Příspěvek ke konstrukci obecné rovinné kubiky.

Napsal Dr. *Aug. Vondráček.*

(Došlo 9. června 1931.)

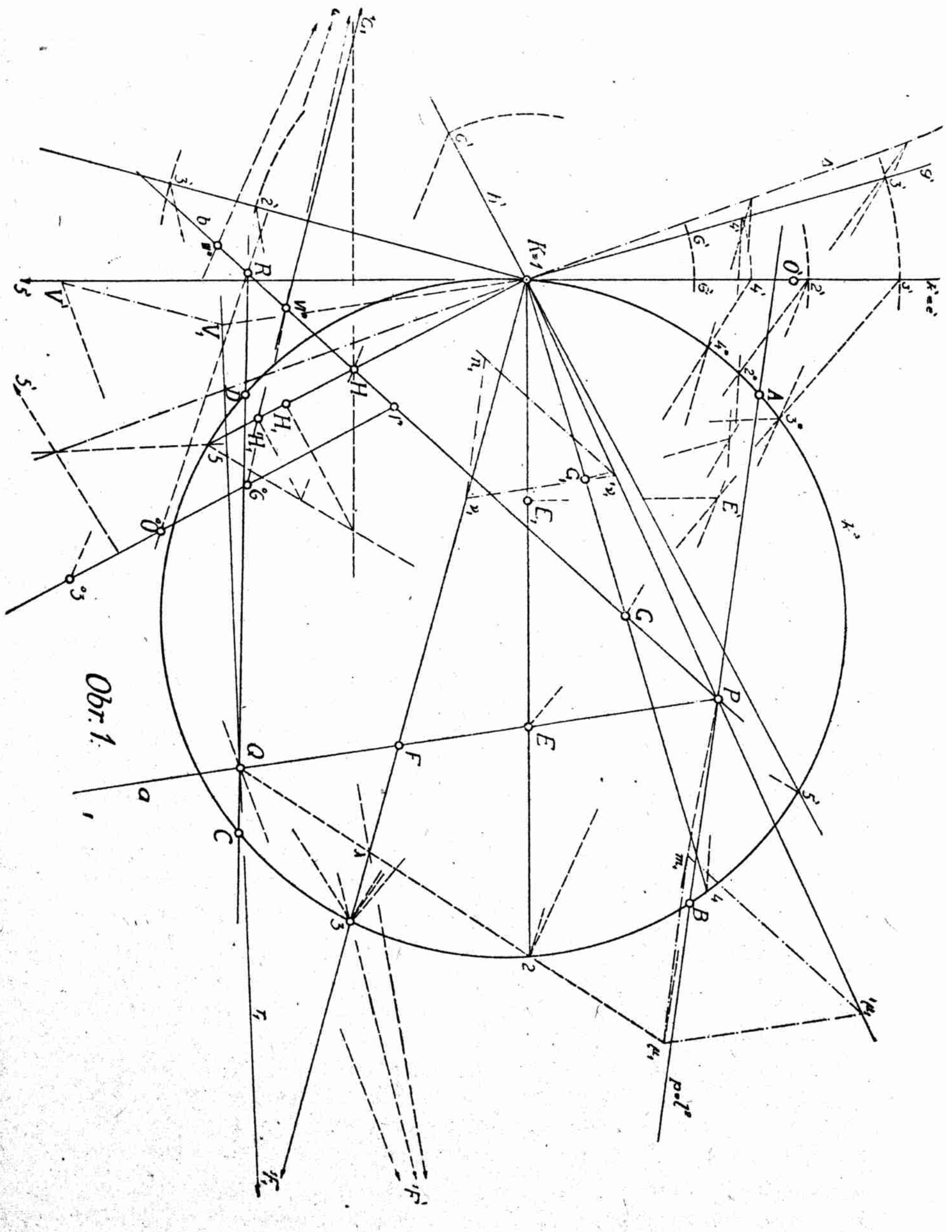
Úloha: sestrojiti obecnou (neracionálnou) křivku rovinnou k^3 3. st. z devíti daných bodů $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ řeší se zpravidla převedením na určení této křivky svazkem paprskovým a projektivním s ním svazkem kuželoseček; k čtyřem z daných bodů jako základním svazku kuželoseček vyhledá se (užitím konstrukce projektivní geometrie k daným pěti paprskům svazku a pěti bodům roviny vyhledati bod, z něhož se oněch 5 bodů promítá svazkem s danými 5 paprsky projektivním) příslušný bod protilehlý jako střed svazku paprskového.

