Příspěvek k teorii racionálních křivek pátého stupně.

Podává *L. Seifert* v Brně.

(Došlo 21. září 1931.)

Z nejzajímavějších vlastností racionální křivky pátého stupně o šesti dvojných bodech je existence kuželoseček, které se křivky dotýkají v pěti bodech. Tyto našel Rohn, užívaje involuční rovinné transformace, která, je-li dáno v rovině sedm bodů, přiřazuje k dalšímu osmému bod devátý, jenž s ostatními tvoří basis svazku křivek třetího stupně.[1]) Zmíněná transformace je obrazem jednoduché involuční příbuznosti na obecné ploše třetího stupně, užijeme-li obvyklého Grassmannova zobrazení plochy na rovinu.[2]) I jest na snadě otázka, zda jest možno ony kuželosečky v rovině najíti přímo z příslušného útvaru na ploše. Tuto otázku chceme zodpověděti. Souvislost útvarů na ploše a v rovině je zajímavá, třebaže vztahy v prostoru se nezdají jednodušší nežli v rovině, mimo to snadno poznáváme změnu útvaru, přejde-li jeden nebo více bodů dvojných v body vratu.

1. Na obecné ploše třetího stupně S buď základní dvojšestnina

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}$$

a další přímky c_{ik}. Přímky prvé šestniny ať se zobrazí do roviny π jako body $A_1, A_2, \ldots, A_6$, přímky druhé jako kuželosečky $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_6$, takže na př. B_1 jde všemi hlavními body A_i mimo A_1. Přímka roviny π jest obrazem prostorové křivky třetího stupně, jež neprotíná přímky a_i, má však všechny b_i za bisekanty, c_{ik} za unisekanty. Znamenejme tyto křivky C. Přidružený systém prostorových křivek třetího stupně znamenejme K, takže vždy jedna C

[1]) Rohn, Eine einfache lineare Construction der ebenen rationalen Curven 5. Ordnung, Math. Annalen, sv. 25, 1885.

[2]) Viz Sturm, Die Lehre von den geom. Verwandtschaften, sv. IV, str. 98.

a jedna K tvoří úplný průsek plochy S s plochou druhého stupně. K se zobrazují jako křivky pátého stupně se šesti dvojnými body A_i. Poněvadž obráceně, zvolíme-li v rovině libovolných šest bodů, lze ji považovati za obraz plochy třetího stupně,[3]) můžeme vztahů na ploše S použíti k odvození vlastností obecné racionální křivky pátého stupně.

Buď K jedna z křivek druhého systému, K' její obraz. Její plocha tečen je čtvrtého stupně a seče S ještě v křivce V stupně $3 . 4 - 2 . 3 = 6$. Křivka V neseče žádnou a_i, seče však každou b_i ve čtyřech bodech, c_{ik} ve dvou bodech. Obrazem jejím jest tedy kuželosečka V', která nejde žádným hlavním bodem A_i.

Buď t tečna křivky K v bodě P, T její další průsečík s S. Tečna u křivky V v bodě T je průsečnice oskulační roviny křivky K v bodě P a tečné roviny plochy S v bodě T. Blíží-li se T bodu P, stane se t hlavní tečnou plochy S a u splyne s t. Ve společném bodě mají tedy křivky V a K dotyk. V obraze V' se dotýká pětkrát K'. Jest to význačná kuželosečka uvedená u Rohna.

