ROČNÍK 61. SEŠIT 3.

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

VYDÁVÁ

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ZA PODPORY MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY.

V PRAZE 1931.

TISKEM A NÁKLADEM VLASTNÍM.

Journal Tchécoslovaque de Mathématique et Physique.
Éditeur: **Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha II-1559, Tchécoslovaquie.**

Obsah seš. 3. — Sommaire du fasc. 3.

Rozhledy matematicko-přírodovědecké, čís. 2. — **Revue des sciences mathématiques et naturelles,** No. 2.

Upozornění pp. přispěvatelům. Příspěvky literární, jakož i zprávy týkající se obsahu »Časopisu« jest zasílati redaktorům přímo nebo prostřednictvím spolkové kanceláře. Na rukopisu budiž napsána adresa, na kterou jest zaslati korekturu.

Přesahují-li příspěvky dva tiskové archy, jest třeba k jejich otištění schválení výboru. Recense knih cizojazyčných buďtež stručné (ne přes 1 tiskovou stránku). Ke každému článku budiž připojen stručný výtah, pokud možno v jazyce francouzském. Přeje-li si autor písemné zprávy od redakce, nechť **přiloží známku na odpověď.**

Rukopis budiž psán čitelně, pokud lze strojem, po jedné straně a náležitě upraven k tisku; řecká písmena buďtež psána červeně neb aspoň červeně podtržena. Slova, jež mají býti vytištěna **tučně,** dlužno podtrhnouti úsečkou — ***kursivou,*** vlnitě — prostrkaná, čárkovaně. Neobvyklé značky, cizí písmena, odlišné vyznačování typografické úpravy a pod. je nutno na začátku rukopisu vysvětliti. Funkční znaky se tisknou písmem obyčejným, argumenty kursivou. Pravopis řídí se zásadami obsaženými v »Pravidlech českého pravopisu«. Obrazce schopné reprodukce buďtež nakresleny ve zvětšení trojnásobném, jinak se zhotoví neb opraví na náklad autorův. Autorské korektury připisují se autorům k tíži. Rukopisy článků nepřijatých do tisku se nevracejí. Korektury (autorům se posílá **jen** korektura sloupcová) buďtež vráceny co nejdříve. Autoři se snažně žádají, aby korekturu prováděli **co nejpečlivěji.** Za obsah článku odpovídá jeho autor.

Každý autor vědeckého článku obdrží bezplatně **25 separátů** svého článku (vyjímaje články referující). Přeje-li si autor větší počet separátů než uvedených 25, musí je objednati zvláště tím, že objednávku napíše zřetelně na sloupcovou korekturu svého článku. Ceny za každých dalších 25 separátů: $^1/_4$ archu 8 Kč, $^1/_2$ archu 16 Kč, $^3/_4$ archu 24 Kč, 1 archu 32 Kč.

Tento sešit vyšel 19. prosince 1931.

† Václav Jeřábek.

Dr. *J. Roháček.*

Omnia mea mecum porto.

Dne 20. prosince 1931 odešel na věčnost nestor českých geometrů *Václav Jeřábek*, vl. rada a ředitel v. v. I. české reálky v Brně, který se zesnulými již *V. Jarolímkem* a dr. *Janem Sobotkou* tvořili trojici, podpírající českou geometrii po celá desítiletí. Odešel tak tiše, jak plynul jeho celý život, zasvěcený výhradně intensivní vědecké práci, ze západomoravského města *Telče*, které jeho odchodu ani téměř nepozorovalo. Zde ve své rodinné vile, vzdálené všeho ruchu, sám a opuštěn věnoval se cele oblíbené geometrii, do níž vkládal své bohaté zkušenosti odborné i pedagogické.

Nástin jeho života a vědecké činnosti podal prof. dr. J. Sobotka v XLV. roč. „Časopisu“ (1916) při příležitosti uctění jeho 70-letého jubilea a proto stačí, doplním-li zde tento obraz podrobnostmi, které jsem poznal jako důvěrný přítel zesnulého za vzájemného častějšího styku s ním.

Václav Jeřábek, ač vzdělán německy na vídeňských školách vysokých, ač preceptorem v různých čelných byrokratických kruzích vídeňských, přece zůstal věren svému národu, zůstal Čechem s ujasněným názorem na vlastenectví. Již jako mladý profesor reálky v Telči, kamž se dostal po 2-letém suplování z Litomyšle, byl mezi těmi vůdci, kteří podle plánu dobře vypracovaného tehdejším uvědomělým ředitelem reálky *Mládkem* vedli telečské Čechy v průvodu do voleb, aby tak definitivně připravili porážku německé radnici. Tehdy němečtí pohlaváři, shromáždění v kasině, vidouce spontanní průvod a tušíce demonstrace, voleb se ani nezúčastnili a tak padla bašta němectví v Telči na vždy.