V následujícím chci naznačiti jiný konstruktivní postup, opírající se o jednoduchý vztah: prostorová bikvadratika 1. druhu promítá se z libovolného svého bodu na rovinu oním bodem neprocházející do rovinné obecné křivky k^3. Jsme tedy před úlohou stanoviti dvě plochy 2. st., jejichž pronikovà křivka by se promítala z jednoho svého bodu O do kubiky, procházející danými body $A, B, \ldots, K$.

1. Čtyři z daných bodů A, B, C, D buďte v nákresně (půd. π). Z kuželoseček svazku jimi určeného vezměme dvě: kuželosečku k^2 jdoucí bodem K (obr. *1*, kde k^2 je kružnicí) a kuželosečku l^2, procházející průsečíkem P spojnic $\overline{EF} \equiv a$, $\overline{GH} \equiv b$ zbývajících čtyř bodů (v obr. *1* bez újmy obecnosti voleno tak, že l^2 je kuželosečka složená z $\overline{AB}$, $\overline{CD}$). Přímky a, b protnou l^2 ještě v bodech Q, R. Bod K buď ortog. průmětem přímky $k \perp \pi$.

Jednu z ploch 2. st., K^2, jdoucí kuželosečkou k^2 a přímkou k, určíme napřed pevně, druhou L^2 kuželosečkou l^2 akomodujeme tak, aby žádanému projekčnímu vztahu mezi pronikovou křivkou obou ploch $k^4 \equiv (K^2, L^2)$ a konstruovanou kubikou k^3 bylo vyhověno.

Považujme body E, F, G, H za centrálné průměty z (neznámého zatím) bodu O na k. Každým z oněch 4 bodů (v prostoru) nechť prochází jedna površka plochy K^2, opačné soustavy než



Obr. 1.

površka k; ortogonální průměty těchto površek jsou KE, KF, KG, KH, stopníky $2, 3, 4, 5$ na k^2. Na površce $k \perp \pi$ zvolme body $2'$, $3'$, v nichž nechť ony površky body E, F (v prostoru) protínají k.

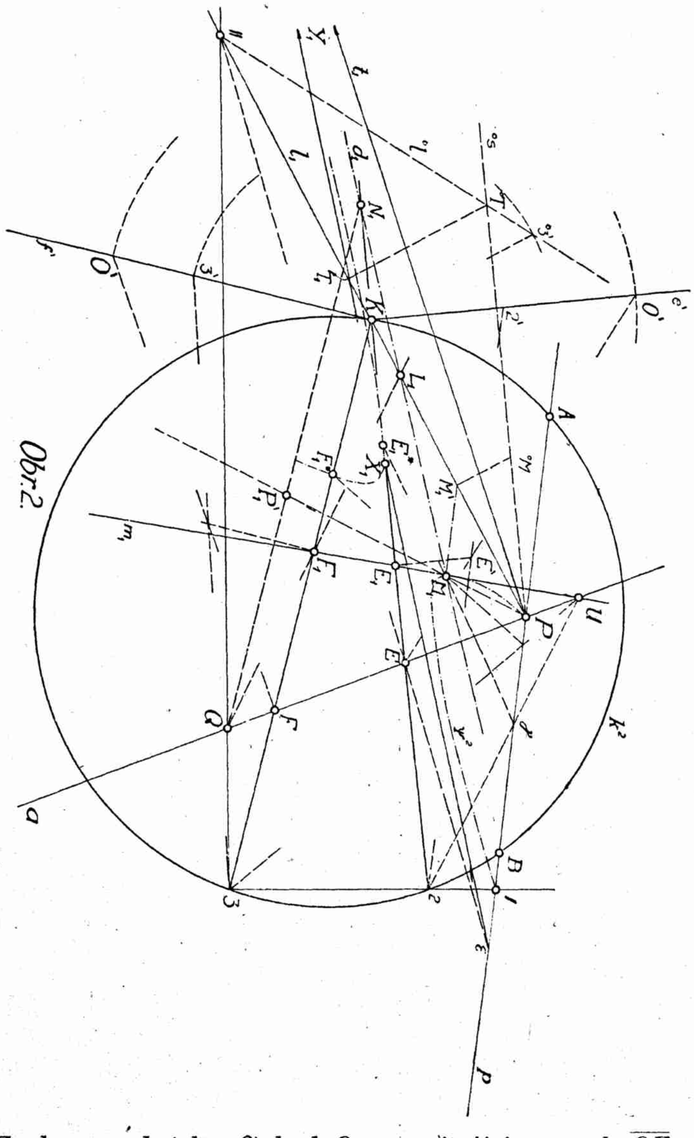
Plocha K^2 (sborcená) je určena: kuželosečkou k^2, přímkou k a projektivním přiřazením bodů na k s příslušnými tečnými rovinami, kolmými k π, tedy bodu $2'$ na k přísluší stopa tečné roviny $\overline{KE2}$ a tedy i stopník 2 na k^2, bodu $3'$ bod 3, bod $K \equiv 1 \equiv 1'$ je samodružný, poněvadž tečná rovina v něm je určena površkou k a tečnou ke k^2. Sklopením k do nákresny dostaneme $k'(1', 2', 3', \dots)$ $\pi\, k^2(1, 2, 3, \dots)$, při čemž $1' \equiv 1$. Promítnutím bodů $2'$, $3'$ na př. z bodu 3 na k^2 do bodů 2^*, 3^* $(1^* \equiv 1)$ přenesena ona promětnost na kuželosečku k^2, sestrojena direkční osa $\Delta \equiv ((1, \overline{23^*}, \overline{2^*3}))$. Na to stanoveny na k body $4'$, $5'$, odpovídající stopníkům 4, 5 površek, jdoucích body G, H (v prostoru).

