

Werk

Label: Article

Jahr: 1932

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0061|log23

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

O křížnici a střížnici.

V. Jeřábek.

(Došlo v červnu 1928.)

1. V rovině π dána jest přímka X a na ní tři pevné body a, e, o . V bodech a, e postavme kolmo na X resp. přímky $R_1 \parallel H_1$. Přímkou M_1 jdoucí bodem o protněme R_1 v bodě r_1 . Kružnice K_1 , jejíž střed je o a poloměr $or_1 = r$, seče přímku H_1 v bodě n_1 . Vedeme-li tímto bodem rovnoběžku N_1 s X protne, přímku M_1 v bodě m_1 . Geom. místem tohoto bodu je křivka L_1 .

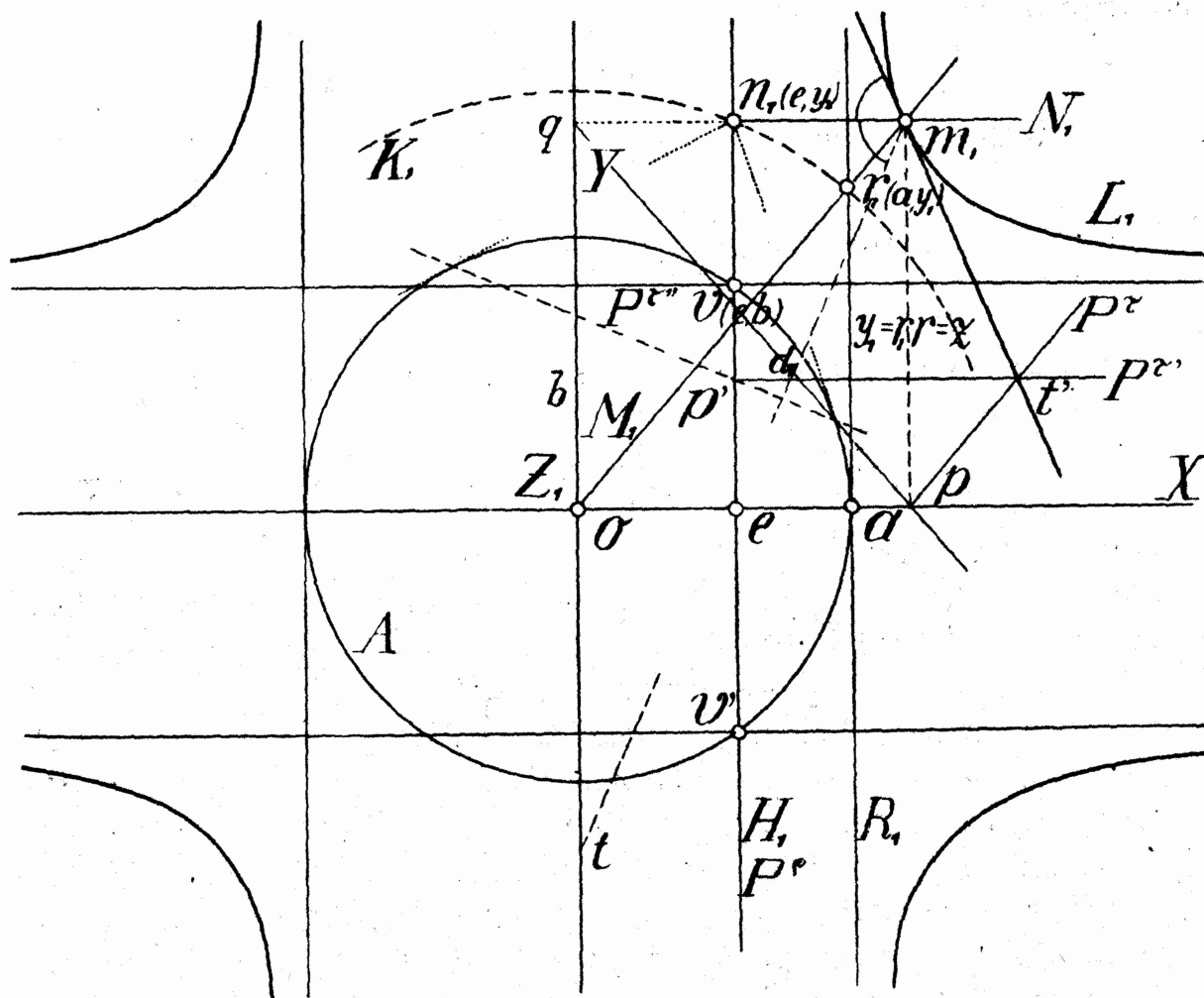
2. Rovinu π zvolme za průmětnu a pokládejme r_1 za průmět bodu r , jehož výška r_1r nad rovinou π rovná se $ar_1 = z$. Spojnice R bodů a, r má tudíž svůj průmět v R_1 . Přímkou Z ($Z_1 \equiv o$), postavenou v bodě o kolmo na π , přímkou R a průmětnou π určen je hyp. paraboloid, jehož jedna plošná přímka M je rovnoběžná se svým průmětem M_1 .