V jednání byl V. Jeřábek nanejvýše korektní, přísně spravedlivý tak, jak přesné vědy matematické a geometrické ho naučily. V povaze nesmlouvavé jak vůči sobě, tak i vůči jiným, upřímné, pevné a poctivé, zračil se celý jeho charakter, který dobře vystihují četné úryvkovité vzpomínky bývalých jeho žáků i profesorů, kteří v něm — jako řediteli — měli dobrého rádce a vůdce, uveřejněné v jubilejním almanachu brněnské I. české reálky 1930.

V politice byl vždy nestranný a politikařům nedůvěřoval; bylť řed. Jeřábek toho přesvědčení, že s politikou zanáší se do úřadu i protekce, kterou nenáviděl a jíž byl nepřítelem. Na ředitelské místo I. brněnské reálky dostal se jedině svými vědeckými zásluhami a pedagogickou zdatností. Bylo jeho nemalou pýchou, že deputace, která měla ve Vídni protežovati kandidáta konkurujícího s ním na toto řed. místo, byla ústy samého referenta odmítnuta: „Meine Herren, wir haben hier ein Gesuch, das man nicht übersehen kann.“

Při svém příchodu do Telče před válkou zastihl jsem řed. Jeřábka v plné duševní i tělesné síle, blížil se k 70. Denně po obědě pravidelně ubíral se na besedu starších pánů do hotelu „Černý orel“, kde sedával v kruhu svých známých, z nichž dlužno zejména jmenovati p. med. r. MUDra E. Krupičku, který tohoto roku taktéž ve vysokým věku odešel. Za doby války, v dobách smutných a resignovaných býval vášnivým kibicem „preferansu“, který tehdy hodně se hrával a který řed. Jeřábek nazval „normálem“. Název tento stal se pak běžným a výstražným, kdykoliv sázka dostupovala nadpoměrné výše. Stolová společnost Jeřábkova postupně za trvající válečné litice se počala rozpadávati odchodem nás mladších na vojnu a řed. Jeřábek cítil se osamoceným; tu jedinou útěchou jeho byla, jak říkal, geometrie. Převratem se poměry opět zlepšily. Naše vzájemné debaty odborné se ihned obnovily a styk náš nabýval rázu intimnějšího, zejména když přeneseny byly do tiché jeho pracovny, kde jeho nemalou chloubou byla veliká knihovna opatřená většinou geometrickou literaturou. Každou neděli v dopoledních hodinách konali jsme tuto „universitu“, kde řed. Jeřábek cítil se teprve povolaným a někdy i velmi vášnivé debaty překročily polední hodinu. Později, kdy objevil se u řed. Jeřábka na očích šedý zákal, býval ovšem mrzutější, ježto neduh mu zabraňoval sledovati narýsované obrazce. Po operaci zákalu řed. Jeřábek pozbýval zraku nápadně, až rozeznával pouze tmu od světla. Tím přestal vlastně svět proň existovati a uzavřené čtyři stěny po několik let byly jeho vším. V těchto chvílích naše vzájemné odborné debaty bývaly proň velmi obtížné a namáhavé, ježto veškeré potřebné obrazce i s příslušným označením musel si řed. Jeřábek nejen představovati, nýbrž i náležitě zapamatovati do příští naší schůzky. V posledních letech ponenáhlu dostavovala se i přirozená tělesná únava a i sil duševních valně ubývalo. Tu někdy náš rozhovor přecházel v přímé pouhé hájení evidentních zásad proti vyvstavším fantasiím Jeřábkovým. I tu nikdy ničeho nediktoval, pro podporu paměti dával snad poznamenati nějakou myšlenku svojí vzornou, do všeho zasvěcenou hospodyní slč. M. do mého nejbližšího příchodu.

Našich schůzek nemohl se Jeřábek někdy ani dočkati, přímo dětinsky se na ně těšil a přehnaně přisuzoval jim magickou moc na prodlužování svého života — nebylo tomu bohužel tak, osud tomu chtěl, že při poslední umluvené schůzce 20. prosince zatlačil jsem mu nevidomé oči navždy. Tolik o jeho jednoduchém, nanejvýše skromném životě.

