ROČNÍK 61. SEŠIT 4.

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

VYDÁVÁ

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ZA PODPORY MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY.

V PRAZE 1932.
TISKEM A NÁKLADEM VLASTNÍM.

Journal Tchécoslovaque de Mathématique et Physique.
Éditeur: **Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha II-1559, Tchécoslovaquie.**

Obsah seš. 4. — Sommaire du fasc. 4.

Část matematická — Travaux mathématiques

Část fysikální — Travaux de physique

Upozornění pp. přispěvatelům. Příspěvky literární, jakož i zprávy týkající se obsahu »Časopisu« jest zasílati redaktorům přímo nebo prostřednictvím spolkové kanceláře. Na rukopisu budiž napsána adresa, na kterou jest zaslati korekturu.

Přesahují-li příspěvky dva tiskové archy, jest třeba k jejich otištění schválení výboru. Recense knih cizojazyčných buďtež stručné (ne přes 1 tiskovou stránku). Ke každému článku budiž připojen stručný výtah, pokud možno v jazyce francouzském. Přeje-li si autor písemné zprávy od redakce, nechť **přiloží známku na odpověď.**

Rukopis budiž psán čitelně, pokud lze strojem, po jedné straně a náležitě upraven k tisku; řecká písmena buďtež psána červeně neb aspoň červeně podtržena. Slova, jež mají býti vytištěna **tučně**, dlužno podtrhnouti úsečkou — *kursivou*, vlnitě — prostrkaná, čárkovaně. Neobvyklé značky, cizí písmena, odlišné vyznačování typografické úpravy a pod. je nutno na začátku rukopisu vysvětliti. Funkční znaky se tisknou písmem obyčejným, argumenty kursivou. Pravopis řídí se zásadami obsaženými v »Pravidlech českého pravopisu«. Obrazce schopné reprodukce buďtež nakresleny ve zvětšení trojnásobném, jinak se zhotoví neb opraví na náklad autorův. Autorské korektury připisují se autorům k tíži. Rukopisy článků nepřijatých do tisku se nevracejí. Korektury (autorům se posílá **jen** korektura sloupcová) buďtež vráceny co nejdříve. Autoři se snažně žádají, aby korekturu prováděli **co nejpečlivěji.** Za obsah článku odpovídá jeho autor.

Každý autor vědeckého článku obdrží bezplatně **25 separátů** svého článku (vyjímaje články referující). Přeje-li si autor větší počet separátů než uvedených 25, musí je objednati zvláště tím, že objednávku napíše zřetelně na sloupcovou korekturu svého článku. Ceny za každých dalších 25 separátů: do $^1/_4$ archu 6 Kč, $^1/_2$ archu 12 Kč, $^3/_4$ archu 18 Kč, 1 archu 24 Kč.

Tento sešit vyšel 6. února 1932.

Jistá příbuznost křivek souvisící s teorií křivek valících se.

Napsal Dr. *Ant. Pleskot* v Plzni.

(Došlo 18. listopadu 1931.)

V úvaze této poukážeme k jisté příbuznosti dvou křivek K a K_1, o níž platí řada zajímavých vztahů geometrických. Křivka K budiž dána v soustavě polární o pólu P, rovnicí

$$r = \varphi(\omega);$$

k ní přidružme v téže rovině křivku K_1 v soustavě souřadnic pravoúhlých se středem O tím způsobem, že k libovolnému bodu $A(r, \varphi)$ křivky K přiřadíme bod $A_1(x, y)$ křivky K_1, podle rovnic příbuznosti

$$\begin{aligned} y &= r, \\ x &= \int r\, d\omega; \end{aligned} \tag{1}$$

konstantu integrační v rovnici druhé nepíšeme, poněvadž tvar křivky K_1 konstanta integrační nemění. Posunutím křivky K_1 ve směru osy X, což odpovídá změně integrační konstanty, posune se současně na ní ležící bod A_1 i bude bodu A křivky K opět odpovídati bod A_1 na posunuté křivce.

Soustavu (1) lze psáti též ve tvaru: $y = r$, $\dfrac{dx}{d\omega} = r$.

Jaký význam geometrický mají předchozí rovnice příbuznosti při valení se křivky K po křivce K_1, o tom zmíníme se na konci úvahy.

O křivkách K a K_1 platí tyto geometrické vztahy:

a) Délka oblouku mezi dvěma body A a B křivky K jest rovna oblouku mezi body A_1 a B_1 křivky K_1, jež odpovídají bodům A a B.

b) Úhel, jež tvoří tečna s průvodičem u křivky K v bodě A, jest roven úhlu, jež tvoří tečna křivky K_1 s ordinátou v bodě A_1.

c) Plocha, jež u křivky K jest omezena obloukem křivky AB

a průvodiči v bodech A a B, jest rovna polovici plochy, jež omezena jest obloukem A_1B_1 křivky K_1, osou X a ordinátami v bodech A_1 a B_1 ke K_1 příslušnými.

d) Délka subnormály, subtangenty, normály a tangenty v bodě A u křivky K jest rovna délce subnormály, subtangenty, normály a tangenty v příslušném bodě A_1 křivky K_1; jest samozřejmé, že délky pro křivku prvou jsou vzaty v soustavě polární, v druhé v soustavě pravoúhlé.

e) Konečně platí jednoduchý vztah mezi poloměry křivosti obou křivek. Je-li R poloměr křivosti v bodě A křivky K, R_1 v bodě A_1 křivky K_1, pak platí

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{N},$$

značí-li N délku normály v bodě A neb A_1; při tom podotýkáme, že poloměry křivosti nejsou v předchozí rovnici veličiny absolutní, nýbrž algebraicky vzaty.

Vztahy, jež jsme uvedli, lze dokázati nejjednoduššími vzorci diferenciální geometrie.

Délka oblouku křivky K mezi body $A(r_0, \omega_0)$ a $B(r, \omega)$ jest dána vzorcem

$$S = \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\omega = \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \sqrt{\varphi^2(\omega) + \varphi'^2(\omega)}\, d\omega.$$

Délka oblouku křivky K_1 mezi body A_1 a B_1 odpovídajícími bodům A a B jest dána výrazem

$$S_1 = \int\limits_{y_0}^{y} \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy = \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \sqrt{\varphi^2(\omega) + \varphi'^2(\omega)}\, d\omega,$$

tedy $S = S_1$.

Úhel α, jejž tvoří kladný směr tečny křivky K v bodě A s průvodičem a jejž počítáme ve smyslu rostoucího ω, jest dán rovnicí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r\, d\omega}{dr} = \frac{r}{r'} = \frac{\varphi(\omega)}{\varphi'(\omega)};$$

poněvadž $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\varphi(\omega)}{\varphi'(\omega)}$, jest i úhel β, který svírá kladný směr tečny v bodě A_1 křivky K_1 s příslušnou ordinátou roven úhlu α. Jest tedy $\alpha = \beta$, při čemž připojujeme, že úhly α a β jsou navzájem smyslu opačného a že kladný směr tečny v bodě A_1 křivky K_1 jest ovšem definován opět ve smyslu rostoucího ω.

Poněvadž průvodič v bodě A křivky K jest roven ordinátě v bodě A_1 křivky K_1 a $\alpha = \beta$, jest následkem toho dokázána platnost věty d), že totiž subnormály, normály, subtangenty a tangenty u obou křivek v bodech A a A_1 jsou sobě rovny.

Plocha P křivky K, jež jest omezena obloukem AB křivky K a průvodiči r_0 a r v bodech A a B, jest dána rovnicí

$$P = \tfrac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} r^2\, d\omega = \tfrac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} \varphi^2(\omega)\, d\omega.$$

Plocha P_1 křivky K_1, jež jest omezena obloukem AB křivky K_1, ordinátami bodů A_1 a B_1 a osou X, jest dána výrazem

$$P_1 = \int_{x_0}^{x} y\, dx = \int_{\omega_0}^{\omega} r\varphi(\omega)\, d\omega = \int_{\omega_0}^{\omega} \varphi^2(\omega)\, d\omega,$$

t. j.

$$P_1 = 2P,$$

což plyne také již z toho, že $r = y$, $\alpha = \beta$ a $ds = ds_1$.

Zbývá dokázati vztah mezi poloměry křivosti v bodech u obou křivek sobě příslušných.

Označme R poloměr křivosti v bodě A křivky K a pro křivku K_1 budiž poloměr křivosti v bodě A_1, R_1.

Tu platí

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

čili

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}} + \frac{r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

R těmito rovnicemi stanovené jest veličina nikoliv absolutní, nýbrž algebraicky vzatou. Vezmeme-li v rovnici předchozí výraz $\sqrt{r^2 + r'^2}$ kladně, pak je-li střed křivosti na kladné normále, jest R kladné, je-li na záporné normále, jest R záporné, při čemž směr kladný normály definujeme známým způsobem podle kladného směru tečny, jejž jsme nahoře definovali.

Pro křivku K_1 v bodě A_1 příslušný poloměr křivosti jest

$$R_1 = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{rr'' - r'^2},$$

z čehož

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sečtením hodnot $1/R$ a $1/R_1$ obdržíme rovnici

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Veličina $\sqrt{r^2 + r'^2}$ jest však kladně vzata absolutní délkou normály; označíme-li ji N, pak obdržíme rovnici

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{N}. \tag{2}$$

Ukažme nyní na některých nejznámějších křivkách užití hořejší příbuznosti.

Jakožto křivku K volme Archimedovu spirálu, jejíž rovnice zní

$$r = a\omega.$$

Křivce této odpovídá křivka K_1, jejíž rovnice zní

$$x = a\int \omega \, d\omega = \frac{a\omega^2}{2},$$

$$y = a\omega.$$

Eliminací ω z těchto rovnic obdržíme

$$y^2 = 2ax,$$

t. j. parabolu, jejíž parametr jest a.

Vidíme, že vrcholu paraboly odpovídá pól spirály $r = 0$; oblouk spirály od pólu až k bodu, jehož průvodič jest r, jest roven oblouku paraboly od vrcholu až k bodu, jehož ordináta jest r (viz histor. pozn. Loria, Alg. C. str. 430). Poněvadž délka subnormály u paraboly jest konstantní a sice rovna délce a, jest i polární subnormála spirály konstantní a sice též rovna a.

Plocha spirály omezená obloukem a průvodičem r jest rovna polovici plochy parabolické, jež jest omezena osou paraboly, ordinátou bodu o délce r a obloukem parabolickým od vrcholu paraboly počítaným.

Normála paraboly v bodě A_1, jehož $y = r$, má délku $N = \sqrt{a^2 + y^2}$, t. j. $\sqrt{a^2 + r^2}$; jest tedy rovnice mezi poloměry křivosti R a R_1 spirály a paraboly v bodech k sobě příslušných

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Ve vzorci tomto poloměr R jest veličina kladná, kdežto R_1 záporná, jak snadno se určí; zavedeme-li tedy do vzorce předchozího absolutní hodnotu $|R_1|$, pak obdržíme

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{|R_1|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Probíhá-li bod A spirálu od pólu počínaje až do nekonečna, probíhá bod A_1 parabolu od vrcholu až do nekonečna a sice na větvi horní. Zobrazuje se tedy spirála $r = a\omega$ na horní větvi oblouku parabolického. Klademe-li v rovnici $r = a\omega$ za ω hodnoty záporné, obdržíme druhou větev spirály, která zobrazuje se pak na oblouku parabolickém, ležícím pod osou X.

Podobně ke spirále stupně vyššího

$$\varrho = a\omega^n,$$

v níž předpokládejme n kladné a k vůli jednoduchosti celistvé, odpovídá parabola stupně $(n + 1)$-ho o rovnici

$$y^{n+1} = a\,(n + 1)^n\, x^n,$$

čímž dospíváme k větě o rovnosti oblouků spirál a parabol vyššího stupně, ke kteréžto větě po prvé dospěl Fermat, ovšem cestou jinou. K velmi zajímavé příbuznosti dospějeme, volíme-li za křivku K logaritmickou spirálu, jejíž rovnice jest

$$r = ae^{n\omega}.$$

Této křivce odpovídá křivka K_1 daná rovnicemi

$$x = a\int e^{n\omega}\, d\omega = \frac{ae^{n\omega}}{n},$$

$$y = ae^{n\omega},$$

z nichž eliminací ω obdržíme

$$y = nx;$$

t. j. přímku jdoucí počátkem a uzavírající s osou X úhel β, jehož

$$\operatorname{tg}\beta = n.$$

K bodu B na spirále, jemuž patří polární úhel $\omega = 0$ a tedy průvodič o délce a, odpovídá na přímce bod B_1, jehož ordináta jest $y = a$. Roste-li ω od nuly až do hodnoty nekonečné, pak probíhá bod spirály dráhu od bodu B až do nekonečna; příslušný bod na přímce vzdaluje se při tom od bodu B_1 až do nekonečna. Probíhá-li bod na spirále dráhu od B až k pólu, takže úhel ω mění se od nuly až do $-\infty$, pak přiřaděný bod na přímce pohybuje se od bodu B_1 až ke konci (0, 0) přímky.

Poněvadž přímka, na níž zobrazuje se spirála, tvoří stálý úhel $\alpha = 90^0 - \beta$ s osou Y, uzavírá i každý průvodič u spirály logaritmické s tečnou konstantní úhel α, jehož $\operatorname{tg}\alpha = 1/n$, čímž dospíváme ke známé větě, že průvodiče spirály protínají spirálu v konstantním úhlu. Taktéž plyne z obrazení spirály na přímce, že délky oblouku spirály počítané od průsečíku spirály s osou polární jsou úměrny rozdílu $r - a$, při čemž konstanta úměrnosti z obrazu přímky snadno se určí, takže

$$S = \frac{r-a}{n}\sqrt{n^2+1}.$$

Hledíc ku přímce jsou normály, tangenty, subnormály a subtangenty jednotlivých bodů této přímky úměrny ordinátám těchto bodů, z čehož plyne, že i u logaritmické spirály jsou tyto délky úměrny průvodičům a konstanty úměrnosti mohou přímo z obrazu přímky býti určeny.

Ježto poloměr křivosti kteréhokoli bodu přímky jest nekonečně velký, tu obdržíme ze vztahu (2), kladouce v něm $R_1 = \infty$,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{N},$$

t. j. poloměr křivosti spirály jest roven délce polární normály, t. j. $r\sqrt{1+n^2}$. Spirála logaritmická, ať v její rovnici a má hodnotu jakoukoli, zobrazuje se vždy na tutéž přímku; soudíme proto, že spirály $r = ae^{n\omega}$ jsou shodny, ať veličina a jest jakákoli. Na této křivce jest pěkně viděti, jak geometrické vlastnosti této křivky, jež obyčejně v diferenciální geometrii o této křivce se uvádějí, mohou podle hořejší příbuznosti z obrazu přímky býti vyčteny.

Vezměme v úvahu růžice, jejichž rovnice zní

$$r = a \sin n\omega,$$

při čemž nechť značí a a n čísla kladná; růžicím odpovídají elipsy neboť rovnice příslušné křivky K_1 zní

$$x = \int a \sin n\omega \, d\omega = -\frac{a \cos n\omega}{n},$$

$$y = a \sin n\omega,$$

z nichž plyne:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{n}\right)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Růžice zobrazí se tedy na elipse, jejíž jedna osa jest a, a druhá v poměru n k a zmenšena.

Mění-li se $n\omega$ v mezích 0 a π, t. j. ω od 0 až do pak $\frac{\pi}{n}$, opíše bod A růžice jeden list a příslušný bod elipsy polovici oblouku elipsy, jež nad osou X leží; z toho plyne podle c), že plocha P jednoho listu růžice jest rovna čtvrtině plochy elipsy, t. j.

$$P = \frac{\pi a^2}{4n} \quad \text{(Loria, Spec. C. S. 300).}$$

Ježto oblouky elipsy a růžice mezi dvojicemi bodů k sobě příslušných se sobě rovnají a u elipsy jsou dány integrály eliptickými, plyne z toho, že i oblouky růžic vyjádřeny jsou integrály eliptickými. (Loria, S. 301.) Jakožto poslední příklad volme za křivku K kardioidu,

$$r = a\,(1 - \cos\omega).$$

Křivce té, jak snadno určíme, odpovídá křivka

$$x = a\,(\omega - \sin\omega),$$
$$y = a\,(1 - \cos\omega),$$

t. j. obecná cykloida.

Kdybychom rovnice příbuznosti dané rovnicemi (1) poněkud pozměnili, píšíce je ve tvaru

$$y = r,$$
$$x = -\int r d\omega, \qquad (1')$$

kdež konstantu integrační opět vypustíme, pak křivka podle rovnic (1′) ke křivce K patřící, označme ji K_2, shoduje se geometricky s křivkou K_1 patřící ke K podle rovnic příbuznosti (1), neboť K_2 jest souměrným obrazem K_1 hledíc k ose Y. Bod A_1 na překlopené křivce K_1 kol osy Y, označme jej nyní A_2, jest bodem k bodu A patřícím podle rovnic příbuznosti (1′).

Platí tedy o křivce K a K_2 všechny vztahy *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), avšak ve vztahu *b*) jest úhel β nejen velikostí roven úhlu α, nýbrž jest s ním i smyslu souhlasného. Jest tedy možno pohybem křivky K v její rovině docíliti, aby bod A padl na bod A_2, pól P téže křivky na osu X a aby se při tom pokryly i tečny křivek v bodě $A \equiv A_2$, neboť podle poznámky předchozí úhly, jež tvoří jednak tečna s průvodičem u K a jednak tečna s ordinátou u K_2, jsou nyní sobě rovny podle velikosti i podle smyslu.

Z toho plyne, že valí-li se K po K_2, pól P křivky K opisuje při tom osu X.

Možno tedy vysloviti větu: Ke křivce K přidružená křivka K_1 podle základních rovnic (1) jest ta, která (byvši překlopena kol osy Y) má tu vlastnost, že valí-li se po ní křivka K, pól této opisuje osu X. Body, ve kterých K a K_1 při valení se dotýkají, jsou body, které sobě podle příbuznosti (1) odpovídají.

Že vztahy mezi křivkami K a K_1, jež jsme na začátku uvedli, jsou touto definicí přímo očividné, jest nyní patrno až na vztah *e*); odvodíme proto vztah (2) mezi R a R_1, když křivky K a K_1 definujeme větou právě vyslovenou.

Z teorie valících se křivek po křivkách pevných jest známá rovnice, podle které možno stanoviti poloměr křivosti v libovolném bodě křivky, již opisuje bod pevně spojený s valící se křivkou.

Je-li tímto bodem pól P křivky K, jež valí se po K_1, a je-li poloměr křivosti v libovolném bodě jeho dráhy ϱ se středem křivosti S a je-li M bod, v němž se právě křivky K a K_1 dotýkají, tu platí vztah

$$\frac{\varrho}{PM} = \frac{PS}{PM} = \frac{PM\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\right)}{PM\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\right) - \cos\varphi} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} - \frac{\cos\varphi}{PM}},$$

při čemž φ znamená úhel, jejž tvoří spojnice PM s normálou pevné křivky v bodě M směřující ke středu křivosti pevné křivky K_1 pro tento bod. R_1 a R značí absolutní hodnoty poloměru křivosti křivek K_1 a K v bodě M. V poměru PS/PM na levé straně rovnice jsou délky PS, PM vzaty algebraicky, ježto body P, M, S leží v téže přímce, kdežto na pravé straně téže rovnice ve výraze $\cos\varphi/PM$ délka PM jest vzata absolutně; při tom podotýkáme, že napsaný vzorec, který lze snadno odvoditi, platí pro ten případ, když křivky K a K_1 leží při valení na různých stranách společné tečny v bodě M.

Poněvadž pól P opisuje při valení přímku, jest $\varrho = \infty$ a proto musí platiti

$$PM\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\right) - \cos\varphi = 0,$$

t. j.

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} = \frac{\cos\varphi}{PM};$$

však výraz $MP/\cos\varphi$ a jest roven délce normály ve společném bodě M křivky K a K_1, čímž dospíváme k rovnici

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} = \frac{1}{N},$$

což jest relace (2), dříve analyticky vyvozená.

Valí-li se křivka K po K_1, takže jsou obě na téže straně společné tečny, pak předchozí rovnice nabývá tvaru

$$\left|\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right| = \frac{1}{N},$$

značí-li ovšem R_1 a R prosté hodnoty poloměrů křivosti.

Tímto dodatkem zjednáme si poznatek: Jestliže poloměry křivosti R a R_1 v rovnici (2), již jsme si zjednali analytickým způsobem, mají znaménka stejná (kladná), pak opisuje pól P křivky K osu X, valí-li se K po K_1 tak, že obě křivky jsou po různých stranách společné tečny; jsou-li však poloměry znamének opačných, pak valí-li se K po K_1, opisuje pól P osu X, jestliže při valení jsou obě křivky na stejných stranách společné tečny.

*

Sur une correspondance de courbes se rattachant à la théorie des roulettes.

(Extrait de l'article précédent.)

Deux courbes K, K_1, dont la première est exprimée par une équation entre les coordonnées polaires r, ω, l'autre par une équation entre les coordonnées rectangulaires x, y, se correspondent d'après les relations

$$y = r, \quad x = \int r \, . \, d\omega$$

Cette correspondance donne lieu aux résultats suivants:

a) Les longueurs des arcs correspondants sont égales.

b) L'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur au point A de la courbe K est égal à l'angle que fait la tangente au point A_1 de la courbe K_1 avec l'ordonnée respective.

c) L'aire limitée par l'arc AB de la courbe K et les rayons vecteurs des points A, B est égale à la moitié de l'aire comprise entre l'arc correspondant A_1B_1 de la courbe K_1, l'axe des x et les ordonnées des points A_1, B_1.

d) La tangente, la normale, la sous-tangente, la sous-normale polaires au point A de la courbe K, sont égales, respectivement, à la tangente, normale, sous-tangente, sous-normale au point A_1 de la courbe K_1.

e) Si R, R_1 sont les rayons de courbure aux points correspondants des deux courbes, N la normale en valeur absolue, on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{N}$$

où l'on prend R, R_1 avec le signe + ou le signe —, suivant que le centre de courbure se trouve sur le demirayon positif ou négatif de la normale.

Comme applications sont étudiées plusieurs courbes connues, en particulier la spirale logarithmique, laquelle, prise comme courbe K, est représentée par une droite.

La courbe K_1 peut être caractérisée par rapport à sa courbe correspondante K de la manière suivante: la courbe symétrique à K_1 par rapport à l'axe des y a la propriété que le pôle P de la courbe K, roulant sur K_1, décrit l'axe des x; les points de contact des courbes K, K_1 pendant ce roulement sont les points qui se correspondent d'après la correspondance considérée. Par-là, les propriétés *a*), . . . *d*) deviennent évidentes.

Příspěvek k teorii racionálních křivek pátého stupně.

Podává *L. Seifert* v Brně.

(Došlo 21. září 1931.)

Z nejzajímavějších vlastností racionální křivky pátého stupně o šesti dvojných bodech je existence kuželoseček, které se křivky dotýkají v pěti bodech. Tyto našel Rohn, užívaje involuční rovinné transformace, která, je-li dáno v rovině sedm bodů, přiřazuje k dalšímu osmému bod devátý, jenž s ostatními tvoří basis svazku křivek třetího stupně.[1]) Zmíněná transformace je obrazem jednoduché involuční příbuznosti na obecné ploše třetího stupně, užijeme-li obvyklého Grassmannova zobrazení plochy na rovinu.[2]) I jest na snadě otázka, zda jest možno ony kuželosečky v rovině najíti přímo z příslušného útvaru na ploše. Tuto otázku chceme zodpověděti. Souvislost útvarů na ploše a v rovině je zajímavá, třebaže vztahy v prostoru se nezdají jednodušší nežli v rovině, mimo to snadno poznáváme změnu útvaru, přejde-li jeden nebo více bodů dvojných v body vratu.

1. Na obecné ploše třetího stupně S buď základní dvojšestnina

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}$$

a další přímky c_{ik}. Přímky prvé šestniny ať se zobrazí do roviny π jako body $A_1, A_2, \ldots, A_6$, přímky druhé jako kuželosečky $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_6$, takže na př. B_1 jde všemi hlavními body A_i mimo A_1. Přímka roviny π jest obrazem prostorové křivky třetího stupně, jež neprotíná přímky a_i, má však všechny b_i za bisekanty, c_{ik} za unisekanty. Znamenejme tyto křivky C. Přidružený systém prostorových křivek třetího stupně znamenejme K, takže vždy jedna C

[1]) Rohn, Eine einfache lineare Construction der ebenen rationalen Curven 5. Ordnung, Math. Annalen, sv. 25, 1885.

[2]) Viz Sturm, Die Lehre von den geom. Verwandtschaften, sv. IV, str. 98.

a jedna K tvoří úplný průsek plochy S s plochou druhého stupně. K se zobrazují jako křivky pátého stupně se šesti dvojnými body A_i. Poněvadž obráceně, zvolíme-li v rovině libovolných šest bodů, lze ji považovati za obraz plochy třetího stupně,[3]) můžeme vztahů na ploše S použíti k odvození vlastnosti obecné racionální křivky pátého stupně.

Buď K jedna z křivek druhého systému, K' její obraz. Její plocha tečen je čtvrtého stupně a seče S ještě v křivce V stupně $3 . 4 - 2 . 3 = 6$. Křivka V neseče žádnou a_i, seče však každou b_i ve čtyřech bodech, c_{ik} ve dvou bodech. Obrazem jejím jest tedy kuželosečka V', která nejde žádným hlavním bodem A_i.

Buď t tečna křivky K v bodě P, T její další průsečík s S. Tečna u křivky V v bodě T je průsečnice oskulační roviny křivky K v bodě P a tečné roviny plochy S v bodě T. Blíží-li se T bodu P, stane se t hlavní tečnou plochy S a u splyne s t. Ve společném bodě mají tedy křivky V a K dotyk. V obraze V' se dotýká pětkrát K'. Jest to význačná kuželosečka uvedená u Rohna.

Buď opět P bod na K, t jeho tečna, T její další průsečík s S. Kužel P (K), který z P promítá K, seče S v křivce C prvého systému, jež se v T dotýká křivky V. Roviny přímkou t sekou S v křivkách, jež se v P dotýkají K, tedy v obraze T' je společný bod svazku křivek třetího stupně, jež jdou body A_i a v P se dotýkají K'. Buď dále X bod na K, Y třetí průsečík PX s S. C je určeno body P, Y a zobrazí se jako přímka C' určená bodem křivky P' a bodem Y', devátým spol. bodem svazku křivek třetího stupně určeného body A_i, P', X'. Z toho vyplývá lineární konstrukce jednotlivých bodů křivky K' ze šesti dvojných (A_i) a dvou obyčejných bodů (P', X') křivky a konstrukce kuželosečky V' jako obálky přímek $X'Y'$ uvedená u Rohna: *K daným bodům A_i, P', X' sestrojme devátý přidružený Y', spojme P' s Y' přímkou C'; je-li Z' některý bod této přímky, sestrojme devátý přidružený bodům A_i, P', Z'. Volíme-li na křivce libovolný bod P a sestrojíme k libovolnému bodu křivky X' bod Y', jenž s A_i, P, X' tvoří basis svazku křivek třetího stupně, pak přímky $X'Y'$ obalují kuželosečku V'.*

Připomeňme ještě, že oskulační rovina σ bodu P na K seče S v křivce, jež v P má s K dotyk druhého stupně a v T s V dotyk obyčejný. *Jeví se tedy V' jako obálka křivek třetího stupně, jež jdou body A_i a mají v jednotlivých bodech s K' dotyk druhého stupně.*

2. Uvažujme nyní jednu z patnácti přímek c_{ik}, na př. c_{12}. Bisekanty křivky K, které sekou c_{12}, vyplňují jeden přímkový systém plochy druhého stupně P_{12}, jemuž patří i a_1, a_2. Ať p je jedna z těchto bisekant, A, B její průsečíky s K. Body A, B jde jedna křivka systému C. Uvažujme, jaká je obálka těchto křivek C.

[3]) Sturm, Geom. Verwandtschaften, IV, p. 272.

Buď P bod na S. Jím jde ∞^1 křivek C a je známo, že bisekanty bodem Q na S ke všem křivkám tohoto svazku vedené vyplňují rovinu ϱ^Q, která bodem P prochází.[4]) Roviny ϱ^Q přiřazené takto bodům Q na c_{12} tvoří svazek, neboť, je-li C jedna z křivek, její bisekanty sekoucí c_{12} tvoří systém plochy druhého stupně a osa q řečeného svazku je přímka druhého systému, kterému patří i c_{12}. q jde bodem P a v každé rovině svazku (q) jest svazek paprsků (Q) tvořený bisekantami křivek C. Přímkou q jdou dvě tečné roviny ku ploše P_{12} a v každé je bisekanta křivky K, jež je zároveň bisekantou jedné C. Bodem P jdou tedy dvě křivky C, které sekou K ve dvou bodech, a spojnice jejich seče c_{12}. Roviny splývají, dotýká-li se q plochy P_{12}. Avšak mezi bisekantami křivky C jsou i b_1, b_2, jež zároveň sekou c_{12}, q tedy seče b_1, b_2. Hledáme tedy přímky sekoucí b_1, b_2 a dotýkající se plochy P_{12}. Třetí průsečík takové přímky s S je charakteristický bod pro obálku křivek C, jeho geometrickému místu odpovídá v zobrazení kuželosečka, již obalují přímky, obrazy uvažovaných křivek C.

Plocha přímek q' je čtvrtého stupně; značme ji G_{ik}. Jak patrno, jsou na ní dvojné přímky b_1, b_2, c_{12}. Její další průsek L_{12} s S je stupně $4 . 3 - 2 . 3 = 6$. Snadno poznáváme, že každá b_i má s L_{ik} čtyři společné body, a_i žádný, c_{ik} dva. Obraz L'_{ik} je tedy kuželosečka, která neprochází žádným dvojným bodem.

Nechť M je společný bod křivek K, L_{12}. Tečná rovina plochy P_{12} v M je současně tečnou rovinou plochy G_{12}, tečna křivky L_{12} v M je průsečnice této roviny s tečnou rovinou plochy S, a to jest právě tečna křivky K. L_{12} má tedy s K dotyk v pěti bodech a rovněž tak L'_{12} s K'. Tím jest nalezeno dalších 15 kuželoseček pětkrát se dotýkajících křivky K', jež odpovídají přímkám c_{ik} na ploše.

Buď p bisekanta křivky K sekoucí c_{12}. Rovina (p, c_{12}) seče S v kuželosečce, která se zobrazuje jako kuželosečka jdoucí čtyřmi hlavními body mimo A_1, A_2. Máme tedy větu u Rohna uvedenou: *Svazek kuželoseček určený čtyřmi dvojnými body A_i vytíná na K' involuci a spojnice přidružených bodů obalují kuželosečku pětkrát se dotýkající.*

Lze však nalézti ještě další podrobnost. Připomeňme si větu Schurovu, která praví, že dvojšestnina sestává z reciprokých polár jisté plochy druhého stupně H. Reciproké poláry jsou a_1, b_1, pak a_2, b_2 atd.

Přímce c_{12}, jež seče a_1, a_2, b_1, b_2, patří jako reciproká polára přímka d, jež spojuje body (a_1, b_2), (a_2, b_1). Jsou-li X, Y dva body na S, prochází jimi křivky K, C, jedna každého systému. Mají

[4]) Viz Reye, Beziehungen der allg. Fläche dritter Ord. zu einer covarianten Fläche dritter Classe, Math. Annalen, sv. 55, str. 257.

ještě další tři společné body Z, T, U. Je-li M třetí průsečík XY s S, jest rovina (ZTU) polární rovinou bodu M ku ploše H.[5])

Bodem M na c_{12} jde vždy bisekanta ke K, jež K seče v X, Y. Křivka C jimi určená seče K v dalších bodech Z, T, U a rovina (ZTU) se otáčí kolem d. V obraze X', Y', Z', T', U' jsou na přímce C' a body Z', T', U' jsou vyťaty svazkem křivek třetího stupně. Základní body svazku jsou A_i a tři další body odpovídající bodům na d. Jest však známo, že řada bodů na a_i jest projektivní se svazkem přímkových elementů A_i, bodu (a_ib_k) odpovídá tedy tečna v A_i k B_k, bodu (a_kb_i) tečna v A_k k B_i. Rovinné průseky přímkou d zobrazí se jako křivky, které jdou hlavními body a mají v A_1, A_2 dotyk s B_2, resp. B_1. Máme tedy zajímavou novou větu: *Svazek křivek třetího stupně, které jdou dvojnými body křivky K' a ve dvou z nich se dotýkají kuželoseček určených ostatními pěti, sekou K' ve třech bodech na přímce a tyto přímky obalují kuželosečku pětkrát se dotýkající.*

Sledujme ještě jednou bod M pohybující se po c_{12}. Když M přejde do (a_1, c_{12}), polární rovina jeho jest (b_1, d), t. j. spojuje b_1 s bodem (a_1b_2), příslušné C se rozpadá v a_1 a kuželosečku v rovině určené přímkou b_1 a bodem (a_1b_2). Jejím obrazem je přímka jdoucí bodem A_1, která se kuželosečky B_2 dotýká v A_1, neboť tečný element v A_1 je obrazem bodu (a_1b_2). Zkrátka tečna v bodě A_1 k B_2 je tečnou kuželosečky L'_{12}. Podobně i tečna v A_2 k B_1.

3. Na S jest ∞^2 křivek K, mezi nimi ∞^1 se dotýká přímky a_1. Mezi ∞^2 křivkami K' jest ∞^1 křivek s bodem vratu A_1. Bodem M' v rovině jdou dvě takové. Skutečně, buď C jedna křivka druhého systému, jež bodem M neprochází, m bisekanta její jdoucí tímto bodem. Ve svazku (m, C) jsou dvě plochy, které se dotýkají přímky a_1 a vytínají tedy z S křivky K_1, K_2, jež se dotýkají a_1 a zobrazují se jako křivky s body vratu v A_1. Z toho lze nalézti i jednoduchou konstrukci těchto tečen. Svazek ploch (m, C) vytíná z a_1 involuci bodovou a dvojné body jsou dotyčné body křivek K_1, K_2. V obraze dvojiny tečen křivek K' v bodě A_1 tvoří involuci a hledané tečny jsou její dvojné elementy. K určení této involuce možno použíti degenerovaných křivek K'; na př. jedna plocha (m, C) seče S v b_l a kuželosečce, jejíž rovina jde přímkou a_l, K' skládá se tedy z kuželosečky B_l a křivky třetího st. s dvojným A_l atd.

Jsou čtyři křivky K' se dvěma body vratu A_1, A_2, neboť na ploše jsou čtyři křivky K, jež se dotýkají přímek a_1, a_2. To poznáme nejsnáze, volíme-li zobrazení plochy, kde b_* se zobrazí

---

[5]) Schur, Math. Annalen, sv. 18, str. 12, a také Reye, pojednání citované v poznámce [4]).

jako body, a_i jako kuželosečky, křivky systému K jako přímky. Obrazy křivek K jsou pak společné tečny dvou kuželoseček.[6])

Z toho jest také patrno, že dáno-li šest bodů v rovině, nelze obecně sestrojiti křivku pátého stupně se třemi body vratu a dalšími třemi dvojnými v daných bodech, neboť obecně se nedotýkají tři kuželosečky téže přímky.

Abychom našli takovou konfiguraci šesti bodů, pro niž by taková křivka existovala, užijme opět jiného zobrazení plochy S. Uvažme dvojšestninu

$$\begin{matrix} 1 & 1' & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 2 & 2' & 13 & 14 & 15 & 16 \end{matrix}$$

1, *2* je psáno za dřívější a_1, a_2, *1'*, *2'* za b_1, b_2, *23* za c_{23} atd. Pak v π se zobrazují kubické křivky jednoho systému jako křivky třetího stupně s dvojným A_1, křivky druhého stupně jako kubické křivky s dvojným A_2 a společnými jednoduchými A_3, A_4, A_5, A_6.[7])

Je-li tedy k křivka třetího stupně s dvojným bodem *1*, volme v rovině libovolně bod *2* a veďme jím tečny ke k. Další průsečíky tří těchto tečen s k označme *3*, *4*, *5* a volme na k libovolně bod *6*. Volíme-li těchto šest bodů za základní body zobrazení, jest k obrazem prostorové kubické křivky, jež se dotýká přímek *23*, *24*, *25* a ve dvou různých bodech seče *1*, *1'*, *26*. Konfiguraci, při které přímky první šestniny se zobrazí jako body, dostaneme dvojnásobnou kvadratickou transformací, volíme-li na př. po prvé základní trojúhelník *234* a po druhé trojúhelník tvořený v novém obrazci přímkami, ve které přešla kuželosečka *1'* a přímky *25*, *26*.

Volíme-li ještě *6* na čtvrté tečně z bodu *2*, dostaneme v k obraz kubiky, která se dotýká přímek *23*, *24*, *25*, *26*.

