. techn. Karel Kořezek.

(Došlo 25. června 1931.)

Konstrukcím uvedeným nebyla, pokud vím, věnována pozornost, ačkoliv nejsou pouhou aplikací známých konstrukcí kuželoseček z imaginárních elementů. Jsou zajímavé také tím, že speciálně pro kružnici imaginární dají se řešiti též kolineací. V tomto pojednání chci podati jen stručný, obecný nástin řešení uvedených úloh, při čemž budu předpokládati pouze plochy reálné a k dalšímu, známému konstruování úplně způsobilé, jakmile na nich budou určeny 3 reálné kuželosečky, resp. 3 kužele dotýčné, a při řešení kolineací, bude-li znám střed i rovina kolineace, jakož i plocha kulová, k dané ploše kolineárně příslušná.

Naše konstrukce bude ovšem předpokládati pouze plochy 2. stupně nepřímkové, neboť reálná rovina (ve které jest imaginární kuželosečka K^i dána) nemůže protínati plochu přímkovou 2. stupně v imaginární kuželosečce.

Jde o konstrukce plochy 2. stupně určené:

Imaginární kuželosečkou K^i v reálné rovině π a

I. 2 páry sdruženě imaginárních bodů $a_i, b_i; c_i, d_i$;

II. 1 párem sdruženě imaginárních bodů a_i, b_i a párem sdruženě imaginárních rovin tečných γ_i, δ_i ;

III. 2 páry sdruženě imaginárních rovin tečných $\alpha_i, \beta_i; \gamma_i, \delta_i$.

Při tom kuželosečka K^i necht' jest dána reálným středem s reálnými osami a na každé z nich eliptická involuce sdružených pólů ještě jedním párem. Pár imaginárních bodů a_i, b_i jest dán na přímce E středem o_E eliptické involuce I_E a absolutní hodnotou potence, vyjádřenou úsečkou $o_E e_0 \perp E$, pár imaginárních bodů c_i, d_i obdobně na přímce F středem o_F eliptické involuce I_F a úsečkou $o_F f_0 \perp F$, dále imaginární tečné roviny α_i, β_i , procházející přímkou

G určíme párem, jehož úhel rozpolují 2 příslušné roviny involuce I_G , k sobě kolmé, a podobně imaginární roviny tečné γ_i, δ_i , procházející přímkou H , stanovíme takovým párem involuce I_H .

I.

Plocha 2. stupně P^2 jest určena imaginární kuželosečkou K^i a 2 družinami imaginárních bodů $a_i, b_i; c_i, d_i$.

Sestrojiti její 3 reálné kuželosečky.

Přímka $a_i b_i \equiv E$ protne rovinu π kuželosečky v bodě p_E ; $c_i d_i \equiv F$ nechť protne π v bodě p_F . K bodu p_E přísluší v involuci I_E sdružený pól p'_E a k bodu p_F v involuci I_F bod sdružený p'_F . Dále k bodu p_E přísluší vzhledem ke kuželosečce K^i polára P_E a k bodu p_F přísluší pro tutéž kuželosečku polára P_F . Rovina $(p'_E P_E) \equiv \pi_E$ jest pak polární rovinou plochy P^2 vzhledem k pólu p_E a rovina $(p'_F P_F) \equiv \pi_F$ jest polární rovinou její vzhledem k pólu p_F . Obě roviny se protínají v přímce R' , která jest družinou polárou ke spojnicí $p_E p_F \equiv R$. Přímka R protíná plochu P^2 v bodech imaginárních (neboť to jsou průsečíky té přímky s imaginární kuželosečkou K^i), tedy její sdružená polára R' musí P^2 protínati v bodech reálných. Rovina $(ER) \equiv \varepsilon$ protíná plochu P^2 v kuželosečce K^ε , určené sdruženě imaginárními body a_i, b_i , imaginár. samodružnými body i, j eliptické involuce $[p_E, p'_E; p_F, p'_F]$ na R (kde $p'_E \equiv (P_E R)$, $p'_F \equiv (P_F R)$) a pólem r'_E přímky R v průsečíku $(R'\varepsilon)$.

Podobně rovina $(FR) \equiv \varphi$ protne P^2 v kuželosečce K^φ , určené imaginárními body c_i, d_i , dále imaginárními body i, j a pólem r'_F přímky R v průsečíku $(R'\varphi)$.

Každá rovina ϱ , položená přímkou R' , musí plochu P^2 protínati v reálné kuželosečce K^ϱ (poněvadž R' protíná P^2 v reálných bodech), která bude určena 3 páry bodů, v nichž rovina ϱ' té kuželosečky protíná kuželosečky $K^i, K^\varepsilon, K^\varphi$, (jejichž roviny jdou přímkou R) a polárou R' společného průsečíku r' spojnic těch 3 párů bodů. Je tedy třeba určití průsečíky kuželosečky K^ε s přímkou $(\varrho\varepsilon)$, která musí procházeti průsečíkem $(R'\varepsilon)$ a podobně průsečíky kuželosečky K^φ s přímkou $(\varrho\varphi)$, která jde průsečíkem $(R'\varphi)$. Jde tedy o řešení úlohy:

a) Kuželosečka dána 2krátě dvěma sdruženě imaginárními body a pólem spojnice 2 z nich, který ovšem musí býti dán na poláře průsečíku spojnic těch sdruženě imaginárních bodů. Sestrojiti její průsečíky s přímkou, procházející tím pólem. Tato úloha se nám vyskytne též v dalších konstrukcích, i rozřešíme ji zvlášť.

Označíme-li nositelky těch 2 involucí, určujících sdruženě imaginární body, I_1, I_2 , pak bude průsečíku obou q příslušet v involuci I_1 bod q_1 a v involuci I_2 bod q_2 . Spojnice $q_1 q_2$ jest polára Q

bodu q a na té zvolme pól i_1 poláry I_1 . Přímku, procházející bodem i_1 , označme P .

Určeme involuci sdružených pólů na přímce Q . Jeden známý pár tvoří body i_1, q_1 a druhým párem budou ony dva reálné body x, y , v nichž se protínají vždy podvojně sdružené spojnice těch 4 imaginárních bodů. Stanovíme je tím,¹⁾ že určíme v involuci I_1 sobě příslušné body k, l tak, že $(qq_1 kl) = -1$ a na I_2 rovněž sobě příslušné body m, n tak, že $(qq_2 mn) = -1$. Potom spojnice km protne poláru Q v bodě x a spojnice kn v bodě y . Involuce $I_Q \equiv [i_1, q_1; x, y]$ jest buď hyperbolická neb eliptická. V případě prvé jest zřejmě příslušná kuželosečka reálná, v druhém imaginární.

Nyní již snadno určíme průsečíky u, v přímky P s tou kuželosečkou. K pólu i_1 přísluší sdružený pól $i'_1 \equiv (PI_1)$ a k průsečíku $j \equiv (PI_2)$ přísluší sdružený pól $j' \equiv (PJ)$, je-li J polára bodu j . Tuto obdržíme jako spojnici bodu j_2 , příslušného k j v involuci I , a pólu i_2 poláry I_2 (který přísluší k bodu q_2 v involuci I^Q). Body u, v jsou pak samodružné body involuce $[i_1, i'_1; j, j']$.

Tak bychom tedy určili žádané průsečíky s kuželosečkami K^e, K^p a známým způsobem též průsečíky s kuželosečkou danou K^i .

Další konstrukce kuželosečky K^e bude pak závislá na tom, zda kuželosečky K^e, K^p jsou obě reálné, či pouze jedna, neb žádná. V případě posledním, nejnepříznivějším, bychom určili jako v úloze a) involuci sdružených pólů na poláře R' pólu r' , která musí býti vzhledem k tomu, že bod r' leží vně reálné plochy P^2 , vždycky hyperbolická, a tedy i tečny z bodu r' k reálné kuželosečce K^e .

Dále bychom pak již sestrojili kuželosečku K^e některou ze známých konstrukcí.²⁾ Sestrojíme-li 3 kuželosečky K^e , bude tím plocha P^2 úplně k dalším konstrukcím určena.

II.

Plocha 2. stupně P^2 jest určena imaginární kuželosečkou K^i , dvěma imaginárními body a_i, b_i na přímce E a dvěma sdruženě imaginárními tečnými rovinami γ_i, δ_i , procházejícími přímkou H . Sestrojiti její 3 reálné kuželosečky.

Jako při konstrukci I. najdeme polární rovinu π_E , příslušnou k průsečíku $p_E \equiv (E\pi)$. Dále uvážíme, že přímka H , ježto ji procházejí imaginární tečné roviny plochy, musí protnouti plochu P^2 v reálných bodech a tečné roviny v nich protínají se ve sdružené poláře H' ku přímce H , která spojuje sdruženě imaginární dotyčné body tečných rovin, procházejících přímkou H a protíná rovinu π kuželosečky K^i v bodě s . Polární rovina σ bodu s musí býti sdruže-

¹⁾ V. Jarolínek: „Základové geometrie polohy“ díl IV., str. 32.

²⁾ V. Jarolínek: „Základové geometrie polohy“ díl II.

nou rovinou k rovině (sH) v involuci I_H , a bude mít svoji stopu v přímce S , stopou p_H přímky H procházející, která však musí být zároveň polárou bodu s vzhledem ke kuželosečce K^i . Musí tedy bod s ležeti na jednom z paprsků společného páru involuce, kterou indukují v bodě p_H naše imaginární kuželosečka K^i a involuce, ve které protíná rovina π involuci I_H .

Vzhledem k tomu, že obě involuce jsou eliptické, musí být ten společný pár reálný. Poněvadž pól s musí zřejmě ležeti také na reálné poláře P_H bodu p_H vzhledem ke kuželosečce K^i , máme určen bod s jako průsečík jednoho neb druhého paprsku toho společného páru s polárou P_H , čímž jsme vedeni ke dvěma řešením. Rovina σ , polární k bodu s , je pak určena přímkami S , H . Spojíme-li dále pól s s bodem p_E , obdržíme přímku R a její sdružená polára jest průsečnicí R' polárních rovin π_E a σ . Potom máme určenu v rovině $\varepsilon \equiv (ER)$ kuželosečku K^ε plochy P^2 jako při úloze a), t. j. eliptickou involuci sdružených pólů I_E , eliptickou involuci sdružených pólů I_R na přímce R a pólem r přímky R v průsečíku $(R'\varepsilon)$. Duálně máme určenu plochu kuželovou, ploše P^2 opsanou, o vrcholu $v \equiv (R'H)$ dvěma páry imaginárních tečných rovin, daných eliptickými involucemi o osách R' a H a rovinou (vR) , polárně sdruženou ve svazku v s paprskem R' .