Řed. Jeřábek patřil mezi muže, kteří českou geometrii udržovali na vědecké výši, kteří českou literaturu v tomto oboru pomáhali tvořiti a ji četnými články a pojednáními obohatili. Řed. Jeřábek činil tak do pozdního věku 86 let. Ve svých pracích Jeřábek vynikal jasností ve formulaci problému a přesností jeho podání. Jeho neúprosná logičnost odrážela se v každém počínání. V geometrii byl soběstačným v tom smyslu, že není poučky, věty nebo důkazu, které ve svých pracích potřeboval, kterých by si sám nebyl vlastním způsobem odvodil. Jak nezávislým byl majetkově, jak nekompromisním byl charakterem, tak neodvislým jevil se i v geometrii. Pro jeho práci literární je příznačná důmyslnost a lehkost v odvozování geometrických vět. Jeho důkazy vynikají jednoduchostí; Jeřábek nemiloval dlouhých komplikovaných úvah a snažil se vždy každou spletitost objasniti formou jednoduchou a velmi přístupnou. Škoda, že je nemožno shrnouti všechny výsledky Jeřábkovy do jediného svazku, ježto roztroušeny jsou jednak po různých odborných časopisech domácích i cizích, jednak na kouscích papíru, na útržcích, jindy opět na pokraji knih mezi řádky jako glosy vsunuty.

Nejvíce snad obohatil geometrii trojúhelníka, kde není jediného bodu význačného a příčky, jimž by řed. Jeřábek nevěnoval pozornosti a neobjasnil jejich význam a důležitost. Těžiště jeho činnosti spadalo do teorie křivek všeho druhu, které odvozoval cestou čistě desk. geometrickou. Na ryzosti této cesty si řed. Jeřábek nesmírně zakládal dovolávaje se zásad Tilšrových. Tato ortodoxnost, dnes arci zatlačená do pozadí, byla svého času uměním a pýchou geometrů, kteří tak chtěli jenom dokázati, že desk. geometrie sama si postačí. Řed. Jeřábek byl přesvědčen o tom, že daleko ještě desk. geometrie v teorii křivek nesplnila svůj úkol a proto s oblibou hleděl objasniti deskriptivně geometricky veškeré, ať planimetrické nebo stereometrické důkazy, týkající se křivek vůbec a kuželoseček zvlášť.

Obsáhlá činnost řed. Jeřábka na tomto poli zračí se v mistrných úlohách jdoucích do set, v dlouhé řadě odborných článků a delších pojednáních psaných v řeči české, německé i francouzské, uveřejňovaných v prvé řadě v „Časopise pro pěstování mat. a fys.“, jemuž přikládal neobyčejný význam, pak v Rozpravách Král.

české společnosti nauk, kde byl přespolním členem, ve Zprávách Přírodovědecké společnosti moravské, kde byl řádným členem, v odborných časopisech zahraničních, z nichž zejména Mathesis měl ve velké oblibě; s jejím radaktorem p. J. Neubergem, sekretářem učené společnosti v Bruselu, byl v čilé vědecké korespondenci.

Ocenění těchto prací vydaných do 70-letého jubilea zesnulého, nalezne čtenář v uvedeném článku prof. J. Sobotky.

Zde buďtež uvedeny práce a pojednání, jež vypracoval zesnulý — měl jsem štěstí býti při nich jeho spolupracovníkem — po svém 70. roce. Některé byly již otištěny, jiné čekají svého vyjítí. Jsou to zejména:

1. Elementární odvození konstrukce tečny meze vlastního stínu otevřené zborcené plochy šroubové. Čas. Roč. 53. — 2. O vlastním a vrženém stínu jistého konoidu stupně čtvrtého. Čas. Roč. 56. — 3. O lemniskatě Boothově. Čas. Roč. 57. — 4. Pseudo-versiera. Čas. Roč. 57. — 5. O ortogonálných hyperboloidech. Čas. Roč. 57. — 6. Nové zobecnění teorému o přímce Simsonově. Čas. Roč. 59. — 7. O jisté ploše stupně čtvrtého. Zprávy Morav. Přírodovědecké společnosti. 1926. — 8. O kornoidě. Zprávy Král. české spol. nauk. 1930. — 9. Důkaz věty Pascalovy. — 10. O úpatnicích křivek. — 11. Nové odvození konstrukce os elipsy dané sdruženými průměry. — 12. Sestrojení druhých dvou průsečíků elipsy s kružnicí opsanou nad jedním průměrem. — 13. Kterak větou Dandelinovou dokázati, že ort. průmětem kružnice je elipsa. — 14. Kuželosečka na rot. kuželi promítá se do roviny kolmé k ose do kuželosečky téhož druhu, jejímž jedním ohniskem je průmět vrcholu. — 15. O kvadratické transformaci. — 16. O křížnici a střížnici. Čas. Roč. 61. — 17. O zvláštní křivce stupně 8°. — Dosud nevyšlo; jest to poslední jeho úvaha spadající do oboru křivek, křivka svým zvláštním tvarem je pozoruhodná a zvláštní tím, že uzavírá bohatou činnost Jeřábkovu navždy.