4. Zodpovíme ještě otázku, jaké zvláštnosti má kuželosečka V' v případech, kdy křivka má jeden až čtyři body vratu. Když se K dotkne přímky a_1 v bodě M, plocha tečen seče S v a_1 a křivce pátého stupně, jež a_1 seče v bodě N mimo M. V rovině ϱ přímkou a_1 dostáváme kuželosečku a křivku třetího stupně s bodem obratu v M. Mimo a_1 mají obě křivky společný průsečík s K, jenž je bodem vratu druhé z nich, a tedy ještě $2 . 3 - 2 = 4$ body. Otáčíme-li

---

[6]) Myslíme-li si plochu S zobrazenou na dvě roviny různými způsoby (základní body jsou obrazy různých šestnin přímkových), jest tím dán biracionální vztah obou rovin (Cremonova transformace). Tato se vždy dostane jako sled kvadratických transformací, při kterých trojúhelník ze tří základních bodů volíme za základní trojúhelník transformace. Kvadratickou rozumíme transformaci, již lze psáti při samozřejmém označení

$$x'_1 = \frac{1}{x_1}, \quad x'_2 = \frac{1}{x_2}, \quad x'_3 = \frac{1}{x_3}.$$

[7]) Diekmann, Über Modificationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche 3ter Ord. durch Auftreten von Singularitäten erhält, Mathem. Annalen, sv. 4, str. 442.

rovinou ϱ až průsečík s K se blíží bodu M, ϱ se stává oskulační rovinou křivky K a tečnou plochy S v bodě M. Průsečík příslušné tečny blíží se patrně bodu N, druhému dotyčnému bodu bitangenciální roviny ϱ. Ale M, N jsou body sdružené v involuci, již na a_1 stanoví kuželosečky v rovině ϱ. V zobrazení jde kuželosečka V' bodem vratu A_1 křivky K' a tečna kuželosečky a tečna vratu jsou sdružené v involuci, kterou určuje na př. c_{12} a tečna kuželosečky B_2, c_{13} a tečna kuželosečky B_3 atd. V' má s K' dotyk ve čtyřech bodech.

Nechť K se dotýká dvou přímek a_1, a_2. V jest pak racionální křivka čtvrtého stupně, kuželosečka V' jde body A_1, A_2 a tečny v těchto bodech jsou v příslušných involucích sdruženy s tečnami vratu. V' s K' má dotyk ve třech bodech.

Podobně, dotýká-li se K přímek a_1, a_2, a_3, což ovšem obecně není možné, jest V kubická křivka, V' jde body A_1, A_2, A_3 a má dotyk ve dvou dalších bodech.

Dotýká-li se K přímek a_1, a_2, a_3, a_4, jest V kuželosečka v rovině obsahující c_{56}. Ale rovina, jež seče plochu tečen křivky K v kuželosečce, je oskulační rovina její. Musí tedy jeden z průsečíků c_{56} a V padnouti do průsečíku K s V. V obraze V' jde všemi čtyřmi body vratu a dotýká se K' v bodě na c_{56}.

5. Jest ještě rozřešiti otázku, jak se chovají kuželosečky L'_{ik} v případech, že K' má body vratu. Mějme na mysli plochy P_{12}, G_{12}. P_{12} obsahuje bisekanty křivky K, jež sekou c_{12}. Dotýká-li se na př. a_3 křivky K, dotýká se i plochy P_{12}. Poněvadž a_3 seče b_1, b_2, leží i na G_{12} a jest částí průseku G_{12} s S; vlastní L_{12} jest pátého stupně. V rovině přímkou a_3 leží křivka třetího stupně s dvojným bodem na c_{12} a kuželosečka, jež mimo bod na c_{12} mají ještě čtyři společné body. L_{12} seče tedy a_3 v jednom bodě a v obraze L'_{12} jde bodem A_3. Jestli tedy A_1 jest bod vratu, jde jím podle toho 10 kuželoseček

$$L'_{23},\ L'_{24},\ L'_{25},\ L'_{26},\ L'_{34},\ L'_{35},\ L'_{36},\ L'_{45},\ L'_{46},\ L'_{56},$$

které se dotknou K' v dalších čtyřech bodech.

Jsou-li dva body vratu A_1, A_2, jdou současně oběma kuželosečky

$$L'_{34},\ L'_{35},\ L'_{36},\ L'_{45},\ L'_{46},\ L'_{56};$$

pouze bodem A_1 jdou kuželosečky L'_{23}, L'_{24}, L'_{25}, L'_{26}, pouze bodem A_2 jdou L'_{13}, L'_{14}, L'_{15}, L'_{16}. Žádným nejde, pouze L'_{12}.

Když A_1, A_2, A_3 jsou tři body vratu, pak jdou současně všemi kuželosečky L'_{45}, L'_{46}, L'_{56}, pouze body A_1, A_2 jdou L'_{34}, L'_{35}, L'_{36}, pouze body A_1, A_3 jdou L'_{24}, L'_{25}, L'_{26} a pouze body A_2, A_3 jdou L'_{14}, L'_{15}, L'_{16}. Jenom bodem A_1 prochází L'_{23}, jen bodem A_2 L'_{13} a jen bodem A_3 L'_{12}.

Má-li křivka čtyři body vratu A_1, A_2, A_3, A_4, pak L'_{56} jde všemi čtyřmi a jest to patrně obraz druhé kuželosečky v rovině přímkou c_{56}, jež se křivky K dotýká. Třemi z nich jdou vždy dvě kuželosečky na př. L'_{45}, L'_{46} jdou body A_1, A_2, A_3, pouze dvěma jde vždy jediná, na př. body A_1, A_2 jen L'_{34} atd.

Contribution à la théorie de la courbe rationnelle du cinquième degré.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans la correspondance ponctuelle de Grassmann, établie entre une surface cubique générale S et un plan, les droites d'un sextuple a_i ($i = 1, 2, \ldots 6$) de la surface correspondent à six points A_i arbitrairement choisis dans le plan. A chaque droite C' du plan correspond une courbe cubique C sur la surface. Au système de ces cubiques (C) on associe, sur la surface, un autre système de cubiques (K) de manière que, toujours, deux cubiques C et K sont situées sur une quadrique. Au système (K) correspond, dans le plan, un système de courbes rationnelles (K') d'ordre cinq dont les courbes ont six points doubles communs aux points A_i. Les propriétés connues des cubiques K du système permettent alors d'établir celles des courbes K'.

On considère une cubique K. Une tangente de la cubique K a avec S encore un point commun qui engendre une courbe V d'ordre six. L'image de cette courbe est une conique V' qui a avec K' un contact en cinq points.

Soit P_{12} la quadrique engendrée par les bisecantes de la courbe K incidentes avec c_{12} et soit G_{12} la surface réglée engendrée par les droites qui touchent P_{12} et sont incidentes avec b_1, b_2. Soit alors L_{12} la courbe d'ordre 6, commune aux surfaces S et G_{12}. L'image de cette courbe est encore une conique L'_{12} qui a un contact en cinq points avec K'. A chacune des 15 droites c_{ik} de la surface S correspond une telle conique.

On retrouve des résultats de M. Rohn et on obtient encore de nouveaux, p. ex. les suivants: Toutes les cubiques planes qui passent par les six points doubles A_i d'une courbe d'ordre cinq et qui, aux points de cette courbe, ont un contact triponctuel, enveloppent la conique V'. Le faisceau de cubiques passant par les points doubles A_i et touchant en A_k, A_l les coniques qui sont déterminées toujours par les cinq points restants, est tel que, toute cubique lui appartenant a avec K' trois points communs situés sur une droite et toutes ces droites enveloppent la conique L'_{kl}.

Si K touche p. ex. a_1 alors A_1 est un point cuspidal de K' et il se trouve situé sur V'. a_1 est situé sur G_{23} p. ex. et touche aussi P_{23}. L_{23} dégénère en a_1 et une courbe d'ordre 5, L'_{23} est une conique qui passe par A_1. On peut discuter de cette manière les coniques L'_{ik} dans les cas où K' a 1, 2, 3 on 4 points cuspidaux.

Příspěvek ke konstrukci obecné rovinné kubiky.

Napsal Dr. *Aug. Vondráček.*

(Došlo 9. června 1931.)

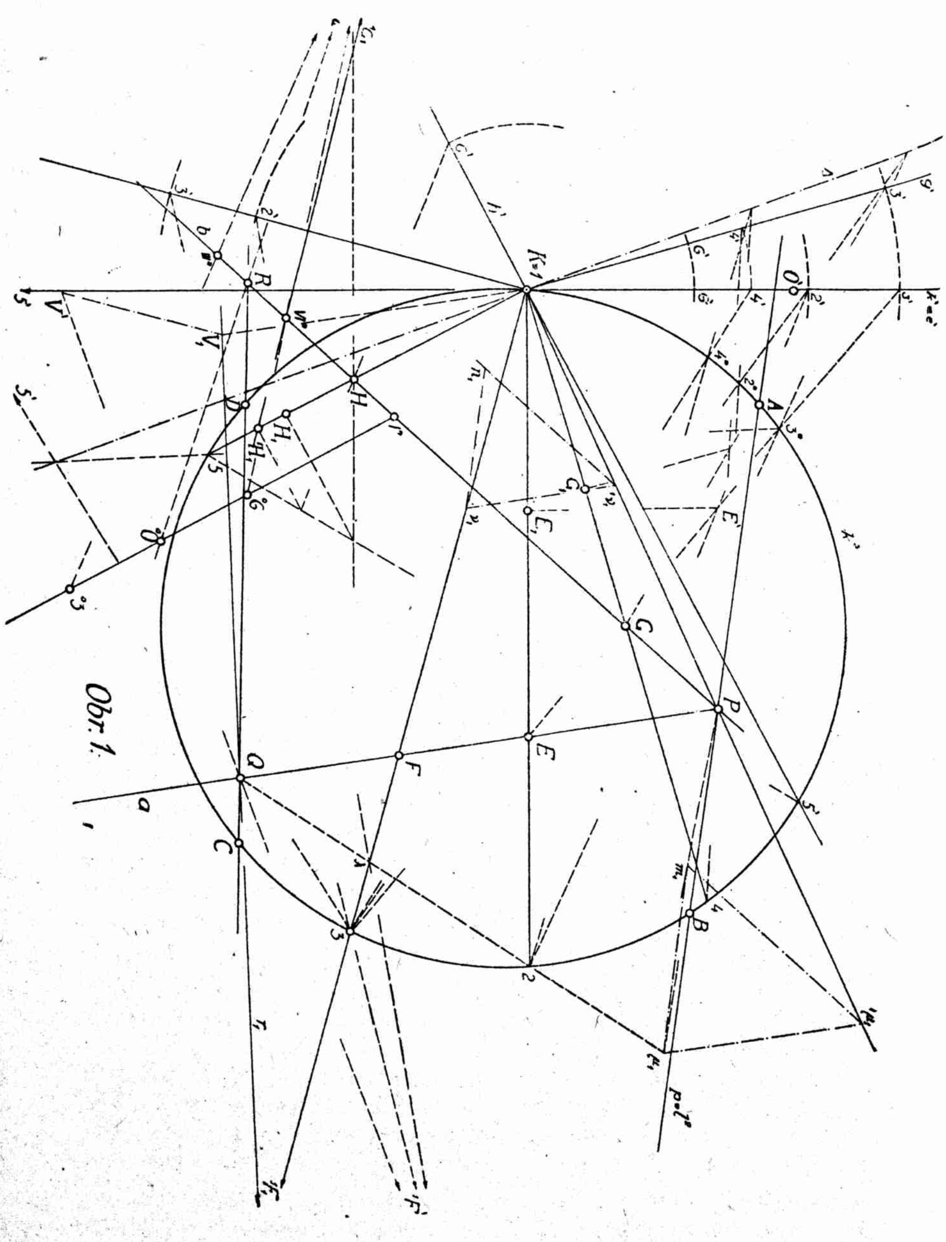
Úloha: sestrojiti obecnou (neracionálnou) křivku rovinnou k^3 3. st. z devíti daných bodů $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ řeší se zpravidla převedením na určení této křivky svazkem paprskovým a projektivním s ním svazkem kuželoseček; k čtyřem z daných bodů jako základním svazku kuželoseček vyhledá se (užitím konstrukce projektivní geometrie k daným pěti paprskům svazku a pěti bodům roviny vyhledati bod, z něhož se oněch 5 bodů promítá svazkem s danými 5 paprsky projektivním) příslušný bod protilehlý jako střed svazku paprskového.

V následujícím chci naznačiti jiný konstruktivní postup, opírající se o jednoduchý vztah: prostorová bikvadratika 1. druhu promítá se z libovolného svého bodu na rovinu oním bodem neprocházející do rovinné obecné křivky k^3. Jsme tedy před úlohou stanoviti dvě plochy 2. st., jejichž pronikovà křivka by se promítala z jednoho svého bodu O do kubiky, procházející danými body $A, B, \ldots, K$.

1. Čtyři z daných bodů A, B, C, D buďte v nákresně (půd. π). Z kuželoseček svazku jimi určeného vezměme dvě: kuželosečku k^2 jdoucí bodem K (obr. *1*, kde k^2 je kružnicí) a kuželosečku l^2, procházející průsečíkem P spojnic $\overline{EF} \equiv a$, $\overline{GH} \equiv b$ zbývajících čtyř bodů (v obr. *1* bez újmy obecnosti voleno tak, že l^2 je kuželosečka složená z $\overline{AB}$, $\overline{CD}$). Přímky a, b protnou l^2 ještě v bodech Q, R. Bod K buď ortog. průmětem přímky $k \perp \pi$.

Jednu z ploch 2. st., K^2, jdoucí kuželosečkou k^2 a přímkou k, určíme napřed pevně, druhou L^2 kuželosečkou l^2 akomodujeme tak, aby žádanému projekčnímu vztahu mezi pronikovou křivkou obou ploch $k^4 \equiv (K^2, L^2)$ a konstruovanou kubikou k^3 bylo vyhověno.

Považujme body E, F, G, H za centrálné průměty z (neznámého zatím) bodu O na k. Každým z oněch 4 bodů (v prostoru) nechť prochází jedna površka plochy K^2, opačné soustavy než



Obr. 1.

površka k; ortogonální průměty těchto površek jsou KE, KF, KG, KH, stopníky $2, 3, 4, 5$ na k^2. Na površce $k \perp \pi$ zvolme body $2'$, $3'$, v nichž nechť ony površky body E, F (v prostoru) protínají k.

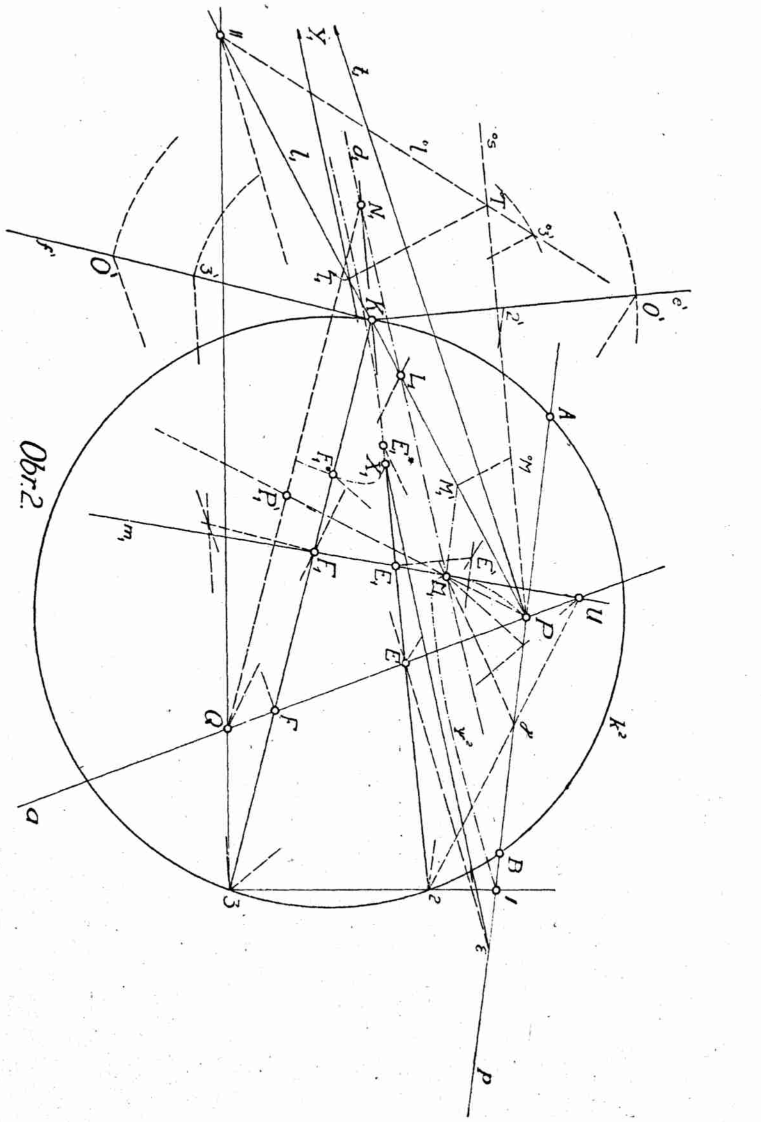
Plocha K^2 (sborcená) je určena: kuželosečkou k^2, přímkou k a projektivním přiřazením bodů na k s příslušnými tečnými rovinami, kolmými k π, tedy bodu $2'$ na k přísluší stopa tečné roviny $\overline{KE2}$ a tedy i stopník 2 na k^2, bodu $3'$ bod 3, bod $K \equiv 1 \equiv 1'$ je samodružný, poněvadž tečná rovina v něm je určena površkou k a tečnou ke k^2. Sklopením k do nákresny dostaneme $k'(1', 2', 3', \ldots)$ $\pi\, k^2(1, 2, 3, \ldots)$, při čemž $1' \equiv 1$. Promítnutím bodů $2'$, $3'$ na př. z bodu 3 na k^2 do bodů 2^*, 3^* ($1^* \equiv 1$) přenesena ona promětnost na kuželosečku k^2, sestrojena direkční osa $\Delta \equiv ((1, (\overline{23^*}, \overline{2^*3}))$. Na to stanoveny na k body $4'$, $5'$, odpovídající stopníkům 4, 5 površek, jdoucích body G, H (v prostoru).

Budeme-li měniti střed centrální projekce O na k, budou se body, jejichž centrálné průměty jsou stále dané body E, F, G, H, pohybovati po čtyřech přímkách $\overline{22'}$, $\overline{33'}$, $\overline{44'}$, $\overline{55'}$. Pro bod $O \equiv K$ (stopník površky k) přejdou ony body v stopníky $2, 3, 4, 5$.

2\. Hledejme plochu L^2. Libovolným bodem O na k a přímkou $a \equiv \overline{EF}$ je stanovena rovina, jež protne površky $\overline{22'}$, $\overline{33'}$ v bodech E, F (jejichž centrálné průměty jsou stejně označeny). Potom pěti body: P, Q, O, E, F je stanovena kuželosečka h^2, protínající kuželosečku l^2 v bodech P, Q. Její tečna t v bodě P stanoví s p rovinu τ. Rovina (O, b) protne površky $\overline{44'}$, $\overline{55'}$ v bodech G, H, rovinu τ v přímce t'; i je body O, G, H, P a tečnou t' v P určena nová kuželosečka h'^2, jež protne b ještě v bodě S, obecně různém od R. Kuželosečkami $l'^2 \equiv \overline{SQ}$, $\overline{AB}$, h^2, h'^2 je určena jistá plocha L'^2, která se proniká s pevnou plochou K^2 v křivce 4. st., jejíž centrálný průmět z O na nákresnu je jistá kubika, procházející sedmi z daných bodů A, B, E, F, G, H, K, neprocházející ale body C, D, nýbrž body C', D', v nichž spojnice $\overline{QS}$ by protínala kuželosečku k^2.*) I je třeba hledat takovou plochu L^2 a tedy takový bod O na k, aby kuželosečka h'^2 procházela bodem R.

Z udaného postupu je patrno, že každému bodu O na k přísluší jeden bod S na stopě b, t. j. obě řady bodové jsou jednoduše projektivní. Ukážeme ještě, že oněm řadám přísluší projektivně i svazek tečných rovin τ o ose $p \equiv \overline{AB}$, t. j. $k(0, \ldots)\ \pi\ b(S, \ldots)$ $\pi\ p(\tau, \ldots)$.

*) Kdyby obecněji kuželosečka l^2 svazku $(ABCD)$ bodem $P \equiv (a, b)$ nebyla složenou, možno vzíti za stopy ploch L'^2 kuželosečky svazku určeného bodem P, tečnou p ke kuž. l^2 v něm, bodem Q a na př. bodem A. Každá kuželosečka l'^2 tohoto svazku bodem S protne kuželosečku k^2 mimo A v třech proměnlivých bodech B', C', D' bodové involuce kubické, na níž by se rozšířila involuce kvadratická bodů C', D' o středu Q v našem speciálnějším případě. Pro $S \equiv R$ ovšem $l'^2 \equiv l^2$.



Obr. 2

Zvolme na k (obr. 2) bod O; promítající paprsek $\overline{OE}$ protne površku $\overline{22'}$ v bodě E (v prost.), jehož ortogonální průmět E_1 sestrojíme sklopením promítající roviny ($O\ 22'$) do π; sklopená površka $k \perp \overline{K2}$ označena (k vyjádření pořadí pro body E, F, G, H) e', $\overline{2'2}$, $\overline{O'E}$ se protnou v bodě E', načež $\overline{E'E_1} \perp \overline{K2}$ dá E_1. Podobně sklopením promítající roviny $(O\ 33')$ $(f' \perp \overline{K3})$ sestrojen ortog. průmět F_1 centrálního průmětu bodu F. Bod O se ortog. promítá do bodu K, takže ortog. průmět kuželosečky h^2 v rovině (O, a) je určen body P, Q, K, E_1, F_1. Přímka $\overline{E_1F_1} \equiv m_1$ je ort. průmětem přímky m, protínající površky $\overline{22'}$, $\overline{33'}$ plochy K^2 a mající stopník $U \equiv (m_1, a)$. Je tedy m površkou hyperboloidu H^2, určeného přímkami $\overline{22'}$, $\overline{33'}$, a. Zvolme na m bod M, jímž a přímkou p, jakožto stopou tečných rovin ploch L'^2, je určena rovina τ, protínající se s rovinou (O, a) v přímce $\overline{PM}$, jež protne kuželosečku h^2 ještě v bodě P', který sestrojíme užitím přímky Pascalovy, označivše $P \equiv 1$, $Q \equiv 3$, $F \equiv 4$, $E \equiv 5$, $O \equiv 6$, $P' \equiv 2$. I je bod $M \equiv (\overline{12}, \overline{45})$, $L \equiv (\overline{34}, \overline{61})$, $N \equiv (\overline{23}, \overline{56})$, $\overline{LMN} \equiv d$ přímkou Pascalovou; spojnice $\overline{NQ}$ protne $\overline{PM}$ v bodě $P' \equiv 2$. Hledejme nyní takovou polohu roviny svazku a, pro kterou bod $P' \equiv P$, t. j. kuželosečka h^2 se bude roviny τ v bodě P dotýkati. Tu měnící se bod M přímky d bude probíhati kuželosečku ψ^2 v obr. 2 naznačenou, jakožto řez hyperboloidu H^2 s rovinou τ, bod L popíše přímku l v rovině $(Q, \overline{33'})$ o stopníku $II \equiv (\overline{Q3}, \overline{KP})$ a jdoucí bodem $3'$. Kuželosečka ψ^2 jde body P, M, bodem I, v němž površka $\overline{23}$ v π protíná p, body E^*, F^*, průsečíky površek $\overline{22'}$, $\overline{33'}$ s τ. Bod E^* se snadno sestrojí: rovina $(m, \overline{22'})$ jako tečná rovina plochy H^2 má stopu $\overline{U2}$, protínající p v bodě γ, $\overline{\gamma M}$ dá na $\overline{22'}$ bod E^*; podobně sestrojen bod F^*.

Přímka d vyplní tudíž površky sborcené plochy 3. stupně s určujícími přímkami a, l a kuželosečkou ψ^2, s a jako površkou dvojnou, protínající ψ^2 v P. Bod N přímky d popíše při tom v promítající rovině površky $\overline{22'}$ křivku 3. st. s dvojným bodem E v nákresně na a. Dvě površky oné pl. 3. st., procházející bodem E, stanoví v něm s a tečné roviny této plochy; stopy těchto rovin na rovině τ (t. j. průměty nekonečně blízkých bodů k bodu E, jako P' byl průmětem bodu N z Q) dají dvě přímky $\overline{XP}$, $\overline{YP}$, pro něž $P' \equiv P$.

Abychom ony dvě površky sestrojili, stanovme průsečnici $\overline{T\varepsilon}$ roviny (E, l) s rovinou τ. Stopou roviny (E, l) je přímka $\overline{EII}$, protínající p v bodě ε, průsečík T přímky l s τ určíme sklopením promítající roviny přímky l $(\overline{{}^03'K} \perp \overline{KP}$, $\overline{{}^03'K} = \overline{K3'}$, $\overline{{}^03'II} \equiv {}^0l)$, jež protne rovinu τ v přímce s, jež současně s l sklopena (stanovena kota bodu M na m, $\overline{MM'} \parallel p$ protne s v bodě M', $\overline{M'_1{}^0M'} \perp \overline{KP}$, $\overline{M'_1{}^0M'}$ = kota bodu M, načež $\overline{P^0M'} \equiv {}^0s$). Průsečík ${}^0T \equiv ({}^0l, {}^0s)$ má ortog. průmět T^1, $\overline{T\varepsilon}$ je hledanou průsečnicí, jež protne kuželosečku ψ^2 v bodech X, Y. Jedním z těchto průsečíků je ale bod

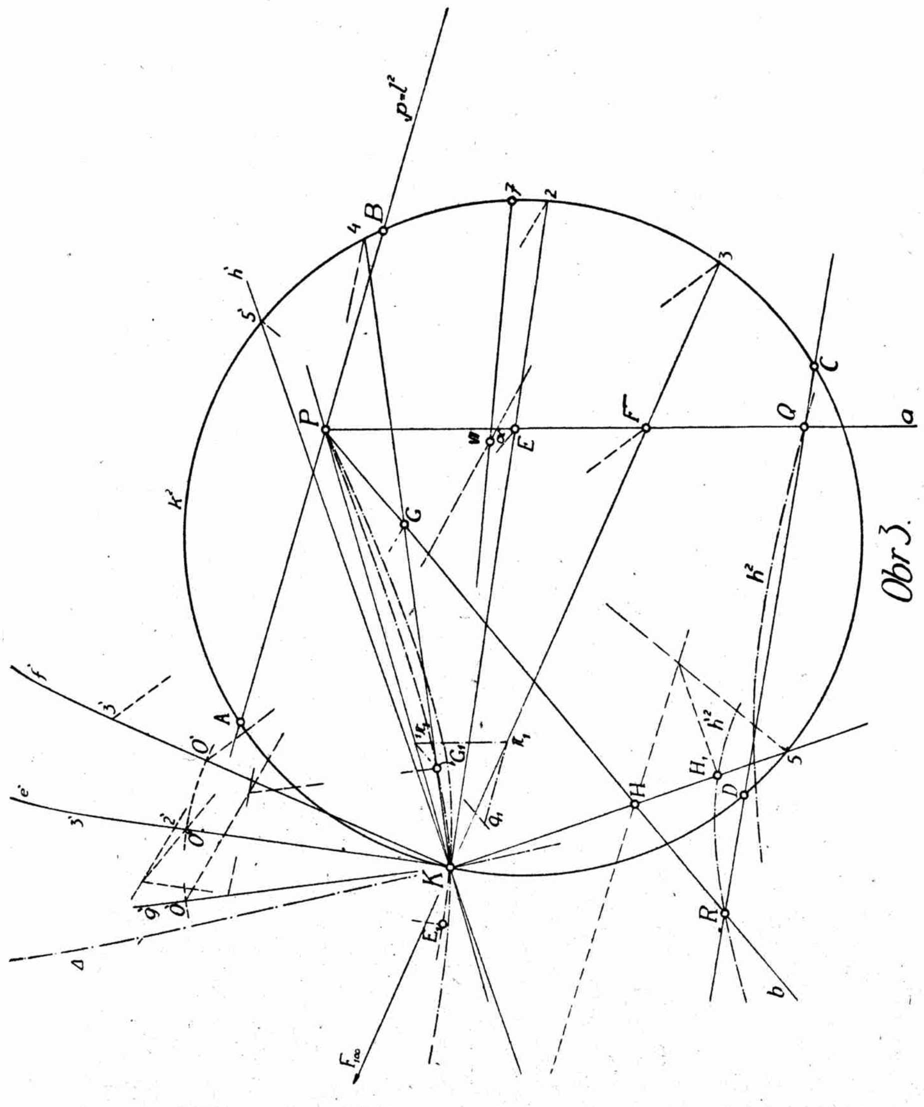
$X = (x, \overline{T\varepsilon})$, jakožto průsečík površky $x \equiv \overline{XE}$ soustavy površky m hyperboloidu H^2, v promítající rovině $(k, 2)$; je tedy x površkou plošе H^2 a ploše 3. st. společnou. Křivka 3. st., jakožto geometrické místo bodu N, se tudíž rozpadá na přímku x a jistou kuželosečku. Druhý, lineární konstrukcí určený bod Y, vede tudíž k površce v bodě E od x různé, načež spojnice $\overline{YP} \equiv t$ je v rovině τ hledanou přímkou podstatnou, rovina (t, a) je jedinou rovinou svazku a, v níž výše uvedeným způsobem určená kuželosečka h^2 se dané roviny τ dotýká. Tím dokázána výše uvedená projektivnost svazku tečných rovin τ s řadami na k, b.

K určení projektivnosti $k(O, \ldots) \pi\, b(S, \ldots)$ stačí přiřazení tří párů bodových. Za body O na k zvoleny (obr. *1*): bod $3'$, bod $6'$ a $1 \equiv K$.

Pro bod $O \equiv 3'$ dostaneme v rovině $(3', a)$ kuželosečku, jejíž ortog. průmět jde body P, Q, E_1, K s tečnou $\overline{K3}$ v tomto bodě. Tečna v bodě P nechť protne $\overline{K3}$ v bodě ν. Příslušná kuželosečka v rovině $(3', b)$ má za ortog. průmět kuželosečku body P, G_1, H_1 (konstrukce bodů G_1, H_1 patrna z obr., užito přímek $g' \perp \overline{K4}$, $h' \perp \overline{K5}$), bodem K a dotýkající se v bodě P přímky $\overline{Pn}$, průsečnice tečné roviny (p, ν) s rovinou $(3', b)$, kterou snadno sestrojíme: $\overline{\nu^1\nu} \parallel a$ jako hlavní přímka roviny (O, a) protne $\overline{3'P}$ (průsečnici rovin $(3', a)$, $(3', b)$) v bodě ${}^1\nu$, jímž sestrojená hlavní přímka $\overline{{}^1\nu n} \parallel b$ roviny $(3', b)$ protne hl. přímku $\overline{\nu n}$ roviny tečné (p, ν), v bodě n, $\overline{Pn}$ je tečnou hledanou. Tím úplně určena kuželosečka roviny $(3', b)$, jež protne b v bodě III^*.

Za druhý bod zvolen $K \equiv 1$ v nákresně. Příslušná plocha L'^2 přechází tu v útvar rovinný. Prvá kuželosečka je určena body $P, Q, K, 2, 3$, tečna k ní v bodě P je $\overline{P\mu}$. Kuželosečka druhá jde body $P, K, 4, 5$ a dotýká se v P přímky $\overline{Pm}$, kterou sestrojíme analogicky přímce $\overline{Pn}$ v případě předchozím: $\overline{\mu^1\mu} \parallel a$ protne $\overline{KP}$ v bodě ${}^1\mu$, $\overline{{}^1\mu m} \parallel b$, $\overline{\mu m} \parallel p$ se protnou v bodě m, $\overline{Pm}$ je tečnou v P druhé kuželosečky, jež protne b v bodě I^*.

Za třetí bod O na k zvolen bod $6'$, pro který se kuželosečka roviny $(6', a)$ [a tedy i roviny $(6', b)$] rozpadá na dvě přímky. Stačí sestrojiti bodem Q příčku površek $\overline{2'2}$, $\overline{3'3}$: rovina $(2'2Q)$ o stopě $\overline{2Q}$ protne promítající rovinu površky $\overline{3'3}$ v přímce $\overline{2'\lambda}$ ($\lambda \equiv \equiv \overline{2Q}, \overline{K3}$), jež protne $\overline{3'3}$ v bodě ${}^1F$, jehož konstrukce sklopením z obr. *1* je patrna; $\overline{{}^1FQ}$ je příčkou hledanou r. Rovina (a, r) protne k v bodě $6'$, jehož kota $\overline{V_1V'}$ určena hlavní přímkou $\overline{KV} \parallel a$, $\overline{V_1V'} \parallel \parallel \overline{{}^1F'{}^1F_1}$ protne $\overline{Q^1F'}$ v bodě V'. Je tedy prvá kuželosečka složenou



Obr. 3.

z přímek r, $\overline{6`P}$. Přímka $\overline{{}^1G^1H}$, spojnice průmětů bodů $G$, $H$ z bodu $6`$, protne b v bodě VI^*.

Tím jsou si na k, b přiřazeny: $3`$, $1`$, $6`$; $III^*$, $I^*$, $VI^*$. Převedeme-li obě řady v polohu perspektivní tím, že na př. ztotožníme $I^* \equiv 1` \equiv {}^0 1$, jímž sestrojíme v nákresně libovolnou přímku a naneseme na ni úsečky $\overline{I^{*0}3}$, $\overline{I^{*0}6}$, rovné kotám bodů $3`$, $6`$, je bod

$\omega \equiv (\overline{III^{*0}3},\ \overline{VI^{*0}6})$ perspektivním středem obou řad; ten spojen s bodem R dá na druhé nositelce bod ${}^0O$, načež v úsečce $\overline{I^{*0}O}$ je *kota hledaného bodu O na k.* Tím určena i plocha L^2.

3. V obr. *3* naznačeny všecky tři kuželosečky l^2, h^2, h'^2 (h^2 v rovině (O, a), h'^2 v rovině (O, b)), dvojnásobně se protínající, s tečnou rovinou v bodě P, jimiž je plocha L^2 úplně určena. Z bodu O promítá se proniková křivka $k^4 \equiv (K^2, L^2)$ do kubiky, určené právě danými body $A, B, C, \ldots, K$. Jí patří i bod *7*, stopník površky $\overline{O7}$ plochy K^2 na kuželosečce k^2, jako šestý průsečík konstruované kubiky s k^2, jakož i bod VII, stopník tečny křivky k^4 v bodě O, t. j. průsečík stopy $\overline{\alpha\beta}$ tečné roviny plochy L^2 v bodě O (α je průsečík tečny kuželosečky $h_1{}^2$ v bodě K s a, β průsečík tečny kuželosečky $h'_1{}^2$ v K s b) se stopou $\overline{K7}$ tečné roviny ke K^2.

Bod K je centrálným průmětem druhého průsečíku Z plochy K^2 s $k \perp \pi$, stopa tečné roviny ke K^2 v tomto bodě už tečnou naší křivky k^3.

Konstrukce dalších bodů je už patrna: libovolná rovina přímkou k protne plochu K^2 (mimo k) v površce j, plochu L^2 v kuželosečce j^2, jejichž dva průsečíky (vedle pevných O, Z) centrálně z O do nákresny promítnuty dají dva body křivky k^3.

Tečna křivky k^3 v libovolném jejím bodě se sestrojí jako centrálný průmět tečny ke křivce k^4 v odpovídajícím bodě; známá konstrukce oskulační roviny v bodě křivky k^4 zprostředkuje i konstrukci oskulační kružnice naší křivky k^3, atd.

*

Note sur la construction d'une cubique plane générale.

(Extrait de l'article précédent.)

Cette construction est effectuée par la résolution du problème: déterminer deux quadriques dont l'intersection est projetée d'un de ses points sur le plan suivant la cubique passant par neuf points donnés.

Inversní kombinované účinky X-paprsků a katodových paprsků.*)

Dr. *Adéla Němejcová.*)

(Došlo 17. listopadu 1931.)

Úkolem práce bylo studovati kombinované účinky různých druhů záření. Účinky jednotlivých záření na různé látky jsou nestejné a při studiu kombinovaných účinků je nutno, aby účinky jednotlivých záření byly řádově stejné (t. j., aby jedno záření nemělo účinek veliký a druhé nepatrný). Takový reagens, na který by tyto účinky byly stejné, jest fotografická deska. Proto jsem zanechala studium chemických účinků na různé látky a při studiu kombinovaných účinků užívala jsem pouze cesty fotografické. Výsledek působení všech druhů záření, s nimiž jsem pracovala, a to: X-paprsků, katodových paprsků, bílého světla a tepla jest totiž v tomto případě jednotný, je to černání fotografické desky, které lze snadno změřiti.