Každá rovina ϱ , položená přímkou R' , musí protínati plochu P^2 v reálné kuželosečce K^ε (poněvadž R' plochu protíná v reálných bodech). Tato kuželosečka musí procházeti:

1. průsečíky roviny ϱ s danou imaginární kuželosečkou K^i , která se sestrojí známým způsobem;
2. průsečíky roviny ϱ s kuželosečkou K^ε , které se určí konstrukcí a);
3. musí se dotýkati dvou sdruženě imaginárních tečen, v nichž rovina ϱ (bodem v procházející), protíná tu plochu kuželovou, ploše P^2 opsanou.

Tato plocha kuželová bude určovati na rovině π kuželosečku, danou 2 eliptickými involucemi, které indukují v bodech p_H , resp. r (stopě přímky R' na π) a polárou R bodu r .

Jde tedy o rozřešení této úlohy:

b) Kuželosečka jest dána 2krátě dvěma sdruženě imaginárními tečnami a polárou průsečíku 2 z nich, která ovšem musí procházeti pólem spojnice průsečíků těch sdruženě imaginárních tečen. Sestrojíme její průsečíky s přímkou, procházející oním z daných průsečíků dvojice sdruženě imaginárních tečen, jehož polára je dána.

Provedeme ji opět samostatně a pokud možno duálně k úloze a). Označíme-li nositele těch 2 involucí i_1 , i_2 , pak bude spojnicí obou Q příslušet v involuci i_1 paprsek Q_1 a v involuci i_2 paprsek Q_2 . Průsečík $(Q_1 Q_2)$ jest pól q přímky Q a jím zvolme poláru I_1 bodu i_1 . Libovolnou přímkou, procházející bodem i_1 , označme P .

Určeme involuci sdružených polár v bodě q . Jeden známý pár tvoří paprsky I_1, Q_1 a druhým párem zvolme ony 2 reálné přímky X, Y , na nichž se nalézají podvojně sdružené průsečíky těch 4 imaginárních tečen.³⁾ Konstrukce jejich jest duální ke konstrukci úloze a). Involuce $i_q \equiv [I_1 Q_1, XY]$ jest pak buď hyperbolická (je-li kuželosečka reálná), nebo eliptická (je-li kuželosečka imaginární). Průsečíky u, v přímky P s tou kuželosečkou určíme jako samodružné body involuce sdružených pólů, jejíž jeden pár $i_1, i'_1 \equiv (I_1 P)$ známe a druhý j, j' určíme takto:

K paprsku P určíme příslušný P' v involuci i_1 , který protne poláru I_1 bodu i_1 v pólu p přímky P . Přímka X , pólem q procházející, má pól x v průsečíku své sdružené poláry Y s polárou Q . Tedy k průsečíku $j \equiv (PX)$ musí příslušet polára $J \equiv px$, která protne P v bodě j' , sdruženém k bodu j .

Další konstrukce kuželosečky K^e dá se pak již převést na známé konstrukce kuželoseček z imaginárních elementů. Položíme-li přímkou R' ještě 2 roviny, obdržíme tak 3 reálné kuželosečky naší plochy, čímž je úloha rozřešena.

III.

Plocha 2. stupně P^2 jest určena imaginární kuželosečkou K^i v rovině π a 2 dvojicemi tečných rovin sdružené imaginárních $\alpha_i, \beta_i; \gamma_i, \delta_i$, určených eliptickými involucemi sdružených rovin *polárních o osách G, H* .

Involuční svazek rovin o ose G protíná rovinu π v involuci paprskové o vrcholu p_G a pod. involuční svazek rovin o ose H protne rovinu π v involuci paprskové o vrcholu p_H . K bodu p_G přísluší polára P_G vzhledem ke kuželosečce K^i a k bodu p_H polára P_H vzhledem k téže kuželosečce. Sestrojíme společný pár involuce, kterou indukují kuželosečka K^i v bodě p_G , a involuce výše uvedené. Potom jeden z paprsků toho společného páru protne poláru P_G v bodě s_G , který jest pólem roviny σ_G , určené osou G a druhým paprskem S_G společného páru těch involucí.⁴⁾ Podobně najdeme bod s_H a jeho polární rovinu σ_H . Poněvadž volbu bodů s_G a s_H můžeme provést na čtvero způsobů, obdržíme 4 řešení.

Spojnicí R bodů s_G, s_H přísluší průsečnice $R' = (\sigma_G \sigma_H)$ jako sdružená polára, procházející pólem r poláry R vzhledem ke kuželosečce K^i a protínající přímky G , resp. H v bodech g , resp. h . Nyní známe dotyčné kužele plochy P^2 o vrcholech g , resp. h . Kužel o vrcholu g jest určen 2 tečnými rovinami α_i, β_i , dále tečnými rovinami φ_1, ψ_1 , jakožto samodružnými prvky eliptické involuce sdružených polárních rovin o ose R' a rovinou (gR) , polární k paprsku R' v polárním svazku o vrcholu g .

³⁾ V. Jarolínek: „Základové geometrie polohy“ IV. díl, str. 33.

⁴⁾ Podle odst. II.

Podobně jest určen kužel o vrcholu h dvěma imaginárními tečnými rovinami γ_i, δ_i , dále tečnými rovinami φ_i, ψ_i a rovinou (hR) , polární k paprsku R svazku h . Jak se dají takto určené plochy kuželové dále konstruovati, bylo uvedeno v předchozím. Položíme-li potom přímkou R' rovinu ϱ jako v předešlé úloze, bude protínati plochu P^2 v reálné kuželosečce, pro kterou budeme znáti 2 body, v nichž tato rovina protíná kuželosečku K^i a 4 tečny, v nichž protíná plochy kuželové o vrcholech g , resp. h . Tím jest opět v podstatě naše úloha rozřešena.

IV.

Jak bylo již na počátku řečeno, dají se naše úlohy v případě, že jest dána v rovině π imaginární kružnice K_i , výhodně řešiti centrální kolineací s plochou kulovou K' . Vztah kolineární jest výhodné určit takto:

Nechť jest dána imaginární kružnice svým středem o a absolutní hodnotou potence eliptické involuce, kterou ta kružnice indukuje na libovolném průměru. Nanesme tuto potenci, jistou úsečkou vyjádřenou, na kolmici ve středu od tohoto bodu, čímž obdržíme bod s . Naši kružnici K_i přisudíme jako kolineární útvar imaginární kružnici kulovou v nekonečnu K'_i , ve které protíná, jak známo, úběžná rovina ν'_∞ každý pravoúhlý svazek polární. Potom příslušný střed kolineace bude zřejmě v bodě s . Rovina $\pi \equiv \nu$ bude potom rovinou příslušnou k rovině úběžné ν'_∞ , čili bude úběžnicí, se kterou musí býti rovina kolineace rovnoběžná. Zvolme tedy kdekoliv rovinu ω , paralelní s rovinou $\pi \equiv \nu$ za rovinu kolineace. Pro danou rovinu kolineace ω , střed kolineace s a úběžnici ν jest již určen centrálně kolineární vztah mezi 2 prostory P, P' a k prvnímu z nich čítáme plochu P^2 , danou imaginární kružnicí K_i a dalšími 4 prvky. Plocha P^2 se pak kolineárně transformuje v plochu, která bude určena 4 prvky, příslušnými k těm daným a křivkou, do níž se transformuje naše kuželosečka K_i . Touto křivkou jest však, následkem zvláštní volby středu kolineace s , imaginární kružnice kulová v nekonečnu K'_i , kterouž tedy musí příslušná plocha P'^2 k ploše P^2 procházeti, t. j. musí to býti plocha kulová $K' \equiv P'_2$, jež bude určena těmi zbývajících 4 prvky, příslušnými k daným prvkům plochy P^2 . Jestliže dovedeme plochu kulovou z těch 4 prvků konstruovati, dovedeme již také kolineací snadno konstruovati danou plochu P^2 .

V našem případě jde tedy o sestrojení plochy kulové:

1. ze 4 bodů podvojně sdruženě imaginárních;
2. ze dvou bodů sdruženě imaginárních a 2 tečných rovin sdruženě imaginárních;
3. ze 4 rovin podvojně sdruženě imaginárních.

Všecky tyto úlohy provádí V. Jarolínek ve II. svazku svých „Základů geometrie polohy“.

Sur les constructions de quadriques déterminées par une conique imaginaire et par des points ou des plans imaginaires conjugués.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne la construction d'une quadrique contenant une conique imaginaire K_i , située dans un plan réel π et

I. passant par deux couples de points imaginaires conjugués a_i, b_i, c_i, d_i ;

II. passant par un couple de points imaginaires conjugués a_i, b_i et touchant un couple de plans tangents imaginaires conjugués γ_i, δ_i ;

III. touchant deux couples de plans tangents imaginaires conjugués $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$.

Il s'agit, dans toutes ces constructions, de déterminer une droite R' , conjuguée polaire à une certaine droite R , telle qu'un plan arbitraire passant par R' coupe la quadrique à construire suivant une conique réelle. Dans le cas I, on prend pour la droite R la droite joignant les points d'intersection p_E, p_F des droites $E \equiv a_i b_i, F \equiv c_i d_i$ avec le plan π . La construction du cas II exige qu'on trouve le point d'intersection s du plan π avec la polaire conjuguée H' de la droite $H \equiv \gamma_i \delta_i$. C'est le point d'intersection de la polaire p_H du point $p_H \equiv (H\pi)$ par rapport à la conique K_i avec l'une des droites du couple commun à l'involution induite au point p_H par la conique K_i et à celle déterminée dans le plan π par les plans tangents γ_i, δ_i . La droite R est alors la droite joignant le point s à la trace de la droite $E \equiv a_i b_i$ dans le plan π . Dans la construction III, on détermine les points s_G, s_H , où le plan π est coupé par les polaires conjugués G', H' aux droites $G \equiv \alpha_i \beta_i, H \equiv \gamma_i \delta_i$ comme dans le cas II; on prend comme droite R la droite joignant $S_{G'}, S_H$.

Si K_i est un cercle, on peut faire usage de l'homographie centrale transformant la quadrique cherchée en une sphère; il faut choisir les éléments déterminant cette homographie de sorte que le cercle imaginaire donné se transforme en le cercle absolu de l'espace.

O piezoelektrických vlastnostech křemene a jejich užití v oboru vysokofrekvenční techniky.*)

Referuje V. Petržílka.

(Došlo 1. července 1931.)