Budeme-li měniti střed centrální projekce O na k, budou se body, jejichž centrálné průměty jsou stále dané body E, F, G, H, pohybovati po čtyřech přímkách $\overline{22'}$, $\overline{33'}$, $\overline{44'}$, $\overline{55'}$. Pro bod $O \equiv K$ (stopník površky k) přejdou ony body v stopníky $2, 3, 4, 5$.

2. Hledejme plochu L^2. Libovolným bodem O na k a přímkou $a \equiv \overline{EF}$ je stanovena rovina, jež protne površky $\overline{22'}$, $\overline{33'}$ v bodech E, F (jejichž centrálné průměty jsou stejně označeny). Potom pěti body: P, Q, O, E, F je stanovena kuželosečka h^2, protínající kuželosečku l^2 v bodech P, Q. Její tečna t v bodě P stanoví s p rovinu τ. Rovina (O, b) protne površky $\overline{44'}$, $\overline{55'}$ v bodech G, H, rovinu τ v přímce t'; i je body O, G, H, P a tečnou t' v P určena nová kuželosečka h'^2, jež protne b ještě v bodě S, obecně různém od R. Kuželosečkami $l'^2 \equiv \overline{SQ}, \overline{AB}, h^2, h'^2$ je určena jistá plocha L'^2, která se proniká s pevnou plochou K^2 v křivce 4. st., jejíž centrálný průmět z O na nákresnu je jistá kubika, procházející sedmi z daných bodů A, B, E, F, G, H, K, neprocházející ale body C, D, nýbrž body C', D', v nichž spojnice $\overline{QS}$ by protínala kuželosečku k^2.*) I je třeba hledat takovou plochu L^2 a tedy takový bod O na k, aby kuželosečka h'^2 procházela bodem R.

Z udaného postupu je patrno, že každému bodu O na k přísluší jeden bod S na stopě b, t. j. obě řady bodové jsou jednoduše projektivní. Ukážeme ještě, že oněm řadám přísluší projektivně i svazek tečných rovin τ o ose $p \equiv \overline{AB}$, t. j. $k(O, \dots)$ $\pi\, b(S, \dots)$ $\pi\, p(\tau, \dots)$.

*) Kdyby obecněji kuželosečka l^2 svazku $(ABCD)$ bodem $P \equiv (a, b)$ nebyla složenou, možno vzíti za stopy ploch L'^2 kuželosečky svazku určeného bodem P, tečnou p ke kuž. l^2 v něm, bodem Q a na př. bodem A. Každá kuželosečka l'^2 tohoto svazku bodem S protne kuželosečku k^2 mimo A v třech proměnlivých bodech B', C', D' bodové involuce kubické, na níž by se rozšířila involuce kvadratická bodů C', D' o středu Q v našem speciálnějším případě. Pro $S \equiv R$ ovšem $l'^2 \equiv l^2$.