Při tom však musím podotknouti hned, že černání desky, způsobené různými druhy záření, není po stránce kvalitativní stejné. Tak na př. se ukázalo, že lze velmi snadno rozeznati černání, způsobené X-paprsky, od černání, způsobeného katodovými paprsky a teplem; deska černá účinkem X-paprsků stejnoměrně a má tón šedý, kdežto černání způsobené teplem nebo katodovými paprsky je nestejnoměrné, objevují se šmouhy a tón barvy je do hněda. Tato obdoba mezi účinkem tepelným a účinkem katodových paprsků, jež se při mé práci ukázala, má patrně hlubší podstatu.[1])

Ačkoli tedy výsledek s různými druhy záření je vždy černání fotografické desky, mohla jsem tohoto černání pro míru i různost

*) Z části předneseno na: III. Congrès international de Radiologie, Paris 1931.

[1]) Podle některých röntgenologů se spáleniny katodovými paprsky chovají podobně jako spáleniny teplem, kdežto spáleniny X-paprsky se chovají podstatně jinak.

účinků jednotlivých druhů záření použíti, neboť tyto účinky se vždy nesčítaly, nýbrž, jak bude později ukázáno, se částečně navzájem rušily.

Než přistoupím k vlastním výsledkům, zmíním se stručně o postupu práce a o zdrojích, jež jsem používala pro jednotlivé druhy záření.

Během celé práce jsem používala desky Ultra-Rapid „Eisenberger". Tento druh desek totiž, jak se ukázalo, snadno jeví inversní zjevy[2]) a snáší velmi dobře vyšší teploty. Při ozařování X-paprsky, katodovými paprsky, a při vystavení tepelným účinkům byly desky zabaleny v černém papíře. Vyvolávání dělo se v naprosté tmě, ve vývojce methol-adurolové, při teplotě 18° C a po 3 minuty. Hustoty černání byly proměřovány Martensovým fotometrem[3]) a výsledky byly ještě kontrolovány Mollovým mikrofotometrem.

Zdrojem X-paprsků byla röntgenová lampa „Media",[4]) kterou jsem používala s hliníkovým filtrem 2 *mm* silným, při napětí 50 *kV*. Touto volbou napětí a aluminiovým filtrem jsem obdržela záření značně homogenní. Zdrojem katodových paprsků byla katodová trubice[5]) při napětí 70 *kV*. Tepelným účinkům byly desky vystaveny v termostatu při teplotě 110° C, která, jak se ukázalo, byla pro práci nejvýhodnější. Zdrojem bílého světla byla elektrická žárovka, udržovaná na stálém napětí.

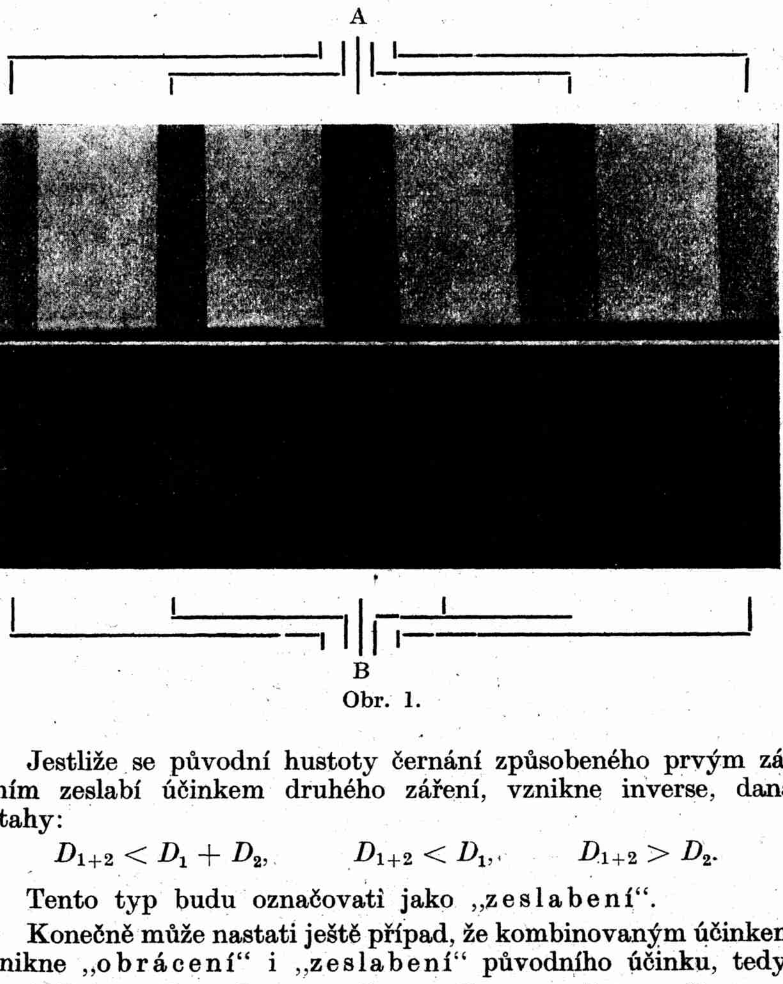
Prvá kombinace účinků, kterou jsem zkoušela, byla *X-paprsky a teplo*. Souběžně s výsledky, jež jsem obdržela pro tuto kombinaci, proberu hned výsledky, jež jsem obdržela pro kombinaci *katodových paprsků a tepla*.

Obr. č. 1 jest typický příklad pro takový inversní úkaz kombinace účinků X-paprsků a tepla. Horní polovina obrázku představuje účinek pouhých X-paprsků a dolní polovina účinek kombinovaný X-paprsků a tepla. Na desku jsem napřed naexponovala pruhy X-paprsky (A), různých hustot a pak vystavila desku působení tepla v termostatu. Jak jest viděti na tomto obrázku, pruhy, jež byly původně dotčeny účinkem X-paprsků a pak tepla (B), jsou světlejší, mají menší absolutní hustotu než místa desky, dotčená pouze teplem. Při tom však, srovnáme-li v tomto případě hustotu černání, způsobenou pouze účinkem X-paprsků, a hustotu, způsobenou kombinovaným účinkem, jest hustota kombinovaného účinku větší než hustota způsobená pouze X-paprsky. To jest jeden typ inversního zjevu. Budu mu v dalším prostě říkat „obrácení". Označíme-li hustotu černání, způsobeného prvým

[2]) Villard effekt, Claydenův zjev atd.
[3]) Laskavě zapůjčeným prof. Dr. V. Vojtěchem.
[4]) Dar firmy Müller Spektroskopickému ústavu.
[5]) Rovněž dar firmy Müller Spektroskopickému ústavu.

zářením D_1, hustotu způsobenou druhým zářením D_2 a hustotu způsobenou účinkem kombinovaným obou záření v pořadí daném sledem indexů D_{1+2}, pak bude „obrácení“ vyjádřeno následujícími vztahy:

$$D_{1+2} < D_1 + D_2, \qquad D_{1+2} > D_1, \qquad D_{1+2} < D_2.$$



Obr. 1.

Jestliže se původní hustoty černání způsobeného prvým zářením zeslabí účinkem druhého záření, vznikne inverse, daná vztahy:

$$D_{1+2} < D_1 + D_2, \qquad D_{1+2} < D_1, \qquad D_{1+2} > D_2.$$

Tento typ budu označovati jako „zeslabení“.

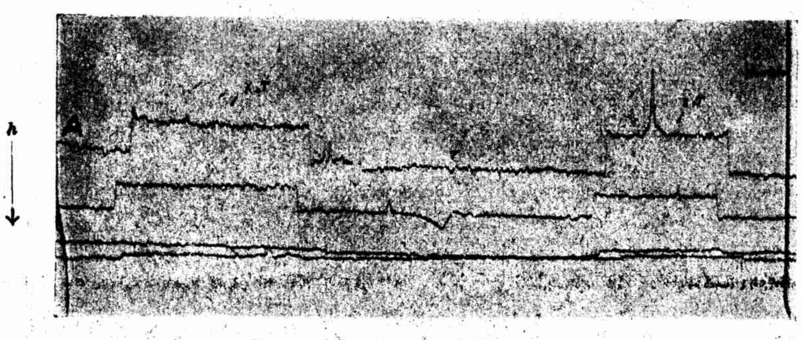
Konečně může nastati ještě případ, že kombinovaným účinkem vznikne „obrácení“ i „zeslabení“ původního účinku, tedy:

$$D_{1+2} < D_1 + D_2, \qquad D_{1+2} < D_1, \qquad D_{1+2} < D_2.$$

Inversní zjev vznikající kombinačním účinkem X-paprsků, resp. katodových paprsků a tepla jsem zkoumala pro obor hustot černání X-paprsky od 0·2—1·6 a pro obor hustot černání katodovými paprsky od 1·3—1·6 (menší černání katodovými paprsky nebylo možno z důvodů technických zatím dostati). Dostala jsem tyto výsledky:

Kombinací X-paprsků resp. katodových paprsků a tepla vznikají inversní účinky v uvedených oborech absolutních hustot:

1. Vždy jen při určitém pořadí, totiž exposice X-paprsky, resp. katodovými paprsky musí předcházeti exposici tepelné. Při opačném pořadí inverse nikdy nenastane, nýbrž kombinovaný účinek je vždycky silnější než černání způsobené účinkem jednotlivých záření o sobě.



Obr. 2.

2. Pro hustoty černání způsobené X-paprsky resp. katodovými paprsky asi do 1·4 nastává pro obojí paprsky stejný inversní zjev totiž „obrácení", jehož příklad znázorňuje obr. 1 a část příslušné mikrofotometrické křivky A v obr. 2. Na tomto obrázku jest několik mikrofotometrických křivek pro kombinovaný účinek X-paprsků a tepla, jež jsou v tomto oboru hustot zcela podobné mikrofotometrickým křivkám pro kombinační účinek katodových paprsků a tepla. Směr rostoucích absolutních hustot jest vyznačen šipkou. Kombinační účinek X-paprsků a tepla označen $X + T$, účinek pouhého tepla T.

Sledujeme-li v tomto oboru hustot vliv rostoucí tepelné exposice, původní hustoty exposice X-paprsky, resp. katodovými paprsky se nejdříve zesílí, ale volí-li se dostatečně dlouhá tepelná exposice, nastane i „zeslabení" původní hustoty. Jako příklad jest uvedeno několik číselných hodnot v následujících dvou tabulkách. První tabulka platí pro kombinovaný účinek X-paprsků a tepla, druhá katodových paprsků a tepla. Voleny byly úmyslně počáteční hustoty černání X-paprsky a katodovými paprsky přibližně stejné. V prvém sloupci jest uvedena délka tepelné exposice v minutách. Ve druhém je černání způsobené tepelnou exposicí samotnou (jak jest viděti z obou tabulek, jest nesnadno zaručiti stejné černání při stejné délce tepelné exposice). Ve třetím sloupci je hustota černání způsobená kombinovaným účinkem a konečně v posledním sloupci rozdíl hustoty způsobené kombinovaným účinkem a hustoty způsobené účinkem tepla, který jest v těchto případech vesměs záporný („obrácení").

Tab. 1.

Exposice X-paprsky 20 min., černání způsobené absolutní hustoty 1·34.

Délka tep. expos. v min.	Hustota tep. exposice	Hustota $X + T$	$\Delta h =$ $= (X + T) - T$
60	1·56	1·54	— 0·02
90	1·66	1·63	— 0·03
120	1·02	1·01	— 0·01
150	1·08	1·05	— 0·03

Tab. 2.

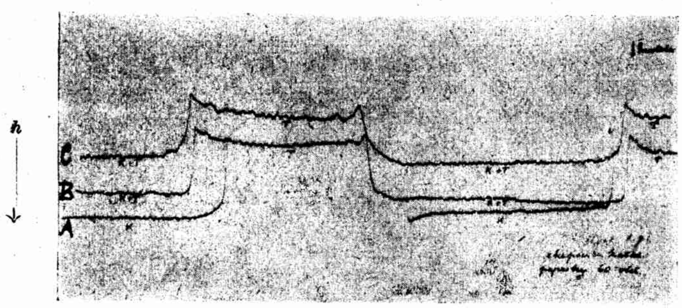
Exposice katodovými paprsky 5 vteř., způsobené černání absolutní hustoty 1·34.

Délka tep. expos. v min.	Hustota tep. exposice	Hustota $K + T$	$\Delta h =$ $= (K + T) - T$
60	1·53	1·40	— 0·50
90	1·70	1·67	— 0·03
120	1·49	1·48	— 0·01
180	1·29	1·22	— 0·07

3. Při hustotách větších než 1·4 nastává mezi X-paprsky a katodovými paprsky jeden zásadní rozdíl. Inversní úkazy sice trvají pro obě záření dále, ale nejsou již stejné. Kdežto pro X-paprsky trvá „obrácení" a „zeslabení", volí-li se jen dosti dlouhá tepelná exposice, nelze obdržeti pro exposice katodových paprsků stejné absolutní hustoty „obrácení" při sebe delší tepelné exposici (až 6 hodin). Původní exposice katodovými paprsky se sice působením tepla zeslabí, tedy inverse nastane, ale „obrácení" nenastane, t. j. původní exposice katodovými paprsky vystupují tmavě na černání způsobeném teplem.

Obr. č. 3 ukazuje mikrofotometrické křivky inverse účinků katodových paprsků teplem pro hustoty větší než 1·4. Šipka v obrázku značí opět směr rostoucích hustot. Křivka $A - A$ představuje účinek pouhých katodových paprsků, křivka B účinek kombinovaný po hodinové tepelné exposici a křivka C kombinovaný účinek po dvouhodinové tepelné exposici. Jak je viděti, největší hustoty má křivka $A - A$, pak křivka B a nejmenší křivka C.

V následující tabulce je uvedeno několik numerických hodnot jako příklad pro inversní zjev, vzniklý kombinovaným účinkem katodových paprsků a tepla. Význam čísel v jednotlivých sloupcích jest jasný. Jak jest z tabulky viděti, je $\Delta h = (K + T) - T$ všude kladné, tedy „obrácení“ nenastane, ale původní hustoty jsou účinkem tepla zeslabeny až k dvouhodinové tepelné exposici, pak opět začínají vzrůstati. Hodnoty se vztahují k 60vteřinové exposici katodovými paprsky, které odpovídá absolutní hustota 1·47.



Obr. 3.

Tab. 3.

Délka tep. expos. v min.	Hustota tep. expos.	Hustota $K + T$	$\Delta h =$ $= (K + T) - T$
30	1·23	1·40	+ 0·17
60	1·17	1·29	+ 0·12
120	1·16	1·21	+ 0·05
240	1·21	1·23	+ 0·02
360	1·60	1·75	+ 0·15

Neobvyklý numerický průběh účinků tepla je v tomto případě způsoben značným závojem (0·46 — 0·57), který vzniká na deskách při těchto exposicích katodovými paprsky.

Zjistila jsem obecně, že má-li se pro stejné hustoty černání způsobené X-paprsky a katodovými paprsky obdržeti stejné zeslabení, jest průměrně třeba u katodových paprsků delší tepelné exposice než u X-paprsků. Otázka je, zdali je to způsobeno větší vzdorností účinků katodových paprsků vůči teplu nebo větší příbuzností účinků katodových paprsků s účinky způsobenými teplem.

Další kombinace, kterou jsem zkoumala, byla kombinace účinků *X-paprsků a bílého světla* a *katodových paprsků a bílého světla*. Kombinovaným účinkem bílého světla a X-paprsků vzniká t. zv. Villardův effekt,[6]) již známý. Musila jsem jej však znovu v tomto případě studovati pro daný druh desek, abych zjistila jednak, zdali tyto desky vůbec Villardův efekt jeví, a za druhé, aby bylo možno zjistiti, zdali podobný zjev existuje také pro katodové paprsky. Podařilo se mi nalézti pro katodové paprsky zcela obdobný zjev se zjevem Villardovým. Zajímavé jest, že zde nebylo možno zjistiti žádný rozdíl v chování X-paprsků a katodových paprsků.

Inverse pro kombinaci X-paprsků resp. katodových paprsků s bílým světlem nastává jen pro pořadí X-paprsky — bílé světlo, resp. katodové paprsky — bílé světlo. „Obrácení" a „zeslabení" nastávají jen pro určitý, u obou záření (t. j. X a K) stejný obor hustot a pro určitý opět u obou záření stejný obor hustot černání bílého světla.

Konečně jsem zkoumala přímo kombinaci účinků *X-paprsků a katodových paprsků*. S počátku jsem opět pracovala s röntgenovou lampou jako v předchozích případech při napětí 50 kV a intensitě 1·5 mA. Exposiční doby pro X-paprsky jsem stupňovala od několika vteřin do 2 hodin a zkoušela jsem obojí pořadí X-paprsky — katodové paprsky i katodové paprsky — X-paprsky. Nemohla jsem však s určitostí konstatovati žádnou inversi. Avšak při napětí 60 kV a intensitě 50 mA se již kombinací s katodovými paprsky ukázal inversní zjev. Exposice X-paprsky se při tom pohybovaly v dobách od $^1/_2$—1 hodin a exposice katodovými paprsky od 5—60 vteřin.

Pracovala jsem opět tak, že jsem na desku naexponovala pruhy stoupajících hustot X-paprsky napříč desky a pak zakryla v podélném směru polovinu desky olověným plechem 3 mm silným a vystavila účinku katodových paprsků. Podařilo se mi pak v tomto druhém případě kombinací účinků X-paprsků a katodových paprsků dostati „obrácení" i „zeslabení".

Ukázalo se, že:

1. Inversní účinky mezi katodovými paprsky a X-paprsky nezávisí podstatně na pořadí obou záření, což je velmi důležité. Všechny předešlé inversní účinky závisely na pořadí. Lze pouze říci, že lze snáze dosíci „obrácení" a „zeslabení" pro pořadí katodové paprsky — X-paprsky než při pořadí opačném.

2. Pro každou absolutní hustotu katodovými paprsky z oboru 1·3 — 1·6 existuje určitý, velmi úzký

[6]) Viz C. R. 1899, 128 pg. 237, dále C. R. 1927, 184 pg. 309 a j.

obor hustot X-paprsky, jenž dává kombinací inversní zjev. Tento velmi úzký obor hustot X-paprsky prostírá se kolem té absolutní hustoty, jež se rovná hustotě černání způsobené katodovými paprsky. Je tedy zhruba možno říci, že inversní zjevy pro kombinaci X-paprsků a katodových paprsků nastávají v oboru hustot 1·3 — 1·6, a to pro stejné hustoty černání způsobených X-paprsky i katodovými paprsky.

Pro nižší a vyšší hustoty než zmíněný obor jsem inversní zjev nedostala. Není však vyloučeno, že existuje, protože bylo obtížno dostati u katodových paprsků nižší hustoty než 1·3 pro krátkost exposičních dob a naopak zase pro X-paprsky větší hustoty než 1·6.

Připomínám, že se nemohlo v žádném případě jednati o přeexposici desky, ježto jsem dostala ostré ohraničení inversního úkazu směrem k delším exposicím.

Inversní zjev mezi katodovými paprsky a X-paprsky svědčí pro to, že mezi vlastnostmi X-paprsků a katodových paprsků musí existovati pokud se týče jejich účinků podstatný rozdíl, který nelze jen vysvětlit absorbováním různých energetických kvant v časové jednotce.[7]) Nemůže se tu také jednati o t. zv. zjev Cleydenův, totiž inversi, která se dostane při kombinovaném účinku dvou záření kvalitativně stejných, ale velmi různých intensit, neboť zjev Cleydenův nastane jen pro určité pořadí obou záření, kdežto inverse pro kombinovaný účinek X-paprsků a katodových paprsků nezávisí podstatně na pořadí.

V práci uvedené inversní zjevy mezi X-paprsky a katodovými paprsky nelze tedy zatím vyložiti jinak než různým charakterem X-paprsků a katodových paprsků.

Myslím, že podávati výklad těchto značně komplikovaných zjevů z dosud získaného materiálu bylo by předčasné. Byly sice podány různé výklady různosti účinků X-paprsků a γ-paprsků,[8]) ale otázka tato není též dosud zcela uspokojivě fysikálně rozřešena, ač získaného materiálu je mnohem více.

Spektroskopický ústav university Karlovy v Praze.

*

[7]) Naturwissenschaften, 1931, 19, pg. 251 R. Glocker und M. Lagendorfer: Zur Frage der spezifischen Wirkung der Kathodenstrahlen auf die Zelle.

[8]) III. Congrès international de Radiologie: *Glaser*, O. et Portmann U. V.: Additional experiences in the Measurement of Röntgen and Radium Radiation by physical and biological Methode. *Failla, G* et *Henshaw*, P. S.: The relativ biological Effectiveness of X-Rays and Gamma-Rays. *Holthusen H.*: Vergleichende Messungen über die Wirkung von Röntgen und Radiumstrahlen.

Les effets inverses combinés des rayons X et des rayons cathodiques.

(Extrait de l'article précédent.)

On a étudié l'effet combiné de diverses radiations: électrons, rayons X, la lumière visible, la chaleur sur la plaque photographique.

Il est déjà connu qu'en appliquant à la plaque photographique d'abord les rayons X et puis la lumière visible, le noircissement qui en résulte est dans certains cas plus petit que celui causé par l'une des deux radiations. C'est l'effet de Villard. Cet effet apparaît seulement 1) quand on fait agir les deux radiations dans un certain ordre: d'abord les rayons X et puis la lumière visible, 2) seulement à certaines densités de noircissement causé par la lumière visible.

Or, en appliquant les rayons cathodiques et puis la lumière visible, nous avons trouvé un effet inverse tout à fait semblable à l'effet de Villard. En examinant, d'une part, l'effet inverse des rayons X et de la lumière visible et, d'autre part, l'effet inverse des rayons cathodiques et de la lumière visible, on trouve que ces deux effets inverses ne se manifestent que pour un certain ordre des radiations appliquées (que ce soient les rayons X ou les rayons cathodiques), et pour de certains noircissements, absolument égaux, causés par les rayons X et les rayons cathodiques.

En faisant agir sur la plaque photographique les rayons X ou les rayons cathodiques et puis la chaleur, on peut remarquer aussi un effet inverse; celui-ci se produit seulement quand les rayons X ou les rayons cathodiques agissent comme le premier et la chaleur comme le second agent.

Cet effet a la même apparence pour les deux radiations, X et rayons cathodiques, seulement pour des noircissements des rayons X et des rayons cathodiques jusqu'à la densité 1,4; pour ces valeurs le noircissement résultant de l'effet combiné est moins intense que celui causé par la chaleur seule. Le noircissement causé par l'effet combiné est aussi plus petit que le noircissement causé par les rayons X ou les rayons cathodiques seuls, pourvu que les temps d'exposition soient assez longs pour la chaleur.

Mais en augmentant le noircissement causé par les rayons X ou les rayons cathodiques, on trouve que l'apparence d'effet combiné des rayons X et de la chaleur reste la même, tandis que pour les rayons cathodiques on ne peut obtenir par la chaleur un noircissement moindre que celui de la chaleur, quelque grands que soient les temps d'expositions de la chaleur appliquée.

Par l'effet de la chaleur le noircissement primitivement causé par les rayons cathodiques diminue, mais il reste toujours plus grand que le noircissement causé par la chaleur elle-même.

Enfin, on a examiné directement l'effet combiné des rayons X et des rayons cathodiques. On a trouvé que l'inversion se produit aussi pour ces deux radiations, mais cet effet inverse ne dépend essentiellement de l'ordre des radiations appliquées (c'est à dire on peut obtenir l'inversion en appliquant d'abord les rayons X et puis les rayons cathodiques ou d'abord les rayons cathodiques et puis les rayons X). Cet effet inverse fut observé dans la région 1,3—1,6 de densité de noircissement pour les radiations envisagées.

Stanovení absorpčních skoků v oboru X-paprsků.

(Předneseno ve fysikální sekci J. Č. M. F. dne 3. března 1931.)

V. Posejpal.

(Došlo dne 12. září 1931.)

1. Dopadá-li kolmo na deštičku tloušťky dx svazek rovnoběžných paprsků intensity J, vychází z deštičky týž svazek zeslaben na intensitu J'. Rozdíl $J - J' = - dJ$ se objeví jednak jako záření rozptýlené, difusní, obnosem $- dJ_1$, jednak se přemění skutečným absorpčním procesem na jiný druh energie, obnosem $- dJ_2$. V prvém přiblížení platí $- dJ_2 = \tau J \,.\, dx$, kdež τ je konstanta úměrnosti a nazývá se pravý absorpční koeficient nebo také koeficient transformační.

Pravý absorpční koeficient závisí jednak na povaze látky, jednak na délce vlnové. Uvažujeme-li látku jednoduchou, prvek o atomovém čísle N, probíhá τ s délkou vlnovou obecně podle křivky vyznačené v obraze 1, ve kterém místo τ je nanášen tak zvaný specifický koeficient absorpční τ/ϱ, ϱ specifická hmota uvažované látky.

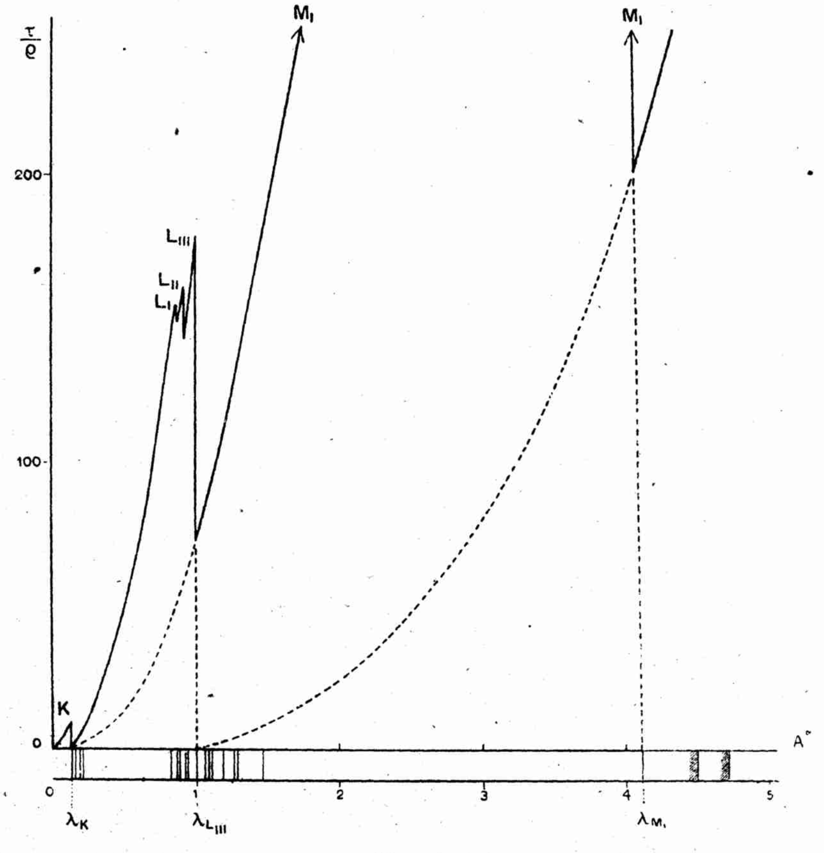
Křivka ta je význačná ostrými diskontinuitami, které se dostavují při délkách vlnových λ_K, λ_{L_1}, λ_{L_2}, λ_{L_3}, atd. Tyto délky vlnové udávají ve spektru absorpčním polohu absorpčních hran a jsou limitními délkami vlnovými serií K, L_1, L_2, atd. a současně měrou energie stejnojmenných niveau.

Nazýváme poměr

$$\frac{\tau_{\lambda_K - \varepsilon}}{\tau_{\lambda_K + \varepsilon}}, \quad \lim \varepsilon = 0$$

absorpční skok K a označujeme jej symbolem δ_{K/L_1}. Obdobně můžeme definovati další absorpční skoky L_1, L_2, L_3 atd., avšak tam věc zejména po stránce experimentální je ještě málo propracovaná a nebudeme se tím zde zabývati.

Přeměníme-li obraz 1 na souřadnice logaritmické, kladouce za úsečku log λ, za pořadnici log τ (respektive log τ/ϱ), přejde křivka v přímku, která na absorpční hraně K se posune o trať log δ_{K/L_1} ve směru klesající ordinaty, aby pokračovala dále rovnoběžně



Obr. 1.

s prvou částí. Tím toto logaritmické znázornění umožňuje z několika měření absorpce pro délky vlnové před hranou K a za hranou K graficky stanoviti absorpční skok δ_{K/L_1}.

Diskontinuity absorpčního koeficientu názorně ilustruje zavedení pojmu tak zvaných dílčích absorpcí, jimž přináleží dílčí transformační abs. koeficienty τ_K, τ_{L_1}, τ_{L_2}, atd. Koeficient τ_K měří tu část absorpce, která vzniká fotoelektrickým vypuzováním elektronů z niveau K. Patrně je $\tau_K = 0$ pro $\lambda = 0$, s rostoucím λ roste a nabývá maximální hodnoty pro $\lambda = \lambda_K$, načež náhle klesne na nulu, jíž se rovná pro všecky další délky vlnové $\lambda > \lambda_K$. Obdobně koeficient τ_{L_1} vzniká souhrou elektronů niveau L_1, začíná nulou pro $\lambda = 0$, pak stoupá a konečně klesne náhle, dosáhnuv své největší hodnoty pro $\lambda = \lambda_{L_1}$, tamtéž na nulu, atd. Je tedy $\underset{\lambda<\lambda_K}{\tau = \tau_K + \tau_{L_1} + \tau_{L_2} + \ldots}$, $\underset{\lambda_{L_1}>\lambda>\lambda_K}{\tau = \tau_{L_1} + \tau_{L_2} + \tau_{L_3} + \ldots}$ Je jasno, že pro absorpční skok δ_{K/L_1} platí

$$\delta_{K/L_1} = \frac{\tau_K + \tau_{L_1} + \tau_{L_2} + \tau_{L_3} + \tau_{M_1} + \ldots}{\tau_{L_1} + \tau_{L_2} + \tau_{L_3} + \tau_{M_1} + \ldots} \tag{1}$$

2. Experimentální stanovení absorpčního skoku δ_{K/L_1} se děje, jak již naznačeno svrchu, měřením absorpce jednak v oboru před λ_K, jednak v oboru za λ_K a před λ_{L_1}. Sestrojíme příslušný graf, buď (λ, τ) nebo $(\log \lambda, \log \tau)$ a extrapolujíce obě větve křivky (přímky v druhém případě), až k λ_K, určíme δ_{K/L_1}. Při tom je důležito zdůrazniti experimentální fakt, že nanášíme-li pro délky vlnové $\lambda > \lambda_K$ do grafu (λ, τ) za pořadnice místo τ hodnoty δ_{K/L_1}-kráte větší, dostaneme křivku, která se spojitě připojuje k první větvi křivky pro $\lambda < \lambda_K$. Totéž ovšem platí i pro souřadnice logaritmické, kde místo $\log \tau$ nanášíme $\log \tau + \log \delta_{K/L_1}$. Tato věc je pěkně patrna na grafech, které přináší ve své práci E. Jönsson[1]), zejména z obr. 9 a 10 (Aluminium), 11 a 12 (Nikl), 13 a 14 (Měď). (Projekce.) Je z nich patrno, že τ je v celém oboru L_1, to jest za absorpční hranou K a před absorpční hranou L_1, veskrze δ_{K/L_1}-kráte menší, než by bylo, kdyby nebylo absorpční diskontinuity.

3. Výsledky měřením naznačeným získané brzy ukázaly, že absorpční skok δ_{K/L_1} se mění s atomovým číslem N. Tak na př. máme okrouhle pro aluminium $\delta_{K/L_1} = 12{\cdot}6$, pro měď 8·2, wolfram 5·7, uran 5·3. Tím vzniká úloha vyjádřiti δ_{K/L_1} teoreticky jako funkci atomového čísla.

a) První řešení této úlohy plyne z teorií absorpce X-paprsků, které podali J. J. Thomson,[2]) A. H. Compton,[3]) L. de Broglie[4]) a G. E. M. Jauncey.[5]) Z těchto teorií vyplývá souhlasně pro dílčí absorpci na libovolném niveau X výraz

$$\tau_x = C \frac{n_x}{\lambda_x^2} \lambda^3,$$

ve kterém značí n_x počet elektronů na uvažovaném niveau v atomu

[1]) E. Jönsson, Absorptionsmessungen im langwelligen Röntgengebiet und Gesetze der Absorption. Upsala, 1928.
[2]) Conduction of Electricity through Gases, 2. vyd. p. 325.
[3]) Phys. Rew. 14, p. 247, 1919.
[4]) Journal de Phys. 3, p. 33, 1922.
[5]) Phil. Mag. 48, p. 81, 1924.

normálním, C konstantu pro dané atomové číslo N. Vyjádříme-li podle tohoto vzorce dílčí absorpce v rovnici (1) a uvážíme, že λ_x je nepřímo úměrné extrakční práci, potřebné ke vzdálení elektronu z niveau X do nekonečna, kteroužto práci označme E_x, dostáváme pro absorpční skok na hraně K formuli (2)

$$\delta_{K/L_1} = \frac{n_K E_K{}^2 + n_L E_L{}^2 + n_M E_M{}^2 + \ldots}{n_L E_L{}^2 + n_M E_M{}^2 + \ldots}. \tag{2}$$

Hodnoty, které podle této formule obdržíme, jsou všeobecně příliš veliké proti hodnotám naměřeným. Tak E. Jönsson podle ní počítá ve své svrchu zmíněné práci K-absorpční skok mědi a dochází k hodnotě 20·5, zatím co hodnota jím naměřená činí 8·2.

β) Docela novou, od předchozích odlišnou teorii absorpce X-paprsků podal na základě principu korespondenčního A. H. Kramers.[6]) Plyne z ní, že absorpční skok δ_{K/L_1} je pro všecky prvky přibližně stejně veliký a rovný 5·5, což ovšem s měřením naprosto nesouhlasí.

Nejnověji se pokusil o teoretické určení absorpčního skoku δ_{K/L_1} M. Stobbe[7]) a to aplikací kvantové mechaniky na fotoelektrické procesy. V jeho velmi složitém vzorci nepřicházejí skutečná čísla atomová, nýbrž tak zvaná efektivní, která zbývá určiti, a platnost vzorce je omezena pouze na atomy těžké, velkého atomového čísla. Stobbe proto vyčísluje svůj vzorec jen pro prvky od platiny ($N = 78$) až po olovo ($N = 82$), pro něž dostává přibližně stálou hodnotu $\delta_{K/L_1} = 5{\cdot}39$, a pak pro uran ($N = 92$), pro který nachází 5·38. To je tedy výsledek v podstatě shodný s tím, který dává teorie Kramersova a tedy odporující měření.

4. Na základě svých představ o povaze světelného éteru[8]) jsem odvodil pro absorpční skok δ_{K/L_1} následující výraz

$$\delta_{K/L_1} = 1 + \frac{10 - \eta}{a}, \tag{3}$$

ve kterém jest

$$a = \frac{1}{2^3} N_{L_1} + \frac{2}{3^3} N_{L_2} + \frac{3}{4^3} N_{L_3} + \frac{4}{5^3} N_{M_1} + \ldots,$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left[\frac{N-2}{N+1}\sum_{N=3}^{N}\frac{1}{N-2} + \frac{N-3}{N+1}\sum_{N=4}^{N}\frac{N+2}{N+1}\cdot\frac{1}{N-3}\right].$$

Při tom značí N atomové číslo a N_{L_1} počet elektronů normálně přítomných na niveau L_1, atd.

[6]) Phil. Mag. 46, p. 836, 1923.
[7]) Annalen der Phys. (5) B. 7, p. 709, 1930.
[8]) Rozpravy II. tř. České akademie roč. XXXVII, čís. 7 a čís. 39, 1928; roč. XL, čís. 35, 1930; ročník XLI, čís. 19, 1931.

Podle odvození vzorce (3) vychází, že η je vedle 10 malé pro malé N. Vynecháme-li je tedy, dostaneme vzorec

$$\delta_{K/L_1} = 1 + \frac{10}{a}, \qquad (3')$$

který platí v prvém přiblížení pro lehké prvky. Tak na př. pro aluminium, nejlehčí to prvek, pro který δ_{K/L_1} bylo dosud měřeno, dává tento zkrácený vzorec hodnotu 15·86, zatím co hodnota měřená činí 12·6, obdobně dále (první číslo hodnota vypočtená podle (3′), druhá v závorce, hodnota měřená) pro síru 14·68 (11·0), chlor 14·36 (10.4) atd. Pro měď dává 12·17 (8·2), zatím co vzorec (2) dává 20·5. Je tedy i tento vzorec přibližný v převaze nad všemi ostatními, ježto dává daleko lepší souhlas než vzorec Thomson-Compton - Broglie i než teorie Kramersova, kdežto vzorec Stobbe pro lehké prvky vůbec neplatí.