Buď opět P bod na K, t jeho tečna, T její další průsečík s S. Kužel P (K), který z P promítá K, seče S v křivce C prvého systému, jež se v T dotýká křivky V. Roviny přímkou t sekou S v křivkách, jež se v P dotýkají K, tedy v obraze T' je společný bod svazku křivek třetího stupně, jež jdou body A_i a v P se dotýkají K'. Buď dále X bod na K, Y třetí průsečík PX s S. C je určeno body P, Y a zobrazí se jako přímka C' určená bodem křivky P' a bodem Y', devátým spol. bodem svazku křivek třetího stupně určeného body A_i, P', X'. Z toho vyplývá lineární konstrukce jednotlivých bodů křivky K' ze šesti dvojných (A_i) a dvou obyčejných bodů (P', X') křivky a konstrukce kuželosečky V' jako obálky přímek $X'Y'$ uvedená u Rohna: *K daným bodům A_i, P', X' sestrojme devátý přidružený Y', spojme P' s Y' přímkou C'; je-li Z' některý bod této přímky, sestrojme devátý přidružený bodům A_i, P', Z'. Volíme-li na křivce libovolný bod P a sestrojíme k libovolnému bodu křivky X' bod Y', jenž s A_i, P, X' tvoří basis svazku křivek třetího stupně, pak přímky $X'Y'$ obalují kuželosečku V'.*

Připomeňme ještě, že oskulační rovina σ bodu P na K seče S v křivce, jež v P má s K dotyk druhého stupně a v T s V dotyk obyčejný. *Jeví se tedy V' jako obálka křivek třetího stupně, jež jdou body A_i a mají v jednotlivých bodech s K' dotyk druhého stupně.*

2. Uvažujme nyní jednu z patnácti přímek c_{ik}, na př. c_{12}. Bisekanty křivky K, které sekou c_{12}, vyplňují jeden přímkový systém plochy druhého stupně P_{12}, jemuž patří i a_1, a_2. Ať p je jedna z těchto bisekant, A, B její průsečíky s K. Body A, B jde jedna křivka systému C. Uvažujme, jaká je obálka těchto křivek C.

---

[3]) Sturm, Geom. Verwandtschaften, IV, p. 272.

Buď P bod na S. Jím jde ∞^1 křivek C a je známo, že bisekanty bodem Q na S ke všem křivkám tohoto svazku vedené vyplňují rovinu ϱ^Q, která bodem P prochází.[4]) Roviny ϱ^Q přiřazené takto bodům Q na c_{12} tvoří svazek, neboť, je-li C jedna z křivek, její bisekanty sekoucí c_{12} tvoří systém plochy druhého stupně a osa q řečeného svazku je přímka druhého systému, kterému patří i c_{12}. q jde bodem P a v každé rovině svazku (q) jest svazek paprsků (Q) tvořený bisekantami křivek C. Přímkou q jdou dvě tečné roviny ku ploše P_{12} a v každé je bisekanta křivky K, jež je zároveň bisekantou jedné C. Bodem P jdou tedy dvě křivky C, které sekou K ve dvou bodech, a spojnice jejich seče c_{12}. Roviny splývají, dotýká-li se q plochy P_{12}. Avšak mezi bisekantami křivky C jsou i b_1, b_2, jež zároveň sekou c_{12}, q tedy seče b_1, b_2. Hledáme tedy přímky sekoucí b_1, b_2 a dotýkající se plochy P_{12}. Třetí průsečík takové přímky s S je charakteristický bod pro obálku křivek C, jeho geometrickému místu odpovídá v zobrazení kuželosečka, již obalují přímky, obrazy uvažovaných křivek C.

Plocha přímek q' je čtvrtého stupně; značme ji G_{ik}. Jak patrno, jsou na ní dvojné přímky b_1, b_2, c_{12}. Její další průsek L_{12} s S je stupně $4 . 3 - 2 . 3 = 6$. Snadno poznáváme, že každá b_i má s L_{ik} čtyři společné body, a_i žádný, c_{ik} dva. Obraz L'_{ik} je tedy kuželosečka, která neprochází žádným dvojným bodem.

Nechť M je společný bod křivek K, L_{12}. Tečná rovina plochy P_{12} v M je současně tečnou rovinou plochy G_{12}, tečna křivky L_{12} v M je průsečnice této roviny s tečnou rovinou plochy S, a to jest právě tečna křivky K. L_{12} má tedy s K dotyk v pěti bodech a rovněž tak L'_{12} s K'. Tím jest nalezeno dalších 15 kuželoseček pětkrát se dotýkajících křivky K', jež odpovídají přímkám c_{ik} na ploše.