Zvolme na k (obr. 2) bod O; promítající paprsek $\overline{OE}$ protne površku $\overline{22'}$ v bodě $\underline{E}$ (v prost.), jehož ortogonální průmět E_1 sestrojíme sklopením promítající roviny ($O\ 22'$) do π; sklopená površka $k \perp \overline{K2}$ označena (k vyjádření pořadí pro body E, F, G, H) e', $\overline{2'2}$, $\overline{O'E}$ se protnou v bodě E', načež $\overline{E'E_1} \perp \overline{K2}$ dá E_1. Podobně sklopením promítající roviny $(O\ \overline{33'})$ $(f' \perp \overline{K3})$ sestrojen ortog. průmět F_1 centrálního průmětu bodu F. Bod O se ortog. promítá do bodu K, takže ortog. průmět kuželosečky h^2 v rovině (O, a) je určen body P, Q, K, E_1, F_1. Přímka $\overline{E_1F_1} \equiv m_1$ je ort. průmětem přímky m, protínající površky $\overline{22'}$, $\overline{33'}$ plochy K^2 a mající stopník $U \equiv (m_1, a)$. Je tedy m površkou hyperboloidu H^2, určeného přímkami $\overline{22'}$, $\overline{33'}$, a. Zvolme na m bod M, jímž a přímkou p, jakožto stopou tečných rovin ploch L'^2, je určena rovina τ, protínající se s rovinou (O, a) v přímce $\overline{PM}$, jež protne kuželosečku h^2 ještě v bodě P', který sestrojíme užitím přímky Pascalovy, označivše $P \equiv 1$, $Q \equiv 3$, $F \equiv 4$, $E \equiv 5$, $O \equiv 6$, $P' \equiv 2$. I je bod $M \equiv (\overline{12}, \overline{45})$, $L \equiv (\overline{34}, \overline{61})$, $N \equiv (\overline{23}, \overline{56})$, $\overline{LMN} \equiv d$ přímkou Pascalovou; spojnice $\overline{NQ}$ protne $\overline{PM}$ v bodě $P' \equiv 2$. Hledejme nyní takovou polohu roviny svazku a, pro kterou bod $P' \equiv P$, t. j. kuželosečka h^2 se bude roviny τ v bodě P dotýkati. Tu měnící se bod M přímky d bude probíhati kuželosečku ψ^2 v obr. 2 naznačenou, jakožto řez hyperboloidu H^2 s rovinou τ, bod L popíše přímku l v rovině $(Q, \overline{33'})$ o stopníku $II \equiv (\overline{Q3}, \overline{KP})$ a jdoucí bodem $3'$. Kuželosečka ψ^2 jde body P, M, bodem I, v němž površka $\overline{23}$ v π protíná p, body E^*, F^*, průsečíky površek $\overline{22'}$, $\overline{33'}$ s τ. Bod E^* se snadno sestrojí: rovina $(m, \overline{22'})$ jako tečná rovina plochy H^2 má stopu $\overline{U2}$, protínající p v bodě γ, $\overline{\gamma M}$ dá na $\overline{22'}$ bod E^*; podobně sestrojen bod F^*.

Přímka d vyplní tudíž površky sborcené plochy 3. stupně s určujícími přímkami a, l a kuželosečkou ψ^2, s a jako površkou dvojnou, protínající ψ^2 v P. Bod N přímky d popíše při tom v promítající rovině površky $\overline{22'}$ křivku 3. st. s dvojným bodem E v nákresně na a. Dvě površky oné pl. 3. st., procházející bodem E, stanoví v něm s a tečné roviny této plochy; stopy těchto rovin na rovině τ (t. j. průměty nekonečně blízkých bodů k bodu E, jako P' byl průmětem bodu N z Q) dají dvě přímky $\overline{XP}$, $\overline{YP}$, pro něž $P' \equiv P$.