Výsledky vypočtené podle úplného vzorce (3) přináší přítomná tabulka, ve které prvý sloupec obsahuje značky prvků a jejich atomová čísla, sloupec druhý hodnoty η, sloupec třetí hodnoty a a konečně sloupec čtvrtý výpočet absorpčního skoku δ_{K/L_1}. Sloupec pátý a šestý přináší hodnoty empirické, získané měřením. A sice jsou ve sloupci šestém všecka dosud známá měření získaná pomocí absorpčních koeficientů, jak to bylo výše vysvětleno. Jsou uvedena podle soupisu, který pořídil Jönsson na str. 62 citované práce. Čísla v závorkách jsou výsledky, které měřením získal Allen, za rovnítkem následují hodnoty, které z nich po provedení jistých korekcí určil Jönsson. Hodnoty pro prvky atomového čísla 15—17 jsou data novějšího, získal je B. Woernle r. 1930.[9]) Sloupec pátý přináší hodnoty empirické získané z měření délky vlnové absorpčních hran. Zkušenost ukazuje, a prvý to poznal F. K. Richtmyer,[10]) později roku 1928 určitěji E. Jönsson (loco cit p. 61), že platí s velkým přiblížením

$$\delta_{K/L_1} = \frac{\lambda_{L_1}}{\lambda_K} = \frac{\nu_K}{\nu_{L_1}} = \frac{E_K}{E_{L_1}}.$$

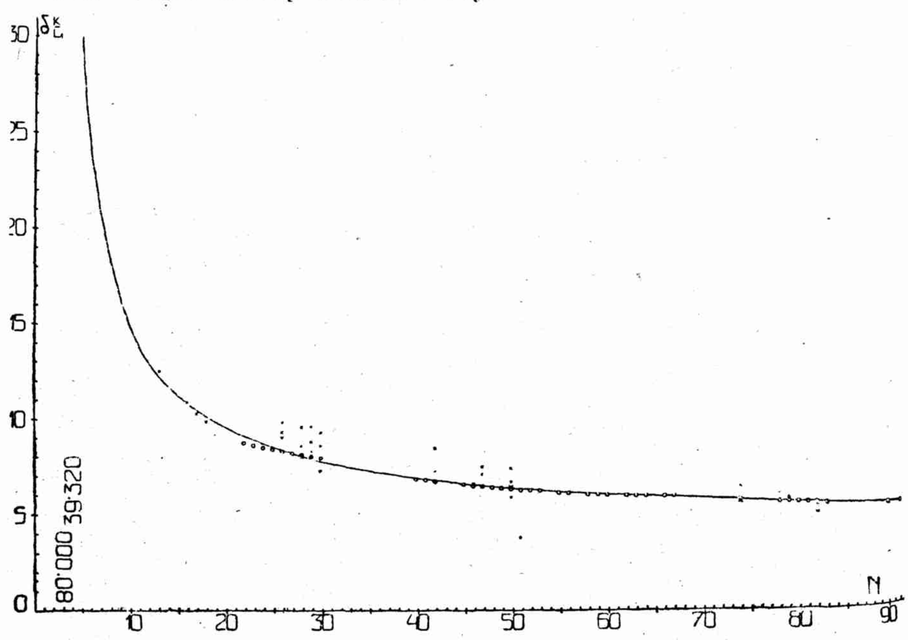
Poněvadž lze délky vlnové respektive frekvence absorpčních hran stanoviti s přesností daleko větší než koeficienty absorpce τ, jsou hodnoty absorpčních skoků δ_{K/L_1} stanovené touto druhou cestou obecně správnější než hodnoty nalezené cestou první. Naše tabulka také ukazuje s nimi lepší souhlas.

Dobrý souhlas hodnot vypočtených a naměřených, jež naše tabulka přináší, přehlédneme rázem z grafického znázornění, obr. 2. Spojitá čára znázorňuje křivku procházející body určenými

[9]) Ann. der Phys. (5) B. 5, p. 475, 1930.
[10]) Phys. Rew. 23, p. 292, 1924.

výpočtem, kroužky odpovídají hodnotám sloupce pátého E_K/E_{L_1}, křížky hodnotám sloupce šestého, plynoucím z měření absorpce.

Převaha našeho vzorce nad teoriemi dosavadními vynikne, když si všimneme, kde v tomto grafu by ležel bod o souřadnicích (28, 20·5), který pro měď plyne z rovnice Thomson - Compton - Broglie, nebo když si osou N (osa vodorovná) vedeme rovnoběžku ve vzdálenosti 5.5, a jež vyjadřuje teoretickou křivku plynoucí z teorie Kramersovy a i Stobbeovy.



Obr. 2.

Nutno poznamenati, že hodnoty δ_{K/L_1} námi vypočtené a jim odpovídající křivka jsou hodnotami jaksi ideálními, ježto do výrazu pro a nebyly dosazeny za N_K, N_{L_1}, N_{L_2} skutečné počty elektronů na dotyčných slupkách K, L_1, L_2, poněvadž je bezpečně neznáme, ale hodnoty určené podle pravidla Stonerova. Podle tohoto pravidla má niveau elektrony plně obsazené počet elektronů rovný $2k_2$, kdež k_2 je tak zvané vnitřní kvantové číslo, a místo něhož se nověji píše častěji j. Toto pravidlo jsme ještě doplnili zatímním předpokladem, že elektrony přistupují se stoupajícím atomovým číslem na příslušná niveau pravidelně, t. j. že se normálně neusazují na niveau energie nižší, pokud sousední niveau energie vyšší jimi není plně obsazeno. Tomu ovšem ve skutečnosti

Tabulka.

$$\delta_{K/L_1} = 1 + \frac{10 - \eta}{a}$$

Prvek	η	a	δ_{K/L_1} Výpočet	$\delta_{K/L_1} = E_K/E_{L_1}$	δ_{K/L_1} Měření absorpcí
1 H	0				
2 He	0				
3 Li	0·12500	0·12500	80·000		
4 Be	0·42000	0·25000	39·320		
5 B	0·75555	0·32407	29·526		
6 C	1·05901	0·39815	23·456		
7 N	1·32493	0·44502	20·494		
8 O	1·55771	0·49190	18·163		
9 F	1·76282	0·53877	16·289		
10 Ne	1·94506	0·58565	14·754		
11 Na	2·10831	0·61765	13·777		
12 Mg	2·25568	0·64965	12·921		
13 Al	2·38965	0·67280	12·311		12·6
14 Si	2·47886	0·69594	11·807		
15 P	2·62492	0·71344	11·337		
16 S	2·72915	0·73093	10·947		11·0
17 Cl	2·82596	0·74842	10·586		10·4
18 A	2·91623	0·76591	10·249		10·0
19 K	3·00073	0·77959	9·978		
20 Ca	3·08009	0·79326	9.723		
21 Sc	3·15485	0·80693	9·483		
22 Ti	3·22546	0·82060	9·256	8·92	
23 V	3·29235	0·83157	9·066	8·77	
24 Cr	3·35584	0·84255	8·886	8·65	
25 Mn	3·41625	0·85352	8·714	8·56	
26 Fe	3·47383	0·86450	8·549	8·47	(10, 9·5) = 9·2
27 Co	3·52883	0·87547	8·392	8·39	
28 Ni	3·58144	0·88644	8·241	8·32	8·3 (9·8, 8·8) = 8.2
29 Cu	3·63186	0·89544	8·112	8·24	8·2 (9·8, 9) = 8·5
30 Zn	3·68025	0·90444	7·988	8·16	(9·5, 8·8) = 7·5
31 Ga	3·72675	0·91196	7·879		
32 Ge	3·77150	0·91947	7·774		
33 As	3·81462	0·92583	7·681		
34 Se	3·85622	0·93220	7·591		
35 Br	3·89638	0·93857	7·503		
36 Kr	3·93521	0·94493	7·418		
37 Rb	3·97279	0·95039	7·342		
38 Sr	4·00917	0·95586	7·268		
39 Y	4·04445	0·96132	7·195		
40 Zr	4·07868	0·96678	7·125	7·07	
41 Nb	4·11191	0·97152	7·061	7·03	
42 Mo	4·14420	0·97625	6·998	6·94	8·7, 7·5
43 ?	4·17560	0·98099	6·937		
44 Ru	4·20615	0·98573	6·878		
45 Rh	4·23590	0·99047	6·820	6·79	

Prvek	η	a	δ_{K/L_1} Výpočet	$\delta_{K/L_1} = E_K/E_{L_1}$	δ_{K/L_1} Měření absorpcí
46 Pd	4·26488	0·99520	6·763	6·72	6·8
47 Ag	4·29314	0·99935	6·711	6·69	7·3, 7·8, 6·7 (7·7, 7·3)
48 Cd	4·32070	1·00350	6·660	6·63	
49 In	4·34760	1·00765	6·610	6·59	
50 Sn	4·37387	1·01180	6·561	6·52	6·6, 6·1 (7·6, 6·9)
51 Sb	4·39953	1·01594	6·513	6·48	
52 Te	4·42461	1·02009	6·466	6·44	
53 I	4·44914	1·02375	6·422	6·40	
54 X	4·47313	1·02742	6·379		
55 Cs	4·49662	1·03108	6·338	6·28	
56 Ba	4·51961	1·03474	6·296	6·24	
57 La	4·54215	1·03840	6·256		
58 Ce	4·56422	1·04206	6·216	6·15	
59 Pr	4·58586	1·04572	6·177	6·13	
60 Nd	4·60707	1·04938	6·139	6·11	
61 ?	4·62789	1·05264	6·104		
62 Sm	4·64832	1·05590	6·068	6·05	
63 Eu	4·66837	1·05881	6·036	6·03	
64 Gd	4·68806	1·06173	6·003	6·00	
65 Tb	4·70740	1·06435	5·973		
66 Ds	4·72640	1·06698	5·943	5·95	
67 Ho	4·74507	1·06960	5·913	5·94	
68 Er	4·76343	1·07223	5·884		
69 Tm	4·78148	1·07460	5·856		
70 Yb	4·79924	1·07698	5·829		
71 Lu	4·81670	1·07935	5·802		
72 Ct	4·83389	1·08173	5·776		
73 Ta	4·85081	1·08389	5·751		
74 W	4·86747	1·08605	5·726	5·73	5·65, (6·4)
75 ?	4·88387	1·08821	5·701		
76 Os	4·90002	1·09037	5·677		
77 Ir	4·91594	1·09253	5·654		
78 Pt	4·93162	1·09469	5·630	5·61	(6·0)
79 Au	4·94708	1·09666	5·608	5·60	5·65 (5·8)
80 Hg	4·96232	1·09863	5·585	5·59	
81 Tl	4·97734	1·10060	5·564	5·55	
82 Pb	4·99215	1·10257	5·542	5·53	5·40 (5·0)
83 Bi	5·00677	1·10455	5·521	5·50	
84 Po	5·02103	1·10652	5·500		
85 ?	5·03540	1·10833	5·479		
86 Em	5·04943	1·11013	5·460		
87 ?	5·06157	1·11194	5·441		
88 Ra	5·07696	1·11375	5·420		
89 Ac	5·09046	1·11556	5·401		
90 Th	5·10379	1·11737	5·382	5·35	
91 Pa	5·11695	1·11918	5·363		
92 U	5·12995	1·12098	5·345	5·29	

pravděpodobně tak není a náš vzorec nabývá tím na významu, že nám umožní, na základě velmi přesných měření absorpčního skoku, zjišťovati skutečné obsazení energetických niveau obalovými elektrony.

*

Détermination des sauts d'absorption dans le domaine des rayons *X*.

(Résumé de l'article précédent.)

Après avoir expliqué la notion du saut d'absorption l'auteur précise la définition du saut d'absorption sur le niveau K, désigné par le symbole δ_{K/L_1}. Ensuite il passe en révue les méthodes expérimentales servant à la détermination numérique du δ_{K/L_1} ainsi que les formules théoriques, résultant des théories d'absorption connues jusqu'à présent. Toutes ces formules s'accordent mal avec l'expérience, à l'exception de la formule déduite par l'auteur même de ses idées sur la nature de l'éther. C'est la formule (3)

$$\delta_{K/L_1} = 1 + \frac{10 - \eta}{a}. \tag{3}$$

où

$$a = \frac{1}{2^3} N_{L_1} + \frac{2}{3^3} N_{L_2} + \frac{3}{4^3} N_{L_3} + \frac{4}{5^3} N_{M_1} + \ldots,$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left[\frac{N-2}{N+1}\sum_{N=3}^{N}\frac{1}{N-2} + \frac{N-3}{N+1}\sum_{N=4}^{N}\frac{N+2}{N+1}\cdot\frac{1}{N-3}\right],$$

et où N est le nombre atomique et les N_{L_1}, N_{L_2}, N_{L_3}, . . . sont les nombres d'électrons occupant les couches L_1, L_2 etc.

Zkoumání staroďalského reflektoru.

Dr. *B. Šternberk.*

(Došlo 28. srpna 1931.)

I.

Synchronisační hodiny.

V létě r. 1928 byla zhruba dokončena montáž zdejšího zrcadla o průměru 60 *cm*. Podrobil jsem je zkouškám a stanovil hodnoty, jež třeba znát pro práce na novém stroji. Při tom, zejména s počátku, bylo nutno provésti menší úpravy na stroji, což je pochopitelné u nevyzkoušeného modelu. V takových případech se měření opakovala. Některé prvky třeba sledovati několik let a proto moje práce není ještě ukončena. Rozhodl jsem se přece publikovati částečné výsledky, aby byla dána možnost vědecké kritiky běžných pozorování. To má význam zejména nyní, kdy taková pozorování budou konečně ve větším měřítku možná, neboť dochází k rozmnožení zdejšího personálu. — Rozdělil jsem svoje výsledky na několik samostatných oddílů. Později, až bude na př. možný definitivní úsudek o stálosti polohy pilíře atd., shrnu vše ve zvláštní publikaci ústavu.

Pohyb dalekohledu za oblohou i naše časové údaje spočívají na nově zakoupených hodinách fy Satori, Vídeň (číslo kyvadla 582). Tyto hodiny mají křemenné kyvadlo s čočkou,[1]) kolečkový kontakt (sekundu spojen — sekundu přerušen) a jsou v obvyklé dřevěné skříni, nikoliv tedy v prostoru o stálé hustotě vzduchu. Zavěsili jsme je na hlavní zeď v pokojíku o jednom okně, namířeném k ESE (místnost pro časovou službu). Okno bylo zataženo záclonou a pokoj nevytápěn. Umístění toto není ideální. Hodiny trpěly otřesy (I. poschodí při státní silnici) a v teplotě jevil se částečně vliv denního chodu. Bylo však těžko nalézti vhodnější místo, neboť všechny sklepy ústavu a místnosti hvězdárny jsou vlhké, nebo dokonce jsou zatápěny spodní vodou.

---

[1]) M. Schanzer: Quarzpendel, Z. f. J. K. *33*, 277.

Kontakt hodin dodává proud (2 miliamp.) pro synchronisační cívku pozorovacích hodin Hansenových (metoda Nušlova), jež stojí přímo v kopuli a řídí sekundovou kontrolu reflektoru. V případě potřeby lze připojiti k témuž kontaktu hodin Satori současně obyčejné telegrafní relais (7 miliamp.), které buď spojuje na krátko telefon radioaparátu, nebo uvádí v činnost dva chronografy v serii. Jeden je v místnosti pro časovou službu, druhý v kopuli reflektoru. Místo tohoto lze zařaditi zvon, podle něhož se exponuje. Spojení mezi kopulí a místností obstarává 200 *m* zemního kabelu. Instalaci všech hodin, pomocných přístrojů a zemního kabelu provedl podle mých návrhů obratně náš mechanik p. Souček. — Jak patrno, je správný chod hodin Satori základní důležitosti pro nás; z toho důvodu uveřejňuji poněkud podrobněji výsledky pozorování. Kromě toho nebylo vlastně o křemenném kyvadle dosud nic takového publikováno, pokud je mi známo. Jediná sdělení obsahuje Österr. Ung. Uhrmacher-Zeitung (separát firmy), podle kterého nalezli Krumpholz - Rossrucker v celkovém období 6 měsíců střední denní variaci chodu $\pm 0{\cdot}015^s$ až $\pm 0{\cdot}052^s$ (jen výsledky). Pro koeficient hustoty udává firma $0{\cdot}012^s/1$ *mm* Hg; o koeficientu teploty nalézám jedinou zprávu v Prometeus *30* 119. Tato noticka, která ostatně trpí nepřesnostmi, udává pro koeficient teploty kompensovaného křemenného kyvadla hodnotu $0{\cdot}0361^s$ pro stupeň a den. Neběží-li o chybu tisku, mám podezření, že autor bral do počtu tlak vzduchu, ne hustotu. V tom případě přistoupí do výsledku zdánlivý koeficient teploty, který se číselně rovná asi trojnásobku koeficientu hustoty, je však záporný. Je nápadné, že udaný koeficient je číselně také trojnásobek tlakového koeficientu. Ostatně i nekompensované kyvadlo křemenné má koeficient teploty jen $0{\cdot}02^s$![2])

Domnívám se, že podrobnější zkoumání vlastností křemenného kyvadla má také význam pro řešení otázky, zda by křemen mohl přijíti v úvahu při moderních konstrukcích „volných“ kyvadel a pod. To se dá rozhodnouti jen experimentálně. U křemenného kyvadla spojujeme s křemennou tyčí kovové hmoty pomocí objímek přitažených šrouby. Změnami teploty mohou zde vzniknouti veliké tlaky (na tuto okolnost mne upozornil prof. Nušl), jež případně by se mohly projevit náhlými změnami polohy a podobně. Je tedy třeba často kontrolovat takové hodiny a výsledky obšírněji uveřejnit.

Pro jiné úřední povinnosti nebylo myslitelno, abych kontroloval hodiny pozorováním na pasážníku. Užil jsem k tomu vědeckých (rytmických) signálů pařížské stanice ($10^h\,30^m$ S. E. Č., vlna 2650 *m*), které, jak na výsledcích ukáži, úplně stačí k odpovědi na

[2]) Bock: Die Uhr, 2. Aufl. str. 57.

otázky, jež se při zkoumání hodin vyskytují. V této práci redukuji pozorování od 1. III. do 30. IX. 1930. Do 8. VI. stanoveny koincidence prohlédnutím proužku chronografu, od 16. VI. sluchem tím, že relais našich hodin spojovalo na krátko telefon přijimače. Poněvadž jsem proužků neproměřoval, nýbrž jen vyhledal koincidence, nemůžeme očekávati valný rozdíl v přesnosti mezi oběma metodami. K této otázce se vrátím na konci svého článku.[3]) Podotýkám, že k příjmu signálu jsme užívali dokonalého přijimače o 5 lampách (2 stíněných) a pěti laděných kruzích, který byl konstruován v laboratořích ministerstva pošt a telegrafů a našemu ústavu zapůjčen. Při registraci uváděl v činnost přijimač telegrafní relais (800 Ω); signály pařížské dávaly průměrně 8 miliampér. I na tomto místě děkujeme příslušným činitelům za jejich ochotu a laskavost. Získané koincidence byly redukovány pomocí tabulek Svobodových[4]) a korekce opraveny podle hodnot uveřejněných ústavem Deutsche Seewarte.[5]) Některé počty prováděl za mé kontroly pan L. Varga. Prvním předpokladem redukce je u kolečkového kontaktu znalost chyb jednotlivých sekund. Nalezl jsem je obvyklou cestou:[6]) na chronografu psaly současně hodiny Satori a kyvadlový kontakt jiných hvězdných hodin (AI 16, Hg kompensace, Hg kontakt). Po několik dnů prováděl jsem takto srovnání signálů obou hodin. Z výsledků odvozeny korekce jednotlivých sudých sekund, z nichž každá je střed z 10 hodnot (tabulka I.).

Sek.	Oprava	Sek.	Oprava	Sek.	Oprava	Sek.	Oprava	Sek.	Oprava	Sek.	Oprava
0	—0·001	*10*	+ 13	*20*	+ 8	*30*	+ 4	*40*	— 3	*50*	— 12
2	— 2	*12*	+ 11	*22*	+ 10	*32*	— 4	*42*	— 13	*52*	— 8
4	+ 2	*14*	+ 19	*24*	+ 14	*34*	— 3	*44*	— 13	*54*	— 14
6	+ 8	*16*	+ 2	*26*	+ 9	*36*	— 8	*46*	— 14	*56*	— 9
8	+ 7	*18*	+ 9	*28*	— 2	*38*	— 6	*48*	— 16	*58*	—

Poněvadž všechny naše chronografy jsou jehlové, kontroloval jsem jen sudé sekundy. Střední chyba hodnot uvedených v tabulce I. je $\pm$ 0·003^s. Jak patrno, mají chyby převážně povahu *chyb excentricity*. Z některých dalších pokusů možno soudit, že velikost těchto chyb se poněkud mění, snad závisí na amplitudě kyvadla.

[3]) Viz též Henderson: Comparison of the vernier and automatic methods of wireless signal reception. Pop. Astr. *38*, 21.

[4]) Svoboda: Sur le calcul des heures des signaux rythmés au moyen d'une table, A. N. *230*, 375.

[5]) A. N. *238*, 281, 371 *239* 47, 247 *240* 199, *242* 55.

[6]) Viz na př. Wanach: Untersuchung einiger Radunterbrecher, A. N. *172*, 145.

Pro náš účel však zatím stačí uvedená tabulka. Jak patrno, lze zanedbati při použité metodě redukční a pozorovací tyto chyby. Další důležité elementy jsou: tlak, teplota, vrstvení teploty, vlhkost vzduchu a amplituda kyvadla. Pro tlak vzduchu mohl jsem použít termínových pozorování meteorologů zdejšího ústavu, jimž děkuji i za přezkoušení Lambrechtova hygrometru, zavěšeného ve skříni hodin. Jako střední tlak jednodenního intervalu vzal jsem střed pozorování v 14, 21 a 7 hodin (místního času). Tato hodnota může se ovšem lišit od správného středního tlaku v nepříznivém případě přibližně až o 1 *mm* Hg. Teplotu jsem odečítal jen při signálu dvěma teploměry (0·2° C); spodní je 20 *cm* pod středem čočky kyvadla, vrchní je 78 *cm* nad spodním. Pro teplotu vzduchu ve skříni bral jsem střed čtení obou teploměrů; pro teplotu jednodenního intervalu střed z obou určení při signálech. — Nyní, kdy tepelná isolace místnosti byla poněkud zlepšena, obnáší denní rozdíl mezi maximem a minimem *teploty vzduchu v místnosti* nanejvýš 1·4° C. V době, pro kterou platí naše diskuse, byl poněkud větší; střední teploty udávané pro *skříň hodin* (amplituda ještě menší) nemohou se podstatně lišit od správných hodnot. Vliv teploty na hustotu vzduchu a tím na chod je ovšem značný. — Stejně bylo určováno vrstvení teploty jako rozdíl čtení obou teploměrů. Vlhkost odečítána také jen při signálech. Pokud se týče určení amplitudy, bylo naprosto nedostatečné zařízení na hodinách existující a tak mohl jsem ji měřiti teprve po skončení této serie pozorování. Namontoval jsem totiž k hodinám mikrometr podle návrhu Haynova,[7]) což umožnilo mi měřiti amplitudu kyvadla se střední chybou $\pm 2''$. Výsledků částečně používám v dalším textu. Tabulka II. obsahuje pozorovací materiál pro intervaly 5—6denní.

Při výpočtu *koeficientu hustoty* užíváme veličiny d, dané rovnicí

$$d = b - 0{\cdot}00367\, bt - \tfrac{3}{8}\, e, \tag{1}$$

kde b je barometrický tlak (*mm*, Hg 0°), t teplota a e skutečné napětí vodních par ve skříni hodin. Veličina d je až na stálý koeficient specifická hmota vzduchu ve skříni hodin.[8]) Tlak d (*mm*, Hg 0°) by měl suchý vzduch stejné spec. hmoty o teplotě 0°. — Víme z prací *Wanachových*, z nichž uvádím aspoň nejdůležitější,[9]) že možno používati metody nejmenších čtverců vlastně jen pro *diference* chodů (g) zejména při určení koeficientu hustoty. Zpracujeme-li takto materiál v tabulce uvedený (Δg podle Δd), obdržíme pro koeficient hustoty hodnotu $+ 0{\cdot}0142^s$/den/1 *mm*. Vlastně bychom

[7]) Hayn: Das elektrische Pendel der Leipziger Sternwarte. A. N. *192*, 153.

[8]) Viz na př. Strouhal: Thermika 339.

[9]) Wanach: Über die Genauigkeit interpolierter und extrapolierter Uhrkorrektionen und Gänge, A. N. *190* 169.

měli počítat současně koeficient teploty, nebo alespoň redukovat *denní chody* (ne průměrné 5denní), aby příslušné rozdíly teplot byly co nejmenší. V těchto případech vychází koeficient hustoty $+\ 0{\cdot}0151^s$ resp. $+\ 0{\cdot}0147^s$. Přijmeme hodnotu $+\ 0{\cdot}015^s$; střední chyba výsledku vychází v uvedených případech stejně $\pm\ 0{\cdot}001^s$. Redukujeme-li chody tabulky II. pomocí koef. 0·015 na $d =$

Datum	Denní chod	Tlak	Tepl.	Vrstv.	Vlh- kost	O—C
	s	mm	0	0	%	s
III. 6.—1.	—0·264	759·8	8·5	0·39	61·1	+0.041
11.—6.	—0·408	50·3	9·3	0·44	61·2	+ 65
16.—11.	—0·618	37·7	9·1	0·36	60·8	+ 30
22.—16.	—0·635	43·0	11·8	0·40	61·8	+ 39
27.—22.	—0·564	51·0	12·7	0·32	62·4	+ 28
IV. 1.—III. 27.	—0·630	51·4	12·3	0·32	61·9	— 58
IV. 7.—1.	—0·690	45·6	12·2	0·32	60·8	— 39
13.—7.	—0·711	47·9	13·6	0·36	62·1	— 38
18.—13.	—0·941	35·3	15·0	0·32	62·2	— 36
23.—18.	—0·778	44·5	14·2	0·37	61·8	— 36
28.—23.	—0·850	49·1	17·2	0·41	62·8	— 56
V. 3.—IV. 28.	—0·890	44·4	17·7	0·33	62·5	— 11
V. 9.—V. 3.	—0·808	47·0	17·2	0·36	61·0	+ 16
14.—9.	—0·769	46·5	15·8	0·30	59·2	+ 5
19.—14.	—0·710	50·1	15·3	0·25	58·6	— 5
24.—19.	—0·740	51·1	16·0	0·28	58·7	— 23
29.—24.	—0·882	51·0	18·3	0·35	60·6	— 72
VI. 3.—V. 29.	—0·968	50·8	21·3	0·36	64·1	— 35
8.—3.	—0·888	53·8	20·3	0·32	63·1	— 35
21.—16.	—0·982	52·2	23·5	0·40	59·3	+ 12
26.—21.	—1·037	49·6	23·9	0·37	56·9	+ 9
VIII. 10.—5.	—0·900	47·8	21·5	0·29	55·6	+ 75
15.—10.	—0·920	46·5	19·9	0·31	57·2	+ 10
20.—15.	—0·758	50·4	18·0	0·25	58·5	+ 47
25.—20.	—0·842	54·1	21·3	0·41	61·6	+ 44
30.—25.	—0·806	57·8	22·0	0·29	61·2	+ 56
IX. 4.—VIII. 30.	—0·840	55·6	21·5	0·27	58·5	+ 30
IX. 9.—4.	—0·800	52·4	19·1	0·29	56·2	+ 15
14.—9.	—0·860	50·1	19·8	0·16	58·1	+ 22
19.—14.	—0·950	50·1	19·7	0·23	60·9	— 73
24.—19.	—0·886	49·6	18·7	0·29	61·6	— 41
30.—24.	—0·747	51·1	17·1	0·12	62·4	+ 15

$= 710$ *mm* (g'), nalezneme metodou nejmenších čtverců rovnici

$$g' = -\ 0{\cdot}714^s + 0{\cdot}0054\ t, \tag{2}$$

kdež stř. chyba koeficientů je $\pm\ 0{\cdot}03^s$ resp. $\pm\ 0{\cdot}002$. Vychází tedy *koeficient teploty* $= +\ 0{\cdot}005^s \pm 0{\cdot}002^s$. Použijeme-li diferencí opravených chodů $\Delta g'$ a Δt, obdržíme stejně jako při současné redukci Δg podle Δd a Δt tutéž číselnou hodnotu pro koeficient teploty, ale střední chyba výsledku je větší. — Jak patrno, nalezená hodnota je dosti nejistá. U kompensace křemenného kyvadla slouží k vedení čočky na tyči hoření objímka se třemi šrouby; nedotáhneme-li tyto šrouby dostatečně, čočka se viklá. Dotáhneme-li je příliš, přestane kompensace fungovat. Chtěl jsem v přední řadě zjistit, zda kompensace vůbec funguje. Jak z koeficientu teploty patrno, je tomu tak. — Číselná hodnota koeficientu má význam spíše teoretický. Je ostatně známo, že v pouhém materiálu daném časovou službou je velmi těžko odlišiti zejména vliv teploty kyvadla a hustoty vzduchu vzhledem k vztahu (1). Vliv vrstvení, který u křemenného kyvadla bude nepatrný, nelze v našem případě určiti. Vyhledáme-li pomocí rovnice (2) zbývající odchylky, obdržíme hodnoty uvedené v posledním sloupci tabulky II. Nalézáme tu známý úkaz náhlých změn chodu hodin. Souvisí asi se změnami v pravidelném chodu teploty.

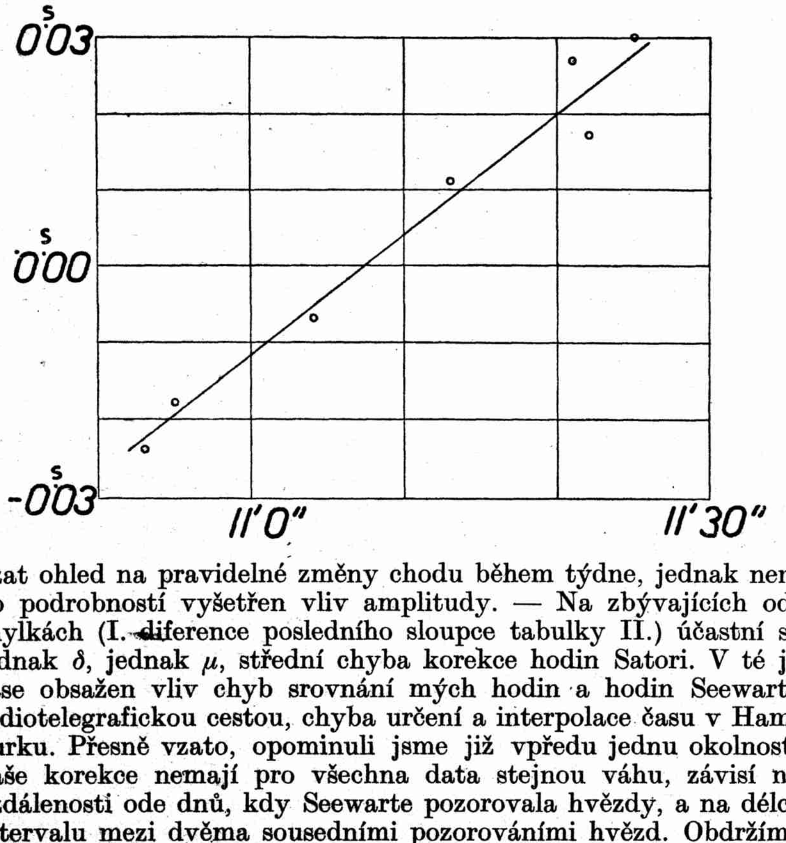
Vedle koeficientu hustoty a teploty mohl jsem odvoditi další vztah. Z denních záznamů korekce hodin, opravených pomocí odvozeného již koeficientu hustoty, vypočetl jsem střední variace chodu pro jednotlivé dny v týdnu. Nemohu otisknouti celý materiál, poněvadž by měl rozsah 5krát větší, než je tabulka II. Uvádím jen v tabulce III. výsledky. Prvý sloupec obsahuje označení dne,

Den	Variace	Amplituda
sobota	+0.017	1° 11′ 22′
neděle	+ 30	11′ 25″
pondělí	+ 27	11′ 21″
úterý	— 7	11′ 4″
středa	+ 11	11′ 13″
čtvrtek	— 24	10′ 53″
pátek	— 18	10′ 55″

druhý střední variaci chodu v 0·001^s. Každá hodnota je střed z 5 až 18 určení (t. j. pondělků atd.). Její stř. odchylka je 0·010^s. Ačkoliv je z tohoto sloupce zřejmé, že je jakási zákonitost pro variace chodu v jednotlivých dnech týdnu, zdálo by se nám, že ciferně je věc hodně nejistá. Ale je zajímavé, že tyto střední variace chodu postupují paralelně se změnami amplitudy kyvadla v jednotlivých dnech v týdnu. To jsou hodnoty třetího sloupce naší tabulky III. (výchylky z rovnovážné polohy kyvadla). Získal jsem je z údobí únor až duben 1931. Každá hodnota je střed ze 7 určení (t. j. pondělků atd.), stř. odchylka $\pm$ 15″. Grafické znázornění obsahuje graf 1. (x amplitudy, y denní variace).

Hodiny se natahovaly v sobotu ráno. Zda běží o vliv závaží, či jiný, nelze zatím rozhodnout. Závaží (válec o průměru 5 *cm*, výšce 11 *cm*) pohybuje se v rovině kmitu kyvadla, je vzdáleno od svislého kyvadla 12 *cm* a klesne za týden o 70 *cm*. Podrobněji ovšem bude možno věc vyšetřit až na rozsáhlejším materiálu několika let.

Pokusím se odvodit střední, denní, nahodilou variaci chodu hodin Satori (δ), jakožto veličinu příznačnou pro jakost hodin. Je patrno, že musím obdržet veličinu příliš velikou, že tedy hodiny jsou ve skutečnosti ještě lepší. Jednak není v materiálu pětidenním



vzat ohled na pravidelné změny chodu během týdne, jednak není do podrobností vyšetřen vliv amplitudy. — Na zbývajících odchylkách (I. diference posledního sloupce tabulky II.) účastní se jednak δ, jednak μ, střední chyba korekce hodin Satori. V té je zase obsažen vliv chyb srovnání mých hodin a hodin Seewarte radiotelegrafickou cestou, chyba určení a interpolace času v Hamburku. Přesně vzato, opominuli jsme již vpředu jednu okolnost: naše korekce nemají pro všechna data stejnou váhu, závisí na vzdálenosti ode dnů, kdy Seewarte pozorovala hvězdy, a na délce intervalu mezi dvěma sousedními pozorováními hvězd. Obdržíme tedy jakousi střední hodnotu pro μ. Ostatně připomínám, že při použití Wanachovy formule na korekce získané pozorováním hvězd zase nutno aplikovati střední hodnotu pro T (interval) a tedy výsledky jsou i v tom případě jen přibližné. Formule tato[10]) zní

$$\delta = \pm \sqrt{\frac{3T}{1 + 2T^2}\left(M - \frac{6\mu^2}{T^2}\right)},$$

[10]) l. c. A. N. *190*, 181.

kdež M je střední hodnota čtverců rozdílů chodu. Učiňme nejprve zjednodušující předpoklad $\mu = 0$, pak vychází $\delta = \pm\, 0{\cdot}02^s$. Ale je možné odvoditi z materiálu pozorovacího bez dalších prostředků přibližně hodnotu δ i μ. Použijeme k tomu té okolnosti, že vliv δ a μ jeví se různě u rozdílu chodů bezprostředně následujících než u alternujících rozdílů, nebo rozdílů ob 2 intervaly. Nastoupíme jaksi cestu, jakou Wanach v uvedené práci[9]) dokazoval použitelnost metody nejmenších čtverců na diference chodů. Z formulí pro přímé, alternující rozdíly a rozdíly ob 2 intervaly plynou rovnice

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2T^2}{3T}\,\delta^2 + \frac{6\mu^2}{T^2} &= M \\ \frac{1 + 5T^2}{3T}\,\delta^2 + \frac{4\mu^2}{T^2} &= M' \\ \frac{1 + 8T^2}{3T}\,\delta^2 + \frac{4\mu^2}{T^2} &= M''. \end{aligned} \tag{3}$$

M, M' a M'' lze snadno vypočítati z posledního sloupce tabulky II. Jsou patrně alternující rozdíly chodů vždy součtem následujících dvou, rozdíly ob dva intervaly součtem tří rozdílů bezprostředně následujících.

Zde můžeme zároveň řešiti otázku, který z pozorovacích způsobů je přesnější: zda odečítání koincidencí na proužku chronografu, či sluchem (v uvedeném uspořádání). Stačí, abychom vyšetřili hodnoty M, M' a M'' pro dobu do 16. VI. (I) a zbytek doby (II), který ovšem obsahuje méně pozorování a dá tedy méně přesný výsledek.