Otáčením přímky R kolem osy Z vznikne rotační hyperboloid, jedna povrchová kružnice, vytvořená bodem r , promítá se do K_1 . Středem kruhu hrdelního je o a poloměr $oa = a$. Rovina ϱ ($\varrho_1 \equiv H_1$), jdoucí přímkou H_1 kolmo ku π , seče rot. hyperboloid v hyperbole H , jejíž průmět je v přímce H_1 . Bod n_1 je průmětem bodu n hyperboly H , v němž kružnice K seče rovinu ϱ . Pokládáme-li N_1 za průmět přímky $N \parallel N_1 \parallel X$, lze přímku N míti za površku a X za osu válce proloženého hyperbolou H . Ježto body r a n mají stejnou výšku $r_1r = n_1n = z$ nad průmětnou π , leží površky M, N v jedné rovině (rnm) rovnoběžné s π , náleží tudíž jejich společný bod m křivce L , v níž hyperbolický paraboloid a hyp. válec se protínají; je tedy L_1 průmětem křivky L .

3. Tečnu křivky L_1 v bodě m_1 sestrojíme průmětem m_1t' průsečnice rovin tečných τ, τ' v bodě m resp. hyp. paraboloidu a hyp. válce. Rovinu tečnou τ stanovíme dvěma površkami $M \parallel M_1, mp$ různých soustav paraboloidu. Površka mp je rovnoběžná s řídící rovinou $(RR_1) \perp \pi$ a její průmět $m_1p \parallel R_1$ vytíná na površce X

první soustavy ležící v průmětně π stopu p površky mp . Je tedy rovnoběžka P^r , vedená bodem p s přímkou $M \parallel M_1$, stopou roviny tečné τ .

Rovinu tečnou τ' hyp. válce v bodě m stanovme površkou N a tečnou np' hyperboly H v bodě n . Stopu p' tečny np' na H_1 vytíná polára $P^{\tau''}$ bodu n_1 vzhledem ke kruhu A . Neboť polára



Obr. 1.

tato je stopou roviny tečné τ'' v bodě n rot. hyperboloidu a H_1 stopou P^e roviny ϱ hyperboly H . Sestrojíme-li tedy stopu $P^{\tau'} \parallel N_1 \parallel X$ jdoucí bodem p' , protnou se stopy $P^r, P^{\tau'}$ v bodě t' , jehož spojnice s bodem m je tečnou křivky L a spojnice m_1t' tečnou jejího průmětu L_1 .

4. Rovnice křivky L_1 . Budťež X, Y osy pravoúhlé soustavy souřadné. Rovnice přímky M_1 spojující bod o s bodem $r_1(a, y_1)$ jest

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{a}. \quad (1)$$

Kružnici K_1 pak náleží rovnice

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (2)$$

Ježto bod $r_1(a, y_1)$ leží na kružnici K_1 ,

$$a^2 + y_1^2 = r^2$$

a poněvadž bod $n_1(e, y_2)$ též kruhu K_1 náleží

$$e^2 + y_2^2 = r^2,$$

tedy

$$a^2 + y_1^2 = e^2 + y_2^2$$

a položíme-li $a^2 - e^2 = b^2$,

$$y_2^2 - y_1^2 = b^2. \quad (3)$$

Rovnice přímky N_1 je

$$y = y_2.$$

Vyloučíme-li y_2 z posledních dvou rovnic,

$$y^2 - y_1^2 = b^2. \quad (4)$$

a vyloučením ještě y_1 z rovnic (1), (4) plyne

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1.$$

což značí rovnicí křivky L_1 .

Je-li v rovnici $a^2 - e^2 = b^2$, dříve uvedené, $a > e$, je b^2 kladné a rovnice ta vede nás (obr. 1) k trojúhelníku pravoúhlému oev , kde $v(e, b)$ je společným bodem přímky H_1 a kružnice A . V tomto případě pojmenujme křivku L_1 křížnicí (la kreuzcourbe).*)

Je-li však $a < e$, je b^2 záporné a touž rovnicí jsme vedeni (obr. 2) k trojúhelníku prav. oac , kde $c(a, b)$ je průsečíkem přímky R_1 s kružnicí (o, e) .¹⁾ V tomto druhém případě nazveme křivku L_1 střížnicí²⁾ (la kohlen spitzencourbe).