Buď p bisekanta křivky K sekoucí c_{12}. Rovina (p, c_{12}) seče S v kuželosečce, která se zobrazuje jako kuželosečka jdoucí čtyřmi hlavními body mimo A_1, A_2. Máme tedy větu u Rohna uvedenou: *Svazek kuželoseček určený čtyřmi dvojnými body A_i vytíná na K' involuci a spojnice přidružených bodů obalují kuželosečku pětkrát se dotýkající.*

Lze však nalézti ještě další podrobnost. Připomeňme si větu Schurovu, která praví, že dvojšestnina sestává z reciprokých polár jisté plochy druhého stupně H. Reciproké poláry jsou a_1, b_1, pak a_2, b_2 atd.

Přímce c_{12}, jež seče a_1, a_2, b_1, b_2, patří jako reciproká polára přímka d, jež spojuje body (a_1, b_2), (a_2, b_1). Jsou-li X, Y dva body na S, prochází jimi křivky K, C, jedna každého systému. Mají

[4]) Viz Reye, Beziehungen der allg. Fläche dritter Ord. zu einer covarianten Fläche dritter Classe, Math. Annalen, sv. 55, str. 257.

ještě další tři společné body Z, T, U. Je-li M třetí průsečík XY s S, jest rovina (ZTU) polární rovinou bodu M ku ploše H.[5])

Bodem M na c_{12} jde vždy bisekanta ke K, jež K seče v X, Y. Křivka C jimi určená seče K v dalších bodech Z, T, U a rovina (ZTU) se otáčí kolem d. V obraze X', Y', Z', T', U' jsou na přímce C' a body Z', T', U' jsou vyťaty svazkem křivek třetího stupně. Základní body svazku jsou A_i a tři další body odpovídající bodům na d. Jest však známo, že řada bodů na a_i jest projektivní se svazkem přímkových elementů A_i, bodu $(a_i b_k)$ odpovídá tedy tečna v A_i k B_k, bodu $(a_k b_i)$ tečna v A_k k B_i. Rovinné průseky přímkou d zobrazí se jako křivky, které jdou hlavními body a mají v A_1, A_2 dotyk s B_2, resp. B_1. Máme tedy zajímavou novou větu: *Svazek křivek třetího stupně, které jdou dvojnými body křivky K' a ve dvou z nich se dotýkají kuželoseček určených ostatními pěti, sekou K' ve třech bodech na přímce a tyto přímky obalují kuželosečku pětkrát se dotýkající.*

Sledujme ještě jednou bod M pohybující se po c_{12}. Když M přejde do (a_1, c_{12}), polární rovina jeho jest (b_1, d), t. j. spojuje b_1 s bodem $(a_1 b_2)$, příslušné C se rozpadá v a_1 a kuželosečku v rovině určené přímkou b_1 a bodem $(a_1 b_2)$. Jejím obrazem je přímka jdoucí bodem A_1, která se kuželosečky B_2 dotýká v A_1, neboť tečný element v A_1 je obrazem bodu $(a_1 b_2)$. Zkrátka tečna v bodě A_1 k B_2 je tečnou kuželosečky L'_{12}. Podobně i tečna v A_2 k B_1.

3. Na S jest ∞^2 křivek K, mezi nimi ∞^1 se dotýká přímky a_1. Mezi ∞^2 křivkami K' jest ∞^1 křivek s bodem vratu A_1. Bodem M' v rovině jdou dvě takové. Skutečně, buď C jedna křivka druhého systému, jež bodem M neprochází, m bisekanta její jdoucí tímto bodem. Ve svazku (m, C) jsou dvě plochy, které se dotýkají přímky a_1 a vytínají tedy z S křivky K_1, K_2, jež se dotýkají a_1 a zobrazují se jako křivky s body vratu v A_1. Z toho lze nalézti i jednoduchou konstrukci těchto tečen. Svazek ploch (m, C) vytíná z a_1 involuci bodovou a dvojné body jsou dotyčné body křivek K_1, K_2. V obraze dvojiny tečen křivek K' v bodě A_1 tvoří involuci a hledané tečny jsou její dvojné elementy. K určení této involuce možno použíti degenerovaných křivek K'; na př. jedna plocha (m, C) seče S v b_l a kuželosečce, jejíž rovina jde přímkou a_l, K' skládá se tedy z kuželosečky B_l a křivky třetího st. s dvojným A_l atd.