Obsah:

1. Direktní zjev piezoelektrický.
2. Reciproký zjev piezoelektrický.
3. Vlastní frekvence křemenných deštiček.
4. Zjevy doprovázející kmitání křemenných deštiček.
5. Buzení vyšších harmonických kmitů.
6. Aplikace v oboru vysokofrekvenční techniky:
 - a) Křemenné deštičky jakožto rezonátory a normály frekvence.
 - b) Elektrické náhradní schema křemenné deštičky.
 - c) Stabilisace frekvence vysilače.
 - d) Křemenné deštičky jakožto oscilátory.
7. Závěr.

1. Direktní zjev piezoelektrický.

Již r. 1817 poznal Haüy, že vápenec se stává elektrickým, jestliže jej stlačujeme. Tento zjev zůstal však nepovšimnut a teprve r. 1880 pozorovali a podrobně studovali „piezoelektrinu“ t. j. onen zjev, kde elektrický náboj na plochách krystalu je vyvolán mechanickým tlakem, Pierre a Jacques Curie. Jsou proto pokládáni za objevitele piezoelektriny, kterou popsali tak jasně, že pokládám za nejvhodnější citovati zde úryvek z jejich původního pojednání:

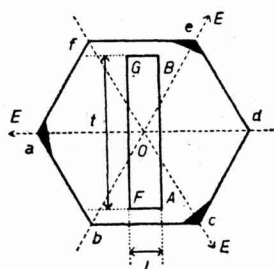
„... Našli jsme nový způsob, jak vzbuditi polární elektrinu na krystalech s polárními osami (hémiedres à faces inclinées¹⁾), který spočívá v tom, že jsou krystaly podrobeny změnám tlaku ve směru těchto os.

*) Přednášky o tomto tematičce konal profesor Žáček na Karlově universitě cyklu: „Speciální přednášky o experimentální fyzice“ v letním semestru 1930; tento článek je vypracováním jeho přednášek.

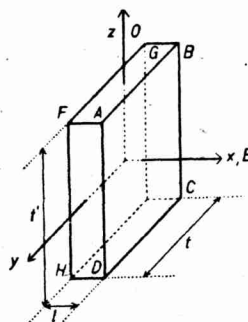
¹⁾ V dnešní době nazývají se polární osy též osami elektrickými; vyznačují se jimi na př. krystaly soustavy trigonálně trapezodrické (křemen, rumělka), ditrigonálně pyramidální (turmalín) a j.

Tyto zjevy jsou úplně analogické zjevům způsobeným teplem (pyroelektrina): při kompresi vzniknou na koncích osy, v jejímž směru tlak působí, náboje opačného znamení. Uvedeme-li krystal do stavu neutrálního a pak jej dekomprimujeme, objeví se tento zjev opět, avšak se změnou znamení; konec osy, který se nabíjel pozitivně při kompresi, stává se negativním při dekompresi a obráceně...

V dnešní době se dá tento efekt, který budeme nazývat *direktním zjevem piezoelektrickým*, nejsnáze pozorovati na křemenných krystalech, které v přírodě přicházejí poměrně velmi čisté a dokonalé (brazilský křišťál) a z toho důvodu se jich také ve vysokofrekvenční technice užívá.



Obr. 1.



Obr. 2.

Křemen krystaluje v šesterečné soustavě a sice v oddělení trigonálně trapezodrickém, v šestibokých hranolech zakončených šestibokými jehlami, jejichž vrcholy a, c, e jsou seříznuty, jak naznačeno schematicky v obr. 1. V důsledku toho není osa O osou symetrie šestičetné, nýbrž pouze osou symetrie trojčetné; patří tudíž křemen mezi krystaly s polárními osami (poloměrné, hemiedrické) a tudíž i piezoelektrické.

Osa O sluje osou optickou, osy E , v jejichž směru jeví krystal vlastnosti piezoelektrické, nazývají se osami elektrickými nebo polárními.

Představme si nyní, že si vybrousíme z krystalu deštičku, jak ukazuje obr. 2, t. j. že plochy $ABCD$ a $FGEH$ stojí kolmo k ose elektrické, plochy $FABG$ a HDC k ose optické. Plochy $ABCD$ a $FGEH$ opatříme kovovými polepy, takže vytvoříme malý kondensátor kapacity C . Stlačujeme-li deštičku ve směru elektrické osy, t. j. kolmo na polepy, vznikne na jednom pozitivní, na druhém negativní náboj Q a mezi oběma potenciální difference $V = Q/C$, kterou měřili P. a J. Curie Thomsonovým

elektrometrem. Jedná-li se nám spíše o demonstraci piezoelektrického efektu než o jeho měření, můžeme užítí uspořádání s dvoumřížkovou lampou, jak je znázorněno v obr. 3., kde závažím Z (5 kg) měníme tlak a tudíž i napětí V na mřížce M_2 , což má za následek změny anodového proudu, který pozorujeme miliampérmetrem mA .

Vedle toho ovšem můžeme dokázat piezoelektrické vlastnosti určité látky celou řadou jiných způsobů (jak z dalšího bude patrné), zejména velice jednoduchou metodou Giebeho a Scheibeho, o níž bude pojednáno v souvislosti v odst. 6a.

V další práci zjistili P. a J. Curie vztahy mezi nábojem Q vznikajícím na křemenné deštičce, deformujeme-li ji silou F , a vyslovili je těmito větami:

1. Deformujeme-li křemennou deštičku (obr. 2.) silou F_x ve směru elektrické osy E , pak vzniká na ploše kolmé k této ose náboj

$$Q = k F_x, \quad (1)$$

kde $k = 6 \cdot 32 \cdot 10^{-8}$ je piezoelektrická konstanta, měříme-li F_x v dynách a Q v jednotkách elektrostatických.

2. Deformujeme-li deštičku ve směru kolmém k ose optické a elektrické (t. j. osy y) silou F_y , vzniká na stěnách kolmých k ose elektrické náboj

$$Q = -k \frac{t}{l} F_y, \quad (2)$$

kde t je délka deštičky ve směru kolmém k ose optické a elektrické, l délka ve směru osy elektrické.

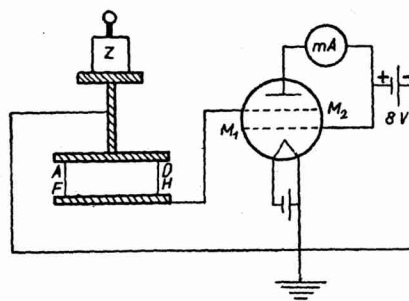
3. Stlačujeme-li deštičku ve směru osy optické, nedostaneme žádný náboj.

Tyto zákony byly potvrzeny fenomenologickou teorií Voigtovou, která je založena na následujícím předpokladu:

Každá deformace piezoelektrického krystalu vyvolá elektrickou polarisaci (elektrická polarisace = hustotě elektrického náboje vznikajícího na plochách krystalu) o složkách π_x, π_y, π_z , které jsou lineárními funkcemi elastických deformací $x_x, x_y, x_z, \dots$, takže při libovolně položeném systému x, y, z , platí:

$$\left. \begin{aligned} \pi_x &= \varepsilon_{11}x_x + \varepsilon_{12}y_y + \varepsilon_{13}z_z + \varepsilon_{14}y_z + \varepsilon_{15}z_x + \varepsilon_{16}x_y \\ \pi_y &= \varepsilon_{21}x_x + \varepsilon_{22}y_y + \varepsilon_{23}z_z + \varepsilon_{24}y_z + \varepsilon_{25}z_x + \varepsilon_{26}x_y \\ \pi_z &= \varepsilon_{31}x_x + \varepsilon_{32}y_y + \varepsilon_{33}z_z + \varepsilon_{34}y_z + \varepsilon_{35}z_x + \varepsilon_{36}x_y \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

kde ε_{ij} slují *piezoelektrické konstanty*.



Obr. 3.

Měření podává však vztahy mezi nábojem t. j. mezi π_x, π_y, π_z a mezi mechanickými tlaky, které deformaci způsobují a které jsou kompenzovány elastickými napětími. Zavedeme-li tedy do počtu místo těchto tlaků záporná elastická napětí $-X_x, -Y_y, -Z_z, \dots$, která jsou podle Hookova zákona lineárními funkcemi elastických deformací $x_x, y_y, z_z, \dots$, můžeme psát (po provedení této transformace):

$$\left. \begin{aligned} -\pi_x &= d_{11}X_x + d_{12}Y_y + d_{13}Z_z + d_{14}Y_z + d_{15}Z_x + d_{16}X_y \\ -\pi_y &= d_{21}X_x + d_{22}Y_y + d_{23}Z_z + d_{24}Y_z + d_{25}Z_x + d_{26}X_y \\ -\pi_z &= d_{31}X_x + d_{32}Y_y + d_{33}Z_z + d_{34}Y_z + d_{35}Z_x + d_{36}X_y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

kde d_{ij} slují *piezoelektrické moduly*.

Počet konstant ε_{ij} resp. d_{ij} se zmenší v důsledku speciálních vlastností toho kterého krystalu; pro křemen, krystalující v soustavě trigonálně trapezodrické, platí podle Voigta

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{11}, \quad d_{12} = -d_{11}, \quad d_{14} = d_{14}, \quad d_{25} = -d_{14}, \quad d_{26} = -2d_{11}, \\ d_{13} &= d_{15} = d_{16} = d_{21} = d_{22} = d_{23} = d_{24} = d_{31} = d_{32} = d_{34} = d_{35} = d_{36} = 0, \end{aligned}$$

takže rovnice (4) nabývají tvaru

$$\left. \begin{aligned} \pi_x &= -d_{11}(X_x - Y_y) - d_{14}Y_z \\ \pi_y &= d_{14}Z_x + 2d_{11}X_y \\ \pi_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Z rovnice (5) plynou okamžitě zákony Curieovy (klademe-li osu x do směru elektrické osy E , osu y do směru kolmého k ose elektrické a optické, obr. 2):

1. Působíme-li na stěnu $ABCD$ o ploše tt' silou F_x , jest $F_x = -X_x \cdot tt'$, $X_y = Y_y = Y_z = Z_x = 0$, takže

$$\pi_x \cdot tt' = Q = d_{11}F_x, \quad (6)$$

což je v úplném souhlasu s rovnicí (1), klademe-li $k = d_{11}$.

2. Působíme-li na stěnu $FADH$ o ploše lt' silou F_y , jest $F_y = -Y_y \cdot lt'$, $X_x = Y_z = Z_x = X_y = 0$, takže

$$\pi_x \cdot lt' = -d_{11}F_y.$$

Náboj na ploše $ABCD$ jest $Q = \pi_x \cdot tt'$, takže

$$Q = -d_{11} \frac{t}{l} F_y, \quad (7)$$

opět v úplném souhlasu s rovnicí (2), kde opět $d_{11} = k$.