Abychom ony dvě površky sestrojili, stanovme průsečnici $\overline{T\varepsilon}$ roviny (E, l) s rovinou τ. Stopou roviny (E, l) je přímka $\overline{EII}$, protínající p v bodě ε, průsečík T přímky l s τ určíme sklopením promítající roviny přímky l $({}^0 3'K \perp \overline{KP}$, $\overline{{}^0 3'K} = \overline{K3'}$, $\overline{{}^0 3'II} \equiv {}^0 l)$, jež protne rovinu τ v přímce s, jež současně s l sklopena (stanovena kota bodu M na m, $\overline{MM'} \parallel p$ protne s v bodě M', $\overline{M'_1{}^0M'} \perp \overline{KP}$, $M'_1{}^0M' =$ kota bodu M, načež $\overline{P^0M'} \equiv {}^0 s$). Průsečík ${}^0T \equiv ({}^0 l, {}^0 s)$ má ortog. průmět T^1, $\overline{T\varepsilon}$ je hledanou průsečnicí, jež protne kuželosečku ψ^2 v bodech X, Y. Jedním z těchto průsečíků je ale bod

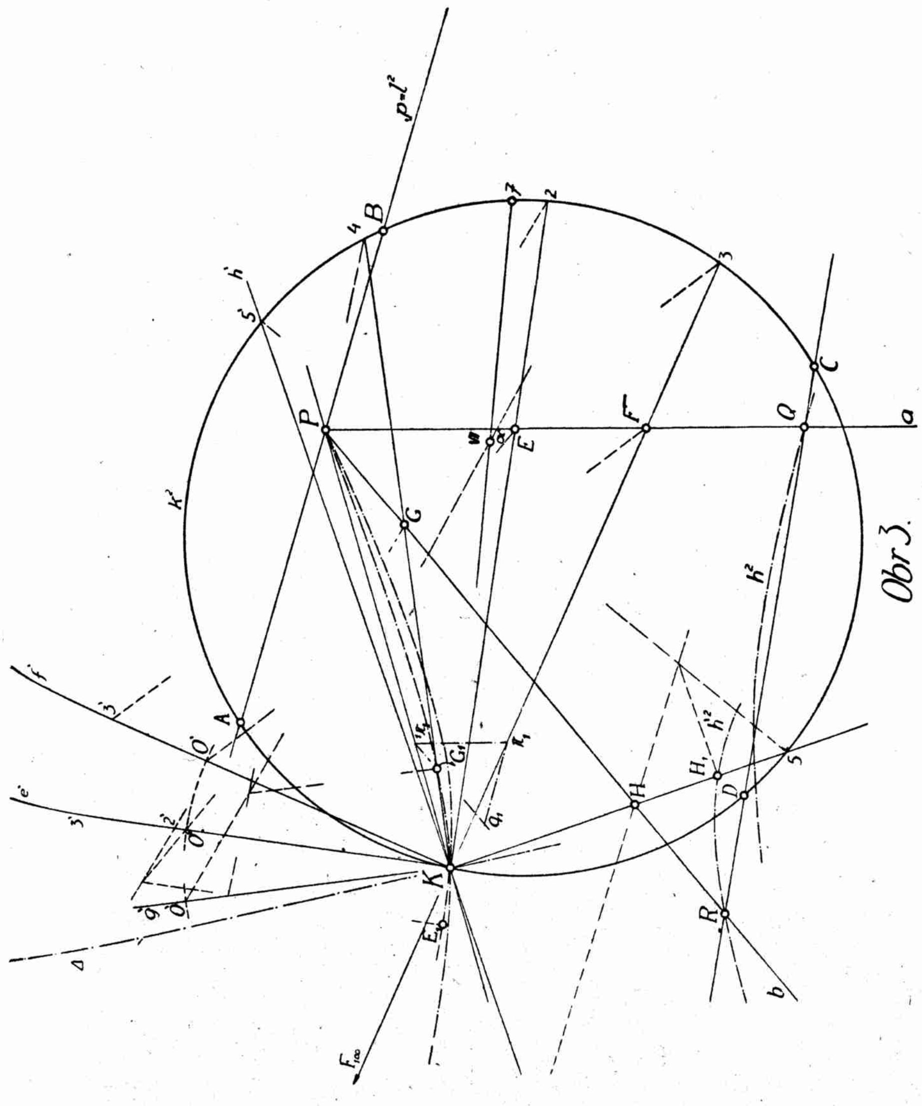
$X = (x, \overline{T\varepsilon})$, jakožto průsečík površky $x \equiv \overline{XE}$ soustavy površky m hyperboloidu H^2, v promítající rovině $(k, 2)$; je tedy x površkou plošе H^2 a ploše 3. st. společnou. Křivka 3. st., jakožto geometrické místo bodu N, se tudíž rozpadá na přímku x a jistou kuželosečku. Druhý, lineární konstrukcí určený bod Y, vede tudíž k površce v bodě E od x různé, načež spojnice $\overline{YP} \equiv t$ je v rovině τ hledanou přímkou podstatnou, rovina (t, a) je jedinou rovinou svazku a, v níž výše uvedeným způsobem určená kuželosečka h^2 se dané roviny τ dotýká. Tím dokázána výše uvedená promětnost svazku tečných rovin τ s řadami na k, b.