Dosazením do rovnic (3) obdržíme:

(I) $\delta = \pm\, 0{\cdot}013^s$ (II) $\delta = \pm\, 0{\cdot}014^s$
$\mu = \pm\, 0{\cdot}050^s$ $\mu = \pm\, 0{\cdot}067^s$

Odečítání koincidencí na proužku je tedy pravděpodobně přece jen přesnější. V obojím případě vychází pro μ hodnota značně veliká. Uvedl jsem již dříve okolnosti, jež zde působí. Bylo by záhodno prostudovati blíže působení kontaktu hodin Satori a naše relais.*) Rozdíly hodnot μ jsou příliš malé, než aby bylo třeba znovu

*) Poznámka při korektuře: V prosincovém čísle (1931) časopisu „Himmelswelt" udává Freiesleben jako střední chybu hamb. korekcí $\pm\, 0{\cdot}03^s$. Střední chyba rozdílu mezi korekcemi hodin Satori, získanými z objevení a zmizení signálu (část chyb příjmu včetně kolísání délky signálu), činí $\pm\, 0{\cdot}032^s$. Poněvadž jsem bral v této práci v počet jen okamžiky zmizení signálu, vychází pro podíl na μ, způsobený uvedenými příčinami, hodnota $\pm\, 0{\cdot}030^s$ až $\pm\, 0{\cdot}044^s$. Protože zmíněnými okolnostmi nejsou vyčerpány všechny možné vlivy, odpovídají asi značné hodnoty μ v mé práci skutečnosti.

redukovati tab. II. s ohledem na váhu pozorování. Hodnota δ je v obou případech stejná, což bylo očekávati a svědčí s ohledem na okolnosti výše zmíněné o velmi dobré jakosti hodin Satori 582.

Stará Ďala v srpnu 1931.

*

Étude du reflecteur de l'observatoire de St. Ďala.

(Résumé de l'article précédent.)

Dans sa première partie de l'étude des erreurs instrumentales du nouveau réflecteur de 60 *cm* (Zeiss) l'auteur s'occupe du pendule Satori 582 qui sert à synchroniser le moteur électrique du réflecteur. C'est un pendule sidéral à poids (avec un pendule compensé de quartz) soumis aux variations naturelles de la pression atmosphérique. L'heure exacte fut déterminée au moyen des signaux rythmés de la Tour Eiffel et des corrections de „Seewarte, Hamburg". L'auteur trouve les erreurs du contact du pendule (tab. I.), le coefficient barométrique $0.015^s/1mm$/jour et le coefficient thermique $0.005^s/1^o$/jour. Puis des changements systématiques de la variation diurne de la marche et de l'amplitude du pendule pendant les jours de la semaine écoulée entre deux remontages de l'horloge (tab. III.). Enfin, l'auteur indique une méthode qui permet de séparer la variation moyenne, diurne, accidentale de la marche et l'erreur moyenne de la correction du pendule qui est fondée sur un travail de Wanach (formules 3). La variation moyenne diurne du pendule Satori était $\pm$ 0.014^s. La dernière colonne de la tab. II. permet d'étudier les changements brusques de la marche.

Význam vlnové mechaniky pro teorie radioaktivního záření.

Referuje *V. Santholzer.*

(Došlo 20. května 1931.)

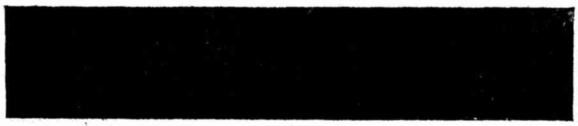
1. Primární druhy radioaktivního záření pocházejí z atomových jader. Stav názorů o atomovém jádře má tudíž vliv na teorie radioaktivního záření, zejména na teorie jeho vzniku.

Jaké jsou dnes dobře pokusně zajištěné poznatky o atomovém jádře? Od prací Rutherfordových a od jeho pokusů o průchodu radioaktivního záření alfa hmotou (kol r. 1910) byl navržen jádrový model atomu. Od té doby zabývá se však fysikální badání hlavně světem vnějších elektronů kolem jádra kroužících. Bohr a jeho škola provádějí zde pomocí teorie kvant základní práce, které novými mechanikami (Heisenberg, Schrödinger) jsou vyvrcholeny ve skutečné „mikromechaniky" světa vnějších elektronů.

Současně však pokusná fysika — možno říci — vlastně jen sbírá velký materiál o samotném atomovém jádře. Mezi fysiky vyskytují se mnohé spekulativní mozky, které se snaží z dosavadních dat pokusného rázu vybudovati teorii struktury atomových jader. Pokusná fakta však tvrdošíjně odolávají teoretickému výkladu, mnohdy vzbuzují přímo dojem záhadnosti. Teprve nová vlnová mechanika v poslední době správně klasifikuje jednotlivá fakta a daří se jí jakési modely jádra, ovšem dosud značně hrubé a předběžné. Nové práce vlnové mechaniky o atomovém jádře nezůstaly ovšem bez hlubokého vlivu na teorie radioaktivního záření. Vlnová mechanika konečně také poodhrnuje roušku ze záhadnosti vzniku radioaktivního záření z jeho mateřských jader.

2. Než si uvědomíme důležitost a výhodu vlnové mechaniky pro teorie radioaktivního záření, přehlédneme si stručně různé paradoxní rozpory a nesrovnalosti, které před zavedením vlnové mechaniky vznikaly hromaděním pokusného materiálu o jádře po stránce radiologické.

R. 1923 prohlásila berlínská badatelka Meitnerová, že t. zv. magnetická spektra gamma záření (vlastně magnetická spektra sekundárního beta záření vzbuzeného gamma zářením jádra v oblasti vnějších elektronů, viz obr. 1), která vznikají rozložením záření velmi silným magnetickým polem, mají pro poznání struktury atomového jádra týž význam, jako spektra optická a fakta röntgenspektroskopická pro poznání oblasti vnějších elektronů. Stejné cíle sledují od té doby také cambridgští fysikové Ellis a Skinner. Od r. 1923 až dodnes prostudována fotografickou cestou spousta magnetických spekter. Usilováno o teorii energetických hladin v jádře atomu na základě polohy čar v magnetických spektrech. Toto úsilí mělo však až dosud jen skromné výsledky, a to ještě více rázu schematického. Neúspěchy podobných metod záležejí pravděpodobně v tom, že radioaktivní prvky mají těžká



Obr. 1.

Magnetické spektrum sekundárního beta záření, vznikajícího v oblasti elektronů čnějším účinkem gama záření jádra. (Podle L. Meitnerové.

jádra a tudíž asi hodně složitá, než aby jejich vnitřní strukturu bylo možno vyspekulovati z tak poměrně skromných náznaků, jakými jsou magnetická spektra. Předpokládáme-li, že nejzákladnějšími stavebními kameny jádra jsou protony (jádra vodíková) a elektrony, pak na př. jádro atomu prvku radia musí se skládati z *226* protonů a *138* elektronů. (V jádře je vždy tolik elektronů, kolik činí přebytek kladného náboje protonů, který musí býti neutralisován: počet elektronů = atomová váha minus řadové číslo prvku.) Jádro atomu prvku radia skládá se tedy z 364 částic, zatím co největší počet elektronů vnějších je 92 (prvek uran). Jaké silové zákony ovládají tak veliký počet částeček v oblasti tak nepatrných prostorových dimensí (řádu 10^{-12} *cm*), to zůstává stále záhadou.

Ze zjevů isotopie prvků ze zjevů radioaktivního záření a z t. zv. rozbíjecích pokusů, můžeme pokládati za prokázané, že vodíkový atom (proton) a elektron jsou základní stavební kameny jader atomů všech prvků. Radioaktivita mimo to dokazuje, že také jádra heliová jsou součástí jader atomů. Alfa částice jsou jádra heliová, vymršťovaná obrovskými rychlostmi z jader atomů radioaktivních prvků. Je to zvláště stabilní konglomerát čtyř protonů a dvou elektronů (hmota = 4, náboj = + 2). Poměrně veliký

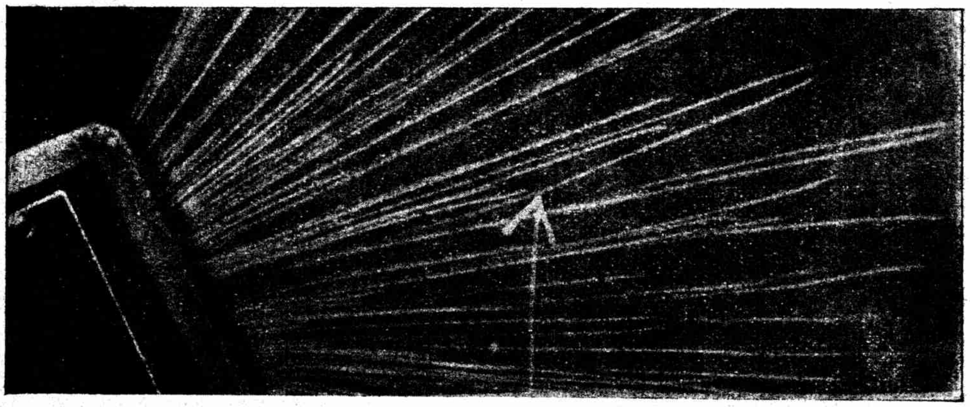
„hmotný defekt" alfa částice vysvětluje fakt, že alfa částice neztrácí v jádře svoji individualitu. To vše je v souhlase s vynikající rolí alfa částice jakožto stavebního kamene jader prvků, také ovšem prvků lehčích, než jsou prvky radioaktivní. Vskutku také vyskytuje se mnoho prvků a isotopů, jejichž atom. váha je dělitelná čtyřmi. Podle výzkumů Harkinsových (z r. 1923) skládají tyto prvky dokonce 91% veškeré známé hmoty.

Radioaktivita prvků nám poukázala nejen na „úlomky" jádra, avšak také na enormní silová pole rozkládající se v těsné blízkosti jádra. A zde jsme vlastně u největší záhady moderní atomistiky. Radioaktivní záření je dnes jediným prostředkem, kterým je možno prováděti sondáže v těchto silových polích jádra. Jedině radioaktivní alfa částečky mají dostatečně velkou energii koncentrovanou na nepatrnou hmotu, která jim umožňuje proniknouti enormně silným elektrostatickým polem jádra a dostati se tak do těsné blízkosti cizího jádra. Bombardováním různých prvků alfa zářením bylo dokonce docíleno rozbití jádra atomů dotyčného prvku a tudíž rozbití prvků. Účinkem nárazu alfa částice vyletují z rozbitých jader protony. (Neznáme dnes zatím nějakého umělého prostředku, kterým bychom mohli provésti rozbití atomu; pouze úsilí o výrobu umělého radioaktivního záření má zde velké vyhlídky do budoucnosti.)

Z rozbíjecích pokusů vznikla v r. 1925 t. zv. *satelitová hypotésa* o jádře (Rutherford). Vídeňští badatelé v čele s Kirschem a Pettersonem prohlásili na základě svých (do jisté míry odchylných) výsledků rozbití prvků t. zv. *explosivní hypotésu* o jádře. Obě hypotésy jsou však jen ryze pracovní. Je konec konců jedno, dívá-li se Rutherford na rozbití atomu jako na amputaci jednoho protonu od jádra, kterýžto proton krouží jako družice (satelit) kolem jádra, nebo pokládá-li Kirsch rozbití atomu za výbuch jádra, doprovázený vymrštěním protonu. Obě hypotésy neříkají ničeho o mechanismu, kterým se řídí mikrokosmos jádra v okamžiku rozbití.

3. Při průchodu alfa částic hmotou nastává mnohem častěji než rozbití atomu pouhý *rozptyl* alfa částic, jevící se jako náhlé úchylky drah alfa částic od původního směru. Některé alfa částice při letu hmotou ocitají se náhodně v těsnější blízkosti jader atomů, které na ně účinkují svým silovým polem. Tak se uchylují alfa částice z původního směru (obr. 2). Klasický vzorec Rutherfordův pro rozptyl alfa částic byl odvozen za předpokladu, že jádro atomu (kolem kterého kladně nabitá alfa částice proletuje) je bodový náboj velikosti $+ Ze$ (kde $Z =$ řadové číslo prvku v periodické soustavě, $e =$ náboj elektronu); týž vzorec podává i moderní kvantová mechanika (Born, Wentzel, Gordon, 1926—1928). Elektrostatický přitažlivý účinek oblasti vnějších

elektronů na alfa částici je možno při tom zanedbati nejen klasicky, ale také při kvantovém způsobu počítání. Experimentálně byly obě teorie uspokojivě potvrzeny průchodem alfa záření *těžkými* kovy (folie Au, Ag). Tak na př. již r. 1920 ověřil Chadwick teorii Rutherfordovu studiem průchodu alfa záření těžkými kovy a dokázal také naopak, že řadové číslo prvku (Z) je vskutku totožné s nábojem jádra.



Obr. 2.
Rozptyl alfa záření. (Fotogr. Santholzer.)

Od r. 1924 však spolu se vzrůstajícím pokusným materiálem začínají vzrůstati také odchylky od Rutherfordovy teorie rozptylu. R. 1924 začíná Bieler prováděti svoje pokusy o průchodu alfa částic *lehkými* kovy (hliník, hořčík). Při úchylce alfa částic na jádrech lehkých kovů musí se totiž alfa částice přiblížiti do mnohem menší vzdálenosti k jádru atomu, než při stejně velké úchylce vzniklé účinkem jádra atomu kovu těžkého. Stručně řečeno, silová pole jader lehkých kovů lze alfa částicemi důkladněji sondovati než jádra kovů těžkých.

Teorie Rutherfordova předpokládala bodové náboje alfa částice i rozptylujícího jádra. Odpudivý účinek obou nábojů má probíhati podle zákona Coulombova. Byly však pozorovány odchylky od teorie tím větší, čím úhel odchýlení alfa částice od původního směru byl větší, t. j. čím těsněji se alfa částice setkala s jádrem. R. 1924 narážíme ponejprv na úchylky od zákona Coulombova v mikrokosmu.

Je nutno vzdáti se platnosti zákona Coulombova v mikrokosmu? R. 1925 snaží se ještě Pettersson vysvětliti Bielerovy pokusy v duchu teorií klasických: zákon Coulombův má podržeti i nadále svoji platnost v mikrokosmu, nikoliv však v jednoduchém tvaru platném pro bodové náboje. Názor Petterssonův matematicky propracoval Hardmeier. Přiblížení se alfa částice k jádru lze si podle něho představovati jako přiblížení se bodového náboje ke kulovému vodiči téhož druhu náboje; ve větší vzdálenosti působí na bodový náboj sice síla odpudivá podle zákona Coulombova, v menší vzdálenosti přistupuje však k této síle ještě síla přitažlivá, vznikající indukčním účinkem náboje alfa částice na náboj jádra. V určité kritické vzdálenosti se obě síly ruší, ve vzdálenosti od jádra menší než je tato kritická vzdálenost, převládá síla přitažlivá nad odpudivou a je nepřímo úměrná s pátou mocninou vzdálenosti. — Tato teorie je kompromisem. Rutherford, Chadwick a Bieler netvoří zatím žádné teorie a prostě předpokládají, že pro dva náboje stejného znaménka v malých vzdálenostech neplatí zákon Coulombův. Oba náboje se přitahují silou nepřímo úměrnou se čtvrtou mocninou (tedy nikoliv s pátou mocninou) vzájemné vzdálenosti. Tato přitažlivá síla nám má zároveň vysvětlovati soudržnost stejně nabitých součástek atomových jader, rozložených v prostoru velmi nepatrném. Kritickou vzdálenost, v níž se odpudivost mění v přitažlivost, udává Bieler na $3{\cdot}4 \times 10^{-13}$ *cm* pro jádro hliníku a hořčíku. Na tomto místě ovšem potenciál není nulový, naopak má zde maximum. Představme si nyní, co znamená tento fakt pro teorii vzniku alfa záření. Když alfa částice vyletí z mateřského jádra radioaktivního prvku, musí míti kinetickou energii alespoň tak velikou, aby odpovídala velikosti zmíněného maximálního potenciálu. Kde je však pramen této energie? Ocitáme se opět ve slepé uličce. —

Pro potenciál atomového jádra vůči alfa částici stanoven tedy vzorec

$$U = \frac{2Ze^2}{r} - \frac{c}{r^n} \quad \text{(kde } n > 2, \text{ stačí } n = 3, 4\text{).} \qquad (1)$$

Jakékoliv klasické vysvětlení druhého členu ve vzorci (1) selhávalo, proti všem druhům výkladu bylo možno mnohé namítati. Tak na př. r. 1927 dokázal Heisenberg, že jádro helia (a tudíž také alfa částice) je bez jakéhokoliv momentu. Moment jádra musel by se totiž projevovati v pásmovém spektru heliovém. Tím také padá Enskogův model alfa částice, jehož teorie byla založena právě na existenci magnetického momentu heliového jádra.

Pokusy o rozptylu alfa částic v heliu — tedy vlastně pokusy o rozptylu alfa částic na alfa částicích — prováděné v r. 1927 (Rutherford, Chadwick) jevily také veliké úchylky od zákona Coulombova. Na čas se stala populární Rutherfordova interpretace alfa částice jakožto rotačního elipsoidu (malá osa ve směru letu $2 \,.\, 10^{-12}$ *cm*, velká osa $7 \,.\, 10^{-13}$ *cm*).

4. Chtěl bych nyní upozorniti na zajímavé paradoxon, na které narážíme, užijeme-li klasických názorů na teorii vysílání alfa částic z jader atomů radioaktivních prvků.

Předpokládejme, že celá energie alfa částice E, kterou měříme mimo radioaktivní atom, pochází z odpudivého účinku atomového jádra na alfa částici podle zákona Coulombova. Energii alfa částice musí pak býti možno vyjádřiti takto

$$E = \frac{2e\,(Z - 2)\,e}{r}, \tag{2}$$

kde Z je řadové číslo radioaktivního prvku, r poloměr jádra atomů dotyčného radioaktivního prvku.

Energie různých druhů alfa záření dá se vypočísti z jejich rychlostí. Tak na př. pro prvek uran dostáváme z rovnice (2) hodnotu $r = 6{\cdot}4 \,.\, 10^{-12}\, cm$. Jádro uranu může býti sice větší, než odpovídá tomuto poloměru, avšak nikoliv menší. Pro menší poloměr vycházela by energie E větší, než jak je naměřena; pro větší poloměr pak předpokládáme, že alfa částice pochází z hlouběji položené oblasti jádra.

Všechny tyto úvahy jsou však v paradoxním rozporu s pokusy o rozptylu velmi rychlých alfa částic na uranu. Těmito pokusy bylo totiž dokázáno, že Coulombův zákon platí zcela přesně ještě do vzdálenosti $4 \,.\, 10^{-12}\, cm$. To znamená, že jádro uranového atomu musí býti menší než $4 \,.\, 10^{-12}\, cm$; podle svrchu provedené úvahy však jádro uranu nemůže býti menší než $6{\cdot}4 \,.\, 10^{-12}\, cm$.

Rutherford hledal východisko z této diskrepance v mezích klasického způsobu vysvětlení hypotésou, podle které alfa částice jsou v jádře radioaktivního prvku neutralisovány elektrony a v tomto neutralisovaném stavu obíhají kolem jádra právě ve vzdálenosti $6{\cdot}7 \,.\, 10^{-12}\, cm$. Před vylétnutím alfa částice z jádra spadnou elektrony nejprve na jádro, když se před tím nějakým způsobem odpoutaly od alfa částice. — Celá tato hypotésa je dosti libovolná a také není původní: již r. 1921 Meitnerová usuzovala z různých zákonitostí v rozpadových řadách radioaktivních prvků (ze sledů rozpadů: beta, beta, alfa nebo alfa, beta, beta), že v atomových jádrech jsou t. zv. neutralisované alfa částice.

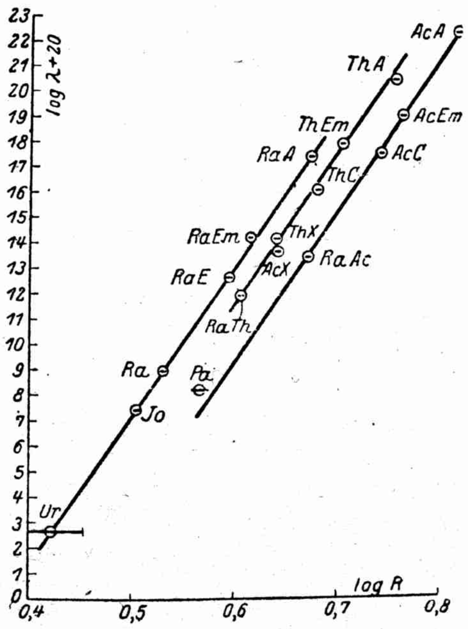
5. Teprve v l. 1928—29 podařilo se na základě nových představ *vlnové mechaniky* odstraniti všechny tyto rozpory. Na základě vlnové mechaniky tvoří Gamov, Condon a Gurney teorii jádra, která nemá obdoby ani v teorii klasické, ani ve starší teorii kvantové. Nová teorie snaží se především vysvětliti t. zv. *pravidlo* Geigerovo - Nuttallovo, které vzdorovalo až do r. 1928 jakémukoliv teoretickému výkladu. Pravidlo uvádí v souvislost rozpadovou konstantu λ radioaktivního prvku s rychlostí v alfa částic tímto prvkem vyzařovaných:

$$\log \lambda = A + B \log v, \tag{3}$$

kde A, B jsou konstanty. Je známo od r. 1912. Čím kratší dobu žije radioaktivní prvek, tím větší rychlostí vyletují jeho alfa částice. (Rozpadové konstantě je nepřímo úměrný poločas radioaktivního prvku.) Viz obr. 3.

Doběh R alfa částic je úměrný v^3. G.-N. pravidlo lze tudíž také psáti v tvaru

$$\log \lambda = A + C \log R. \tag{4}$$

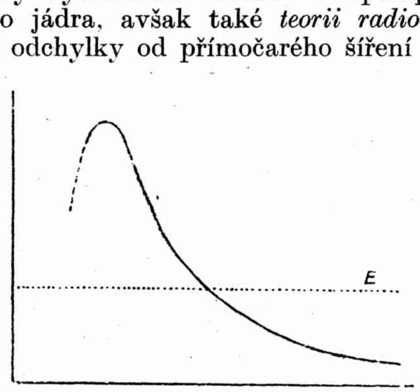


Obr. 3.
Pravidlo Geigerovo-Nuttallovo.

Známe sice některé výjimky od tohoto pravidla, na př. poločas prvku Ra C′ je asi 60kráte menší než hodnota vypočtená z doběhu alfa záření radia C′. Pravidlo zůstává však přes to nejpodivuhodnější ze všech, které v moderní fysice známe, neboť poločasy v něm zahrnuté jsou v poměru $1 : 10^{23}$.

Teprve vlnová mechanika objasňuje nám do jisté míry G.-N. pravidlo. Než k tomu přejdeme, ujasníme si nejprve základy kvantové teorie atomového jádra na podkladě vlnové mechaniky, tak jak se vyvíjí od r. 1928.

Zmínil jsem se již o průběhu potenciálu v okolí atomového jádra, jak se jeví z moderních pokusů o rozptylu alfa částic. (Viz obr. 4.) V duchu představ klasických nemůže se alfa částice dostati z jádra na venek. Jádro je obklopeno „hradbou" potenciálu, potenciálním „kráterem", jehož vrchol podle klasických představ nemůže alfa částice přeletěti. Tato vysoká potenciální hradba zabraňuje právě rozběhnutí součástek jádra do světa vnějších elektronů. Spojením představy této hradby potenciálu s výsledky vlnové mechaniky vybudovali Gamov a spolupracovníci nejen teorii atomového jádra, avšak také *teorii radioaktivity*. Vlnová optika připouští odchylky od přímočarého šíření světla. Podobně



Obr. 4.
Schema „potenciální hradby" atomového jádra.

také se stanoviska vlnové mechaniky je možno „přeskočení" (slip out) oblasti vysoké potenciální hradby. To je názor, který je zcela protichůdný klasickým představám a zejména zmíněné explosivní hypotése Petterssonově. Jen pro potenciální hradbu nekonečně vysokou je přeskok nemožný. Vlnová mechanika stanoví také *pravděpodobnost* pro přeskok potenciální hradby. Ta je závislá na třech veličinách: na „šířce" a „výšce" hradby — výška je vyjádřena určitým integrálním výrazem — a na energii částice z jádra vyletující.

Ve výraze pro pravděpodobnost vyklouznutí částečky za potenciální hradbu je skryto již kvalitativní porozumění pravidlu Geigerovu - Nuttallovu. Pravděpodobnost je tím větší, čím je hradba nižší a užší. Radioaktivní rozpad je podle G. - N-ova pravidla tím častější (t. j. rozpadová konstanta λ tím větší), čím je energie alfa částic vyšší, čím je tedy pro alfa částice potenciální hradba nižší. Vlnová mechanika přímo „razí tunel" v potenciální hradbě pro alfa částice mateřské jádro opouštějící.

Vlnová mechanika však dociluje i kvantitativního porozumění pravidla Geigerova - Nuttallova. Pravděpodobnost zjevu „slip out" závisí v podstatě na exponenciálním členu

$$e^{-4\pi d\sqrt{2m(U-E)}/h}, \tag{5}$$

kterýžto výraz platí vlastně pro t. zv. schematisovanou hradbu pravoúhelníkovou. (Pro hradbu typu potenciální jádrové hradby, tak jak ji vidíme na obr. 4, dlužno integrovati $\sqrt{2m\,(U - E)}$ podél šířky hradby). Výraz (5) dlužno násobiti ještě jistým členem, abychom dostali zmíněnou pravděpodobnost. Tento člen je však přibližně velikosti jedničky.

Zde přicházíme konečně ke kvantitativnímu výkladu G. - N. pravidla.

Rozpadové konstanty a tudíž také poločasy mění se ve velmi širokých mezích. Známe radioaktivní prvky o poločasích obnášejících zlomky vteřiny, avšak také miliony let. Počáteční rychlost alfa částic nemění se však ani v poměru 1 : 2! Teoreticky musíme obdržeti rozpadovou konstantu, když zmíněnou pravděpodobnost násobíme frekvencí oběhu alfa částice v jádře.*) Tu stanovíme snadno za předpokladu, že se alfa částice pohybuje kol jádra periodicky s rychlostí v, kterou měříme v makrokosmu. Rozpadová konstanta závisí tedy na exponenciálním výrazu (5). Z vlastností tohoto výrazu je zřejmé, že malá změna v mocniteli (t. j. malá změna E, rychlosti alfa částic) působí velkou změnu celého výrazu a tudíž také rozpadové konstanty. To odpovídá faktu, že malé změně rychlosti alfa částic odpovídá veliká změna poločasu.

Exponenciální výraz je větší pro větší energii E. Čím je tedy energie E větší, tím je rozpadová konstanta větší a poločas dotyčného prvku kratší. Fakt, dobře známý z Geigerova - Nuttallova pravidla.

Přesný výpočet ukazuje, že exponenciální výraz (5) nezávisí prakticky na tom, jak probíhá neznámá část potenciální křivky (křivky průběhu potenciálu v okolí jádra v závislosti na vzdálenosti od jádra). Stačí, když máme část této křivky, probíhající podle zákona Coulombova.

Exaktní řešení všech těchto otázek podává Houtermans (viz Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, 1930). Pro jednoduchost omezuje se Houtermans na jednorozměrnou dvojitou potenciální hradbu — alfa částice je totiž uvnitř jádra a „s obou stran" je uzavřena potenciální hradbou. Poněkud odchylný způsob řešení podal Laue a Gamov. V citované práci Houtermansově dozví se čtenář z ryze matematického hlediska podrobnosti otázky.

---

*) Frekvencí ω oběhu alfa částice kolem jádra rozumíme poměr rychlosti alfa částice (tak jak ji měříme mimo radioaktivní atom) a poloměru jádra dotyčného radioaktivního atomu. Pravděpodobnost zjevu „slip out" je dána poměrem rozpadové konstanty a frekvence oběhu alfa částice ($= dN/dt : \omega N = \lambda N : \omega N = \lambda : \omega$).

V ní je také úplný seznam literatury na který — vzhledem k jeho rozsáhlosti — odkazuji čtenáře, hodlajícího proniknouti do podrobností otázek zde nastíněných.

Zatím jsme měli na zřeteli vznik alfa záření z jádra atomů. Mnohem větší obtíže však jsou s vysvětlením vzniku *záření beta a gamma*. Zde zatím i vlnová mechanika selhává. Také v teorii „rozbití jádra" a v teorii t. zv. resonančního rozbití jádra jsou mnohé nesrovnalosti, ba přímo rozpory. Nejnověji objevená „jemná struktura" alfa záření odolává také řádnému teoretickémn výkladu. A tak stále ještě zůstáváme jen na prahu poznání pravé podstaty a struktury atomového jádra!

LITERATURA.

A. Recense.

E. Picard: Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'Analyse et de Physique mathématique, rédigées par E. Blanc. 188 stran; 1928. — Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles, rédigées par M. Brelot. VIII + 271 stran, 1930. — Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques, rédigées par J. Dieudonné. VIII + 224 stran, 1931 (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de Gaston Julia, fasc. 3., 5., 9. Paris, Gauthier-Villars).

V těchto třech svazcích, podobně jako ve svazku vyšlém již dříve ve sbírce „Cahiers scientifiques" (viz můj referát v Časopise, r. *57*, 1928, str. 156) jsou zpracovány Picardovy přednášky na Faculté des Sciences. Podle předmluvy k prvnímu z nich jsou vydány na podnět některých žáků Picardových; nahrazují vlastně čtvrtý díl jeho známého „Traité d'Analyse", kterýžto díl původně byl ohlášen, ale, jak Picard výslovně sděluje, k jeho vydání nedojde.

Přednášky o funkčních rovnicích jednají v prvé kapitole o některých jednoduchých rovnicích na př. o rovnicích

$$f(x) + f(y) = f(x + y), \quad f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\,f(y)$$

a o jejich aplikaci v problému o skládání sil a v problémech neeuklidovské geometrie, hlavně trigonometrických. Dále jsou probírány analytické funkce definované funkčními rovnicemi a jednoznačné funkce, které mají teorem addiční nebo multiplikační (definice $\Gamma(z)$, inverse eliptických integrálů, stanovení funkcí $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ takových, že

$$f_i(at) = R_i[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde R_i jsou funkce racionální a a číslo absolutně větší než 1). Ve třetí kapitole jsou vyloženy principy, jichž se užívá k řešení diferenčních rovnic tvaru

$$F(x + 1) - F(x) = f(x);$$

zvláště se jedná o periodických řešeních některých rovnic, o funkcích theta, o integraci lineárních diferenciálních rovnic s koeficienty dvojnásobně periodickými a s integrály jednoznačnými a o Picardových transcendentách definovaných funkčními rovnicemi. Poslední kapitola je věnována Abelově rovnici

$$f[\vartheta(x)] = f(x) + 1,$$

kde ϑ je daná funkce a f neznámá; rovnice ta souvisí s úlohami o iteracích, kterými se zabývali Koenigs, Fatou a Julia. Kniha je zakončena odstavcem o užití Fredholmovy rovnice v některých úlohách nauky o potenciálu. Veliká cena knihy je jednak v tom, že jsou zde poměrně přístupně podány přesnou a přehlednou formou výsledky některých prací Poincaréových a Picardových jakož i mnohých jiných autorů, jednak v originálním výběru a uspořádání látky; tak na př. výklady o diferenčních rovnicích jsou podány v úzké souvislosti s teorií funkcí periodických, problémy o neeuklidovské geometrii ve spojitosti s vlastnostmi funkčních rovnic a j.

Druhý svazek obsahuje látku, která je doplňkem k některým kapitolám 3. dílu Traité d'Analyse o diferenciálních rovnicích lineárních. V prvé části, která je věnována obyčejným rovnicím, je vyložena předně obecná metoda ke studiu integrálních křivek (pro obecnou diferenciální rovnici 2. řádu), procházejících dvěma body. Následují kapitoly o integrálních křivkách rovnice

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x)y = 0$$

určených podmínkami na krajích daného intervalu, o soustavách ortogonálních funkcí a o příslušných rozvojích v řady a o užití v některých úlohách matematické fysiky. Zvláštní kapitoly jednají o vyšetření periodických integrálů užitím jednak nekonečně velikého počtu algebraických lineárních rovnic o nekonečně velikém počtu neznámých jednak integrálních rovnic. Druhá část obsahuje výklad obdobných problémů o rovnicích parciálních. Jedná se o problém Dirichletův a o úlohy podobné pro obecnější parciální rovnice eliptického typu, o úlohách z nauky o vedení tepla a konečně o Fredholmově rovnici a jejím užití při řešení problému Dirichletova a Neumannova.

Ve třetím svazku nalézáme úvod ke studiu některých otázek z teorie algebraických křivek a ploch. V první kapitole je vyložen obecný problém inverse Abelových integrálů ve formulaci Jacobiově a Riemannově. Následují kapitoly o funkcích dvou proměnných o čtyřech periodách, o uniformisaci algebraických křivek, o rovnici

$$\Delta u = ke^u,$$

která se vyskytuje v teorii ploch konstantní křivosti a která souvisí s některými otázkami o automorfních funkcích; na začátku této kapitoly (str. 83) je zmínka o t. zv. Picardově principu, který doplňuje zajímavým způsobem definici harmonických funkcí. Další části spisu týkají se algebraických funkcí dvou nezávisle proměnných. Autor, jenž sám je nejvýznamnějším pracovníkem v tomto oboru, pojednává zde o integrálech totálních diferenciálů na algebraické ploše, o dvojnásobných integrálech racionálních funkcí a o dvojnásobných integrálech vztažených k algebraické ploše. Svazek je zakončen otiskem čtyř Picardových článků o různých otázkách z teorie algebraických ploch.

Jak druhý, tak třetí svazek jsou velmi obsažné. Podávají vedle partií podrobně vypracovaných mistrně psaný úvod k nejtěžším kapitolám vyšší analyse. Čtenář, jenž se zajímá o teorii algebraických ploch, užije k dalšímu studiu staršího díla Picard-Simart: Théorie des fonctions algébriques à deux variables, ke kterému se zde na četných místech odkazuje.

Bohuslav Hostinský.

V. Volterra: Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Edited by L. Fantappié, authorised translation by Miss M. Long. Blackie and Son, London, 1930, XIV + 226 p.

Tato kniha je rozšířený a doplněný překlad přednášek, které měl Volterra r. 1925 na universitě v Madridu a které vyšly r. 1927 ve španělském jazyce. Klasická vyšší analyse je vybudována na pojmu funkce. Nová teorie vychází z pojmu funkcionálu, to jest veličiny, jejíž hodnota závisí na celém průběhu dané funkce, a směřuje k tomu, přenésti metody, jichž se užívá v diferenciálním a v integrálním počtu, do analyse funkcionálů. Volterra podává zde pečlivě a důmyslně zpracovaný přehled, který umožní orientaci o všech důležitějších otázkách z tohoto oboru. Kniha není vlastně učebnicí, je spíše stručným úvodem ke studiu pramenů; cituje mnoho set prací, takže čtenář snadno si zde vyhledá tituly spisů, ze kterých by se poučil blíže o té neb oné otázce. Mnohé kapitoly byly obšírněji zpracovány již v dřívějších spisech Volterrových (viz moje recense v Časopise, ročník *43*, str. 73, 428; ročník *57*, str. 156).

První kapitola jedná o funkcionálech (definice, spojitost, lineární funkcionály, řady postupující podle symbolických mocnin funkcionálů) a o početních úkonech s nimi (derivování, zobecnění Taylorovy řady, výpočet variací, integrování). Druhá kapitola obsahuje po stručném úvodě o problémech funkcionálního počtu základy nauky o integrálních rovnicích lineárních; řešení těchto rovnic je pro funkcionální počet to, co je pro analysi řešení obyčejných rovnic lineárních. Třetí kapitola jedná o zobecnění pojmu analytické funkce, nastoupí-li uzavřená čára na místo nezávislé proměnné. Čtvrtá kapitola je věnována teorii o „skládání" funkcí, jež jest obdobné obyčejnému násobení čísel. Pátá kapitola jedná o integrodiferenciálních rovnicích a o rovnicích s funkcionálními derivacemi (tak se nazývají limitní hodnoty poměrů, jimiž se vystihuje změna funkcionálu uvažovaná v souvislosti s příslušnou nekonečně malou změnou proměnné funkce). V poslední kapitole jsou stručně vyloženy některé aplikace (z variačního počtu, z nauky o integrálních rovnicích, z teorie kmitů, aplikace integrodiferenciálních rovnic v mechanice a j.).