3. Třetí rovnice ze systému (5) potvrzuje třetí pravidlo Curieovo.

2. Reciproký zjev piezoelektrický.

Pro užití křemených krystalů ve vysokofrekvenční technice je však nejdůležitější t. zv. *reciproký zjev piezoelektrický*, předpověděný z termodynamických úvah Lippmannem. Spočívá v tom, že elektrické napětí, které vložíme na plochy kolmé k ose elektrické, způsobí dilataci resp. kompresi deštičky; důkaz existence tohoto zjevu ve směru osy x -ové (obr. 2.) zde stručně podávám.

Uvažujme deštičku křemennou, základní tloušťky l_0 , okamžité tloušťky l , jejíž stěny $ABCD$ a FGH (obr. 2.) nechť mají pro jednoduchost jednotkovou plochu; podrobíme je tlaku f_x a uvedeme na potenciál V , takže na polepech vznikne náboj $\sigma = CV$ (= hustotě, neboť plocha je jednotková), a hledejme relativní prodloužení $x_x = (l - l_0)/l_0$ jakožto funkci napětí V .

Tento termodynamický systém je charakterisován veličinami f_x , V a T (absolutní temperatura), které budeme považovati za nezávisle proměnné, a které změníme o df_x , dV , dT . Tím vykoná systém práci, která se bude skládati: jednak z mechanické práce

$$f_x dl = f_x \left(\frac{\partial l}{\partial T} dT + \frac{\partial l}{\partial f_x} df_x + \frac{\partial l}{\partial V} dV \right), \quad (8)$$

jednak z práce elektrické, kterou nutno podrobněji uvážiti. Zvětší-li se potenciál V na $V + dV$, zvětší se tím náboj σ o $d\sigma$, takže systém vykoná práci $-V d\sigma$. Je-li však deštička sama piezoelektrická, má zvýšení tlaku za následek stoupnutí náboje o $d\pi_x$ (neboť plocha je jednotková, takže náboj = hustotě náboje = polarisaci π_x), takže zdroj dodá pouze náboj $(d\sigma - d\pi_x)$, čili systém vykoná pouze práci

$$-V(d\sigma - d\pi_x). \quad (9)$$

Podle první věty termodynamické množství dodaného tepla dQ se spotřebuje na zvýšení vnitřní energie dU a na vykonání práce dA , takže

$$dQ = dU + dA$$

čili podle (8) a (9)

$$\begin{aligned} dQ &= dU + f_x dl + V d(\pi_x - \sigma) = d\bar{U} - l df_x - (\pi_x - \sigma) dV = \\ &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial T} dT + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial f_x} - l \right) df_x + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial V} - (\pi_x - \sigma) \right) dV, \end{aligned} \quad (10)$$

označíme-li

$$\bar{U} = U + f_x l + V(\pi_x - \sigma).$$

Zavedeme-li do počtu entropii S vztahem

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad (11)$$

porovnáme-li rovnice (10) a (11) a vyloučíme-li entropii S a vnitřní energii U dvakrát po sobě opakovaným derivováním, obdržíme

$$\frac{\partial l}{\partial V} = \frac{\partial \pi_x}{\partial f_x} - \frac{\partial \sigma}{\partial f_x}, \quad (12)$$

Člen $\partial \sigma / \partial f_x$, který souvisí s elektrostrikcí, je zanedbatelný vůči členu $\partial \pi_x / \partial f_x$, který souvisí s piezoelektrinou, takže dostáváme konečnou rovnici

$$\frac{\partial l}{\partial V} = \frac{\partial \pi_x}{\partial f_x}$$

čili

$$\partial \frac{(l-l_0)}{l_0} = \partial x_x = \frac{\partial \pi_x}{\partial f_x} \cdot \partial \left(\frac{V}{l_0} \right) = \frac{\partial \pi_x}{\partial f_x} \partial \mathfrak{E}_x, \quad (13)$$

zavedeme-li relativní prodloužení $(l-l_0)/l_0 = x_x$ a elektrickou sílu $\mathfrak{E}_x = V/l_0$. Ježto $f_x \cdot tt' = F_x$, jest podle rovnice (6) $\partial \pi_x / \partial f_x = d_{11}$ takže integrací rovnice (13) plyne

$$x_x = d_{11} \mathfrak{E}_x, \quad (14)$$

t. j. relativní prodloužení uvažované deštičky ve směru osy x způsobené elektrickou silou $\mathfrak{E}_x$ jest této síle úměrné; konstanta úměrnosti jest již známá konstanta piezoelektrická $d_{11} = k$.

Reciprokový zjev piezoelektrický byl skutečně objeven opět bratřími Curieovými, kteří jej popsali takto:

„...Naše poslední pokusy ukazují, že obráceně, vložíme-li elektrické náboje opačného znamení na konce osy poloměrného krystalu, krystal se směrem této osy kontrahuje resp. dilatuje podle směru, ve kterém bylo napětí na krystalu aplikováno,

Smysly obou reciprokových zjevů jsou mezi sebou vázány obecným pravidlem, jehož znění přejímáme od Lippmanna, a které není než zobecněním pravidla Lenzova:

Smysl (rozumí se zde smysl deformace, t. j. jedná se buď o kontrakci nebo o dilataci) je vždy takový, že zjev reciprokový se snaží zabránit vzniku zjevu direktního a naopak...”

P. a J. Curie zjistili dále, že

1. prodloužení δ_x ve směru osy elektrické způsobené napětím V je dáno výrazem

$$\delta_x = kV, \quad (15)$$

což je v úplném souhlasu s rovnicí (14), neboť

$$\delta_x = l - l_0 = d_{11} l_0 \mathfrak{E}_x = kV. \quad (16)$$

2. Napětí V ve směru osy x -ové způsobí dilataci resp. kontrakci ve směru kolmém k ose elektrické a optické velikosti

$$\delta_y = -k \frac{t}{l} V. \quad (17)$$

což lze analogicky jako v případě deformace ve směru osy x -ové dokázati z úvah Lippmannových.

3. Napětí ve směru osy optické nezpůsobuje deformací.

3. Vlastní frekvence křemenných deštiček.

Tím jsme se dosud zabývali elektrostatickými zjevy pozorovanými at' už při direktním či reciprokém zjevu piezoelektrickém. První, kdo užil střídavého napětí na polepech kondensátoru s piezoelektrickým dielektrikem za tím účelem, aby uvedl křemennou deštičku do vynucených mechanických kmitů, byl Langevin (1917).

Deštička z křemene, jehož modul elasticity je

$$E = 8 \cdot 10^{11} \text{ cm g}^{-1} \text{ sec}^{-2},$$

specifická hmota $\sigma = 2 \cdot 65 \text{ g cm}^{-3}$, rychlost šíření vln křemenem $v = \sqrt{E/\sigma} = 545.000 \text{ cm sec}^{-1}$, může totiž vykonávati, jsou-li její dimense vhodně voleny, mechanické kmity o frekvenci několik set tisíc kmitů za sekundu. Frekvence n těchto kmitů souvisí s dobou kmitovou τ , rychlostí v , kterou se elastické vlny křemenem šíří, a délkou vlny λ vztahem

$$n = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{\lambda}. \quad (18)$$

Poněvadž křemenná deštička délky l (obr. 2) kmitá tak (jako na př. tyč na obou koncích volná), že její základní vlna $\lambda = 2l$, jest podle vztahu (18) základní frekvence mechanických kmitů této deštičky

$$n_0 = \frac{v}{2l} = \frac{545.000 \text{ cm sec}^{-1}}{2l \text{ cm}} = \frac{2725}{l_{mm}} \text{ kilocyklů}, \quad (19)$$

měříme-li l v mm . Vložíme-li tudíž na tuto deštičku střídavé napětí, jehož frekvence je blízká frekvenci n_0 , pak se deštička v důsledku svých piezoelektrických vlastností deformuje a sice tak, že deformace sledují změny elektrického napětí, čili deštička se rozkmitá ve vynucených kmitech.

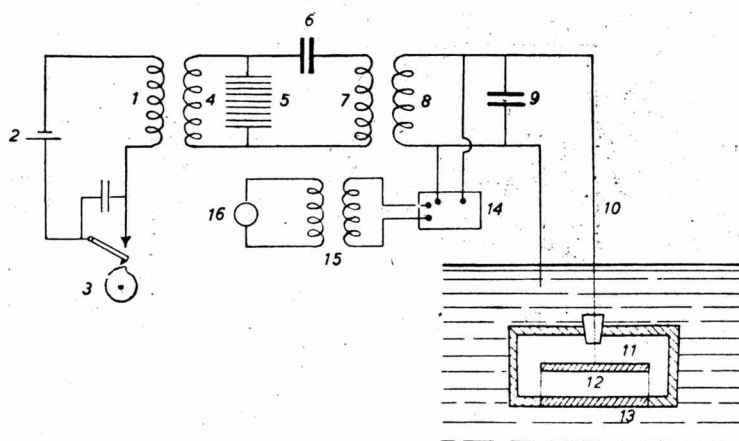
Poněvadž existují dva směry l a t , ve kterých jeví deštička piezoelektrické deformace, existují tudíž také dva druhy mechanických kmitů. Kmity ve směru l nazýváme *longitudinální*, kmity ve směru t *transversální* (viz obr. 2.) podle označení Cadyho

(1922). Jednoduché formule (19) velmi pěkně souhlasí s formulami, které získal experimentálně Hund, a které pro deštičku obdélníkovou dávají frekvenci vzorci

$$f_t = \frac{2870 \pm 50}{l}, \quad f_t = \frac{2785 \pm 300}{t}. \quad (20)$$

Je zajímavé, že Hund objevil vedle těchto dvou frekvencí ještě třetí základní frekvenci

$$f_{t'} = \frac{2945 \pm 300}{t'}, \quad (21)$$



Obr. 4.

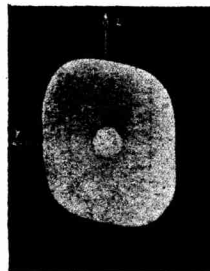
o níž se domnívá, že existuje ve směru optické osy krystalu. Délky l , t , t' se měří v mm , frekvence je pak dána v kilocyklech.