Množství ireducibilně souvislá mezi n body.

Eduard Čech.

(Došlo 4. listopadu 1931.)

I.

Topologie nedobyla si dosud v universitních přednáškách místa, které by jí náleželo vzhledem k jejímu stále rostoucímu významu v celku matematických věd; v českém jazyce pak žádná její partie nebyla dosud zpracována. Z toho důvodu pokládám za vhodné vlastnímu tématu (v. část II.) předeslati stručný výklad těch známých pojmů, kterých budu potřebovati.

1. Množství R (složené z jakýchkoli prvků) nazveme (*topologický*) *prostor*[1]) (a jeho prvky nazveme *body*), když podle nějakého pravidla π byly zvoleny určité části R, které nazveme *v R uzavřené*. Při tom pravidlo π musí býti takové, že jsou splněny následující *axiomy* (požadavky): 1·1: 0[2]) a R jsou v R uzavřená množství; 1·2: jednobodové množství[3]) jest v R uzavřené; 1·3: součet[4]) $A + B$ dvou v R uzavřených množství A, B je v R uzavřený; 1·4: průřez[5]) jakéhokoli (třeba i nekonečného) systému v R uzavřených množství je v R uzavřený. Množství $A \subset R$[6]) nazývá se v R *otevřené*, když *komplementární* množství $R - A$[7]) jest v R otevřené. V R otevřená množství mají tudíž následující vlastnosti: 1·5: 0 a R jsou v R otevřená množství; 1·6: je-li x libovolný bod z R,

---

1) Důkladné poučení věcné i historické o různých pojmech prostoru nalezne se v knize M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, 1928. Prostory zde vyšetřované mají tam jméno *espaces accessibles*.

2) Symbol 0 značí *prázdné* množství (nemající žádného prvku).

3) Množství obsahující jediný bod x značíme (x).

4) Součet libovolného systému množství je množství těch bodů, které náležejí (aspoň) do jednoho množství daného systému; označení jako u sčítání čísel.

5) Průřez libovolného systému množství je množství těch bodů, které náležejí do všech daných množství; označení jako u násobení čísel.

6) $A \subset B$ nebo $B \supset A$ znamená, že množství A je část množství B.

7) $A - B$ je množství těch bodů, které jsou v A, ale nikoli v B.

pak $R - (x)$ jest v R otevřené množství; 1·7: průřez AB dvou v R otevřených množství je v R otevřený; 1·8: součet jakéhokoli systému v R otevřených množství je v R otevřený. K témuž pojmu prostoru můžeme také dospěti tak, že definujeme v R otevřená množství axiomaticky pomocí 1·5 — 1·8 a pak definujeme: množství $A \subset R$ nazývá se v R uzavřené, když $R - A$ je v R otevřené.

2. Nejdůležitější příklad prostoru je k-rozměrný euklidovský (nebo cartézský) prostor R_k, t. j. systém všech uspořádaných skupin $(x_1, \ldots, x_k)$ k reálních čísel. [Specielně R_1 je množství všech reálních čísel.] Aby to byl prostor v našem smyslu, je třeba definovati v R_k uzavřená (nebo v R_k otevřená) množství. Tuto definici najde čtenář ve spise V. Jarníka: *Úvod do teorie množství*,[8]) odd. 4., odst. 4. a 5., kde je také ukázáno, že naše axiomy 1·1—1·4 jsou splněny. Mnohem obecnější příklad udáme později (v odst. 5).

3. Nechť R, R^* jsou dané prostory. Nechť mezi R a R^* existuje jednojednoznačné zobrazení takové, že obrazem v R otevřeného[9]) množství jest v R^* otevřené množství a obráceně každé množství, jehož obraz je v R^* otevřený, jest v R otevřené. Pak pravíme, že R a R^* jsou *homeomorfní* prostory. Předmětem *topologie* (zvané někdy také analysis situs) je studium těch vlastností prostorů, které se nezmění při homeomorfním zobrazení.

4. Nechť $A \subset R$. Pak existují v R uzavřená množství $F \supset A$; průřez všech takových F podle axiomu 1·4 jest opět téhož typu; je to tedy *nejmenší* F. Nazývá se *uzavřený obal množství A v prostoru R*; budeme jej značiti $\overline{A}$.[10]) Z definice snadno následují věty: 4·1: $A = \overline{A}$, když a jen když A je v R uzavřené; 4·2: když $A \subset B$, pak $\overline{A} \subset \overline{B}$; 4·3: $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$.