Autor, jenž svými pracemi uveřejňovanými od r. 1884 až do nejnovější doby dal základy k nejedné kapitole funkcionální analyse, podává tímto svým novým spisem výbornou pomůcku, která přijde vhod každému, kdo se zajímá o teorii funkcionálů a její aplikace. *Bohuslav Hostinský.*

E. Cartan: Leçons sur la géométrie projective complexe (Cahiers scientifiques, fasc. X, Paris, 1931, stran VII + 325). Nejprve stručně uvedu, oč jde. — Projektivní komplexní geometrie studuje invarianty grupy transformací projektivních a antiprojektivních v prostorech o $n \geq 1$ dimensích.

V nejjednodušším případě $n = 1$ tyto transformace (při nehomogenních proměnných) jsou tvaru

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

kde $\bar{z}$ značí číslo komplexně sdružené se z. Obecná projektivní transformace (I_1) dá se vyjádřiti vzorcem

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = k\,\frac{z - \alpha}{z - \beta}, \tag{2}$$

kde α, β, k jsou vhodná čísla. Involutorní transformace (t. zv. symetrie) grupy (1) jsou (projektivní) involuce a (antiprojektivní) antiinvoluce. Antiinvoluce jsou buď prvního druhu, t. j. s dvojnými body, anebo druhého druhu, t. j. bez dvojných bodů.

Mezi antiinvolucemi druhého druhu (a. 2. dr.) a kladnými hermiteovskými formami $ax\bar{x} + bx\bar{y} + \bar{b}\bar{x}y + cy\bar{y}$ (a, c reální) o diskriminantu $ac - b\bar{b} = 1$, jest jednojednoznačná korespondence, takže množství a. 2. dr. tvoří (reální) prostor o 3 dimensích. Jsou-li v něm P_1, P_2 dva body, projektivita P_2P_1 jest tvaru (2) a $k > 0$. Číslo $\frac{1}{2}\log k$ definujme jako vzdálenost bodů P_1, P_2. Prostor a. 2. dr. jest pak (t. zv. fundamentální) Riemannův prostor s definitním ds^2 a jeho isometrické transformace jsou všechny transformace grupy (1). Libovolné symetrii S přiřazena jest ve fundamentálním prostoru varieta symetrie, t. j. množství a. 2. dr. zaměnitelných s S. Tato jest 1^0 bod, 2^0 geodetická čára, 3^0 varieta (totálně geodetická) o dvou dimensích, když S jest 1^0 a. 2. dr., 2^0 involuce, 3^0 antiinvoluce 1. druhu. Symetrií S přejde každý bod P fundamentálního prostoru, neležící na příslušné varietě symetrie v souměrný P' vzhledem k této varietě (t. j. body P, P' leží na kolmici k varietě symetrie a jsou od této stejně vzdáleny). Fundamentální prostor jest v jednojednoznačné korespondenci s trojrozměrným prostorem Lobačevského takové, že varietám 1^0, 2^0, 3^0 odpovídají po řadě body, přímky, roviny. Grupa transformací (1), zaměnitelných s určitou (absolutní) symetrií S tvoří grupu pohybů geometrie buď na příslušné varietě symetrie (je-li tato aspoň o jedné dimensi) anebo (je-li to bod) v prostoru variet symetrie involucí nebo antiinvolucí 1. druhu, procházejících příslušným bodem. Je-li na př. S antiinvoluce 1. dr. (2. dr.) jest příslušná geometrie neeuklidovská rovinná (sférická po př. v eliptické rovině).

V prostorech o $n \geq 2$ dimensích lze předcházející výsledky zobecniti. Tyto jsou pak mnohem rozmanitější také proto, že vedle transformací bodových se uvažují transformace korelativní (korelace a antikorelace). Na př. pro $n = 3$ jsou výsledky tyto. Existují čtyři druhy symetrie projektivní (involuce centrální a biaxiální, polarita ke kvadrice a k lineárnímu komplexu) a pět druhů symetrie antiprojektivní (antipolarita hyperbolická prvního a druhého druhu, antipolarita eliptická, antiinvoluce prvního a druhého druhu). Z nich antipolarity eliptické jsou opět jednojednoznačně přiřazeny hermiteovským kladným formám a tvoří (reální) prostor o 15 dimensích. Jsou-li v něm P_1, P_2 dva body, kořeny charakteristické rovnice projektivity P_2P_1 jsou > 0. Pomocí těchto lze definovati vzdálenost bodů P_1, P_2 tak, že uvažovaný prostor jest opět (t. zv. fundamentální) Riemannův prostor s definitním ds^2 a jeho isometrické transformace jsou všechny transformace projektivního komplexního prostoru. Variety symetrie v tomto prostoru jsou, mimo body přiřazené elipt. antipolaritám, (totálně geodetické) o 5 až 10 dimensích. Určité (absolutní) symetrii přiřazena jest na příslušné varietě symetrie po př. v prostoru variet symetrie téhož druhu procházejících jedním bodem fundamentálního prostoru, geometrie podřazená projektivní komplexní geometrii (geometrie neeuklidovská komplexní, lineárního komplexu, hermiteovská hyperbolická, eliptická atd.).

Kniha je rozdělena na dvě části a z nich každá má pět kapitol. V první části kapitola první obsahuje několik základních vět projektivní komplexní geometrie, zvláště větu o charakteristických vlastnostech projektivních transformací. V ostatních kapitolách této části probírána jest projektivní geometrie na komplexní přímce s hlediska a s výsledky v hlavních rysech výše uvedenými ($n = 1$). V druhé části první čtyři kapitoly věnovány jsou převážně projektivní geometrii v prostoru trojrozměrném. Po několika klasických větách o korelacích a klasifikaci homografií následuje studium symetrií, zvláště dvojic symetrií zaměnitelných. V kap. 2—4 studuje se zobecnění hlavních výsledků první části, zvláště vlastnosti variet symetrií ve fundamentálním prostoru a jednotlivé geometrie, podřazené proj. komplexní geometrii, jak byla o tom výše řeč. Pátá kapitola stojí poněkud isolovaně, avšak má mnohé styčné body s předcházející teorií. Obsahuje obecnou teorii harmonických polynomů, její aplikaci na znázornění projekt. kompl. prostorů reálními varietami v eukleidovských prostorech a studium geometrických vlastností těchto variet.

Mám za to, že hlavní význam díla jest v originální myšlence studia proj. kompl. geometrie v souvislosti s fundamentálním Riemannovým prostorem, která vede zvláště k jednotnému hledisku pro klasifikaci geometrií podřazených projektivní grupě. Avšak i v podrobnostech a podřadnějších věcech jest řada velmi zajímavých výsledků a originálních metod. Na př. znění a důkaz teorému na str. 9, studium zaměnitelných symetrií, důkaz teorémů na str. 151, 199 a zvláště pak úvahy v poslední kapitole druhé části (částečně již uveřejněné v dřívějších pracech autora). Čtenář nalezne na několika místech popud k samostatné činnosti a myslím, že zvláště poslední kapitola vede k zajímavým geom. otázkám (na př. po geom. konstrukci Segreových variet, jejích lokálních charakteristických vlastnostech, a pod.). Autor píše v úvodu: „Je ne suppose au lecteur, en dehors d'une certaine culture mathématique, que la connaissance des propriétés classiques du rapport anharmonique et la notion d'espace riemannien."

O. Borůvka.

Gino Loria: Curve piane speciali algebriche e trascendenti, teoria e storia, vol. II, 1930, Milano, U. Hoepli, cena 140Kč.

O druhém díle italského vydání známého spisu Loriova mohli bychom s malými změnami říci totéž, co o díle prvním (Roč. LX str. 45.). I tento díl doplnil autor nejnovější literaturou, i zde v celku i částech ponechal strukturu známých vydání německých. Je záslužným činem jak autorovým tak vydavatelovým, že v poměrně krátké době odevzdali matematické veřejnosti úplné a jednotné zpracování zvláštních křivek, jak rovinných (v těchto dvou dílech), tak prostorových (Curve sghembe ecc.). *Q. Vetter.*

C. C. Dassen: Sistemas de coordenadas y transformaciones, Buenos Aires, 1930, XIII — 250 str.

Kniha ta vznikla přepracováním a doplněním článků, které Dassen uveřejnil v „Revista matemática" a v „Annales de la Sociedad cientifica Argentina". Účelem knihy je podati jasný výklad látky, ovšem podle nových prací doplněné, která je obsahem poslední práce Darbouxovy. Účele toho autor také dosahuje. Po všeobecných pojmech v I. kapitole probírá ve II. kapitole souřadnice tetraedrické a homografii. Zde dochází až ke zvláštním případům homografické transformace, k perspektivě a transformaci Lorentzově, jakož i k aplikacím homografie. Ve III. kapitole probírá souřadnice tangenciální, korelaci a princip duality, ve IV. korelativní obrazce. V kapitole V. konečně pojednává autor o souřadnicích tetracirkulárních a pentasférických a o inversi. Při svých výkladech cituje i literaturu z posledních let. Velmi instruktivní je dodatek, kde jsou ve velmi stručném přehledu podány dějiny jednotlivých otázek na př. dvojpoměru nebo transformace souřadnic a pod. od doby nejstarší až do nejnovější. Abecední rejstřík citovaných autorů s daty narození a úmrtí je dobrým zakončením knihy.

Q. Vetter.

Gino Loria: Storia delle matematiche, vol. II, Turin, 1931, Sten, 595 str., cena váz. 50 Kč.

Dva roky po I. díle, o němž jsem referoval v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, roč. LX, str. 132, předkládá neúnavný nestor italských historiků matematiky čtenářstvu druhý svazek svých dějin matematiky. Přednosti prvního dílu jsou nejen zachovány, nýbrž snad i stupňovány ve svazku druhém, věnovaném století XVI. a XVII. Díl ten počíná velkým sporem mezi Tartagliou a Cardanem a končí ještě větším sporem mezi Newtonem a Leibnizem. A mezi nimi leží spor Robervalův a jiné. V těchto velkých sporech zachovává prof. Loria vzácnou objektivitu, která svědčí o jeho jemném historickém taktu. Probírati jednotlivosti jeho krásné a bohaté knihy bylo by příliš obšírné a odkazuji čtenáře na spis sám. Podotýkám jen, že kapitoly jsou srovnány podle látky, v nich pak jsou oddíly uspořádány podle jednotlivých věd. Z českého hlediska bych jen podotkl, že naše slovenské Košice, kde zemřel Rheticus, jsou omylem psány Kaschen (Ungheria) a že u otce Jana Caramuela z Lobkovic, Vavřince Caramuela, je poznámka „oriundo boemo", ač jen jeho matka byla Češka, Regina z Lobkovic. Jako první lze i druhý svazek vřele doporučiti. Připojujeme jen jediné přání, aby i třetí díl, který se tiskne, brzo vyšel. *Q. Vetter.*

E. Müller: „Vorlesungen über darstellende Geometrie“ II. Band „Die Zyklographie“, vydal J. Krames u fy Deuticke, Wien-Leipzig 1929. Stran 474, obrazců 208.

V roce 1923 vyšel první díl těchto přednášek profesora vídeňské techniky, určených pro kandidáty profesury, obsahující lineární zobrazovací metody deskriptivní geometrie. Referát o tomto díle je v LIV. ročníku tohoto časopisu od prof. Dr. L. Seiferta. Již v tomto I. díle slíbil prof. Müller další práce, a to o cyklografii, o konstruktivní teorii přímkových ploch a o šroubových a posuvných plochách. Bohužel než došlo k vydání II. dílu, znamenitý tento deskriptivní geometr zemřel dne 1. září 1927. V jeho pozůstalosti byl zcela zpracován tento II. díl a jeho žák Krames, nyní profesor na německé technice v Brně, vydal toto dílo, jež rozšiřuje užití deskriptivní grometrie i na problémy čistě matematické. Cyklografie byla již zpracována svým objevitelem *Fiedlerem* v díle „Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln“ roku 1882 a později bylo jí užito celkem od málo autorů, mezi nimiž je též zvěčnělý náš prof. Sobotka, v různých pojednáních. Prof. Müller od roku 1905 uveřejnil několik pojednání o cyklografii a ta jsou systematicky zde projednána, jakož i v mnohém směru prohloubena. Do všech důsledků, na rozdíl od Fiedlera, užito tu dvojího smyslu na kružnici a přímce k zavedení pojmů cyklu a šípu (Speer).

V prvých dvou kapitolách podány definice jakož i přiřazené útvary v prostoru základních pojmů v množině cyklů roviny, t. j. cyklové lineární řady, lineární a sférické kongruence, kruhu, svazku, trsu, koule, jakož i základních transformací dilatace a zrcadlení vzhledem k lineární cyklové kongruenci t. zv. Laguerrovy transformace. V kapitole třetí vyloženy hlavní metrické pojmy parabolické geometrie, jež má za absolutní kuželosečku úběžnou kuželosečku C rotační kuželové plochy, již tvořicí přímky svírají s průmětnou, v níž cyklovou geometrii uvažujeme úhel $\frac{1}{4}\pi$, podle Müllera tak zvané C-geometrie nebo pseudogeometrie. Definovány tu C-kružnice, C-koule a uvažováno tu o hlavní grupě transformací, jež reprodukuje kuželosečku C a její podgrupě t. zv. C-pohybů a C-překlopení. Pojmy tyto přeneseny do geometrie cyklů a šípů a využito toho k řešení různých úloh, jakož i k důkazu některých vztahů, zvláště pak v kapitole IV. k odvození vět o tak zvaném čtyršípu (Vierspeer). Též přeneseny známé věty prostorové geometrie, na př. o 8 asociovaných bodech, Möbiusových čtyrstěnech atd. do geometrie cyklů. Užitím cyklografie podán důkaz věty Caseyovy, kdy čtyři cykly se dotýkají téhož cyklu, a na základě této pak důkaz věty Feuerbachovy o kružnici devíti bodů v trojúhelníku, o který pokusil se sice již Fiedler, ale jak Müller podotýká, provedl jej neúplně a teprve prof. Sobotka v pojednání „K dvěma důkazům věty Feuerbachovy“, Rozpravy České akademie XXXI, podal dokonalý cyklografický důkaz. Ke konci IV. kapitoly je zmínka o Blaschkeově zobrazení šípu průmětny v body rotační válcové plochy, kolmé k průmětně, jakož i o přenesení některých pojmů touto transformací z geometrie cyklů do prostoru.

V kapitole V. vzhledem k užití v dalším vyloženy vlastnosti nové bodové transformace, zprostředkované stereograficlou projekcí kulové plochy ω na průmětnu π, jdoucí jejím středem a cyklografií. Bod p prostoru zobrazen tu párem bodovým, souměrně položeným k průmětně π, jenž je cyklografickým obrazem kružnice, do níž stereograficky promítá se kružnice plochy ω, ležící v polárné rovině bodu p vzhledem k ω. Dospívá se tak k neeuklidovské hyperbolické geometrii, jež má π za absolutní plochu, C-kružnice a C-koule, jichž středy jsou v π, za přímky a roviny, jež se nazývají S-přímky a S-roviny (od slova Scheingeometrie). Odvozeny základní metrické pojmy v této S-geometrii, hlavně S-koule, S-pohyby, S-zrcadlení z hyperbolické geometrie prostorové o absolutní ploše ω, t. zv. ω-geometrie.

Po tomto vsunutí, jež jeví se nutným k pozdějším vztahům, pokračováno v užití cyklografie, a to nejdříve k zobrazení křivek prostoru v cyklické řady a jich obálky. Zvláště věnována pozornost křivkám stejného spádu, jež pro spád 1 jsou C-křivkami. V aplikacích pozoruhodná je řada vět o křivkách, zvaných kaustiky, katakaustiky a antikaustiky, jež vyskytují se při odrazu, případně lomu paprsků. Obzvlášť podrobně probrány cyklické obrazy křivek 2^0 a s tím souvisící plocha stejného spádu nad kuželosečkou. V VII. kapitole zajímavě pojednáno o prohýbání řad cyklů a způsobem velmi jednoduchým odvozena tu řada pozoruhodných vět pro cyklické pohyby v rovině a mnohé jiné speciální křivky, jako řetězovky, traktrix atd. Cyklografickému zobrazení ploch věnována kapitola VIII. Plocha zobrazuje se tu v kongruenci cyklovou, jejíž cykly jsou oskulačními dvou sítí křivek, jež odpovídají dvěma sítím C-křivek plochy. Touto teorií zobrazení ploch řešena tu řada problémů o trajektoriích a ekvitangenciálních systémech sítí křivek. Obdrženy tak názorným a jednoduchým způsobem mnohé ze známých dřívějších výsledků, jakož i některé nové.

Kapitola IX. obsahuje zobrazení bodů prostoru v kulové plochy, opsané nad jejich cyklografickými obrazy jako hlavními kružnicemi. Studována dotyková transformace mezi bodovým prostorem a trojmocnou množinou kulových ploch, jež protínají průmětnu π kolmo. Přímkový prostor zobrazuje se tu v čtyřmocnou soustavu rotačních kuželových ploch o osách v π. C-přímkám odpovídají minimální přímky. Křivky a přímky bodového prostoru zobrazují se tu v nelineární řady, případně kongruence kulových ploch, jež obalují plochy, jichž některé vlastnosti vyplývají ihned z této transformace. Zvláštní pozornost věnována Dupinovým cyklidám, jež odpovídají C-kružnicím v bodovém prostoru.

V kapitole X. ukázáno, jak body roviny lze „cyklograficky" zobraziti v družiny bodové přímky P, obsažené v té rovině. Zvolen tu pár bodový c_1, c_2 na úběžné přímce roviny, jež jsou ve směrech, svírajících s P úhly $\pm \frac{1}{4}\pi$, a z nich libovolný bod roviny promítnut na přímku P do družiny obrazové, jež, jsouc orientována, určuje bod v té rovině jednoznačně. Řada bodová má tak za obraz podobnost dvou řad na P a libovolné křivce v rovině odpovídá tak jistá korespondence bodová na P. Projektivnost bodová na P je obrazem C-kružnice. C-geometrii rovinné, jež má za absolutní body c_1, c_2, odpovídá tu geometrie šipek na přímce. Obdrží se tak jednoduchým způsobem řada vět o projektivnostech na přímce. Tato kapitola byla by bývala lepší na počátku díla, jako úvod do cyklografie. V závěru naznačeno ještě, jak lze cyklografické zobrazení různě zobecniti.

Všechny kapitoly doprovázeny jsou řadou příkladů, jež podávají se čtenáři k řešení. Kniha obsahuje mnoho nových podnětů k aplikacím uvedených zobrazovacích metod a obohacuje měrou značnou literaturu o deskriptivní geometrii. V některých částech však mohla býti stručnější. Vypravení celého díla i po stránce vnější je vzorné, obzvláště obrazce, jak u Müllerovy školy samo sebou se rozumí, jsou vzorně a jasně provedeny. Spis tento vřele se doporučuje k prostudování našim kandidátům profesury. Jen některá menší nedopatření referent dovolil by si poznamenati. K poznámce na str. 23 třeba dodati, že též *Monin* v práci „Příspěvky k theorii křivky kruhové", vydané v roce 1889 vlastním nákladem, zavádí jistou hodnotu pro mocnost přímky vzhledem ke kružnici, jež je funkcí Epsteinem zavedené mocnosti. Cyklus X. v obr. 39 má míti smysl opačný. Str. 102, odst. 48 v závěru je nejasný, uvedená plocha Φ nemůže náležeti k daným družinám bodovým na kuželosečce K^2. Str. 212 kružnice podobnosti dvou kružnic značí tu něco jiného, než uvedeno na str. 154 v poznámce. Zde byl by na místě název „potenční kružnice" podle Ponceleta. Str. 217, doplňujícím se cyklům odpovídající elipsy na Γ jsou souměrné vzhledem k o a nikoliv π. Str. 247 nahoře se praví, že má-li křivka K bod vratu, příslušná

C-rozvinutelná plocha má bodem tím jdoucí tvořicí přímky za přímky vratu, což vedlo by k tomu, že ekvidistanta na př. pravidelné asteroidy měla by míti body vratu na normále v jejím bodě vratu, což pravda není, ostatně na str. 265 tvořicí přímky ty neuvažují se jako vratu. V poznámce[3]) str. 255 bylo by dobře odkázati na př. na Wieleitnera: „Spezielle ebene Kurven" str. 225. V odstavci 46 bylo by lépe při C uvésti třídu $m_1 = 0$, ježto v případě prostorové křivky je to počet oskulačních jejích rovin bodem. Str. 265 dole ke křivce K ve svislé rovině lze vésti jen m svislých tečen a nikoliv $2m$. K poznámce [2]) str. 315 třeba dodati, že věta, Chaslesem vyslovená, je zvláštním případem věty Camusovy z roku 1733 v „Mémoire de l'Academie". Ve větě 2. odst. 58. dotýká se řídicí přímka souměrně položené řetězovky. Na str. 353 má býti ve vzorcích pro dψ a ψ odmocnina jen v čitateli. Na str. 389 místo (Trajektorie) má býti (traktorie).

Od týchž autorů a u téhož nakladatele vyšel III. díl těchto přednášek, a to „Konstruktive Behandlung der Regelflächen", stran 303, obr. 153, 1931. Tento díl, jak vydavatel prof. Dr. Krames v předmluvě praví, vznikl z přednášek prof. Müllera, ale zpracování, jakož i mnohé prohloubení pochází zcela od vydavatele. Podána tu poprve souborně konstruktivní teorie přímkových ploch jak rozvinutelných, tak zborcených.

V prvé části díla pojednáno o přímkových plochách obecně. V kapitole I. předeslány potřebné pojmy z přímkové geometrie a to komplex, kongruence a přímková plocha, při posledních pak rozdíl mezi rozvinutelnými a zborcenými. Definován distribuční parametr, který podle Blaschke označen tu německy „Drall" (výkrut), při čemž zvláště přesně vytčen jeho smysl, torsální přímky a roviny, kuspidální body, jakož i rovnice definovaných útvarů přímkových. V II. kapitole přihlédnuto k různým vytvořením přímkových ploch. Nejprve rozvinutelné plochy určeny dvěma řídicími plochami nebo křivkami. V posledním případě proveden zajímavý případ, dány-li dvě řídicí kružnice, jichž roviny jsou k sobě kolmé. Poté uvažována zborcená plocha jako pronik tří paprskových komplexů a aplikováno to na případy, dány-li tři řídicí křivky nebo plochy. V dalším vytvořena zborcená plocha pronikem kongruence paprskové s komplexem nebo jako výtvor při korespondenci dvou řad prvků, jakož i některá jiná vytvoření. V III. kapitole uvažována zborcená plocha v okolí řídicí přímky, t. j. tečná rovina, křivost, paraboloid normál, dotyčný a oskulační hyperboloid, případně paraboloid, hlavní obratové tečny (fleknodální tečny). Vyšetřována závislost Gaussovy křivosti v bodech téže obecné tvořicí přímky, jakož i místo středů křivosti hlavních řezů v bodech torsální přímky. Zavedeny tu podle Mohrmanna pojmy torsálních přímek vyšších stupňů, jakož i zvláštních přímek zborcených ploch s příslušnými názvy. Prohýbání zborcených ploch užito při prostorovém pohybu v prvém stupni volnosti. Ve IV. kapitole probrány obzvlášť důkladně různé křivky a opsané rozvinutelné plochy zborcených ploch. Jsou to hlavně mez vlastního stínu, isofóty s provedeným příkladem na přímém kruhovém konoidu. Při úpatnicové a strikční křivce určeno jejich rozpadání při algebraických přímkových plochách. Důkladně probrány asymptotické křivky oněch ploch přímkových, jež obsaženy jsou v lineárním komplexu nebo kongruenci a geometricky vyvozeny a rozšířeny výsledky Mohrmannovy.

Druhá část spisu věnována zvláštním přímkovým plochám 3. a 4. stupně, a to vždy nejdříve obecně a pak podány charakteristické příklady zvláštní. V V. kapitole probrány vlastnosti, vytvoření jakož i tři typy zborcených ploch 3°, z nichž každý obsahuje ty plochy, jež kolineací lze v sebe převésti. V další pak VI. kapitole provedeny příklady na tyto tři typy a to obzvlášť důkladně Plückerův konoid, přímý konoid 3°, jehož torsální přímky jsou minimálními přímkami, a Cayleyovu plochu s úběžnou řídicí přímkou a úběžnou rovinou torsální. Na konec pojednáno ještě o speciální zborcené ploše 3^0, s níž se Krames zabýval při jisté příležitosti, jejíž úběžná křivka dvakráte oskuluje absolutní kuželosečku. V VII. kapitole jednáno o přímkových plochách 4^0 a sice přidrženo se tu rozdělení a označení Sturmova ve 12 druhů. Z příkladů těchto ploch jsou tu cylindroid, normalie ploch 2^0, plocha, vyskytující se při zobecněném eliptickém pohybu (Wringfläche), a plocha normál podél loxodromy na anuloidu. Poukázáno tu též na užití některých těchto ploch v teorii obecných ploch nebo útvarů přímkových. V konečné poznámce je zmínka o plochách přímkových vyšších stupňů než 4. Teorie transcendentních přímkových ploch, zejména šroubových, ponechána do posledního, čtvrtého dílu těchto přednášek, v němž bude též pojednáno o translačních plochách.

Všechny kapitoly doprovázeny jsou příklady, z nichž mnohé nabádají k dalším pracím z tohoto oboru. Zvláště cenná je uvedená literatura, které bohužel je třeba s našeho stanoviska vytknouti, že zásadně, až na nepatrné výjimky, opomíjí pojednání našich autorů. Citována tu dvě francouzská pojednání prof. Hostinského a po jednom prof. Sobotky a Šolína, nepočítáme-li Emila Weyra. Snad bylo by možno namítnouti, že česká pojednání nejsou přístupná, ale pak k čemu jsou výtahy z nich v „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik"? Možno však ukázati, že i německy nebo francouzsky psaná pojednání našich autorů nejsou tu uvedena. Tak i Wiener ve své deskriptivní geometrii cituje Šolína při normalii přímého kužele. Obecně pak normalie ploch 2^0 obzvláště pěkně probral Machovec. Dále měli býti citováni na str. 60 v *e*) Klobouček prací: „Oskulační kvadrika zborcené plochy, dané třemi nekonečně blízkými čarami", na str. 78 před větou 2. Monin „Příspěvky ke stanovení tečných rovin k plochám mimosměrek", na str. 89 v poznámce [2]) Čech: „Projektivní geometrie pěti soumezných mimoběžek", str. 249 Simandl: „Příspěvek ku přímkovým plochám 4. stupně, stanovenými dvěma projektivními involucemi na dvou mimoběžných osách" atd.

Dílo je opět vzorně a pečlivě vypraveno, zejména je skoro bez tiskových chyb. Lze jej co nejlépe doporučiti našim kandidátům profesury. Jen několik málo věcí lze vytknouti. Tak při konstrukci tvořící přímky přímkové plochy na str. 34 a 35, určené třemi řídicími plochami, přímky tvořící, jdoucí příslušnými body t_i, nejdou týmž bodem $\bar{o}$, nýbrž obecně každá jiným bodem na O. Plocha tato mimo uvedené torsální přímky má ještě duální torsální přímky, jež dotýkají se vždy průseku dvou ploch a třetí plochy. V rovnici (1) str. 39 je patrně zaměněno x a y. Důkaz v odst. 10*a*) str. 56 není přesvědčující. Ve větě 9. str. 73 má býti mocnost té involuce rovna záporné dvojmoci parametru distribuce. V odst. 26 snad by byl přece lepší název asymptotické křivky než hlavních tečen. Str. 192 při konstrukci oskulačního hyperboloidu není třeba sestrojovati jednu asymptotickou tečnu v libovolném bodě přímky E, ježto hyperboloid ten obsahuje též jednoduchou řídicí přímku, takže lze snadno stopu jeho na rovině libovolné kuželosečky plochy určiti. Str. 253 lze kuspidální bod k_i rychleji sestrojiti. Viz Klíma: „Konstrukce fleknodálních čar na zborcených plochách 4^0" str. 3. Na str. 256 8. řádek, křivka 4^0 nemůže míti trojnásobnou tečnu. Str. 258, řádek 13. body l_1 a l_2 nejsou odpovídajícími body, ježto byl by to typ XI. *J. Klíma.*

Vl. Novák: Fysika. Díl II. (Elektřina a optika). Třetí pozměněné a doplněné vydání. Stran 640. Cena váz. výtisku 116 Kč. Nákladem JČMF 1932.

V těchto dnech vyšlo třetí vydání druhého dílu Novákovy Fysiky. V našich malých a úzkých poměrech je fakt, že vysokoškolská učebnice vychází v třetím vydání, a to ještě po poměrně krátké době čtrnácti let po prvém vydání, velmi řídký a již sám o sobě svědčí o ceně a oblibě Novákovy knihy.

Druhé vydání Novákovy Fysiky vyšlo r. 1921. Během posledních deseti let zaznamenává však rozvoj fysiky tak četné objevy, také fysikální názor se v mnohých směrech tak značně změnil, že dnes je druhé vydání N. F. zcela zastaralé. Toho si byl autor také dobře vědom a proto v novém vydání nejen přidal výklad nových zjevů, ale knihu úplně přepracoval. Ačkoli nové vydání obsahuje popis a výklad celé řady nových poznatků, přece jen jeho rozsah proti předešlému vydání nevzrostl. Toho bylo dosaženo tím, že autor některé výklady zkrátil, množství historických poznámek a některé méně důležité partie vůbec vynechal. Účelná změna pořadí kapitol dovolila autorovi některé kapitoly (na př. magnetostatiku) beze škody pro čtenáře velmi podstatně zkrátiti. Všemi těmito změnami kniha velmi získala.

Největší změny jsou provedeny v prvé části knihy, pojednávající o elektřině. Výklady počínají elektrostatikou, po ní teprve následuje magnetostatika; elektromagnetismus zařazen před kapitolu o indukci. Na vhodných místech je připraveno odvození základních Maxwellových rovnic (a to velmi účelně ve vektorové formě); ve zvláštním oddílu pak jsou podány základy Maxwellovy teorie elektromagnetického pole (s matematickým odvozením elektromagnetických vln) a Lorentzova elektronová teorie. Lze jen schvalovati, že autor vyložil podstatu symbolické metody k řešení úloh o střídavém proudu a na řadě příkladů ji aplikoval; je to proto tak důležité, že dnes v odborné literatuře o radiotelegrafii a slaboproudé technice se této metody výhradně používá. Rovněž nový je dosti obšírný výklad o elektronových lampách a některých aplikacích piezoelektrických vlastností křemenných krystalů; značně je rozšířena kapitola o radiotelegrafii a radiotelefonii, jak to odpovídá velkému rozkvětu a důležitosti této disciplíny. Také v druhém dílu knihy, pojednávajícím o optice, je řada kapitol přepracována a doplněna. Z hlavních změn uvádím: je popsán a vyložen Zeissův ponorný refraktometr, sextant, přemístěn výklad o spektrálních strojích. Výklad Comptonova zjevu, magnetických spekter fotoelektronů, Tyndalova a Ramanova zjevu je nově přidán. Zcela je přepracována kapitola o spektrálních zákonitostech, o fotochemii a oddíl o zjevech magnetooptických a elektrooptických. Kniha je zakončena kapitolou o vlnové a kvantové mechanice.

Z menších nedostatků chtěl bych upozorniti na tyto: druhá polovina kapitoly o resonanční křivce (str. 184) není dosti jasná; je to způsobeno přílišnou stručností výkladu.

Při výkladu o symbolické metodě (str. 185) postrádám zdůvodnění, proč lze s odporovými operátory počítati jako s odpory. Zesilování elektronovou lampou se vykládá na str. 210, výklad se opakuje na str. 265. Definice průniku a zesilovacího koeficientu elektronové lampy (str. 266) není dosti přesná. Výklad heterodynového příjmu (str. 282) není dosti jasný. Nesprávné je tvrzení, že Fessenden (1907) použil lampového generátoru jako heterodynu.

Pro elektronovou lampu používá se někdy označení audion; to se nedoporučuje, poněvadž název audion je reservován pro lampový detektor s mřížkovým usměrněním.

V kapitole o výbojích v plynech postrádám Kaufmannovy podmínky stability, v kapitole o piezoelektrických krystalech postrádám zmínky o křemenných resonátorech, jež jsou jak pro měrnou fysiku, tak i pro praxi velmi důležité.

Dále neshledávám účelným, že se o elektrických jednotkách mluví na velmi četných místech. Doporučoval bych shrnouti tyto výklady, čímž by se jednak ušetřilo místa a výklad by byl srozumitelnější.

Podněty, které jsem uvedl, jsou podřadného rázu a nijak cenu Novákovy knihy nesnižují. Prof. Novákovi náleží velká zásluha nejen, že napsal prvou českou úplnou učebnici fysiky, ale také proto, že ji v nových vydáních neustále modernisuje. Z krátké recense vyplývá jasně, že Novákova kniha je látkou, duchem a zpracováním zcela moderní učebnice a je si jen přáti, aby také nové vydání našlo stejně mnoho čtenářů a obliby jako vydání předešlá. *Žáček.*

Fr. Nachtikal: Technická fysika. Stran 656. Cena vázaného výtisku 80 Kč. Nákladem Spolku posluchačů inženýrství chemie. V Praze 1931.

Když jsem se poprvé doslechl, že prof. Nachtikal má v úmyslu vydati samostatnou učebnici fysiky, velmi jsem mu to zazlíval; měl jsem totiž za to, že vzhledem k existující učebnici Novákově je to pro naše poměry a úzké odbytové možnosti zbytečné a nehospodárné tříštění sil, a daleko raději bych byl býval viděl, aby Nachtikal se stal spoluautorem nového vydání Novákovy Fysiky — když však jsem hotovou učebnici Nachtikalovu prohlédl, vidím, že jsem se mýlil: nová učebnice má i vedle stávající knihy Novákovy plné oprávnění a jistě bude pro posluchače nově vstupující na vysokou školu výbornou pomůckou. Jediná věc, s kterou bych nesouhlasil, je název knihy: pod názvem „technická fysika" si představuji výklady o aplikacích fysiky v technické praxi, o nichž se (zcela právem) v knize mluví velmi málo. Zato plně souhlasím s názorem autorovým o tom, čemu se má budoucí inženýr z fysiky naučiti; velmi pěkně to vyjádřil v předmluvě své knihy.

Úkol, který prof. Nachtikal svojí knihou sledoval, byl podati posluchačům techniky vhodnou učebnici fysiky, jež by doplnila výklady přednáškové. Tento úkol, jistě nijak lehký, rozřešil velmi dokonale; mám za to, že i posluchačům fysiky na přírodovědeckých fakultách bude učebnice Nachtikalova výbornou a užitečnou pomůckou. Autor vykládá jasným a stručným způsobem hlavní poznatky fysikální, přechází detaily, jež pro čtenáře, pro něž je kniha určena, nemají smyslu a pro něž by také neměli zatím pochopení. Další velikou předností knihy je okolnost, že autor formuluje a řeší fysikální problémy také početně, čemuž se elementární knihy velmi často vyhýbají, ovšem neprávem; vždyť konečně potřebné matematické vědomosti jsou minimální, ale s druhé strany dovoluje tento způsob výkladu daleko hlubší vniknutí do podstaty věci. Stejně nutno schvalovati, že autor užívá na vhodných místech vektorového počtu.

Jakkoliv jde o elementární učebnici, je duch i metoda knihy zcela moderní; výklady jsou prováděny tak, že se čtenář učí fysikálnímu myšlení: fysikálně chápati, formulovati a řešiti jednotlivé problémy. Také výběr látky je šťastný; neomezuje se na obvyklé partie; čtenář pozná základy termodynamiky, Maxwellovy teorie elektromagnetického pole a Lorentzovy elektronové teorie, poučí se o moderních zásadách pro akustičnost sálů atd. Dikce knihy je stručná a při tom jasná. Výklady jsou doprovázeny množstvím schematických obrázků. Úprava knihy je vkusná; vzhledem k značnému počtu stran (646) doporučovalo by se rozděliti knihu ve dva svazky.

Z toho, co bylo řečeno, plyne, že Nachtikalova Fysika je skutečným obohacením naší nečetné fysikální literatury; podepsaný je přesvědčen, že bude vřele uvítána nejen posluchači technik, ale i praktiky. Rovněž posluchači fysiky na přírodovědeckých fakultách budou jí se zdarem používati jako pomůcky k přípravě k prvé státní zkoušce. *Žáček.*

P. Painlevé: Cours de Mécanique professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I. VI + 664 p. Gauthier-Villars, Paris, 1930.

Autor zabýval se již před mnohými lety podrobným studiem základních zákonů mechaniky; některé jeho axiomatické studie jsou z části známy z knížky Les axiomes de la Mécanique, Examen critique, která vyšla ve sbírce Les Maîtres de la Pensée scientifique.