Langevin užil mechanických kmitů křemenných deštiček k měření hloubek mořských velmi důmyslným zařízením, které v nynějším provedení zaznamenává hloubku mořskou automaticky, takže je zavedeno téměř na všech větších parnících. Schematicky je znázorněno na obr. 4, kde značí: 1 primární cívku Ruhmkorffova induktoru, 2 zdroj stejnosměrného napětí, 3 přerušovač proudu, 4 sekundární cívku, která budí oscilační kruh elektrickým nárazem, 5 vyhasínající jiskřiště Wienovo, 6 a 7 oscilační kruh, který působí na oscilační kruh 8 a 9, paralelně ke kondenzátoru tohoto kruhu je připojen kondenzátor s piezoelektrickým krystalem, 12 křemenná deštička, která leží mezi ocelovými deštičkami 11 a 13, 14 zesilovač, který je spojen přes transformátor 15 s oscilografem 16.

Prerušením proudu v 3 vzniknou v 8 a 9 oscilace (trvající nejvýš tisícinu sekundy), které rozkmitají křemennou deštičku a jsou zaznamenány oscilografem. Kmity deštičky se přenesou na vodu, kterou se šíří až ke dnu, kde se odrazí, vrátí se ke křemenné deštičce a způsobí v důsledku reciprokého zjevu piezoelektrického novou výchylku oscilografu. Z doby t mezi oběma záznamy oscilografu a rychlosti v šíření zvukových vln ve vodě vypočteme hloubku mořskou podle vzorce $h = \frac{1}{2}vt$. Vhodným zařízením lze dosáhnouti toho, že je možno na grafu odečítati přímo hloubku mořskou.



Obr. 5.



Obr. 6.

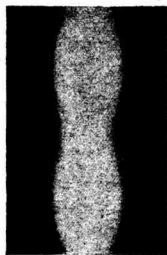
4. Zjevy doprovázející kmitání křemenných deštiček.

Kmity křemenných deštiček je možno, abych tak řekl, učiniti viditelnými, všimneme-li si zjevů, které kmitání deštiček doprovázejí.

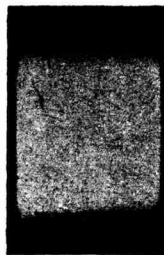
Podle analogie kmitání kovových desek získal Crossley (1928) „Chladního obrazce“ i na křemenných deštičkách, které posypával jemným práškem — nejlépe plavuní —, a z vytvořených obrázků soudil na způsob kmitání křemenných deštiček (obr. 5). Straubel (1931) ukázal tímto způsobem, že není výhodné užívati deštiček pravoúhlých resp. kruhových, nýbrž deštiček zvláštního tvaru, jak ukazuje obr. 6, kde od středu deštičky jsou nanášeny $\sqrt{E}$ (E = modul elasticity, neboť $v = \sqrt{E/\sigma}$ (19)). Pak vzniká na deštičce jediný uzlový bod uprostřed deštičky, která kmitá v jediné frekvenci na rozdíl od deštiček pravoúhlých, které sice podle (20) a (21) mohou kmitati pouze ve třech frekvencích, ve skutečnosti však kmitají v mnoha frekvencích. Tak na př. deš-

tičku $t = 2.5 \text{ cm}$, $t' = 2.5 \text{ cm}$, $l = 0.57 \text{ cm}$ ($\lambda = 600 \text{ m}$) jsem rozkmital ve směru osy elektrické, t. j. v longitudinálních kmitech ve 14 různých, velmi blízkých frekvencích.

Tyto frekvence lze velmi pohodlně sledovati optickou cestou. Vztahy mezi optickými a piezoelektrickými vlastnostmi byly totiž studovány záhy po objevení piezoelektřiny v lineárně polarisovaném světle rovnoběžném Röntgenem (1883), ve světle sbíhavém Kundtem (1883). Oba ukázali, že stejnosměrné, dostatečně vysoké napětí, které vložíme na deštičku ve směru její elektrické osy, způsobí v deštičce změnu dvojlomu tlakem (t. zv. náhodný dvojlom), t. j. křemen stává se v důsledku svých piezoelektrických vlastností dvojosým.



Obr. 7a.



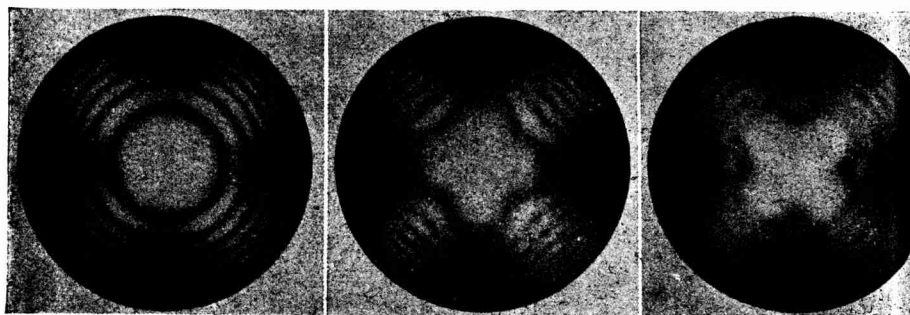
Obr. 7b.

Tawil (1926) pozoroval kmitající křemenné deštičky v lineárně polarisovaném světle rovnoběžném buď ve směru osy elektrické nebo optické. Objevily prý se mu velmi zajímavé obrázky (nepodává jejich fotografie), které byly jednoznačně přiřaděny jednotlivým vlnám. Obr. 7a podává fotografii tohoto zjevu, kterou jsem získal na deštičce ($l = 5.74 \text{ mm}$, $t = 10.37 \text{ mm}$, $t' = 11.03 \text{ mm}$) při longitudinálních kmitech s polepy kolmými k ose elektrické. Světlo procházelo ve směru osy optické, stočení polarisační roviny bylo vykompensováno deštičkou stejné tloušťky, opačně stácející polarisační rovinu, takže deštička se jevila úplně temná. Byla-li rozkmitána, objevil se obr. 7a. Obdobné obrázky lze získati za téhož uspořádání pro transversální kmity (obr. 7b), po případě pro kmity harmonické.

Pozorujeme-li deštičku ve sbíhavém polarisovaném světle, objeví se známé soustředné kruhy, jak ukazuje obr. 8. Jsou-li polepy kolmy k elektrické ose, pak ať rozkmitáme deštičku v longitudinálních či transversálních kmitech, objeví se vždy obr. 9, jsou-li polepy rovnoběžné s elektrickou osou, vždy obr. 10. Tyto zjevy jsou ve zvláštním vztahu k výsledkům práce

Kundtovy, a poněvadž dosud nebyly nikým pozorovány, pojednám o nich podrobněji ve zvláštní práci.

V r. 1926 pozoroval Meissner, že kmitající deštička počala zpívatí velmi vysokým tónem, resp. že kolem ní vznikaly vzdušné proudy, které způsobily, že polohu deštičky mezi polepy pozměnily, po případě ji roztočily. Meissner sestavil na tomto principu malou hračku — krystalový motorek. Tento zjev je způsoben tím, že kolem kmitající deštičky vzniká akustické pole; zvukové vlny, které vycházejí od stěny deštičky, však vykazují nesymetrické rozdělení vzhledem k ose deštičky, čímž se vysvětluje vznik vzdušných



Obr. 8.

Obr. 9.

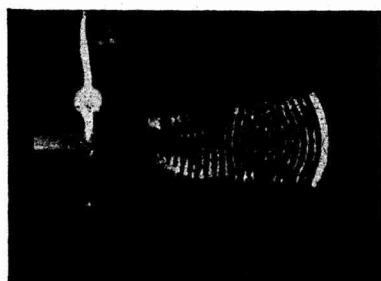
Obr. 10.

proudů kolem deštičky (obr. 5). Příčiny této nesymetrie tkví v tom, že deštička, je-li broušena tak, jak ukazuje obr. 2, kmitá velice komplikovaně (obr. 5), je-li však broušena dle návodu Straubelova (obr. 6), je i pole kolem deštičky pravidelné a možno velice krásně vytvořiti stojaté vlny, jak ukazuje obr. 11, vyreprodukovaný z práce Straubelovy. Tyto akustické vlny, jejichž vlnová délka může býti tak malá, že jsou ultrasonorní, šíří se přibližně stejnou rychlostí jako vlny oboru slyšitelnosti a rozkmitají, mají-li vhodnou frekvenci, i jinou křemennou deštičku. Mohou však dokonce nejen amplitudu, ale i vlastní frekvenci křemenné deštičky ovlivniti, takže při deštičkách, sloužících za normály frekvence, nutno i na tuto okolnost dávatí bedlivý pozor.

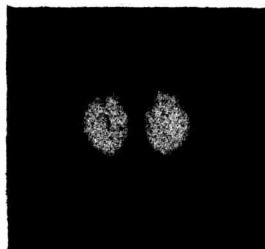
Pro kontrolu vlny vysilače a zvláště pak pro velmi přesné určování jeho frekvence má eminentní význam světélkování kmitající křemenné deštičky ve zředěném plynu, které objevili Giebe a Scheibe (1925). Cady doporučoval, aby polepy byly na křemenné deštičce direktně přiloženy, ovšem tak, aby neomezovaly kmitání deštičky; někteří fysikové dokonce plochy, na něž vkládají elektrická napětí, pokovují. Giebe a Scheibe umisťují křemennou deštičku mezi polepy tak, že na každé straně zůstane nejméně 0.5 mm

mezera. V této úpravě ji montují do skleněné baničky, v níž je velmi zředěný neon, který se snadno uvádí do doutnavého výboje. Připojíme-li takto upravený křemenný resonátor paralelně k cívice o větší samoindukci, kterou spráhneme s generátorem, tu v resonanci tento resonátor velmi pěkně světélkuje mezi polepy a deštičkou (obr. 12).

Tento zjev si můžeme vysvětliti následovně. Střídavé pole mezi polepy způsobí deformace deštičky, které při resonanci přejdou v elastické kmity deštičky. Tyto kmity vyvolají v důsledku direktního zjevu piezoelektrického na stěnách deštičky střídavá



Obr. 11.



Obr. 12.

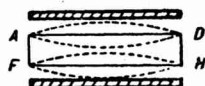
napětí, která jsou příčinou doutnavého výboje. Poněvadž deformace jsou největší uprostřed deštičky a k jejím hranám se zmenšují, je i světélkování největší uprostřed deštičky a k jejím hranám se zmenšuje.

5. Buzení vyšších harmonických kmitů.

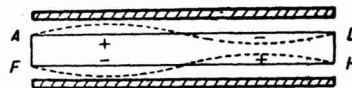
Kdybychom se pokusili rozkmitati deštičku, opatřenou po obou plochách $ABCD$ a FGH kovovými polepy, v první harmonické, resp. v lichých harmonických vůbec, nepotkali bychom se s úspěchem. V druhé, čtvrté, zkrátka v sudé harmonické se deštička rozkmitá.