5. Nechť $S \subset R$. Pak v S uzavřeným množstvím rozumíme průřez S s libovolným v R uzavřeným množstvím. Snadno vidíme, že axiomy 1·1—1·4 platí pak i pro S, t. j. *každá část prostoru je prostor*. Zřejmě v S otevřené množství není pak nic jiného než průřez S s libovolným v R otevřeným množstvím.

Specielně libovolná část euklidovského R_k je prostor, což dává již velmi obecný příklad prostoru.

Je-li S uzavřené v R, pak každé v S uzavřené množství jest uzavřené v R. Je-li S otevřené v R, pak každé v S otevřené množství jest otevřené v R.

---

[8]) Dodatek ke II. vyd. Petrova *Integrálního počtu*.

[9]) Lehko vidíme, že v této definici můžeme slovo „otevřený" všude nahraditi slovem „uzavřený".

[10]) To je označení obvyklé ve Fundamenta Mathematicae; Jarník l. c píše A^0.

6. Nechť $A \subset S \subset R$. Nechť $\overline{A}$ jest uzavřený obal množství A v prostoru R. Pak $\overline{A}S$ jest uzavřený obal množství A v prostoru S. *Důkaz*. Předně $\overline{A}S$ jest uzavřené v S a obsahuje A. Za druhé nechť $H \supset A$ jest uzavřené v S. Pak existuje v R uzavřené F takové, že $H = SF$, tedy $F \supset A$, takže (4·1 a 4·2) $F \supset \overline{A}$, tedy $H = SF \supset \overline{A}S$. Tedy $\overline{A}S$ je nejmenší v S uzavřené množství obsahující A.

7. Nechť $k = 2, 3, \ldots$ Pravíme, že součet $\sum_{r=1}^{k} A_r$ (A_r části daného prostoru R) má *oddělené sčítance*, když pro $1 \leq r \leq k$ A_r jest uzavřené v $\sum_{r=1}^{k} A_r$ a když pro $1 \leq r < s \leq k$ jest $A_r A_s = 0$. V této definici slovo „uzavřený" můžeme nahraditi slovem „otevřený". Vskutku, když třeba množství A_r jsou uzavřená v $\sum_{r=1}^{k} A_r$, pak každé $A_s = \sum_{r=1}^{k} A_r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^{k} A_r$ jest otevřené v $\sum_{r=1}^{k} A_r$.

8. Nechť součet $A + B$ má oddělené sčítance. Nechť $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$. Pak také součet $A_0 + B_0$ má oddělené sčítance. *Důkaz*. Ježto $AB = 0$, také $A_0B_0 = 0$; mimo to $A_0 = A(A_0 + B_0)$; ježto A jest uzavřené v $A + B$, následuje, že A_0 jest uzavřené v $A_0 + B_0$. Podobně i B_0 jest uzavřené v $A_0 + B_0$.

9. Nechť součty $A + B$, $A + C$ mají oddělené sčítance. Pak součet $A + (B + C)$ má oddělené sčítance. *Důkaz*. Ježto A jest uzavřené v $A + B$ i v $A + C$, existují v R uzavřená F_1, F_2 taková, že $A = F_1(A + B) = F_2(A + C)$. Pak jest $A \subset F_1$, $A \subset F_2$, tedy

$$F_1F_2(A + B + C) = F_2 . F_1(A + B) + F_1 . F_2(A + C) =$$
$$= F_2A + F_1A = A + A = A;$$

avšak F_1F_2 jest uzavřené v R, tedy $A = F_1F_2(A + B + C)$ jest uzavřené v $A + B + C$. Zcela stejně se dokáže, že A jest otevřené v $A + B + C$. Dále $AB = 0$, $AC = 0$, tedy $A(B + C) = 0$ a $B + C = (A + B + C) - A$; ježto A jest otevřené v $A + B + C$, $B + C$ je tedy uzavřené v $A + B + C$.

10. Množství $S \subset R$ nazývá se *souvislé*,[11]) když $S \neq 0$ a když rozklad $S = A + B$ s oddělenými sčítanci je možný pouze *tri-*

---

[11]) Tuto definici zavedl po prvé N. J. Lennes, *Curves in non- Metrical Analysis Situs with an Application in the Calculus of Variations*, Amer. Journal of Math., 33, 1911, str. 303. Nezávisle na Lennesovi zavedl stejnou definici znovu F. Hausdorff v knize *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, kap. VII, § 7. Následující jednoduché věty pocházejí od Hausdorffa.

viálně, t. j. tak, že $A = 0$ nebo $B = 0$.[12]) Zřejmě pak obecněji rozklad $S = \sum_{r=1}^{k} A_r$ s oddělenými sčítanci je možný pouze tak, že $A_r = 0$ s výjimkou jediného indexu r. Zřejmě jednobodové množství je souvislé, kdežto množství konečného počtu $k > 1$ bodů není souvislé.