K určení promětnosti $k(O, \ldots)\ \pi\ b(S, \ldots)$ stačí přiřazení tří párů bodových. Za body O na k zvoleny (obr. *1*): bod $3'$, bod $6'$ a $1 \equiv K$.

Pro bod $O \equiv 3'$ dostaneme v rovině $(3', a)$ kuželosečku, jejíž ortog. průmět jde body P, Q, E_1, K s tečnou $\overline{K3}$ v tomto bodě. Tečna v bodě P nechť protne $\overline{K3}$ v bodě ν. Příslušná kuželosečka v rovině $(3', b)$ má za ortog. průmět kuželosečku body P, G_1, H_1 (konstrukce bodů G_1, H_1 patrna z obr., užito přímek $g' \perp \overline{K4}$, $h' \perp \overline{K5}$), bodem K a dotýkající se v bodě P přímky $\overline{Pn}$, průsečnice tečné roviny (p, ν) s rovinou $(3', b)$, kterou snadno sestrojíme: $\overline{\nu^1\nu} \parallel a$ jako hlavní přímka roviny (O, a) protne $\overline{3'P}$ (průsečnici rovin $(3', a)$, $(3', b)$) v bodě ${}^1\nu$, jímž sestrojená hlavní přímka $\overline{{}^1\nu n} \parallel b$ roviny $(3', b)$ protne hl. přímku $\overline{\nu n}$ roviny tečné (p, ν), v bodě n, $\overline{Pn}$ je tečnou hledanou. Tím úplně určena kuželosečka roviny $(3', b)$, jež protne b v bodě III^*.

Za druhý bod zvolen $K \equiv 1$ v nákresně. Příslušná plocha L'^2 přechází tu v útvar rovinný. Prvá kuželosečka je určena body $P, Q, K, 2, 3$, tečna k ní v bodě P je $\overline{P\mu}$. Kuželosečka druhá jde body $P, K, 4, 5$ a dotýká se v P přímky $\overline{Pm}$, kterou sestrojíme analogicky přímce $\overline{Pn}$ v případě předchozím: $\overline{\mu^1\mu} \parallel a$ protne $\overline{KP}$ v bodě ${}^1\mu$, $\overline{{}^1\mu m} \parallel b$, $\overline{\mu m} \parallel p$ se protnou v bodě m, $\overline{Pm}$ je tečnou v P druhé kuželosečky, jež protne b v bodě I^*.

Za třetí bod O na k zvolen bod $6'$, pro který se kuželosečka roviny $(6', a)$ [a tedy i roviny $(6', b)$] rozpadá na dvě přímky. Stačí sestrojiti bodem Q příčku površek $\overline{2'2}$, $\overline{3'3}$: rovina $(2'2Q)$ o stopě $\overline{2Q}$ protne promítající rovinu površky $\overline{3'3}$ v přímce $\overline{2'\lambda}$ ($\lambda \equiv \equiv \overline{2Q}, \overline{K3}$), jež protne $\overline{3'3}$ v bodě ${}^1F$, jehož konstrukce sklopením z obr. *1* je patrna; $\overline{{}^1FQ}$ je příčkou hledanou r. Rovina (a, r) protne k v bodě $6'$, jehož kota $\overline{V_1V'}$ určena hlavní přímkou $\overline{KV} \parallel a$, $\overline{V_1V'} \parallel \parallel \overline{{}^1F'{}^1F_1}$ protne $\overline{Q^1F'}$ v bodě V'. Je tedy prvá kuželosečka složenou


Obr 3.

z přímek r, $\overline{6'P}$. Přímka $\overline{{}^1G^1H}$, spojnice průmětů bodů G, H z bodu $6'$, protne b v bodě VI^*.

Tím jsou si na k, b přiřazeny: $3'$, $1'$, $6'$; III^*, I^*, VI^*. Převedeme-li obě řady v polohu perspektivní tím, že na př. ztotožníme $I^* \equiv 1' \equiv {}^0 1$, jímž sestrojíme v nákresně libovolnou přímku a naneseme na ni úsečky $\overline{I^{*0}3}$, $\overline{I^{*0}6}$, rovné kotám bodů $3'$, $6'$, je bod