Nové dílo, jež probírá v prvním svazku základy vektorové analyse a kinematiky, axiomy mechaniky a obecné věty o pohybu a o rovnováze soustav, vyniká právě tím, že zvláštní péče je věnována výkladu základních vět (str. 63 a násl.). Painlevé přijímá čtyři axiomy mechaniky (str. 85 a 86), z nichž první dva neliší se v podstatě od principu setrvačnosti a principu akce a reakce v Newtonově formulaci. Třetí axiom (princip počátečních podmínek) zní: Jsou-li dva dané hmotné elementy nekonečně daleko ode všech ostatních, jejich zrychlení jsou jednoznačně stanovena co do směru a velikosti v okamžiku t_0, známe-li v tomto okamžiku vzdálenost obou elementů a jich relativní rychlost. Čtvrtý axiom je princip o rovnoběžníku sil.

Kniha je psána pro začátečníky; je přístupna každému, kdo zná začátky vyšší matematiky a bude vítána zejména čtenářům, kteří se zajímají o logický rozbor základních vět. *Bohuslav Hostinský.*

J. J. Thomson: Tendencies of recent investigations in the field of physics, 28 p. The British Broadcasting Corporation, Savoy Hill, London, 1930.

Autor podává zde živou, někde i humoristickou, a dokonale srozumitelnou formou svoje názory o různých směrech v moderní fysice. Srovnává hlavně teorie založené na fysikální intuici s teoriemi ryze matematickými a netají se svým skepticismem vůči posledním. Thomsonovi nezdají se býti naše představy o přírodě dosti účelnými, když na př. po úspěších undulační teorie docházíme k tomu, že světlo je povahy korpuskulární. Odmítá stanovisko některých moderních teoretiků, kteří jsou proti zavádění pojmů nevztahujících se k věcem pozorovatelným a měřitelným. To byla filosofie Berkeleyova a Thomson ji označuje za špatnou fysiku a za špatnou metafysiku; podle jeho názoru zavedení kvantity zjasňuje myšlení a i když někdy nemáme prostředků k přesnému měření kvantity, zavésti ji je nejen oprávněno ale i žádoucno. Technika fysikálních měření se rychle zdokonaluje a to, co dnes je neměřitelno, může se státi měřitelným zítra. Je nebezpečno založiti filosofii na předpokladu, že to, co neznám, nebude nikdy předmětem vědy. Užívání teorií fysikálního typu (atomová teorie v chemii, modely éteru v elektromagnetismu) je charakteristické pro britskou vědu a bylo, jak autor se domnívá, ospravedlněno svými výsledky.

Knížka, která reprodukuje Thomsonovu přednášku do rozhlasu, konanou dne 27. ledna 1930, zaslouží si pozornosti každého, kdo se zajímá o fysiku. *Bohuslav Hostinský.*

H. Villat: Leçons sur l'Hydrodynamique. VI + 296 str. Gauthier-Villars, Paris, 1929. Leçons sur la Théorie des tourbillons. 300 str. Gauthier-Villars, Paris, 1930.

Mécanique des Fluides. VII + 175 str. Gauthier-Villars, Paris, 1930.

První svazek je sepsán podle přednášek, jež autor konal v letních semestrech 1925 a 1926 na Sorbonně. Po úvodu o některých vlastnostech analytických funkcí a o Dirichletově problému pro mezikruží následují kapitoly o eliptických funkcích a o konformním zobrazování. Na str. 48—51 je odvozen důležitý a zajímavý výsledek (viz Villat, Annales de l'Ecole Normale, 1921), že užitím eliptických funkcí možno konformně zobraziti prstenovitou plochu, omezenou dvěma uzavřenými křivkami na mezikruží. Následuje stručná kapitola o obecných rovnicích hydrodynamických, načež přechází autor k výkladu jak kapalina proudí kolem pevné překážky. Velká část spisu je věnována studiu proudů ve viskosních kapalinách podle C. W. Oseena (případ nevířivých pohybů). Řešení těchto rovnic, dosti složité, je vybudováno z funkcí, které se vyskytují při řešení Fourierovy rovnice pro vedení tepla v tyči; tato rovnice má zde úlohu asi takovou jako Laplaceova rovnice při řešení obecných rovnic pro rovnováhu pružného tělesa.

Druhý svazek pojednává obšírně o teorii vírů. Z problémů zde vyložených uvádím: výpočet rychlostí, když je dáno rozdělení vírů; víry, jež vznikají v neomezené kapalině, která proudí kolem pevné překážky; obecná teorie nespojitých proudů; Lichtensteinovy věty z teorie potenciálu; vířivé pohyby ve viskosních kapalinách.

Třetí svazek je rázu více elementárního. Látka zde probraná je z největší části zpracována také v prvních dvou svazcích; některé kapitoly (zejména úvodní dvě o rovnicích hydrodynamiky a o vlastnostech harmonických funkcí) jsou podrobněji vypracovány s ohledem na začátečníky. Kniha vznikla z přednášek konaných pro posluchače, kteří studují ve 2. roce na vyšší škole aeronautické. Je to výborná učebnice, která čtenáře uvádí do základů hydrodynamiky; příklady hlavně o výpočtu tlaku kapaliny na překážku jsou voleny se zřetelem k aplikacím na technické problémy.

Autor spojil úspěšně v těchto spisech výklady o svých vlastních studiích s výkladem o pracích jiných autorů a obohatil tak literaturu o hydrodynamice třemi velmi cennými knihami. *Bohuslav Hostinský.*

*

Poznámky k článku prof. Fr. Rádla: **Odpověď k recensi prof. Petra...** (Strojnický obzor, roč. XI., č. 23, str. 471—472.)

Prof. Petr otiskl v tomto Časopise (roč. 61, seš. 2, str. 81—90) recensi knihy prof. Fr. Rádla „Učebnice matematiky pro vysoké učení technické"; tato recense vyzněla v rozhodné odmítnutí uvedené knihy. Prof. Rádl polemisuje s touto recensí v článku „Odpověď k recensi prof. Petra..." (Strojnický obzor, roč. XI., č. 23, str. 471—472). Věcně jest věc vyřízena kritikou prof. Petra; odpověď prof. Rádla jest však takového rázu, že jest záhodno věnovati jí v tomto Časopise trochu místa. Prof. Petr vybral z knihy prof. Rádla několik chyb a tyto chyby ve své recensi rozebral a vytkl. Ve své „Odpovědi" vybral prof. Rádl některé výtky z recense prof. Petra; tvrdí o nich, že jsou neoprávněné a dokonce že samy obsahují omyly; tvrdí také, že všechny ostatní výtky prof. Petra (jimiž se ve své „Odpovědi" obšírně nezabývá) jsou bezpodstatné, s výjimkou jediné výtky, kterou uznává (tato výtka týká se numerického počítání). Výtky prof. Petra jsou velmi jasně formulovány a plně oprávněny, jak ukáži čtenáři obšírným rozborem.[1])

Celkem jsem napočítal v recensi prof. Petra 31 konkrétních výtek (není to ovšem číslo zcela směrodatné — jiný čtenář mohl by dvě výtky, jež počítám odděleně, počítati za dvě části jedné výtky nebo naopak); prof. Rádl vybral z nich osm, na něž odpovídá. Z těchto výtek jedinou uznal za oprávněnou (jak jsem již poznamenal), oprávněnost ostatních popírá (viz v dalším citát (O_6)). Při tom na první místo přirozeně postavil onu výtku prof. Petra, na kterou se mu zdálo nejsnazším odpověděti (viz v dalším citáty (O_1), (O_2)). Při této první námitce prof. Rádla jde o tuto věc. Prof. Petr mluví o tom, že prof. Rádl vyšetřuje limitu výrazu $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} =$

$= \frac{(x-2)(x-1)}{x-2}$ pro $x = 2$, ač by bylo přirozenější vyšetřovati limitu výrazu $x - 1$; neboť oba výrazy jsou si rovny, vyjma pro hodnotu $x = 2$; při vyšetřování limity v bodě $x = 2$ však, jak známo, na hodnotě funkce v bodě $x = 2$ samotném vůbec nezáleží. Prof. Petr považoval zřejmě

[1]) Budu se však hlavně zabývati jen oněmi výtkami prof. Petra, na něž prof. Rádl ve své „Odpovědi" přímo odpovídá. Abych čtenáři usnadnil přehled, budu citáty z Rádlovy učebnice značiti písmenem U, citáty z Petrovy kritiky písmenem K, citáty z Rádlovy odpovědi písmenem O (s příslušnými indexy). Citáty jsou vesměs doslovné. Citáty (O_1), (O_2), (O_3), (O_4), (O_5), (O_7) následují v „Odpovědi" bezprostředně po sobě; přečte-li si je tedy čtenář tak, jak po sobě jdou, dostane přesné znění asi první poloviny „Odpovědi" prof. Rádla.

za zbytečné připomínati v recensi, určené odborníkům, tuto známou okolnost a proto napsal: „Výraz ten $\left(\text{totiž } \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}\right)$, jak na prvý pohled patrno, je rovný $x - 1$“, aniž se zmínil o tom, že pro hodnotu $x = 2$, *která nepřichází při zmíněné limitní úvaze vůbec v úvahu*, tato rovnost neplatí. Prof. Rádl chytil se této úmyslné stručnosti[2] prof. Petra a obrací ji proti němu, jakoby snad prof. Petr nevěděl, že zlomek $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ nemá pro $x = 2$ smyslu. Tato výtka prof. Rádla prof. Petrovi je zřejmě uměle zkonstruována; zároveň je to však jediná námitka z „Odpovědi“ prof. Rádla, která má vůbec nějaký smysl; všechny ostatní konkrétní námitky jsou naprosto bezpodstatné a není možno při nejlepší vůli nalézti v nich zrnka oprávněnosti.

Vyslovil jsem se právě velmi ostře o „Odpovědi“ prof. Rádla. Takový výrok ovšem potřebuje důkazu a tento důkaz provedu nyní co nejobšírněji, opíraje se o jednotlivé body „Odpovědi“.

„Odpověď“ prof. Rádla začíná takto:

(O_1) Budiž především připomenuto, že prof. Petr v domnění, že vytýká mi jisté chyby, sám učinil v recensi tyto nesprávné úsudky: Na str. 84 sh. prof. Petr mi vytýká, že uvažuji při výkladu o limitě výraz $\lim \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ pro $x = 2$ a praví: „Výraz ten, jak na prvý pohled patrno, je rovný $x - 1$; proč neuvažuje p. autor raději tento výraz . . ., zůstane . . . záhadou.“ Prof. Petr tím, že tvrdí, že zlomek $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ rovná se $x - 1$, tvoří úsudek nesprávný, neboť uvažovaný zlomek nemá pro $x = 2$ hodnotu, nýbrž pouze limitu, což neplatí o $x - 1$; oba výrazy liší se v bodu $x = 2$, kterážto okolnost je právě hlavní myšlenkou celého odstavce v učebnici.

(O_2) A tak prof. Petr, snaže se dokázati, že nesprávně užívám nuly, sám v recensi této chyby se dopustí, ačkoli tuto chybu o něco dále takto kritisuje: „Takovýmto výkladem (totiž nesprávným užíváním nuly) ruší se ve studentech matematické vzdělání dosažené na střední škole.“ I kdyby prof. Petr byl se vyhnul nesprávnému svému užití nuly, byla by výtka o uvažování hořejšího zlomku pro $x = 2$ nepochopitelná, poněvadž většina učebnic pro techniky zlomky tohoto druhu při výkladu o limitě uvažuje, a to právem.

Příslušné místo v kritice prof. Petra (str. 83 dole až 84 nahoře) zní takto:

(K_1) Dále volí p. autor příklad daný výrazem

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}.$$

Výraz ten, jak na prvý pohled patrno, jest rovný $x - 1$; proč neuvažuje p. autor raději tento výraz jednodušší místo onoho složitějšího při objasňování pojmu limity, zůstane čtenáři matematicky neškolenému záhadou. Naskytne se ovšem p. autorovi při tom příležitost zavésti symbol 0/0, který v matematice na logickém uvažo-

[2] Čtenář pochopí tedy, proč v následujícím rozboru „Odpovědi“ budu postupovati daleko obšírněji, než by vlastně při látce tak elementární bylo vhodno.

(K_1) vání založené jakožto bezvýznamný se vylučuje, a dále zavésti nevhodné (podle mého mínění) pojmenování „výraz neurčitosti"; avšak na tyto věci podružného významu měl autor času dosti a také jim věnoval později jeden odstavec.

K tomu poznamenávám: limita[3]) $\lim\limits_{x=a} f(x)$ nezávisí, jak známo, na hodnotě $f(a)$;[4]) při počítání limity $\lim\limits_{x=2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ mohu se tedy omeziti na hodnoty $x \neq 2$; pro všechny tyto hodnoty jest však $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = x - 1$. Je tedy jedno, vyšetřuji-li limitu $\lim\limits_{x=2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ nebo $\lim\limits_{x=2}(x - 1)$. V kritice, určené odborníkům a uveřejněné v odborném časopise, bylo by zajisté zbytečným ztrácením místa tuto okolnost (známou z každé řádné úvodní přednášky z analysy) obšírně vytýkati. V (K_1) nejde tedy o chybu, nýbrž o stručnost, vhodnou a nutnou v odborné recensi, nemá-li se taková recense rozrůsti v celou knihu. Tím by byla námitka prof. Rádla vyřízena; prof. Petr však v (K_1) tvrdí, že něco v příslušném výkladu prof. Rádla „zůstane čtenáři matematicky neškolenému záhadou". Abychom plně ocenili vhodnost této poznámky, musíme si všimnouti, jak vypadá příslušné místo v „Učebnici"; to zní takto (str. 30):

(U_1) Racionální funkce $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ nabývá pro $x = 1$, $1{\cdot}5$, $1{\cdot}7$, $1{\cdot}9$ hodnot $y = 0$, $0{\cdot}5$, $0{\cdot}7$, $0{\cdot}9$; čím více x se blíží 2, tím více y se blíží 1. Hodnotě této se můžeme blížit i s druhé strany a dosazovat pro $x = 3$, $2{\cdot}5$, $2{\cdot}3$, $2{\cdot}1$, načež $y = 2$, $1{\cdot}5$, $1{\cdot}3$, $1{\cdot}1$. Dosadíme-li konečně pro $x = 2$, obdržíme výraz $0/0$, který nám o skutečné hodnotě zlomku pranic nepraví a sluje výraz neurčitosti. Krácením obdržíme $y = x - 1$, načež pro $x = 2$ jest $y = 1$, takže

$$\lim_{x=2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1.$$

Klasický příklad! Prof. Rádl počítá pro $x = 1$, $1{\cdot}5$, $1{\cdot}7$, $1{\cdot}9$, 3, $2{\cdot}5$, $2{\cdot}3$, $2{\cdot}1$ hodnoty y z výrazu $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$, ač pro tyto hodnoty x mohl krátit; potom najednou řekne: krácením obdržíme $y = x - 1$, načež dosadí do tohoto výrazu onu **jedinou** hodnotu $x = 2$, pro kterou toto krácení **není** dovoleno a napíše rovnici

$$\lim_{x=2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1.$$

Podotýkám, že v „Učebnici" nikde nestojí definice limity a že čtenář si pouze na základě několika příkladů[5]) (jsou to příklady na str. 28—31, jedním z nich jest právě (U_1)) má pojem limity sám vytvořiti; čtenář nemůže tedy ještě na př. věděti, že při vyšetřování limity $\lim\limits_{x=a} f(x)$ nezáleží na hodnotě $f(a)$. Zhoubný účinek takových míst, jako je (U_1), na nezkuše-

[3]) Jakož i okolnost, zda tato limita existuje čili nic.
[4]) Ani na tom, je-li $f(a)$ vůbec definováno čili nic.
[5]) A snad také na základě svých vědomostí ze střední školy.

ného čtenáře jest samozřejmý. Mimo to čtenáři matematicky neškolenému zůstane jistě záhadou, proč se v (U_1) nekrátí hned ze začátku, nýbrž až uprostřed, po namáhavém osmerém dosazení![6]) Po tomto rozboru mohu se zdržeti úsudku o útoku, obsaženém v odstavci (O_2); čtenář si jej již sám označí případným slovem.

Při této příležitosti poznamenávám, že odstavec (O_1) právě rozebraný jest největším úspěchem celé „Odpovědi“ prof. Rádla. Kdybychom se totiž postavili na neobvyklé a nesmyslné stanovisko, že v odborné recensi se mají vytknouti obšírně všechny okolnosti, i takové, které každý odborník zná nazpaměť již od prvního semestru svých studií, musili bychom připustiti, že prof. Petr místo slov: „Výraz ten, jak na první pohled jest patrno, jest rovný $x - 1$“ měl říci: „Výraz ten, jak na první pohled jest patrno, jest rovný $x - 1$ pro všechny hodnoty x, vyjma pro hodnotu $x = 2$, na které zde nezáleží.“[7]) Za to při ostatních námitkách prof. Rádla nelze při nejlepší vůli nalézti stanovisko, s kterého by se tyto námitky jevily ne-li oprávněnými, tedy aspoň vysvětlitelnými. Čtenář to uvidí v dalším.

Prof. Rádl pokračuje ve své „Odpovědi“ takto:

(O_3) Na str. 83 zd. prof. Petr, vytýkaje mi, že špatně vykládám význam relace lim $(3 + 2/x)$ pro $x \to \pm\infty$, neuvědomuje si, že za nesprávné pokládá, co současně sám tvrdí.

Příslušné místo v recensi prof. Petra jest (str. 83 dole):

(K_2) V následujícím jest několik příkladů ze středoškolské látky a potom p. autor praví: „Stůjtež zde ještě tyto příklady

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right) = 3,$$

což značí: Dosazujeme-li za x čísla nejdříve na př. kladná stále rostoucí, obdržíme výsledek větší než 3, avšak ke 3 stále se zmenšující; podobně atd.“ Výraz $3 + 2/x$ má sice vlastnosti, jež p. autor zde symbolu $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$ přičítá, nikoliv však symbol limitní v rovnici použitý. Čtenář nesprávným stilisováním opět jest sváděn z pravé cesty.

Pro jistotu uveďme ještě příslušné místo z „Učebnice“ (str. 29 dole):

(U_2) Stůjtež zde ještě tyto příklady:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right) = 3,$$

což značí: Dosazujeme-li za x čísla nejdříve na př. kladná stále rostoucí, obdržíme výsledek větší než 3, avšak ke 3 stále se zmenšující; podobně dosazením za x čísel záporných absolutně stále rostoucích dostáváme výsledky stále menší než 3, avšak stále více ke 3 směřující.

---

[6]) Při čemž se vesměs dosazují hodnoty, pro něž to krácení je přípustno!

[7]) Ovšem: postavíme-li se na toto stanovisko, musíme tím spíše žádati obšírné vytčení všech závažných okolností v učebnici pro začátečníky; a tomuto požadavku citát (U_1) naprosto nevyhovuje. (Poznamenávám, že citované místo (U_1) jest vůbec první místo v „Učebnici“, kde se čtenář setkává s t. zv. „neurčitým výrazem“.) Prof. Rádl nikde v (U_1) nepoučí čtenáře, proč může — místo aby počítal limitu výrazu $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ pro

KNIHKUPECTVÍ JEDNOTY ČSL. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
oddělení pro opatřování učebných pomůcek
PRAHA II HOPFENŠTOKOVA 9
Výrobky firmy: FRANTIŠEK KMENT, mechanik, Praha XII

INDUKTORY.

Při objednávce induktoru nutno přihlížeti k tomu, jaký zdroj proudu je k disposici.

Induktor s přerušovačem mechanickým, t. j. Wagnerovým kladívkem, Deprezovým, Vrilovým, rtuťovým a rotačním přerušovačem možno poháněti proudem o nízkém napětí od 4—40 voltů a 3—6 ampér podle velikosti, a to buď přímo akumulátory, nebo proudem dynama přes dostatečně velký odpor. Má-li zdroj vyšší napětí, než jest na přístroji udáno, přerušovač jiskří a hroty se opalují; tak se děje zvláště, pohání-li se induktor proudem z dynama přímo, bez odporu.

Primární cívka induktoru má malý odpor, asi 0·3—1 ohmů, a tím při uzavření proudu nastane na hrotech přerušovače krátké spojení, napětí derivačního dynama ihned klesne, současně však také intensita proudu v induktoru. Chceme-li proto užíti proudu ze stroje, musí se proud rozvětviti potentiometrem, aby se při malém napětí dostala potřebná intensita. Jako potentiometru může se užíti každého válcového reostatu se 3 odběrnými svorkami, jehož drát je dostatečně silný (asi 3—4 amp. na 1 mm^2). Pro pohon induktoru proudem o vyšším napětí se hodí nejlépe elektrolytický přerušovač buď Simonův nebo Wehneltův.

Simonův přerušovač je pro napětí až do 220 voltů, Wehneltův do 150 voltů. Při vyšších napětích se kyselina sírová velmi silně rozkládá. Velká výhoda těchto přerušovačů jest, že pracují jak proudem stejnoměrným, tak i střídavým. Užívá-li se některého z nich, dává induktor výkon větší, jiskry jsou mohutnější a při dostatečném napětí primárního proudu přecházejí v plamenový výboj. Vadou jejich je, že nepřerušují proud při nízkém napětí, nýbrž pracují bezvadně teprve při napětí nad 80 voltů a že vynechávají. U přerušovače Simonova tato vada je nejčastěji způsobována příliš velkým otvorem v porcelánové neb skleněné rouře. U Wehneltova přerušovače často vadí slabý platinový hrot ve velkém otvoru. Platinový drát má býti přesně zabroušen do otvoru porcelánové roury, potom přerušovač pracuje bezvadně. Krátký a slabý hrot dává větší počet přerušení než hrot dlouhý a silný; avšak Wehneltův přerušovač pro střídavý proud musí míti hrot silnější, poněvadž slabý hrot se rychle opotřebuje. Je ovšem dbáti toho, aby proud šel nejdříve do primární cívky, potom na platinu a přes olověnou elektrodu zpět. Je nutno, aby tento přerušovač byl zařaděn v serii s dostatečně velkou samoindukcí; obyčejně stačí primární cívka induktoru. Kyselina sírová pro elektrolytické přerušovače má míti hustotu 24° Bé, spec. váhu 1·2 g/cm^3. Pro katodové trubice musí býti induktor poháněn proudem stejnoměrným nebo usměrněným Wehneltovým přerušovačem, pro efekt a pokusy Teslovy, Hertzovy a Lecherovy lze užíti proudu střídavého.

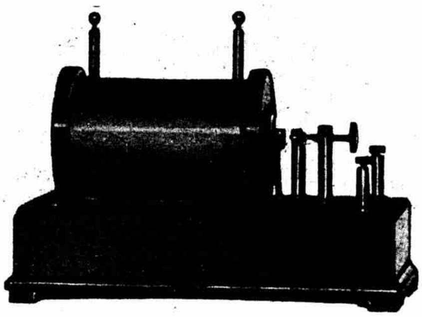
Téměř pro všechny pokusy s vyčerpanými trubicemi se hodí nejlépe malý induktor o doskoku jisker nejvýše 5 *cm*; větším induktorem se značně zahřívají elektrody v trubicích, někdy se dokonce rozžhaví a ohnou.

Výroba induktorů jakož i výroba všech přístrojů pro vysoké napětí je naší specialitou. Sekundární cívka je vinuta v sekcích z opředeného drátu, nikoliv smaltovaného, na rozdíl od výrobků německé firmy „Phywe" a aparátů nabízených některými zdejšími překupníky. Isolace mezi jednotlivými sekcemi je z výborného materiálu. Celá cívka je zalívána ve vakuu isolační hmotou, jež má lepší soudržnost než parafin, který se časem rozruší. Proto námi vyrobené induktory možno bez obavy zatížiti, proražení je takřka nemožné. Dávají výkon až o 20% větší, než jak je udáno, a možno jich užíti jako transformátorů pro vysoké napětí, což není možno učiniti bez nebezpečí proražení s induktory navinutými smaltovaným drátem.

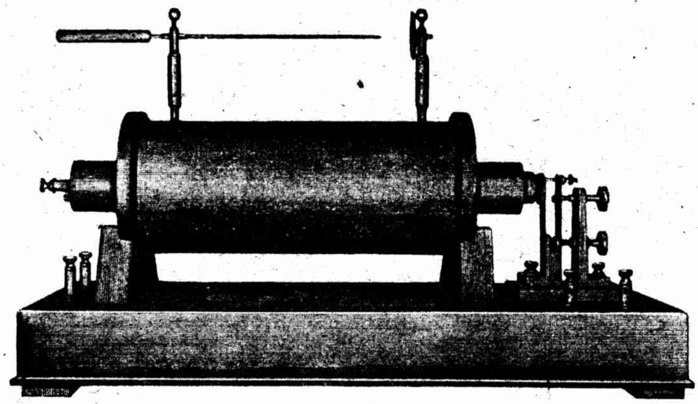
16047 **Induktor Rhumkorfův:**

a) doskok 10 *mm* s Wagnerovým kladívkem a kondensátorem . . . . Kč 220·—
b) doskok 20 *mm* s Wagnerovým kladívkem a kondensátorem . . . . Kč 350·—
c) doskok 30 *mm* s Wagnerovým kladívkem a kondensátorem . . . . Kč 470·—
d) doskok 50 *mm* s Wagnerovým kladívkem a kondensátorem (obr. 1) . . . . Kč 715·—
**e)* doskok 100 *mm* s Vrilovým přerušovačem a kondensátorem . . . . Kč 1400·—
**f)* doskok 150 *mm* s Vrilovým přerušovačem a kondensátorem . . . . Kč 1900·—
**g)* doskok 200 *mm* s Vrilovým přerušovačem a kondensátorem . . . . Kč 2710·—
**h)* doskok 250 *mm* s Vrilovým přerušovačem a kondensátorem . . . . Kč 3550·—
**i)* doskok 300 *mm* s Vrilovým přerušovačem a kondensátorem (obr. 2) . . . . Kč 4500·—

Induktory označené hvězdičkou mají pomocné svorky též pro pohon elektrolytickým přerušovačem. Předností Vrilova přerušovače, je že se „nelepí“ a že je jím možno regulovati sycení jádra.



Obr. 1.

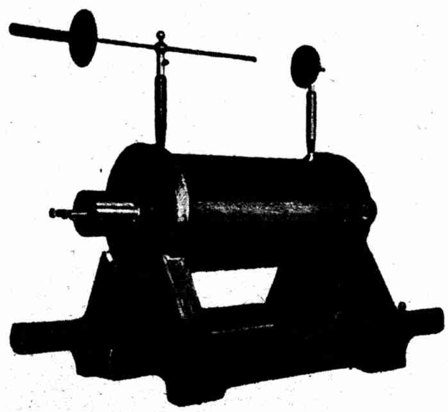


Obr. 2.

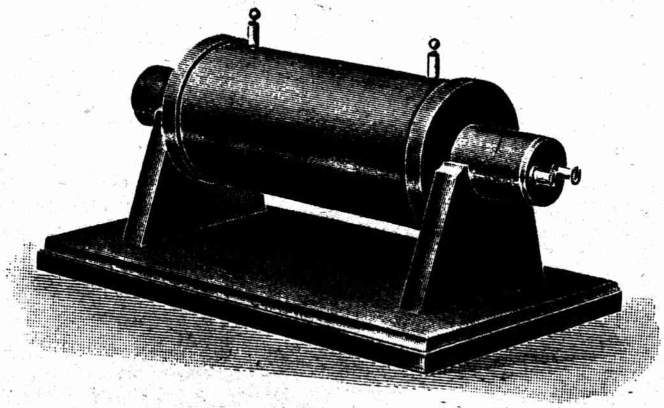
Komise pro standarisaci fys. přístrojů při ministerstvu školství a národní osvěty uznala tento přerušovač za nejlepší a předepsala jeho užívání pro induktory s doskokem větším než 100 *mm.*

16408 **Induktor Rhumkorfův** bez přerušovače a kondensátoru pro pohon elektrolytickým přerušovačem:

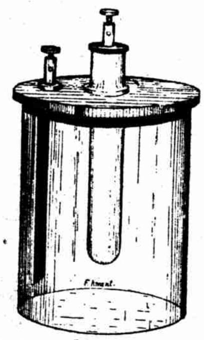
a) doskok 100 *mm*		Kč	990·—
b) „ 150 „		„	1410·—
c) „ 200 „		„	2200·—
d) „ 250 „	(obr. 3)	„	2970·—
e) „ 300 „		„	3600·—
f) „ 400 „		„	5200·—
g) „ 500 „	(obr. 4)	„	6900·—



Obr. 3.

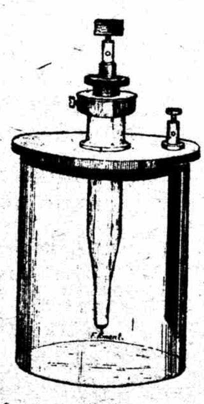


Obr. 4.



Obr. 5.

16409 **Přerušovač Vrilův** s elektromagnetem na stojánku k pohonu některého z induktorů č. 16408. . . . . Kč 400·—
16339 **Kondensátor** s proměnnou kapacitou pro některý z induktorů č. 16408 se 4 kolíčky 1, 2, 3, 4 mikrofarad Kč 320·—
16410 **Přerušovač Simonův** pro stejnosměrný i střídavý proud s porcelánovou trubicí (obr. 5) . . . . . . Kč 230·—
16411 **Přerušovač Wehneltův** (obr. 6) pro proud:
a) stejnosm. se slab. platinou Kč 800·—
b) střídavý se silnou platinou Kč 900·—
16412 **Přerušovač rtuťový** rotační pro 120 – 220 voltů . . . . Kč 1280·—
16406 **Induktor lékařský** . . . Kč 250·—



Obr. 6.

Je vidět, že prof. Rádl odstavci (K_2) vůbec neporozuměl. Rovnice

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$$

neznačí nic více a nic méně než toto: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kladné číslo A tak, že pro všechna x, pro něž platí $|\, x \,| > A$, jest $|\, f(x) - a \,| < \varepsilon$. Specielně tedy rovnice

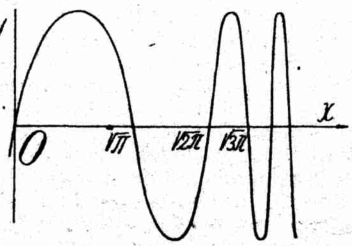
$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right) = 3 \tag{1}$$

neříká nic jiného, než že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kladné číslo A tak, že pro všechna x, pro něž platí $|\, x \,| > A$, jest $\left|\left(3 + \frac{2}{x}\right) - 3\right| < \varepsilon$. O ostatních vlastnostech funkce, stojící za znamením limitním, neříká rovnice (1) vůbec nic; neříká tedy také na př. nic o tom, zda funkce $3 + 2/x$, stojící za znamením limitním, jest klesající pro rostoucí kladná x (ač tato funkce náhodou tuto vlastnost má). Vždyť přece pro funkci $3 + \dfrac{\sin x}{x}$ platí také rovnice

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(3 + \frac{\sin x}{x}\right) = 3,$$

ačkoliv funkce $3 + \dfrac{\sin x}{x}$ není pro kladná x klesající, nýbrž má nekonečně mnoho oscilací. Prof. Petr má plnou pravdu, tvrdí-li, že prof. Rádl přisuzuje symbolu $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$ vlastnosti, kterých tento symbol nemá. Tato nepřesná stylisace je tím nebezpečnější, že příklad v (U_2) jest jedním z příkladů, z nichž si má čtenář utvořiti představu o pojmu limity. Čtenář si teď už sám utvoří mínění o poznámce prof. Rádla, že prof. Petr, vytýkaje mu tuto chybu, „za nesprávné pokládá, co současně sám tvrdí."

Citát (U_2) spolu s citátem (O_3) z „Odpovědi" svádí přímo k domněnce, že prof. Rádl si vůbec řádně nepromyslil smysl pojmu „limita". Na tuto dalekosáhlou otázku si vskutku netroufám odpověděti; raději uvedu ještě jeden příklad, který velmi jasně ukazuje, jak prof. Rádl zachází s pojmem limity. V Učebnici na str. 67 stojí:



Obr. 69.

$x = 2$ — prostě dosaditi přímo hodnotu $x = 2$ do zkráceného výrazu $x - 1$, ač krácení právě pro tuto hodnotu není dovoleno.

Podotýkám ještě, že v (K_1) prof. Petr praví „zůstane čtenáři matematicky neškolenému záhadou", kdežto prof. Rádl cituje v (O_1) zkráceně „zůstane . . . záhadou", což ovšem má zcela jiný smysl.

(U_3) Čára $y = \sin x^2$ (obr. 69) protíná osu x v bodech $x^2 = 0$, π, $2\pi \ldots n\pi$ čili $x = 0$, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{2\pi} \ldots \sqrt{n\pi}$; vzdálenost dvou posloupných průsečíků $\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}$ je čím dále tím menší, neboť

$$\lim_{n=\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

Tedy: prof. Rádl správně tvrdí, že číslo $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ je čím dále tím menší[8]), čili, že posloupnost o obecném členu $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ je klesající (jinak tomu přec nelze rozuměti?). Prof. Rádl však tvrdí — a to je hrubá chyba — že toto tvrzení plyne z rovnice

$$\lim_{n=\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0. \tag{2}$$

Proč to plyne? Protože limita výrazu $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ rovná se nule? Nebo snad proto, že limita výrazu $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ rovná se limitě klesajícího výrazu $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$? To by potom posloupnost o obecném členu $\dfrac{2 + (-1)^n}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, t. j. posloupnost $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{6}, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, \ldots$ musila býti také klesající, neboť

$$\lim_{n=\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

kdež posloupnost $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ jest klesající. Okolnost, že výraz $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ klesá s rostoucím n, neplyne z limitní rovnice (2), nýbrž z rovnice

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \tag{3}$$

platné pro každé n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Z rovnice (3) plyne ovšem rovnice (2), z rovnice (2) neplyne však rovnice (3), zrovna tak, jako z rovnice

$$\lim_{n=\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ neplyne rovnice } \frac{2}{n} = \frac{1}{n}.$$ [9])

Citované místo (U_3) je však poučné ještě s jiného hlediska. V předmluvě ke své „Učebnici“ praví prof. Rádl mimo jiné, že „posluchač techniky nenabude důvěry v metody mu vykládané jich obecným dokazováním, nýbrž tím, že jich prakticky na speciálních příkladech s úspěchem užívá“ a dále, že „nejlepší důkaz všeobecný jest proň grafické znázornění, poněvadž tu vidí tvrzení jako skutečnost“. Citát (U_3) obsahuje speciální příklad a grafické znázornění; očekávali bychom tedy podle citovaných míst z předmluvy, že bude zvláště pečlivě proveden. Místo toho — vedle již vytčeného nesprávného usuzování, připínajícího se k rovnici (2) — najdeme v něm na první pohled ještě jednu hrubou chybu. Funkce $\sin x^2$ je funkce sudá, neboť $(-x)^2 = x^2$ a tedy $\sin(-x)^2 = \sin x^2$; tedy je tato funkce kladná nejenom pro $0 < x < \sqrt{\pi}$, nýbrž i pro $-\sqrt{\pi} < x < 0$ (a mimo to ovšem

[8]) Vynechávám činitele $\sqrt{\pi}$, jenž pro další úvahu nemá důležitosti.

[9]) Či chtěl snad prof. Rádl slovy, že výraz $\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}$ je čím dále tím menší, říci, že limita tohoto výrazu rovná se nule, a nechtěl tím říci nic méně a nic více? Potom by ovšem jeho důkaz byl správný, celé citované místo (U_3) bylo by však dokladem bezpříkladné nedbalosti ve vyjadřování.

i v jiných intervalech). V bodě $x = 0$ má tedy funkce $\sin x^2$ relativní minimum, křivka $y = \sin x^2$ dotýká se v počátku osy x. Podíváme-li se však na obr. 69, jejž zde otiskuji, nevidíme na něm v počátku ani relativní minimum ani dotyk, nýbrž něco docela jiného! Mimo to obsahuje (U_3) ještě jedno závažné opomenutí: prof. Rádl vůbec neuvádí průsečíky o úsečce $-\sqrt{\pi}, -\sqrt{2\pi}, \ldots$ Tak vypadá tedy provedení speciálního příkladu a grafického znázornění![10])

Prof. Rádl pokračuje:

(O_4) Z toho, že na str. 84 zd. vytýká, že užívám pro jednu a touž věc znamení $\rightarrow$ a znamení $=$, je patrné, že prof. Petr nevzal na vědomí moji definici symbolu $\rightarrow$. Lituje-li prof. Petr na str. 83, že takové věci se vyskytují v učebnicích, jest mi dvojnásob líto, že tyto věci jsou v recensích.

Příslušné místo v kritice prof. Petra:

(K_3) Při tom jsem věci významu podřízeného neuváděl, jako na př., že p. autor užívá pro jednu a touž věc různých označení, když píše pod znaménkem limitním jednou $n \rightarrow \infty$, po druhé $n = \infty$.