11. Nechť $S = A + B$ s oddělenými sčítanci. Nechť T je souvislá část S. Pak $TA = 0$ nebo $TB = 0$. *Důkaz.* Podle 8 jest $T = AT + BT$ s oddělenými sčítanci.

12. Nechť $S_1, S_2 \subset R$ jsou souvislá množství; nechť $S_1S_2 \neq 0$. Pak $S_1 + S_2$ je souvislé. *Důkaz.* Nechť $S_1 + S_2 = A + B$ s oddělenými sčítanci napravo. Ježto $S_1S_2 \subset S_1 + S_2$, při vhodném označení $S_1S_2A \neq 0$. Podle 11. je pak $S_1B = S_2B = 0$, tedy $B = (S_1 + S_2)B = 0$.

13. Nechť $S \neq 0$. Nechť každý pár a, b bodů z S jest obsažen v souvislé části S. Pak S je souvislé. *Důkaz.* Nechť $S = A + B$ s oddělenými sčítanci. Kdyby nebylo $A = 0$ ani $B = 0$, mohli bychom zvoliti bod a v A a bod b v B. Body a, b byly by v souvislém $T \subset S$, tedy by bylo $AT \neq 0 \neq BT$, což je spor proti 11.

14. Nechť $\mathfrak{M}$ je systém souvislých částí prostoru R, které všecky obsahují daný bod a. Pak součet S systému $\mathfrak{M}$ je souvislý. *Důkaz.* Nechť $S = A + B$ s oddělenými sčítanci. Při vhodném označení bod a je v A, tedy $A \neq 0$. Kdyby bylo $B \neq 0$, mohli bychom v B zvoliti bod b. Bod b (a ovšem i bod a) byly by v nějakém množství T systému $\mathfrak{M}$, tedy v souvislé části S, a bylo by tedy $AT \neq 0 \neq BT$, což je spor proti 11.

15. Nechť S je souvislá část prostoru R. Nechť $S \subset T \subset \bar{S}$. Pak T je souvislé. *Důkaz.* Nechť $T = A + B$ s oddělenými sčítanci. Podle 11. při vhodném označení $SB = 0$, tedy $S \subset A$, $A \neq 0$. Podle 4·1 a 6 jest $A = T\bar{A}$; podle 4·2 $\bar{S} \subset \bar{A}$, tedy $T \subset \bar{A}$, takže $A = T\bar{A} = T$, tedy $B = 0$.

16. Nechť $S \neq 0$ je dané množství. Množství A nazveme *komponentou* množství S, když je to souvislá část S, která není obsažena v žádné jiné souvislé části S.[13]) Nechť T je jakákoli souvislá část S; pak T je částí jedné komponenty S. Vskutku existují souvislé části U množství S obsahující T (totiž jistě $U = T$); ježto T je souvislé, je $T \neq 0$, takže podle 14. součet A *všech* U je souvislý. Zřejmě A je žádaná komponenta S. Ježto jednobodové množství je souvislé, vychází speciálně, že každý bod z S je v nějaké komponentě S. Na druhé straně pro dvě *různé*

---

[12]) Vidíme, že souvislost množství S je topologická vlastnost prostoru S nezávislá na volbě širšího prostoru R, do kterého prostor S je vnořen.

[13]) Pojem komponenty množství S je zřejmě závislý pouze na prostoru S, nikoli na širším prostoru R, do kterého S je vnořen.

komponenty A, B množství S je vždy $AB = 0$, neboť jinak by $A + B$ byla podle 12. souvislá část S.

Je-li S samo souvislé, má jedinou komponentu ($= S$). Když S ($\neq 0$) není souvislé, počet komponent S je > 1 (konečný nebo nekonečný).

17. Nechť A je komponenta množství S. Pak A jest uzavřené v S. *Důkaz.* Ježto $A \subset \bar{A} . S \subset \bar{A}$, množství $\bar{A} . S$ je souvislé podle 15. Ježto $A \subset \bar{A} . S \subset S$, je tedy $A = \bar{A} . S$ podle definice komponenty.