Jsou čtyři křivky K' se dvěma body vratu A_1, A_2, neboť na ploše jsou čtyři křivky K, jež se dotýkají přímek a_1, a_2. To poznáme nejsnáze, volíme-li zobrazení plochy, kde b_r se zobrazí

---

[5]) Schur, Math. Annalen, sv. 18, str. 12, a také Reye, pojednání citované v poznámce [4]).

jako body, a_i jako kuželosečky, křivky systému K jako přímky. Obrazy křivek K jsou pak společné tečny dvou kuželoseček.[6])

Z toho jest také patrno, že dáno-li šest bodů v rovině, nelze obecně sestrojiti křivku pátého stupně se třemi body vratu a dalšími třemi dvojnými v daných bodech, neboť obecně se nedotýkají tři kuželosečky téže přímky.

Abychom našli takovou konfiguraci šesti bodů, pro niž by taková křivka existovala, užijme opět jiného zobrazení plochy S. Uvažme dvojšestninu

$$\begin{matrix} 1 & 1' & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 2 & 2' & 13 & 14 & 15 & 16 \end{matrix}$$

1, 2 je psáno za dřívější a_1, a_2, *1'*, *2'* za b_1, b_2, *23* za c_{23} atd. Pak v π se zobrazují kubické křivky jednoho systému jako křivky třetího stupně s dvojným A_1, křivky druhého stupně jako kubické křivky s dvojným A_2 a společnými jednoduchými A_3, A_4, A_5, A_6.[7])

Je-li tedy k křivka třetího stupně s dvojným bodem *1*, volme v rovině libovolně bod *2* a veďme jím tečny ke k. Další průsečíky tří těchto tečen s k označme *3, 4, 5* a volme na k libovolně bod *6*. Volíme-li těchto šest bodů za základní body zobrazení, jest k obrazem prostorové kubické křivky, jež se dotýká přímek *23, 24, 25* a ve dvou různých bodech seče *1, 1', 26*. Konfiguraci, při které přímky první šestniny se zobrazí jako body, dostaneme dvojnásobnou kvadratickou transformací, volíme-li na př. po prvé základní trojúhelník *234* a po druhé trojúhelník tvořený v novém obrazci přímkami, ve které přešla kuželosečka *1'* a přímky *25, 26*.

Volíme-li ještě *6* na čtvrté tečně z bodu *2*, dostaneme v k obraz kubiky, která se dotýká přímek *23, 24, 25, 26*.

4. Zodpovíme ještě otázku, jaké zvláštnosti má kuželosečka V' v případech, kdy křivka má jeden až čtyři body vratu. Když se K dotkne přímky a_1 v bodě M, plocha tečen seče S v a_1 a křivce pátého stupně, jež a_1 seče v bodě N mimo M. V rovině ϱ přímkou a_1 dostáváme kuželosečku a křivku třetího stupně s bodem obratu v M. Mimo a_1 mají obě křivky společný průsečík s K, jenž je bodem vratu druhé z nich, a tedy ještě $2 . 3 - 2 = 4$ body. Otáčíme-li

---

[6]) Myslíme-li si plochu S zobrazenou na dvě roviny různými způsoby (základní body jsou obrazy různých šestnin přímkových), jest tím dán biracionální vztah obou rovin (Cremonova transformace). Tato se vždy dostane jako sled kvadratických transformací, při kterých trojúhelník ze tří základních bodů volíme za základní trojúhelník transformace. Kvadratickou rozumíme transformaci, již lze psáti při samozřejmém označení

$$x'_1 = \frac{1}{x_1}, \quad x'_2 = \frac{1}{x_2}, \quad x'_3 = \frac{1}{x_3}.$$