Giebe a Scheibe šli po příčině tohoto zjevu, a vyložili jej na základě světélkování deštičky ve vakuu takto: Kmitá-li deštička v základní frekvenci n_0 , pak je největší komprese resp. dilatace uprostřed deštičky, jak naznačuje obr. 13. U harmonické frekvence $2n_0$ je deformace asi toho typu, jak ukazuje obr. 14. Kdyby byl tedy po obou stranách po celé délce deštičky jediný polep, tu muselo by totéž elektrické pole na jedné polovině deštičky způsobiti kompresi na druhé dilataci, což není možné.

Proto se nepodařilo Giebemu a Scheibemu ve frekvenci $2n_0$ deštičku rozkmitati; stalo se tak jen tehdy, byla-li v uspořádání nějaká náhodná nesymetrie. Proto upravili jmenovaní



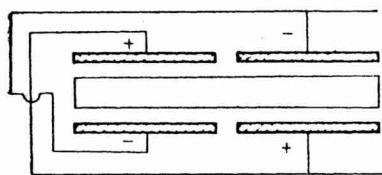
Obr. 13.



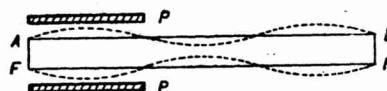
Obr. 14.

autoři polepy tak, jak ukazuje obr. 15, a deštičku bylo pak možno skutečně rozkmitati; analogicky byly upraveny polepy při ostatních lichých harmonických.

Při sudých harmonických nemusíme bráti zřetel ke tvaru polepů, neboť na př. deštička kmitá pro druhou harmonickou $3n_0$ ve tvaru, jak ukazuje obr. 15. Je tudíž již ve zjevu samém,



Obr. 15.



Obr. 16.

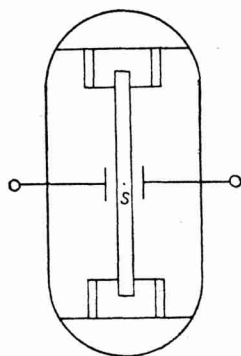
stejně jako při základní frekvenci, nesymetrie tím, že počet dilatací a kontrakcí se liší o 1. Proto se dají v uspořádání podle obr. 13 buditi sudé harmonické až do vysokých řádů, stačí však užívat docela malé polepy, jak ukazuje obr. 16. Jako příklad uvádím z práce Giebeho a Scheibeho obrázek deštičky, kmitající v 33. harmonické frekvenci (obr. 17).



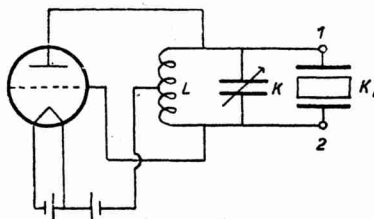
Obr. 17.

Aby bylo možno buditi jak liché, tak sudé vyšší harmonické, aniž by bylo třeba měniti polepů, užili Giebe a Scheibe malých polepů, které umístili malinko od středu S křemenné deštičky,

kterou upevnili na hedvábná vlákna do malé skleněné baničky, kterou naplnili zředěným neonem (obr. 18). Potřebné budící napětí je circa 30—100 voltů. Obor, v němž se udržuje světélkování, obnáší při nejmenších budících napětích asi 0.05^0_{00} po obou stranách maxima světélkování, přesnost, s kterou lze nastavit frekvenci pomocí resonátoru, je circa 0.01^0_{00} ; vlastní frekvence resonátoru je udávána s přesností 0.1^0_{00} .



Obr. 18.



Obr. 19.

6. Aplikace v oboru vysokofrekventní techniky.

V oboru vysoké frekvence se užívá křemenných deštiček jakožto resonátorů ke kontrole vlny vysílače, jakožto normálů frekvence, jakožto stabilisátorů frekvence a jakožto oscilátorů.

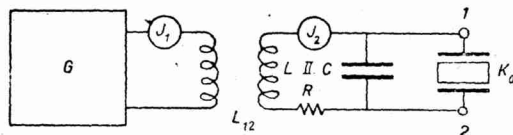
a) Křemenné deštičky jakožto resonátory a normály frekvence.

Užití piezoelektrických krystalů ve vysoké frekvenci je zásluhou Cadyho (1922). Křemennou deštičku, broušenou podle obr. 2, vložíme mezi dva polepy a připojíme mezi body 1 a 2 paralelně ke kondensátoru v generátoru s vlastním buzením (na př. v Hartleyově spojení s induktivní zpětnou vazbou, obr. 19); vysílanou vlnu přijímáme přijímačem stojícím nablízku. Měníme-li spojitě kapacitu K v oscilačním kruhu generátoru, t. j. měníme-li spojitě frekvenci generátoru na př. od hodnot vyšších k hodnotám nižším než je vlastní frekvence křemenné deštičky, tu se ozve v okamžiku rovnosti obou frekvencí „cvaknutí“ (angl. „click“) v přijímači. Cady vykládal toto cvaknutí zpětným působením kmitající křemenné deštičky na generátor.

Giebe a Scheibe, kteří užili toho zjevu k určování, zda určitá látka jeví piezoelektrické vlastnosti, vykládají tento zjev

takto: Křemenná deštička, která má velice malý útlum (její logaritmický dekrement je řádu 10^{-4}), kmitá ve vlastní frekvenci ještě určitou dobu potom, když už jsme, měníce frekvenci generátoru, resonanci překročili. Je tudíž dána možnost interference kmitů daných generátorem a kmitů daných deštičkou, které se v okolí resonance velmi málo od sebe liší a způsobují v přijimači cvaknutí.

Giebe a Scheibe objevili tímto způsobem piezoelektrické vlastnosti na celé řadě nových látek. Není třeba k tomu ani deštiček zvláště broušených. Stačí rozdrtit krystal látky, kterou chceme zkoumat, na drobné kousky a nasypati je mezi polepy malého kondensátorku K_0 . Při tom je pravděpodobné, že elektrické osy velkého množství těchto úlomků jsou přibližně orientovány ve směru elektrického pole v kondensátorku K_0 , takže



Obr. 20.

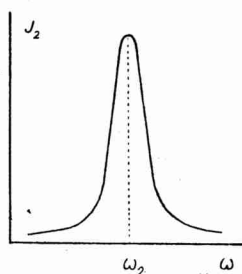
je tu dána možnost při spojitě změně frekvence v generátoru tyto malé oscilátory rozkmitati a sice v důsledku jejich různé velikosti na nejrozličnějších vlnách. Ozývá se tudíž při spojitě změně frekvence v generátoru v přijimači neustálé cvakání; tím je charakterisována piezoelektrická látka vůči látce nejevící piezoelektrických vlastností.

Tento zjev může sloužiti též k tomu, abychom určili (s chybou menší než $10/100$ při frekvenci řádu jednoho milionu) frekvenci generátoru pomocí křemenné deštičky, jejíž frekvenci přesně známe; neboť při cvaknutí liší se obě frekvence pouze o výšku tónu, kterou slyšíme v přijimači (na př. 500 kmitů za sek.).

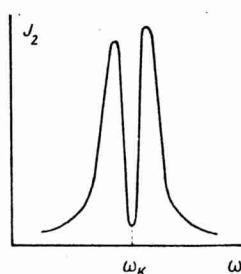
Ježto však je při změně kapacity K těžko určit okamžik, kdy je frekvence právě rovna vlastní frekvenci křemenné deštičky, t. j. kdy nastává cvaknutí, užil Cady ještě jiného způsobu k stanovení resonance, který možno nazvati metodou absorpcí.

S generátorem G netlumenných oscilací si spráhneme oscilační kruh II (obr. 20) a představme si nejprve, že křemenný resonátor K_0 není ke kondensátoru C připojen. Měníme-li frekvenci generátoru, dostaneme jednoduchou resonanční křivku kruhu II , jejíž maximum nastává pro resonanci, t. j. pro případ, že vlastní frekvence ω_2 kruhu II je rovna frekvenci generátoru ω (obr. 21 a).

Nyní si připojme k oscilačnímu kruhu II kondensátor K_0 a nastavme frekvenci ω_2 velmi přibližně rovnou vlastní frekvenci křemenné deštičky ω_k . Měníme-li nyní frekvenci ω , dostaneme křivku zakreslenou v obr. 21 b. Minimum této rozštěpené křivky nastává pro onu frekvenci, pro kterou křemenná deštička odebírá kruhu II maximum energie pro udržení vlastních kmitů, t. j. pro frekvenci rezonanční, kdy $\omega = \omega_k$. Známe-li tudíž frek-



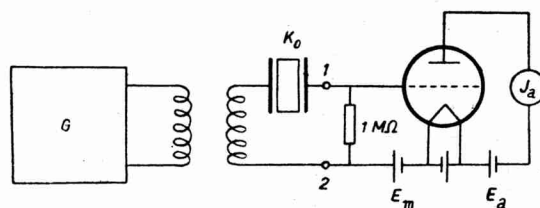
Obr. 21 a.



Obr. 21 b.

venci ω_k , je možno nejen frekvenci generátoru stále kontrolovati a konstantně udržovati, ale i velmi přesně určit; tímto způsobem lze dosáhnouti při nastavení frekvence obdivuhodné přesnosti 0.01% .

Tato přesnost při kontrolování vlny vysilače je až nepříjemná. Proto byla udána celá řada jiných metod, které umožňují zároveň stanovení rezonanční křivky křemenného rezonátoru.



Obr. 22.

Heegner užil k tomu elektronové lampy v uspořádání naznačeném na obr. 22. Proud I_a v anodovém kruhu snížíme negativním předpětím mřížky E_m na minimum. Měníme-li v generátoru frekvenci tak, že se blížíme vlastní frekvenci křemenné deštičky K_0 , tu vznikají na jejích polepech v důsledku direktního zjevu piezoelektrického napětí, která se přenesou na mřížku a způsobí objevení anodového proudu. Měníme-li pak spojitě frekvenci

od hodnot vyšších k hodnotám nižším, než je vlastní frekvence křemenného rezonátoru, projdeme tím rezonanční křivku napětí, analogickou k rezonanční křivce proudové. Maximum napětí na mřížce a tudíž maximum anodového proudu nastává opět, když $\omega = \omega_k$, takže tím máme danu pohodlnou metodu, jak udržeti konstantně vlnu vysilače a přesně ji stanovit.

Resonanční křivka je velice ostrá a lze z ní stanovití útlum křemenné deštičky. Meissner udává pro deštičku $\lambda = 500 \text{ m}$, logaritmický dekrement longitudálních kmitů $d_l = 0.0004$, transversálních kmitů $d_t = 0.00012$, kdežto u obyčejného oscilačního kruhu s kapacitou a samoindukcí lze jej velmi těžko snížit pod hodnotu $d = 0.01$.