18. Nechť $S = \sum_{r=1}^{k} A_r$ s oddělenými sčítanci $\neq 0$. Nechť S nelze psáti jako součet více než k oddělených sčítanců $\neq 0$. Pak $A_1, \ldots, A_k$ jsou komponenty množství S (takže S má právě k komponent). *Důkaz.* Nechť $A_k = B_k + B_{k+1}$ s oddělenými sčítanci. Kladu-li $B_1 = A_1, \ldots, B_{k-1} = A_{k-1}$, jest $S = \sum_{r=1}^{k+1} B_r$. Pro $1 \leqq r < s \leqq k + 1$ je pak $B_r B_s = 0$. Mimo to množství B_r jsou otevřená v S: to je zřejmé pro $r < k$; pro $r = k$ nebo $r = k + 1$ je B_r otevřené v A_k a A_k jest otevřené v S, takže podle 5. B_r jest otevřené v S. Tedy součet $\sum_{r=1}^{k+1} B_r = S$ má oddělené sčítance, takže aspoň jedno $B_r = 0$, t. j. $B_k = 0$ nebo $B_{k+1} = 0$. Tím je dokázáno, že A_k je souvislé. Nechť (v. 16.) A'_k je komponenta množství S obsahující A_k. Ježto $S = \sum_{r=1}^{k-1} A_r + A_k$ s oddělenými sčítanci, podle 11. $A'_k . \sum_{r=1}^{-1} A_r = 0$, t. j. $A'_k = A_k$. Tedy A_k je komponenta množství S. Stejně pro ostatní A_r.

19. Nechť S má konečný počet $k \geqq 2$ komponent: $A_1 \ldots A_k$. Pak $S = \sum_{r=1}^{k} A_r$ s oddělenými sčítanci. To následuje ze 16. a 17.

20. Nechť S je souvislá část souvislého prostoru R. Nechť $R - S = P + Q$ s oddělenými sčítanci. Pak $S + P$ je souvislé množství.[14]) *Důkaz.* Nechť $S + P = A + B$ s oddělenými sčítanci napravo. Podle 11. při vhodném označení $SA = 0$, tedy $A \subset P$, takže podle 8. součet $A + Q$ má oddělené sčítance. Podle 9. tedy také součet $A + (B + Q)$ má oddělené sčítance. Avšak $A + B + Q = S + P + Q = S + (R - S) = R$ je souvislé, tedy buďto $A = 0$ nebo ($B + Q = 0$, tedy) $B = 0$.

[14]) B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fundamenta Math., 2, 1921, str. 210 (théorème VI).

21. Podle 5. libovolná část množství R_1 všech reálních čísel je prostor. Specielně interval $\langle a, b\rangle$ (t. j. systém všech x, $a \leqq x \leqq b$; a, b daná reální čísla; $a < b$) je *souvislý* prostor. *Důkaz*. Nechť $\langle a, b\rangle = A + B$ s oddělenými sčítanci. Množství A, B jsou uzavřená v $\langle a, b\rangle$; $\langle a, b\rangle$ jest uzavřené v R_1 a ohraničené; tedy (5) množství AB jsou uzavřená v R_1. Máme uvésti ke sporu hypotésu $A \neq 0$, $B \neq 0$. Ježto $AB = 0$, existuje[15]) číslo $\alpha > 0$ takové, že když číslo x je v A, číslo y v B, jest vždy $|x - y| > \alpha$. Na druhé straně existuje zřejmě v $\langle a, b\rangle$ konečná posloupnost $x_0, x_1, \ldots, x_n$ taková, že $x_0 = x$, $x_n = y$, $|x_{r+1} - x_r| < \alpha$ pro $0 \leqq r \leqq n - 1$. Při vhodném r bude však x_r v A, x_{r+1} v B, takže nerovnost $|x_{r+1} - - x_r| < \alpha$ odporuje definici čísla α.

22. Prostor homeomorfní s intervalem $\langle a, b\rangle$ nazývá se *jednoduchý oblouk*; obrazy bodů a, b jsou jeho *krajní body*.[16]) Ježto prostor homeomorfní se souvislým prostorem zřejmě je souvislý, vidíme, že každý jednoduchý oblouk je souvislý.

23. Jsme nyní s to udati všecky souvislé části prostoru R_1 čísel reálních. Jsou to především všecky jednobodové části, za druhé však podle 13. a 21. všecky intervaly. Jiných souvislých částí však R_1 nemá. Neboť když $S \subset R_1$, když S obsahuje více než jedno číslo a když S není interval, existuje v $R_1 - S$ číslo a takové, že $AS \neq 0 \neq BS$, kde A (B) znamená množství všech reálních čísel větších (menších) než a. Avšak množství A, B jsou otevřená v R_1, tedy $S = AS + BS$ s oddělenými sčítanci, takže S není souvislé.