[7]) Diekmann, Über Modificationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche 3ter Ord. durch Auftreten von Singularitäten erhält, Mathem. Annalen, sv. 4, str. 442.

rovinou ϱ až průsečík s K se blíží bodu M, ϱ se stává oskulační rovinou křivky K a tečnou plochy S v bodě M. Průsečík příslušné tečny blíží se patrně bodu N, druhému dotyčnému bodu bitangenciální roviny ϱ. Ale M, N jsou body sdružené v involuci, již na a_1 stanoví kuželosečky v rovině ϱ. V zobrazení jde kuželosečka V' bodem vratu A_1 křivky K' a tečna kuželosečky a tečna vratu jsou sdružené v involuci, kterou určuje na př. c_{12} a tečna kuželosečky B_2, c_{13} a tečna kuželosečky B_3 atd. V' má s K' dotyk ve čtyřech bodech.

Nechť K se dotýká dvou přímek a_1, a_2. V jest pak racionální křivka čtvrtého stupně, kuželosečka V' jde body A_1, A_2 a tečny v těchto bodech jsou v příslušných involucích sdruženy s tečnami vratu. V' s K' má dotyk ve třech bodech.

Podobně, dotýká-li se K přímek a_1, a_2, a_3, což ovšem obecně není možné, jest V kubická křivka, V' jde body A_1, A_2, A_3 a má dotyk ve dvou dalších bodech.

Dotýká-li se K přímek a_1, a_2, a_3, a_4, jest V kuželosečka v rovině obsahující c_{56}. Ale rovina, jež seče plochu tečen křivky K v kuželosečce, je oskulační rovina její. Musí tedy jeden z průsečíků c_{56} a V padnouti do průsečíku K s V. V obraze V' jde všemi čtyřmi body vratu a dotýká se K' v bodě na c_{56}.

5. Jest ještě rozřešiti otázku, jak se chovají kuželosečky L'_{ik} v případech, že K' má body vratu. Mějme na mysli plochy P_{12}, G_{12}. P_{12} obsahuje bisekanty křivky K, jež sekou c_{12}. Dotýká-li se na př. a_3 křivky K, dotýká se i plochy P_{12}. Poněvadž a_3 seče b_1, b_2, leží i na G_{12} a jest částí průseku G_{12} s S; vlastní L_{12} jest pátého stupně. V rovině přímkou a_3 leží křivka třetího stupně s dvojným bodem na c_{12} a kuželosečka, jež mimo bod na c_{12} mají ještě čtyři společné body. L_{12} seče tedy a_3 v jednom bodě a v obraze L'_{12} jde bodem A_3. Jestli tedy A_1 jest bod vratu, jde jím podle toho 10 kuželoseček

$$L'_{23},\ L'_{24},\ L'_{25},\ L'_{26},\ L'_{34},\ L'_{35},\ L'_{36},\ L'_{45},\ L'_{46},\ L'_{56},$$

které se dotknou K' v dalších čtyřech bodech.

Jsou-li dva body vratu A_1, A_2, jdou současně oběma kuželosečky

$$L'_{34},\ L'_{35},\ L'_{36},\ L'_{45},\ L'_{46},\ L'_{56};$$

pouze bodem A_1 jdou kuželosečky L'_{23}, L'_{24}, L'_{25}, L'_{26}, pouze bodem A_2 jdou L'_{13}, L'_{14}, L'_{15}, L'_{16}. Žádným nejde, pouze L'_{12}.

Když A_1, A_2, A_3 jsou tři body vratu, pak jdou současně všemi kuželosečky L'_{45}, L'_{46}, L'_{56}, pouze body A_1, A_2 jdou L'_{34}, L'_{35}, L'_{36}, pouze body A_1, A_3 jdou L'_{24}, L'_{25}, L'_{26} a pouze body A_2, A_3 jdou L'_{14}, L'_{15}, L'_{16}. Jenom bodem A_1 prochází L'_{23}, jen bodem A_2 L'_{13} a jen bodem A_3 L'_{12}.