5. Určeme kuželosečku E středem o , vrcholem a a ohniskem e . Je-li E elipsou, jsou její vrcholové tečny $x = \pm a$, $y = \pm b$ asymptotami křížnice L_1 a bod o izolovaným bodem dvojným. Je-li však hyperbolou, jsou její vrcholové tečny $x = \pm a$ asymptotami střížnice a její tečny ve dvojném inflekčním bodě o jsou asymptotami $x = \pm b/a$ hyperboly.

6. Buď q průsečíkem osy Y s přímkou m_1n_1 a p průsečíkem osy X s P' . Pak poláry bodů $p(x_1, 0)$, $q(0, y_1)$ vzhledem ke kuželosečce mají rovnice

$$xx_1 = a^2, \quad yy_1 = b^2$$

a jejich průsečík (x, y) je pólem přímky pq . Za podmínky, že bod $m_1(x_1, y_1)$ náleží křivce L_1 , vylučme z rovnic předešlých a z rovnice

*) Dr. K. Zahradník. O jisté biracionál. kubické transformaci. Č. M. a F. r. XXXIV, 341. Dr. H. Wieleitner. Spezielle ebene Kurven pq. 19. Dr. G. Loria-Schütte. l. c. pg. 210, pg. 696.

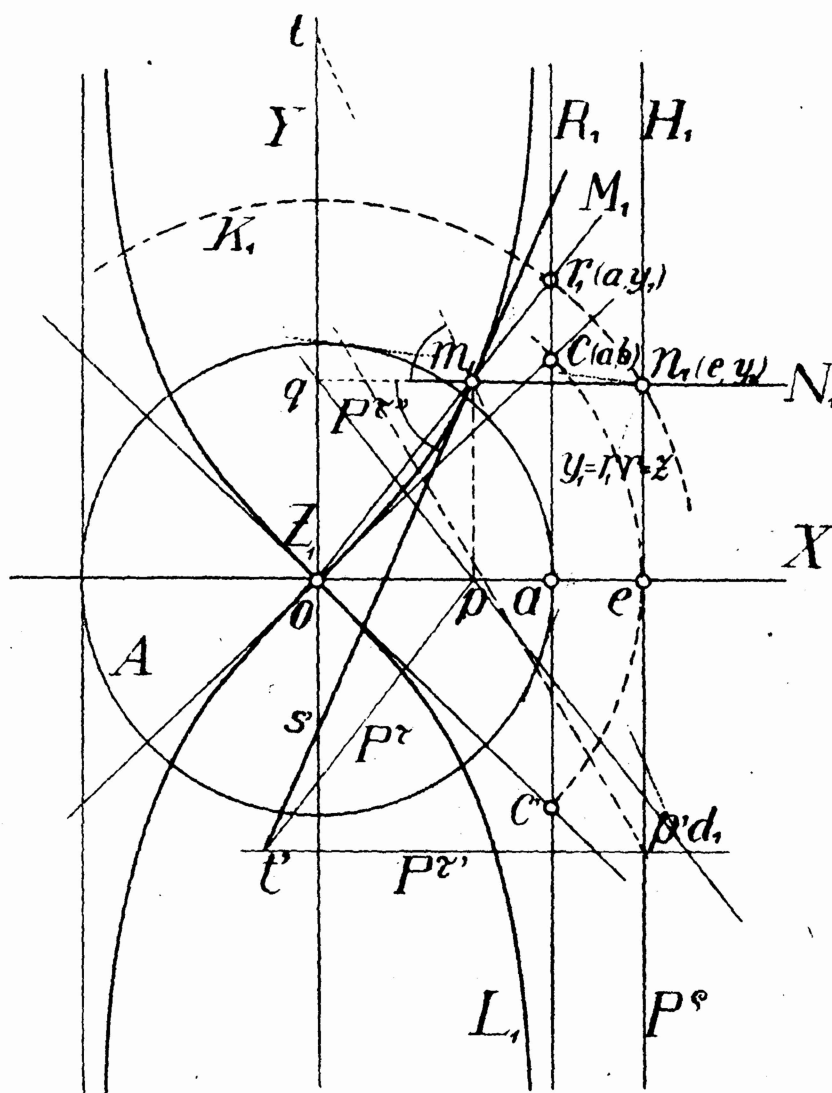
¹⁾ (o, e) značí kružnici, jejíž střed je o a poloměr $oe = e$.

²⁾ Pojmenování toto voleno podle jednoho cviku tělocvičného.

křivky $L_1 x_1, y_1$, čímž obdržíme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

je tedy pól (x, y) na kuželosečce E , z čehož vyplývá, že pq je tečnou této kuželosečky. Je tedy, jak známo, křivka L_1 z kuželosečky E odvozená. Lze tudíž křivku L_1 sestrojiti, když tečnou elipsy



Obr. 2.

resp. hyperboly protne přímky X, Y v bodech p, q , jimiž vedené rovnoběžky s příslušnými osami protínají se v bodě m_1 křivky L_1 .