Jestě jednodušeji můžeme věc zařídit tak, že elektronovou lampu s miliampérmetrem v anodovém kruhu nahradíme mezi body 1 a 2 krystalovým detektorem s paralelně připojeným galvanometrem, po případě můžeme užítí doutnavé lampy.

Nejpohodlněji a zároveň nejpřesněji lze ovšem konstantně udržovati a určovati frekvenci vysilače užitím světélkujících rezonátorů, které konstruovali Giebe a Scheibe (obr. 18) a o kterých bylo podrobně referováno v odstavci 4 resp. 5.

b) *Elektrické náhradní schema křemenné deštičky.*

Ze všech dosavadních experimentálních faktů je patrné, že se piezoelektrická deštička chová jako oscilační kruh dané frekvence a velmi malého útlumu.

Matematicky lze skutečně ukázati, že je možno po elektrické stránce nahraditi křemennou deštičku kapacitami K_k a K_1 , samoindukcí L_k a ohmickým odporem R_k ve spojení naznačeném na obr. 23.

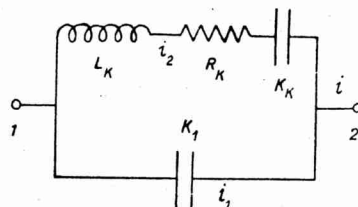
Aby na polepech kondensátoru kapacity K_1 vzniklo napětí V , je třeba dodati náboj $Q = K_1 V$. Je-li dielektrikem látka

piezoelektrická, vznikne působením napětí V na deskách kondensátoru ještě náboj Q_2 , vybavený v důsledku piezoelektrické deformace, kterou způsobilo napětí V ; tento náboj je nutno kompenzovati a tudíž celkem dodati náboj

$$Q = K_1 V + Q_2. \quad (22)$$

Působí-li na polepech střídavé napětí v , tu pro obyčejný kondensátor je dána okamžitá hodnota intensity vzorcem

$$i = K_1 \frac{dv}{dt}.$$



Obr. 23.

Je-li dielektrikem křemenná deštička, je podle (22)

$$i = K_1 \frac{dv}{dt} + \frac{dq_2}{dt} = i_1 + i_2, \quad (23)$$

kde q_2 značí okamžitou hodnotu náboje Q_2 . Z této rovnice je patrné, že můžeme nahraditi křemennou deštičku dvěma kruhy, paralelně k sobě připojenými, jeden je tvořen kondensátorem K_1 , jehož dielektrikem je křemenná deštička, druhý kruh, jímž protéká intensita i_2 , nutno blíže vyšetřiti.

Třebaže křemenná deštička kmitá velice komplikovaně, jak je patrné z obr. 5, přece (zvláště, je-li vhodně broušena, obr. 6) můžeme si její mechanické kmity formulovati jako jednoduchý harmonický pohyb způsobený periodickou, mechanickou silou f_x . Těto síle odpovídá podle Hookova zákona prodloužení ve směru osy x -ové (obráz. 2)

$$\delta_x = af_x \quad (a = \text{konst.}), \quad (24)$$

které podle (16) je úměrno napětí v

$$\delta_x = kv, \quad (25)$$

takže

$$f_x = Av, \quad A = \frac{k}{a}. \quad (26)$$

Zní tedy rovnice pro kmitavý, mechanický pohyb křemenné deštičky

$$\alpha \frac{d^2\delta_x}{dt^2} + \beta \frac{d\delta_x}{dt} + \gamma\delta_x = f_x = Av, \quad (27)$$

kde α je úměrno hmotě, β útlumu a γ elastickým silám vzbu-
ným deformací. Podle (1) a (24) je

$$q_2 = kf_x = A\delta_x, \quad (28)$$

takže

$$i_2 = A \frac{d\delta_x}{dt}.$$

Dosadíme-li do rovnice (27), jest

$$\frac{\alpha}{A^2} \frac{d^2i_2}{dt^2} + \frac{\beta}{A^2} \frac{di_2}{dt} + \frac{\gamma}{A^2} i_2 = \frac{dv}{dt}. \quad (29)$$

Uvažujme nyní, jak naznačeno na obr. 23, větev mezi body 1 a 2 se samoindukcí L_k , odporem R_k a kapacitou K_k , při čemž mezi body 1 a 2 působí napětí v ; pak

$$L_k \frac{di_2}{dt} + R_k i_2 + v_2 = v,$$

kde

$$q_2 = K_k v_2, \quad i_2 = dq_2/dt,$$

takže

$$L_k \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_k \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{K_k} = \frac{dv}{dt}. \quad (30)$$

Porovnáme-li rovnice (29) a (30), jest

$$L_k = \frac{\alpha}{A^2}, \quad R_k = \frac{\beta}{A^2}, \quad K_k = \frac{A}{\gamma^2}. \quad (31)$$

Tím je dokázáno, že lze nahraditi křemennou deštičku po elektrické stránce kondensátorem K_1 k němuž je paralelně připojen kruh skládající se ze samoindukce L_k , odporu R_k a kapacity K_k , daných vzorci (31).

Pro křemennou deštičku, broušenou tak, jak ukazuje obr. 2, a kmitající v longitudinálních kmitech, udává Cady formule

$$L_k = 130 \frac{l^3}{tt'} H$$

$$R_k = 130.000 \frac{l}{tt'} \Omega$$

$$K_k = 0.0022 \frac{tt'}{l} \mu\mu F$$

$$K_1 = 0.4 \frac{tt'}{l} \mu\mu F,$$

měříme-li l , t , t' v cm .

Pro křemennou deštičku rozměrů: $l = 5.74_5 mm$, $t = 25.0 mm$, $t' = 25.0 mm$ je podle těchto vzorců $L_k = 3.94 H$, $R_k = 11.940 \Omega$, $K_k = 0.0239 \mu\mu F$, $K_1 = 4.35 \mu\mu F$, $\omega_k = 3.18_4 \cdot 10^6 p/s$. Z toho je okamžitě patrné, že není možno skutečně provésti takovou náhradu, neboť cívka o samoindukci $L_k = 3.94 H$ by měla vlastní kapacitu mnohokrát větší, než jsou nepatrné hodnoty kapacit K_k a K_1 .

Užitečnost náhradního schematu poznáme ihned, spočítáme-li si jako příklad spojení pro absorpční metodu stanovení resonance, jak je zakresleno v obr. 20; kondensátor K_0 s křemennou deštičkou mezi body 1 a 2 si myslíme nahrazen náhradním schematem (obr. 23). Pak je

$$K_0 = \frac{R_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega K_k} + \frac{1}{j\omega K_1}}{R_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega K_k}} K_1$$

aneb, zanedbáme-li odpor R_k , je

$$K_0 = K_k \frac{1 - L_k K_1 \omega^2 + \frac{K_1}{K_k}}{1 - L_k K_k \omega^2}. \quad (32)$$

Tento výraz se rovná pro

$$\omega = 0 \quad K_0 = K_k + K_1,$$

$$\omega_k = 1/\sqrt{L_k K_k} \quad K_0 = \infty \text{ (vlastní frekvence křem. deštičky),}$$

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_k K_k}} \cdot \sqrt{\frac{K_1 + K_k}{K_1}}, \quad K_0 = 0,$$

$$\omega = \infty, \quad K_0 = K_1,$$

takže K_0 jakožto funkce ω má průběh, jak ukazuje obr. 24.

Pro vlastní frekvenci ω_k křemenné deštičky se stává K_0 nekonečně velkým, neboť jsme zanedbali odpor R_k .

Označíme-li C kapacitu, L úhrnnou samoindukci a R úhrnný odpor kruhu II, je intenzita $\mathfrak{S}_2$ dána výrazem

$$\mathfrak{S}_2 = - \frac{j\omega L_{12} \mathfrak{S}_1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega\gamma}},$$

$$\text{kde } \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{C} + \frac{1}{K_0}, \text{ takže}$$

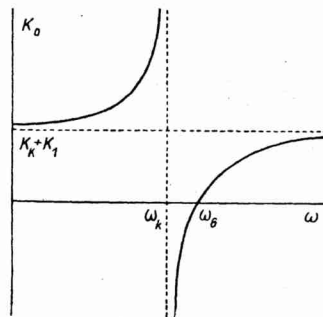
$$y = \left| \frac{\mathfrak{S}_2^2}{\mathfrak{S}_1^2} \right| = \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R^2 + \frac{1}{\omega^2} \left(L\omega^2 - \frac{1}{\gamma} \right)^2}.$$

Minimum tohoto výrazu je tam, kde jeho jmenovatel nabývá maxima, t. j. pro $\gamma = 0$, čili pro $K_0 = -C$, t. j. podle (32) pro

$$\omega_s = \omega_k \sqrt{1 + \frac{K_k}{C + K_1}} = \omega_k, \quad (33)$$

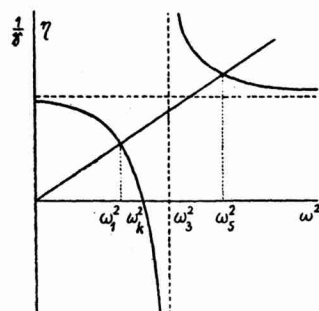
neboť $K_k/(C + K_1)$ je řádu 10^{-4} (pro uvedenou deštičku je $K_k = 2.39 \cdot 10^{-2} \mu\mu F$, $K_1 = 4.35 \mu\mu F$, kapacita C je pro frekvenci $\omega_k = 3.18 \cdot 10^6$ p/s řádově $5 \cdot 10^2 \mu\mu F$).

Maximum nastává, kde jmenovatel nabývá minima, t. j. pro $L\omega^2 = 1/\gamma$. Průběh $1/\gamma$ jakožto funkce ω^2 je vzhledem k průběhu K_0 jakožto funkce ω (obr. 24) dán obr. 25. Zaneseme-li do tohoto obrazu též přímku $\eta = L\omega^2$, protne křivku $1/\gamma$ pro ω_1 a pro ω_s , a to jsou právě hledané body, pro které $L\omega^2 = 1/\gamma$, a pro které y nabývá maxima.

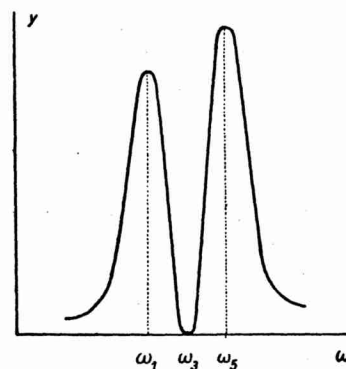


Obr. 24.