Zřejmě jde o věc, o které se prof. Petr zmínil jen mimochodem; ale i v této maličkosti má úplně pravdu, jak plyne z těchto příkladů:

Výklad o limitě začíná v „Učebnici" na str. 28; tam najdeme tyto vzorce:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 2 \quad \left(S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k}\right);$$

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \infty \quad (a > 1);$$

na str. 29 však ihned vidíme

$$\lim_{n = \infty} \frac{O_n}{2r} = \lim_{n = \infty} \frac{O'_n}{2r} = \pi$$

[10]) V (U_3) jest však ještě několik maličkostí, jaké se sporadicky mohou vyskytovati i v dobrých knihách; uvedu je jen proto, abych ukázal, kolik nedokonalostí se vejde na tak málo místa. Jest především velmi nevhodno psáti nekonečnou posloupnost $0, \pi, 2\pi, \ldots, n\pi, \ldots$ takto: $0, \pi, 2\pi \ldots n\pi$. To může vésti k nejasnostem; mysleme si na př. tento výrok: „Budiž $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ konvergentní řada s reálnými členy; sestrojme horní hranici čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$." Kdybych užíval označení prof. Rádla, byl by tento výrok nejasný: nevěděl bych, jde-li o horní hranici prvních n členů nebo o horní hranici celé nekonečné posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Není dále vhodno vynechávati obvyklé čárky a místo $0, \pi, 2\pi, \ldots, n\pi, \ldots$ psáti prostě $0, \pi, 2\pi \ldots n\pi \ldots$; (prof. Rádl píše dokonce, jak jsme již řekli, $0, \pi, 2\pi \ldots n\pi$). I to může vésti k nejasnostem, na př. při posloupnosti $c_1, c_1c_2, \ldots, c_1c_2 \ldots c_n, \ldots$; vynecháme-li poslední tři čárky, dostaneme nejasný konglomerát písmen $c_1, c_1c_2 \ldots c_1c_2 \ldots c_n \ldots$ V učebnici pro začátečníky mělo by se přece zvláště dbáti jasné a určité symboliky. A ještě jedna maličkost: nanesete-li v obr. 69 vzdálenost bodů $0, \sqrt{\pi}$ (píši jen úsečky těchto bodů, pořadnice jsou rovny nule) od bodu $\sqrt{\pi}$ napravo, nedospějete do bodu $2\sqrt{\pi} = \sqrt{4\pi}$, nýbrž téměř přesně do bodu, označeného $\sqrt{3\pi}$; nejde zde tedy asi o nepřesnost obrázku, nýbrž o omyl. To je tedy soupis nedokonalostí, obsažených v (U_3). Že je tam ještě také tisková chyba (Cára místo Čára), nelze ovšem p. autoru připsati k tíži.

(O_n resp. O'_n je obvod pravidelného n-úhelníku opsaného resp. vepsaného kružnici o poloměru r).

Podobný zmatek nacházíme při limitách funkcí; na str. 29—31 jsou napsány mimo jiné tyto limity:

$$\lim_{x=\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg} x, \quad \lim_{x=0} \operatorname{cotg} x, \quad \lim_{x=2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3x+4}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{x}{x^2+1}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{x}{x+1}.$$ [11])

Jaký je v tom systém, je záhadou; jedině pro limitu funkce $f(x)$ v bodě a při konečném a užívá p. autor na str. 29—31 vždy symbolu $\lim\limits_{x=a} f(x)$; jinak se označení $n = \infty$, $n \to \infty$ a zrovna tak $x = \infty$, $x \to \infty$ střídají v pestrém nepořádku. Také se divím, že p. autor mluví v (O_4) o své definici symbolu $\to$; v tom, co svým čtenářům na str. 28—31 o limitě vypravuje, není přece ani stopy po nějaké definici.

Dosavadní omyly prof. Rádla v jeho „Odpovědi" byly snad vysvětlitelny jednak nedostatky jeho matematické erudice, jednak lidsky pochopitelnou snahou, aspoň některé výtky prof. Petra oslabiti. Co však čtenář nyní uvidí, je zcela jiného rázu; uvedu jen fakta a zdržím se jakéhokoli úsudku.

Odpověď prof. Rádla pokračuje takto:

(O_5) Na str. 88 sh. domnívá se prof. Petr nesprávně, jsou-li a, b čísla neúplná, Δa, Δb chyby s nimi spojené, že chyba v součinu ab jest $a\Delta b + b\Delta a$; přičítání korekce $\Delta a \Delta b$ je podle prof. Petra nepřípustné a odporuje úsudku. Z tohoto nesprávného usuzování prof. Petra vznikají v recensi další jeho nesprávné představy. Tyto věci se probírají na střední škole a na str. 88 pokládá prof. Petr „tuto okolnost za neodpustitelnou" a takto sebe sama kritisuje: „Takovýmto způsobem se studenti, kteří se během studií středoškolských naučili správně numericky počítat, tomu zase odnaučují."

Mimo to uvádím ještě toto místo z „Odpovědi" (umístěné v této „Odpovědi" na pozdějším místě):

(O_6) Vůbec prof. Petr našel (str. 89)[12]) v učebnici jediné nedopatření, že jsem totiž nezkrátil na dvě deset. místa číselný výsledek v jistém příkladu drobným tiskem uvedeném; za toto upozornění mu děkuji. Všechna ostatní kritika spočívá na volném uvážení prof. Petra, které bylo ovlivňováno shora uvedenými nesprávnými jeho úsudky.

Příslušná místa v recensi prof. Petra jsou tato (str. 87 dole až 88 nahoře).

(K_4) Upozorňuji ještě na odst. 27 nadepsaný „chyba neodvisle proměnné určená z chyby odvisle proměnné",*) ve kterém p. autor během výkladu směšuje dva pojmy: horní hranici pro abs. hodnotu chyby, které se dopouštíme, zavádíme-li místo přesné hodnoty a hodnotu a,**) a diferenciál veličiny a. Jsou to dva docela různé pojmy, pro něž jsou platny různé vztahy. O diferenciálu da zde p. autor mluví dokonce tak, jako by to byla veličina nule rovná.

---

[11]) Na str. 31 nacházíme dokonce $\lim \dfrac{x^2}{x+1}$, $\lim \dfrac{a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$ bez jakéhokoli bližšího označení — patrně opomenutí p. autora.

[12]) Správně má býti str. 88.

*) Ani nadpis, jak čtenář snadno postřehne, není prost nedopatření.

**) P. autor značí tu horní hranici Δa, takže jest

$$a - \Delta a < a < a + \Delta a.$$

(K_5) P. autor také místy provádí numerický výpočet. Uvedu na př. řešení rovnice $x^3 - 3{\cdot}60x^2 + 0{\cdot}51x + 3{\cdot}36 = 0$ pomocí funkcí trigonometrických. Praví „odstraňme koeficient členu kvadratického substitucí $x \mid x + 1{\cdot}2$, čímž obdržíme $x^3 - 3{\cdot}81x + 0{\cdot}52 = 0$; pro λ vypočteme hodnotu $2{\cdot}254$, načež $3\varphi = 10^0\,28'$," odkudž podle výpočtu p. autora následuje $\varphi = 3^0\,29'30''$, pročež „$\alpha_1 = \lambda \sin 3^0\,29'\,30'' + + 1{\cdot}2 = 1{\cdot}3373$, $\alpha_2 = \lambda \cos 33^0\,29'\,30'' + 1{\cdot}2 = 3{\cdot}080$, $\alpha_3 = -\lambda \sin 63^0\,29'\,30'' + 1{\cdot}2 = -0{\cdot}817$. V tomto výpočtu má nejprve býti $\varphi = 3^0\,29'\,20''$, což jest celkem nepatrné nedopatření; avšak jest neodpustitelná v učebnici okolnost, že v transformované rovnic i správná hodnota 0·516 zkrácena byla na 2 desetinná místa na 0·52 a potom se počítají hodnoty kořenů na 3 až 4 cifry. Takovýmto způsobem se studenti, kteří se během studií středoškolských naučili správně numericky počítat, tomu zase odnaučují.

Tedy: v (O_5) mluví prof. Rádl o tom, že mu prof. Petr vytýká cosi o chybě součinu ab; ani v (K_4) ani nikde jinde v recensi prof. Petra nic takového není! V (O_6) přiznává prof. Rádl výslovně, že výtka prof. Petra v (K_5) jest oprávněná; ale odsudek „takovýmto způsobem se studenti, kteří se během studií středoškolských naučili správně numericky počítat, tomu zase odnaučují", který prof. Petr v (K_5) k této výtce připojil, neuvádí prof. Rádl v příslušném odstavci (O_6), nýbrž spojuje jej v (O_5) s vymyšlenou výtkou prof. Petra a říká, že tím prof. Petr „sebe sama kritisuje".

Nedivil bych se, kdyby mi čtenář nevěřil, že cituji správně; v tom případě jej prosím, aby si příslušná místa sám pročetl.

Po odstavci (O_5) následuje v „Odpovědi" tento odstavec:

(O_7) Na str. 89 praví prof. Petr, že „autor učebnice o funkcích s proměnnou komplexní v knize vůbec nemluví s výjimkou snad funkce e^{ix}, která se tam dostala nedopatřením p. autora." Poněvadž funkce e^{ix} několikrát užívám způsobem všude obvyklým, jest toto tvrzení prof. Petra nesprávností jeho vlastní.

Příslušné místo v recensi prof. Petra (str. 89 dole) jest:

(K_6) Mnohem složitější jsou vztahy u eliptických funkcí, neboť tu jest třeba, abychom mohli je definovati jako funkce dvojperiodické, zavésti funkce komplexní proměnné a o těch p. autor ve své knize vůbec nemluví (s výjimkou snad funkce e^{ix}, která se tam dostala nedopatřením p. autora).

Výtka prof. Petra — byť byla pronesena jen mimochodem a velmi stručně — jest oprávněná, protože prof. Rádl nezachází s funkcí e^{ix} správně, jak ihned ukáži. Výklad o funkci e^{ix} v „Učebnici" začíná takto (str. 120):

U_4) **68. Formule Eulerova.** V § 32. uvažovali jsme relaci $y' = -ky$ a shledali jsme, že jí vyhovuje jediná funkce $y = y_0 e^{-kx}$. Pro $k = -i$ zní relace tato $y' = iy$ a vyhovuje jí funkce, která se derivováním až na faktor i nemění. Jest to funkce Ce^{ix}, též však funkce $C(\cos x + + i \sin x)$. Položme tedy $e^{ix} = C(\cos x + i \sin x)$; dosadíme-li pro $x = 0$, shledáme, že $C = 1$. Platí tedy relace formulí Eulerovou nazvaná

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{101}$$

Pro záporné x obdržíme $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ a jestliže obě tyto relace jednak sečteme, jednak odečteme, vznikají Eulerovy formule pro $\cos x$, $\sin x$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{101)*}$$

Sečteme-li kvadráty rovnic (101)*, vznikne vztah

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} + \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{4i^2} = 1,$$

který vyjadřuje známou větu Pythagorovu v goniometrickém tvaru.

(U_4) Povýšíme-li číslo e na mocnitele $i(x + y)$, můžeme psát dvě relace

$$e^{i(x+y)} = \cos(x + y) + i \sin(x + y),$$

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} . e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$

$$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y);$$

porovnáním pravých stran (viz konec § 63) obdržíme známé součtové formule pro $\cos(x + y)$, $\sin(x + y)$, z nichž lze odvodit četné jiné relace (na př. pro $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cos x \pm \cos y$, $\sin x \pm \sin y$ atd.).

Rozeberme tento citát. Jde zde o komplexní funkci reálné proměnné $\cos x + i \sin x$. Tato funkce hoví diferenciální rovnici $y' = iy$.[13]) Abychom dostali analogické označení jako při rovnici $y' = ky$ při reálném k, zavedeme nový znak e^{ix} rovnicí $C(\cos x + i \sin x) = e^{ix}$, při čemž klademe $C = 1$, abychom pro $x = 0$ dostali souhlas s reálným případem. Rovnicí (101) tedy teprve definujeme znak e^{ix} (vždyť dosud v „Učebnici" nebyla mocnina pro jiný než reálný exponent zavedena). Všechny vlastnosti této funkce musíme tedy teprve dokázati; tak musíme také dokázati, že platí vztah $e^{i(x+y)} = e^{ix} . e^{iy}$, obdobný vztahu $e^{x+y} = e^x . e^y$, známému již pro reálné x a y. (To je přec jasné: definuji-li funkci $f(x)$ rovnicí $f(x) = \cos x + i \sin x$, není přece nijak a priori jasno, že platí $f(x+y) = f(x) . f(y)$; to se musí teprve dokázat.) Správný důkaz je jednoduchý: podle definice jest jednak

$$e^{i(x+y)} = \cos(x + y) + i \sin(x + y),$$

jednak (s použitím známých vztahů pro $\cos(x + y)$, $\sin(x + y)$)

$$\begin{aligned} e^{ix} . e^{iy} &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= \cos(x + y) + i \sin(x + y); \end{aligned}$$

tedy jest $e^{i(x+y)} = e^{ix} . e^{iy}$.

Postup v (U_4) jest právě opačný než správný postup právě uvedený. Prof. Rádl totiž napřed napíše (správně)

$$e^{i(x+y)} = \cos(x + y) + i \sin(x + y);$$

potom napíše rovnici

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} . e^{iy}$$

(neprávem, neboť ji dosud nedokázal) a konečně píše (opět správně)

$$e^{ix} . e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) =$$

$$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y).$$

Že zde nejde o náhodné přehození řádků, nýbrž o chybný soud, je viděti

[13]) Proč p. autor bere v (U_4) rovnici $y' = -ky$ a klade potom $k = -i$, místo aby vzal jednodušeji rovnici $y' = ky$ a dosadil $k = i$, nevím; v § 32b přece rovnici $y' = ay$ vyšetřuje. Derivace komplexní funkce reálné proměnné nebyla sice v „Učebnici" před § 68 zavedena, nelze však p. autoru zazlívati, že jí zde užívá; jde o zcela jednoduché zobecnění, které si čtenář sám snadno doplní. Ve funkci e^{ix} se předpokládá x reálné, což nebudu v dalším podotýkati.

z toho, že prof. Rádl se domnívá, že svým postupem odvodil znovu formule pro $\cos(x + y)$, $\sin(x + y)$, ač při správném důkazu by byl musil naopak právě formulí pro $\cos(x + y)$, $\sin(x + y)$ použíti k odvození rovnice $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$.[14]) Prof. Petr byl tedy právem s tímto místem nespokojen. Doufám, že způsob, jakým prof. Rádl zachází s funkcí e^{ix}, není „všude obvyklý"; na př. v elementární učebnici J. Vojtěcha „Základy matematiky" (3. vyd., část 1, str. 306) mohl si prof. Rádl přečísti správný důkaz vzorce $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$.

Další odstavec „Odpovědi" je vyplněn osobními útoky na prof. Petra, na Jednotu československých matematiků a fysiků atd.; nebudu se jím proto zde zabývati.[15]) Odstavec následující obsahuje výtky všeobecného rázu: prof. Rádl vytýká prof. Petrovi hledisko, podle něhož „Učebnici" posuzoval. Na konci tohoto odstavce je však jedna konkrétní námitka, kterou se proto budu zabývati. Prof. Rádl totiž praví:

(O_8) Ostatně je úsudek prof. Petra na str. 86 v příkladu o spojitosti nesprávný.

Příslušné místo v recensi (str. 86 dole) jest:

(K_7) Matematický výklad má býti vzorem k přesnému vyjadřování; jak tento vzor vypadá v „Učebnici" jest patrno, abych volil jeden příklad z mnohých, na výkladu pojmu spojité funkce, který podává p. autor v odst. 39 na konci svého výkladu o derivaci, ačkoliv ho dříve již používal. Celý ten výklad (incl. definice) spočívá v těchto dvou větách: „Doposud jsme předpokládali graf funkce vždy souvislý či spojitý, kontinuitní, takže, zvětší-li se (zmenší-li se) x o velmi malý obnos, změní se (zvětší neb zmenší) y též o velmi malý obnos. Průběh zjevů přírodních děje se zpravidla spojitě; tak na př. dráha nemůže při velmi malé změně doby změnit se náhle o konečný obnos, nýbrž změní se též o velmi málo. Pravíme v tom případě, že příroda nedělá skoků." Pokládáme-li tedy číslo $1 \cdot 10^{-6}$ za veličinu velmi malou, jest podle p. autora funkce (x budiž $\geqq 0$)

$$y = 10^{-6} \cdot E(10^6 x),$$

$E(z)$ jest největší celé číslo obsažené v z — funkcí spojitou.

Citovat ještě příslušné místo z „Učebnice" není nutno, ježto v (K_7) je příslušné místo doslovně reprodukováno (viz „Učebnici", str. 73). Nechápu, jak mohl prof. Rádl nerozuměti tomuto tak jasnému odstavci (K_7). Citované místo z „Učebnice" nedává přesné definice spojitosti, poněvadž výraz „velmi malý obnos" není dosti přesný. Kdybychom si chtěli tuto definici zpřesniti na př. tím, že bychom se smluvili, že číslo 10^{-6} (a ovšem též každé číslo, jehož absolutní hodnota nepřesahuje 10^{-6}) budeme považovati již za „velmi malý obnos", musili bychom funkci[16])

$$y = 10^{-6}\, E(10^6 x)$$

považovati za spojitou; neboť změní-li se x nejvýše o 10^{-6}, změní se y zřejmě též nejvýše o 10^{-6} (prof. Petr nemusil se omezovati na $x \geqq 0$; snad si myslil, že mu prof. Rádl spíše porozumí, vyhne-li se záporným hodnotám). Prof. Petr chtěl jen ukázati, k jakým absurdnostem může vésti nedostatečná

[14]) Táž chyba se vyskytuje ostatně též již o něco dříve při umocňování pravých stran rovnic (101)*.

[15]) Viz ostatně odpověď prof. Bydžovského, jež vyjde co nejdříve ve Strojnickém obzoru.

[16]) $E(z)$ je definováno takto: $E(z)$ jest ono celé číslo, jež splňuje nerovnosti $E(z) \leqq z < E(z) + 1$.

definice. Či myslí snad prof. Rádl, že prof. Petr tvrdí, že funkce $10^{-6} E(10^6 x)$ je doopravdy spojitá?

Další odstavec obsahuje opět osobní útoky na prof. Petra. Teprve odstavec následující obsahuje zase konkrétní poznámky. Začíná pak tento odstavec takto:

(O_9) Řadu dalších nedopatření v recensi — zde uvedena pouze typická — hodlám z nedostatku místa uvésti ve zvláštní přednášce v JČM. Zde budiž ještě uvedeno, že nerovnost na str. 88 jako nesprávná vytýkána jest v souhlasu s obrazcem v textu citovaným a tudíž správná.

Ostatek tohoto odstavce „Odpovědi" citoval jsem již v (O_6). Místo v recensi, jehož se odstavec (O_9) týká, jest toto (str. 85, nikoliv str. 88):

(K_8) V odst. 42 na str. 77 uvažuje p. autor zavedení určitého integrálu pro libovolnou funkci. Definuje integrál jakožto plochu a dospívá názorem k těmto nerovninám[17])

$$h\,[f(a) + f(a + h) + \ldots + f(a + \overline{n - 1}\,h)] < p < h\,[f(a + h) + f(a + 2h) + \ldots + (a + nh)].$$

Za p pak zavede jakožto limitu

$$p = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Nerovniny vypsané jsou však nesprávné a jsou platny pouze pro funkce rostoucí. Tedy i při užívání názoru geometrického nepodařilo se p. autorovi dáti bezvadným postupem definici integrálu.

Příslušné místo v „Učebnici" jest (str. 77):

(U_5) **42. Zevšeobecnění na libovolnou funkci.** Jest vypočísti obsah obdélníku seříznutého danou křivkou. Abychom určili plochu p omezenou jednak libovolnou čarou $y = f(x)$ v intervalu $a \ldots b$ spojitou a nad osou x procházející (obr. 82),[18]) jednak pořadnicemi $f(a)$, $f(b)$ dvou jejích bodů A, B, jednak osou x, rozdělme úsečku $\overline{AB}$ opět na n dílů o velikosti $\frac{b - a}{n} = h$ a sestrojme opět nad jednotlivými díly obdélníky ploše vepsané a opsané. Pak je sevřen obsah p ve dvě meze

součet obdélníků vepsaných $< p <$ součet obdélníků opsaných,

$$h\,[f(a) + f(a + h) + \ldots + f(a + \overline{n - 1}\,h)] < p < h\,[f(a + h) + f(a + 2h) + \ldots + f(a + nh)], \qquad (62)$$

jichž rozdíl je $[f(b) - f(a)]\,.\,h$.

Tedy prof. Rádl tvrdí toto: vezmu-li libovolnou funkci $f(x)$, spojitou a kladnou v intervalu $a \ldots b$ a označím-li písmenem p plochu, omezenou čarou $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ a úsečkami přímek $x = a$, $x = b$, $y = 0$, potom platí nerovnosti (62). To je zřejmě nesprávné: nerovnosti (62) jsou správné, je-li $f(x)$ rostoucí, ale nesprávné, je-li $f(x)$ na př. klesající v intervalu $a \leqq x \leqq b$. Na tom nic nemění okolnost, že nerovnosti (62) jsou náhodou správné pro tu křivku, kterou si prof. Rádl vybral pro obr. 82; textu v (U_5)

[17]) Otiskuji i s tiskovou chybou: místo $(a + nh)$ má býti $f(a + nh)$.

[18]) Obr. 82 v „Učebnici" je běžný obrázek: je na něm nakreslena křivka $y = f(x)$ (kdež $f(x)$ je na obrázku rostoucí) a mimo to obvyklé vepsané a opsané obdélníčky.

jest přece možno rozuměti jen tak, že nerovnosti (62) platí pro libovolnou funkci $f(x)$, jež je spojitá a kladná pro $a \leqq x \leqq b$, a to není pravda.

Po odstavcích (O_9), (O_6) končí prof. Rádl svou „Odpověď“ krátkým odstavcem, v němž praví, že i jiné naše učebnice matematiky byly kritikou ostře odsouzeny, plní však přes to svůj úkol; prof. Rádl očekává, že i jeho kniha svůj úkol vyplní.

Na konec musím uznati, že jedna věta v „Odpovědi“ prof. Rádla jest úplně správná; jest to tato věta z (O_6): „Všechna ostatní kritika spočívá na volném uvážení prof. Petra.“ „Učebnice“ prof. Rádla hemží se totiž tolika chybami, že se prof. Petr nemohl ve své recensi všemi zabývati a musil proto vybrati jen některé, které se mu podle jeho volného uvážení zdály zvláště charakteristické.

Dovolím si ještě připojiti malé résumé toho, co jsme na předcházejících stránkách zjistili. Knihu prof. Rádla posoudil a odsoudil důkladně prof. Petr ve své recensi; v tomto článku jsem se zabýval proto hlavně pouze odpovědí prof. Rádla a jeho knihy jsem si všímal většinou pouze potud, pokud to bylo k rozboru „Odpovědi“ nutno. Čtenář by byl čekal, že autor, který konkrétně odpovídá k odmítavé recensi své knihy, si důkladně rozváží, co do své odpovědi napíše; místo toho jsme zjistili, že „Odpověď“ prof. Rádla se skládá po stránce matematické z nepřetržité řady omylů[19]); námitky prof. Rádla v (O_3), (O_4), (O_5), (O_7), (O_8), (O_9) jsou naprosto bezpodstatné a je prostě nepochopitelno, jak je prof. Rádl vůbec mohl napsati. Ani námitku prof. Petra proti citátu (U_1) prof. Rádl neoslabil; využil však stručnosti recense prof. Petra k umělému sestrojení námitky v odst. (O_1), (O_2). Dokonce nebyl ani tak pečlivý, aby si při psaní své odpovědi zkontroloval, co v recensi prof. Petra je a co tam není: a tak se mu stalo, že v (O_5) vytýká recensi prof. Petra něco, co v ní vůbec nestojí. Naprostý nedostatek věcných důvodů za to plně vynahradil sebevědomým a útočným slohem, kterým jest jeho odpověď napsána. *V. Jarník.*

Prohlášení.

V 61. ročníku „Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky“ sešit 2, str. 81—90, otiskl prof. K. Petr posudek knihy prof. Fr. Rádla „Učebnice matematiky pro vysoké učení technické“, v němž tuto knihu po důkladném rozboru rozhodně odsoudil. Prof. Rádl snažil se vyvrátiti některé námitky prof. Petra v článku: „Odpověď k recensi prof. Petra . . .“ (Strojnický obzor, ročník 11, č. 23, str. 471—472). Podepsaní prohlašují, nepouštějíce se na tomto místě do podrobností, že úplně souhlasí se zamítavým stanoviskem prof. Petra, ohražují se však zároveň jménem matematické veřejnosti proti tomu, aby na věcnou a vážnou recensi bylo odpovídáno způsobem tak nevážným a místy urážlivým, jak to učinil ve své „Odpovědi“ prof. Rádl.

Profesoři matematiky na českých universitách a českých vysokých školách technických v Praze a v Brně:

B. Bydžovský, E. Čech, K. Čupr, K. Dusl, V. Hlavatý, J. Hronec, V. Hruška, J. Janko, V. Jarník, J. Klobouček, M. Kössler, V. Láska, K. Rychlík, L. Seifert, E. Schoenbaum, J. Svoboda, J. Vojtěch.

---

[19]) Vyjmeme-li citát (O_6), v němž prof. Rádl uznává příslušnou výtku prof. Petra.

B. Přehled původních publikací českých matematiků a fysiků.

O. Borůvka: Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Spisy přírod. fakulty Masarykovy univ. č. 146. Stran 40, Brno, 1931.

Studují se křivky v eukl. čtyřrozm. prostoru, jejichž všechny křivosti jsou konstantní a jisté plochy, na něž se při tom přijde.

O. Borůvka: Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t. 193, p. 633.

Souhrn hlavních výsledků hořejší práce.

K. Čupr: Použití Schlömilch-Pringsheimova integrálu při sčítání podmíněně konvergujících řad. (Sborník č. vys. školy technické v Brně. Svazek V., spis 21.) Pomocí uvedeného integrálu sečteny řady vzniklé některými transformacemi druhého druhu (Math. An., XXII. p. 462, Pringsheim: Umordnungen zweiter Art) z dané řady podmíněně konvergující.

V. Hlavatý: Projektive Invarianten einer Kurvenkongruenz und einer Kurve. (Mathematische Zeitschrift, Band 34, 1931. 58—73.) Studium differenciálních invariantů křivek a kongruencí vzhledem k transformacím konnexe, které zachovávají geodetické čáry.

V. Hlavatý: Sur les courbes des variétés non-holonomes. (Rendiconti della r. accademia dei Lincei. Vol. XII., serie 6., 1930. 647—654.) Studium asymptotických a geodetických čar an-holonomních variet.

V. Jarník: Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass. Recueil mathématique de la Société Mathématique de Moscou, sv. 36, str. 371—382.

Budiž $\alpha > 2$; M_α budiž množství oněch čísel ϑ, pro něž nerovnost $\left|\vartheta - \frac{p}{q}\right| < q^{-\alpha}$ má nekonečně mnoho řešení v celistvých číslech p, q. Potom platí: dimense množství M_α (ve smyslu Hausdorffově) jest $2/\alpha$.

V. Jarník: Über die simultanen diophantischen Approximationen, Mathematische Zeitschrift 33 (1931), str. 505—543.

Zostření výsledků předešlého pojednání; zobecnění na simultanní aproximace; existenční věty o simultanních aproximacích.

V. Jarník: Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoïdes à plusieurs dimensions. Věstník Král. čes. spol. nauk, 1930, č. 6, str. 1—11.

Budiž $P(x)$ známá zbytková funkce pro racionální k-rozměrný elipsoid ($k \geqq 5$). Posloupnost $P(x) : x^{\frac{1}{2}k-1} (x = 1, 2, \ldots)$ má nekonečně mnoho bodů zhuštění.

V. Jarník: Sur une fonction arithmétique. Věstník Král. čes. spol. nauk, 1930, č. 7, str. 1—13.

Asymptotické vzorce pro $\sum_{x=1}^{y} P^2(x)$ (označení a předpoklady stejné jako v předešlé práci).

V. Jarník: Bolzanova „Functionenlehre". Časopis, sv. 60 (1931), str. 240—262.

Miloš Neubauer: „Über die partiellen Derivierten unstetiger Funktionen", Monatshefte für Mathematik und Physik, sv. 38, (seš. 1), str. 139—146.

J. Zahradníček: Nová metoda měření radiace látek radioaktivních. Spisy přír. fak. Masarykovy univ. č. 138. Str. 16. 1931.

J. Zahradníček: Messung der Aktivität der radioaktiven Substanzen mittels der Drehwage. Phys. Zs. *32*. 630. 1931.

V těchto pracích popisuje autor metodu k měření aktivity radioaktivních preparátů Coulombovými torsními vážkami v kovovém krytu, při čemž preparát je vně krytu. Autor udává dále vzorec pro silové působení preparátu na váhy.

J. Zahradníček: Bemerkungen zum Aufsatz: „Resonanzmethoden für die Bestimmung der Gravitationskonstante *G*" von Jakob Kunz. Phys. Zs. *32*, 149. 1931.

Krátká poznámka, v níž autor opravuje některé chyby Kunzovy práce.

ZPRÁVY.

Usnesení Internacionální elektrotechnické komise (I. E. C.), týkající se definice jednotek. „Výbor pro elektrické a magnetické jednotky a veličiny“, ustavený při Internacionální elektrotechnické komisi, byl pověřen úkolem přezkoumati jednotky elektrické a magnetické, po případě znovu je definovati a vyhledati pro ně vhodné názvy. O výsledcích dosavadní činnosti tohoto výboru podávají zprávu další řádky.

a) Magnetické veličiny a jednotky.
Definice magnetických veličin.*)

1. *Intensita magnetického pole* (magnetisující síla):

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi n I}{l}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{F}{m}.$$

kde značí $\mathfrak{H}$ intensitu magnetického pole, n počet závitů, l délku cívky, F mechanickou sílu, kterou působí magnetické pole na magnetické množství m.

2. *Magnetická indukce* $\mathfrak{B}$ je vektorem, který svou velikostí a směrem určuje stav celkové polarisace, způsobené magnetickým polem.

3. *Permeabilita* μ v určitém bodě jest poměr indukce $\mathfrak{B}$ k intensitě magnetického pole $\mathfrak{H}$ v tomto bodě, $\mu = \mathfrak{B}/\mathfrak{H}$.

4. Formule $\mathfrak{B} = \mu_0\mathfrak{H}$ representuje vztahy mezi magnetickými veličinami ve vakuu; μ_0 je veličina, která má fysikální rozměr.

Pro magnetické látky zní tato formule $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$, kde μ má týž rozměr jako μ_0.

Relativní permeabilita magnetické látky je podle toho bezrozměrným číslem, jehož hodnota je dána poměrem μ/μ_0.

5. *Magnetomotorická síla F* je dána čárovým integrálem intensity magnetického pole $\mathfrak{H}$: $F = \int \mathfrak{H} dl$.

6. Magnetický tok Φ plochou S je dán integrálem indukce $\mathfrak{B}$ jdoucí touto plochou: $\Phi = \int \mathfrak{B} dS$.

*) Skutečné přijetí těchto definic Internacionální elektrotechnickou komisí závisí od t. zv. „Six-Months-Rule“, t. j. od toho, jaké stanovisko zaujmou k tomuto návrhu během šesti měsíců jednotlivé země.

Názvy magnetických jednotek v absolutní soustavě (*cm*, *g*, *sec*).

Magnetomotorická síla F	jednotka *gilbert*.
Intensita magnetického pole (magnetisující síla) $\mathfrak{H}$	jednotka *oersted*.
Magnetický tok Φ	jednotka *maxwell*.
Hustota magnetického toku (indukce) $\mathfrak{B}$	jednotka *gauss*.

Ostatní magnetické veličiny, pro které elektrotechnika nepotřebuje nutně pojmenování, jsou prozatím bez názvu; jsou to: magnetický odpor, specifický magnetický odpor, magnetická vodivost.

Názvy magnetických jednotek v praktické soustavě (volt, ampér, ohm).

Pro praktickou jednotku magnetického toku byl zvolen název *pramaxwell*, kde slabika „pra" má sloužiti jakožto zkratka pro název praktický.

Jednotka *pramaxwell* se rovná 10^8 jednotek v absolutní soustavě, čili 1 *pramaxwell* $= 10^8$ *maxwell*.

Pro zavedení názvů pragilbert, praoersted, pragauss bylo uvedeno mnoho důvodů pro i proti, takže prozatím tyto názvy zavedeny nebyly, a užívání slabiky „pra" je omezeno pouze na pramaxwell.

b) Elektrické veličiny.

1. *Jalové veličiny:* jednotka jalového výkonu byla nazvána *var* (je složena ze začátečních písmen slov volt, ampér, reaktance). Podobně pro výkon za hodinu zavedena *kilovarheure* (kilovarhodina) zkratkou *kvarh*.

2. *Účiník* je pro sinusový proud definován podílem $P/\sqrt{P^2 + P_r^2}$, kde $P = VI \cos \varphi$ je úhrnný užitečný výkon, $P_r = VI \sin \varphi$ úhrnný jalový výkon, označíme-li V efektivní hodnotu napětí, I efektivní hodnotu proudu, φ fázovou diferenci.

3. Pro proud, který není sinusový, platí: zdánlivý výkon je dán výrazem VI, účiník při jednofázovém proudu P/VI.

Je zajímavo, že německý návrh nazvati jednotku frekvence *hertz* nebyl komisí prozatím přijat s odůvodněním, že dosavadní označení p/s (počet period za sekundu) vyhovuje a není tudíž třeba je měniti. *V. Petržílka.*

Soustavná zkoumání isotopů rozmanitých prvků koná nyní Aston. Měří také relativní množství jednotlivých isotopů téhož prvku, dále t. zv. zlomek těsnosti (packing fraction, Packungseffekt) definovaný poměrem $(W - A)/A$, kdež W je atomová hmota isotopu, která je jen přibližně dána celým číslem a A je hmotové číslo isotopu udávající počet protonů (vodíkových jader) v jádře isotopu; je to atomová hmota isotopu zaokrouhlená na nejbližší celé číslo. Rozdíl mezi zlomkem těsnosti pro vodík a pro kterýkoli jiný prvek měří, oč klesne atomová hmota jedné grammolekuly protonů, kombinují-li se s elektrony tak, aby vznikl atom příslušného isotopu, při čemž ovšem předpokládáme, že se ony atomy skládají z protonů a elektronů. Tento úbytek hmoty násobený čtvercem rychlosti světla ve vakuu dává ztrátu energie při vzniku jádra isotopu; čím je větší, tím je isotop stálejší. Podle definice je zlomek těsnosti pro kyslík (O_{16}) roven nule, s klesajícím hmotovým číslem A dosti rychle roste; stoupá-li hmotové číslo, pak spočátku klesá a nabývá hodnot záporných, dosahuje minima asi pro As (kolem $9 \cdot 10^{-4}$), potom mírně stoupá k hodnotám kladným. Karakteristické je, že se křivka znázorňující závislost tohoto zlomku na hmotovém čísle pro malé hodnoty těchto čísel dělí na dvě větve; na spodní větvi leží prvky atomových vah tvaru $4n$, na větvi horní ostatní. Rozvětvení nastává asi u argonu.

Aston zdokonalil v poslední době svou metodu tak, že může atomové váhy (slučovací čísla) chemických prvků stanoviti s přesností, která nikterak nezadá přesnosti měření chemických a v některých případech je dokonce předčí. Tak byla nalezena zcela nová metoda měření atomových vah, nezávislá na metodách, jichž užívá chemická analysa. V mnohých případech dospěl Aston k číslům, která s údaji nalezenými cestou chemickou souhlasí velmi dobře, tak na př. pro Hg dostává $200{\cdot}62 \pm 0{\cdot}05$ místo $200{\cdot}61$, pro Sn $118{\cdot}72 \pm 0{\cdot}03$ místo $118{\cdot}70$, pro Ba $137{\cdot}43 \pm 0{\cdot}08$ místo $137{\cdot}36$, pro Tl $204{\cdot}41 \pm 0{\cdot}03$ místo hodnoty $204{\cdot}39$ nalezené Hönigschmidem. Ale vyskytly se také rozdíly, o nichž Aston soudí, že rozhodně přesahují pozorovací chyby; atomová váha Cs činí podle jeho měření $132{\cdot}917 \pm 0{\cdot}02$, kdežto obvykle uváděné číslo je $132{\cdot}81$, pro Sc dostal Aston $44{\cdot}96 \pm 0{\cdot}05$ místo $45{\cdot}1$. Značný nesouhlas je u Kr a Xe; jejich atomové váhy činí podle Astonových měření $83{\cdot}77 \pm 0{\cdot}02$ a $131{\cdot}27 \pm 0{\cdot}04$, kdežto Watson (1910) z chemických měření vykonaných Moorem (1908) dostal čísla $82{\cdot}92$ a $130{\cdot}22$.

Záviška.