7. Mějme X, Y, Z za osy právoúhlé soustavy souřadné prostorové. Ježto souřadnice z kteréhokoliv bodu přímky M v případě jednom a kruhu K v případě druhém rovná se $y_1 = ar_1 = r_1 r = n_1 n$ a píšeme-li tedy v rovnicích (1), (4) z místo y_1 , bude

$$xz = ay$$

rovnice hyperbolického paraboloidu a

$$y^2 - z^2 = b^2$$

rovnice hyp. válce. Vyloučíme-li z těchto rovnic z , obdržíme rovnici křivky L_1 , kterážto je průmětem křivky L společné hyper. paraboloidu a hyp. válce, jak již dříve bylo uvedeno.

8. Budťež dány v rovině π křivka E_1 a dvě přímky X_1Y_1 , jež se sečou v bodě o . Tečnou T_1 křivky E_1 v bodě d_1 protněme přímkou X_1 v bodě p_1 a přímkou Y_1 v bodě q_1 . Bodem o vedme přímkou X svírající se svým průmětem X_1 daný úhel α , na př. $\alpha = 45^\circ$. Do bodu p_1 promítneme bod p přímky X a bodem tímto vedme přímkou $pm \parallel p_1m_1$ v daném směru. Proložme křivkou E_1 plochu válcovou kolmou ku π . Bodem p vedená přímka $T \parallel T_1$ dotýká se válce v bodě d , jenž má svůj průmět v d_1 . Je-li T_1 proměnnou tečnou křivky E_1 , vytvoří proměnný bod tečny $T \parallel T_1$ na válci křivku E , jejíž průmět je v E_1 . Stanovme křivkou E , přímkou X a průmětnou π konoid, jehož obrysová křivka je E . Je tedy rovina $(TT_1) \perp \pi$ rovinou tečnou konoidu v bodě d . Rovina ρ , vedená přímkou Y_1 kolmo ku π , seče konoid v určité křivce Q , jejíž jeden bod q , v němž T protíná rovinu ρ , má svůj průmět v q_1 . Vedme opět jiným daným směrem bodem q přímkou $qm \parallel q_1m_1$, která přímkou pm seče v bodě m ; tím vznikne trojúhelník pqm , který má svůj průmět v $\triangle p_1q_1m_1$. Stanovme body opm rovinu λ , jejíž stopa P^λ jde bodem o rovnoběžně s přímkou $mp \parallel m_1p_1$. Pak proložme křivkou Q válec, rovnoběžný s π , jehož jedna površka $qm \parallel q_1m_1$ má s rovinou λ společný bod m , který tudíž náleží křivce L , v níž rovina λ válec proložený křivkou Q seče a která promítá se do L_1 .

9. Tečna T_{m_1} křivky L_1 je průmětem průsečnice T_m roviny $\lambda \equiv opm$ s rovinou tečnou τ' válce (QL) podél površky qm . Rovina τ' obsahuje tečnu qs' křivky Q v bodě q . Sestrojíme-li stopu s' tečny qs , lze též zobraziti stopu $P^{\tau'} \parallel q_1m_1 \parallel qm$ jdoucí bodem s' , takže spojnice průsečíků stop $P^{\tau'}$, P^λ s bodem m bude hledanou tečnou T_m . Jde tudíž o sestrojení bodu s' . Za tím účelem položíme podél površky T konoidu tečný hyp. paraboloid, jehož útvary řídicími jsou: přímka X , tečna $d_1d \perp \pi$ konoidu v bodě d ležící v jeho tečné rovině $(TT_1) \perp \pi$ vedené bodem d , a průmětnou π . Spojnice od_1 je površkou hyp. paraboloidu ležící v rovině π . Rovnoběžky X_1 a q_1s jsou průměty dvou površek X a qs hyp. paraboloidu téže soustavy. Má tedy qs svou stopu v bodě s , v němž $q_1s \parallel X_1$ seče površku od_1 hyp. paraboloidu ležící v průmětně π . Vedeme-li tedy bodem s rovnoběžku $P^\tau \parallel T_1 \parallel T$, obdržíme stopu společné tečné roviny τ hyp. paraboloidu a konoidu v bodě q . Je tedy průsečíkem stop P^e a P^τ stanovena hledaná stopa s' tečny qs' křivky Q . Nyní lze již stopu $P^{\tau'}$ roviny tečné τ sestrojiti; spojíme-li její průsečík s'' se stopou P^λ s bodem m_1 , dostáváme tečnu T_{m_1} křivky L_1 v bodě m_1 .

10. Přímky $p_1r \parallel oq_1$ a $q_1r \parallel op_1$ sekou se ve vrcholu r rovnoběžníka op_1rq_1 . Protněme-li stranu jeho oq_1 spojnicí rd_1 v bodě t , je známo, že ts a or jsou spolu rovnoběžné a že rovnoběžky tyto