Ježto pro $\omega = 0$ je $y = 0$, pro $\omega = \infty$ je $y = L_{12}^2/L_3^2 < 1$, je průběh y jakožto funkce ω dán křivkou zanesenou v obr. 26. Je-li vazba mezi generátorem a kruhem *II* velmi volná, pak je $\mathfrak{S}_1$ konstantní a $\mathfrak{S}_2$ jakožto funkce ω má tentýž průběh jako y . Dostáváme tudíž teoreticky křivku úplně shodnou s křivkou v obr. 21 b) získanou experimentálně. Mimo to však víme, že v minimu, t. j. pro ω_3 , se liší frekvence ω od vlastní frekvence ω_k křemenné deštičky řádově o 0·01%. Známe-li tudíž přesně vlastní frekvenci křemenné deštičky, kterou zaručují dodávající firmy na 0·1% (možno ji též nechati kontrolovati v P. T. R.), známe tím i velice přesně vlnu vysilače.



Obr. 25.



Obr. 26.

c) Stabilisace frekvence vysilače.

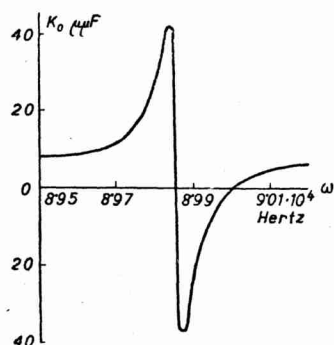
Připojme si křemennou deštičku paralelně ke kapacitě oscilačního kruhu lampového generátoru (obr. 19) a změnou kapacity měňme frekvenci generátoru od hodnot nižších k hodnotám vyšším; pak v oboru, kde vlastní frekvence křemenné deštičky je přibližně rovna vlastní frekvenci generátoru, se frekvence generátoru téměř nemění čili je účinkem křemenné deštičky stabilisována.

Zjev si můžeme vyložit následovně: představíme-li si křemennou deštičku s polepy jako malý kondensátor kapacity K_0 , mění se teoreticky tato kapacita v závislosti na frekvenci ω podle křivky v obr. 24. Ovšem tato křivka byla získána za předpokladu $R_k = 0$, takže experimentálně dostaneme křivku, jak ukazuje obr. 27. Tento zjev je způsoben dispersí dielektrické konstanty, jak Errera na Seignetteově soli dokázal. Ježto dielektrická konstanta souvisí s indexem lomu světla, jeví se nyní

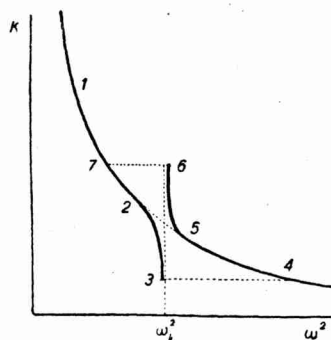
pochopitelnými zjevy pozorované v polarisovaném světle, o nichž byla zmínka v odst. 4.

Frekvence generátoru bez připojeného kondensátorku K_0 se mění přibližně podle známé formule Thomsonovy $\omega = 1/\sqrt{LK}$ čili $\omega^2 K = \text{konst.}$, t. j. podle rovnosé hyperboly.

Měníme-li nyní kapacitu K , k níž je paralelně připojen kondensátor K_0 s křemennou deštičkou, mění se frekvence generátoru v závislosti na ω podle křivky v obr. 28. Měníme-li ka-



Obr. 27.



Obr. 28.

pacitu K od hodnot velkých k malým, klesá kapacita $K + K_0$ až do bodu 2, odkud zůstává až do bodu 3 téměř konstantní, neboť úbytek kapacity K je vyrovnán přírůstkem kapacity K_0 podle obr. 27. Poněvadž tedy v tomto oboru zůstává kapacita oscilačního kruhu téměř konstantní, zůstává i frekvence generátoru konstantní. Podobně je stabilisována frekvence, jdeme-li od malých hodnot k velkým hodnotám kapacity.

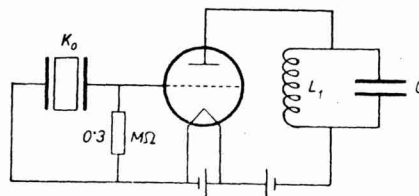
Zajímavé je při tom, jak se dá experimentálně zjistit, že se frekvence mění z bodu 3 do bodu 4 skokem a obráceně z bodu 6 do bodu 7 rovněž skokem.

Nevýhoda tohoto uspořádání spočívá v tom, že frekvence je stabilisována poměrně v malém oboru (na obr. je ovšem kreslen obor větší, aby byl obrázek zřetelnější), a že frekvence se mění v určitých bodech skokem.

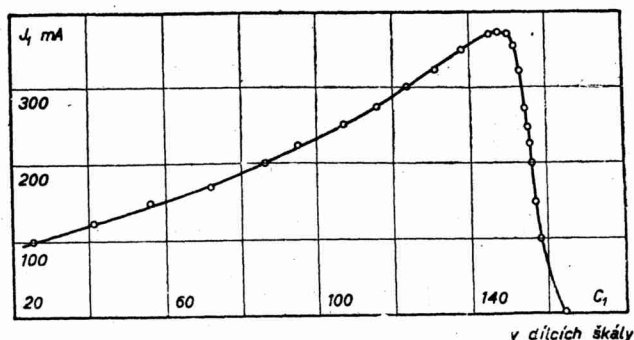
d) Křemenné deštičky jakožto oscilátory.

Z uvedených důvodů byla hledána uspořádání, v nichž křemenná deštička (křemenný oscilátor) budí lampový generátor a sice ve své vlastní frekvenci, kterou udržuje i lampový generátor dokonce s přesností circa 10^{-6} .

Takových uspořádání dnes existuje celá řada, s oblibou se však užívá uspořádání Pierceova naznačeného na obr. 29. Poněvadž si můžeme křemenný oscilátor po elektrické stránce nahradit oscilačním kruhem podle obr. 23, je z toho patrné, že toto uspořádání může fungovat jako lampový generátor ve spojení Kühn-Huthově, kde zpětnou vazbu tvoří kapacita mezi mřížkou a anodou. Kdy skutečně v tomto uspořádání oscilace vznikají mohou, na to odpovídá obecná věta: Oscilační systém obsahující „negativní odpor“²⁾ budí sám sebe tehdy, je-li úhrnný odpor pro danou frekvenci negativní. A tu jak experimentálně, tak početně se dá ukázat, že v uspořádání Pierceově existují pro daný křemenný oscilátor, t. j. pro danou frekvenci, dvě docela určité hodnoty kapacity C_1 : hodnota, pro kterou oscilace nasadí a hodnota, pro kterou oscilace (pravidelně skokem) vysadí (obr. 30, kde je znázorněn oscilační proud I_1 protékající kapacitou C_1 v závislosti na této kapacitě). Při tom frekvence vznikajících



Obr. 29.



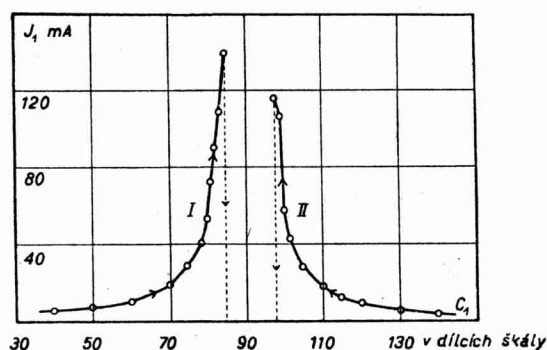
Obr. 30.

oscilací je rovna vlastní frekvenci křemenného oscilátoru s přesností menší 10^{-6} ; známe-li tedy tuto frekvenci přesně, známe přesně i vlnu generátoru. Pro tyto dvě vlastnosti — konstantní udržování vlny vysilače a zároveň přesné její číselné udání — užívá se tohoto uspořádání nejen k laboratorním účelům, nýbrž

²⁾ Ony části vedení, které protékajícímu proudu energii dodávají, se nazývají „negativní odpory“, ony části, které energii spotřebují, jsou normální (pozitivní) odpory.

i pro velké vysílací stanice, zvláště krátkovlnné, na př. v Poděbradech a nová rozhlasová stanice v Liblicích u Čes. Brodu. Ovšem je třeba energii tohoto jednolampového generátoru (který dává max. 10 watt) mnohonásobně zvýšiti.

Připojíme-li křemenný oscilátor mezi mřížku a anodu, funguje toto uspořádání také jako generátor, avšak oscilace nasazují od větších hodnot kapacity C_1 k menším, jak ukazuje obr. 31, kde křivka I je měřena pro oscilátor mezi mřížkou a katodou, křivka II pro oscilátor mezi mřížkou a anodou; obě ukazují případ, kdy oscilace vysazují skokem na rozdíl od obr. 30.



Obr. 31.

7. Závěr. Článek tento měl souborně pojednati o piezoelektrických vlastnostech křemene a jejich použití ve vysokofrekventní technice. Omezil jsem se pouze na hlavní věci a nezabíhal jsem nikde do podrobností z toho důvodu, aby se článek nestal nepřehledným. Neobsahuje tudíž partie, které by pojednávaly o piezoelektrické vzbuzené torsí, resp. ohýbáním, ani ještě o některých jiných aplikacích, jako je na př. piezoelektrický oscilograf, nebo o biologických účincích křemenných deštětek kmitajících ve vodě. Tyto partie najde laskavý čtenář v obsírnějších pojednáních: Bedeau, Le quartz piézo-électrique et ses applications dans la technique des ondes hertziennes (Mémorial des Sciences physiques, fascicule VI, 1928); Scheibe, Piezoelektrische Resonanzerscheinungen, (Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph., Bd. 28, S. 15, 1926), po případě v původních pojednáních, jejichž seznam je uveden do r. 1928 v Cady-ho: Bibliography on piezo-electricity (Proc. of the Institute of Radio Engineers, vol. 16, p. 522, 1928).

II. oddělení fyzikálního ústavu Karlovy university v Praze.

Le quartz piézo-électrique et son utilisation dans la technique des ondes hertziennes.

(L'extrait de l'article précédent.)

L'article précédent traite synthétiquement les phénomènes piézo-électriques, direct et inverse, ainsi que les vibrations mécaniques des lames de quartz et les phénomènes par lesquels ces vibrations sont accompagnées. Les vibrations mécaniques ont trouvé bien des applications (mesure de la profondeur des mers, l'oscillographe piézo-électrique) surtout dans la technique des ondes hertziennes, où l'on les emploie pour mesurer exactement les longueurs d'ondes, pour stabiliser la fréquence et pour obtenir d'oscillations entretenues de haute fréquence.