II.

24. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n = 2, 3 \ldots$) jsou různé body prostoru R. Pravíme, že R jest *ireducibilně souvislý mezi body* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a píšeme, abychom to naznačili, $R = I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, když: 1° R je souvislý prostor; 2° žádná část $S \neq R$ prostoru R obsahující všech n bodů $a_1, a_2, \ldots, a_n$ není souvislá. Pro $n = 2$ tento pojem byl zaveden Lennesem v pojednání citovaném v pozn. [11]) a byl podrobně studován Knasterem a Kuratowským.[17]) Případ $n > 2$ nebyl, pokud mi je známo, dosud vyšetřován. Podle 23. interval $\langle a, b\rangle$ jest ireducibilně souvislý mezi body a, b, ale nikoli mezi jiným párem svých bodů. Ježto souvislost je topologická vlastnost, jednoduchý oblouk jest ireducibilně souvislý mezi svými dvěma krajními body, ale nikoli mezi jiným párem svých bodů.

---

[15]) V. Jarník, l. c., str. 701, VI.

[16]) A priori krajní body mohly by se změniti při změně homeomorfního zobrazení na interval; z výsledku na konci odst. 24 je však zřejmé, že tomu tak není.

[17]) L. c. sub [14]). V. též L. Vietoris, *Stetige Mengen*, Monatshefte f. Math. u. Phys., 31, 1921, str. 173—204. Množství $I(a, b)$ mají tam název *Linienstück*.

25. Nechť $R = I(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ $(m = 2, 3, \ldots)$. Nechť $b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jsou další body prostoru R. Zřejmě $R = I(a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

26. Nechť $R = S + T$. Nechť $ST = (x)$ jest jednobodové množství. Nechť $S = I(a_1, \ldots, a_m, x)$, $T = I(b_1, \ldots, b_n, x)$ $(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nechť S, T jsou uzavřená v R.[18]) Pak $R = I(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$. *Důkaz.* Prostor R je souvislý podle 12. Nechť P je souvislá část R obsahující body $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$; máme dokázati, že $P = R$. Položme $SP = S_0$, $TP = T_0$, takže $S_0(T_0)$ obsahuje body $a_1, \ldots, a_m$ $(b_1, \ldots, b_n)$. Ježto S, T jsou uzavřená v R, jsou S_0, T_0 uzavřená v P. Ježto $P = S_0 + T_0$ je souvislé a $S_0 \neq 0$, $T_0 \neq 0$, jest $S_0T_0 \neq 0$. Avšak $S_0T_0 \subset ST = (x)$, tedy $S_0T_0 = (x)$. Nechť $S_0 = A + B$ s oddělenými sčítanci a nechť bod x náleží třeba do B. Množství A, B jsou uzavřená v S_0; S_0, T_0 jsou uzavřená v P; tedy A, $B + T_0$ jsou uzavřená v P. Dále $A(B + T_0) = AB + AT_0 = AT_0 \subset (S_0 - (x))\, T_0 = S_0T_0 - (x) = 0$. Tedy $P = A + (B + T_0)$ s oddělenými sčítanci; ježto $B + T_0 \neq 0$ a P je souvislé, jest $A = 0$. Tedy S_0 je *souvislá* část S obsahující body $a_1, \ldots, a_m, x$, takže $S_0 = S$. Podobně $T_0 = T$, tedy $P = R$.

27. Nechť $R = I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Nechť x je další $(\neq a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bod prostoru R. Množství $R - (x)$ má konečný počet k komponent; jest $2 \leq k \leq n$. Každá komponenta P množství $R - (x)$ obsahuje aspoň jeden z bodů $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Nechť $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}$ jsou ty a jen ty z bodů $a_1, a_2, \ldots, a_n$, které jsou v P. Pak jest $P + (x) = I(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}, x)$. Mimo to množství P jsou otevřená v R a množství $P + (x)$ jsou uzavřená v R. *Důkaz.* Ježto $R - (x)$ obsahuje všecky body $a_1, a_2, \ldots, a_n$, množství $R - (x)$ není souvislé. Tedy $R - (x)$ lze psáti jako součet dvou oddělených sčítanců $\neq 0$. Obecněji nechť $R - (x) = \sum_{r=1}^{k} P_r$ $(k = 2, 3, \ldots)$ s oddělenými sčítanci $\neq 0$. Množství P_r jsou otevřená v $R - (x)$, které jest otevřené v R, tedy P_r jsou otevřená v R. Tedy $P_r + (x)$ jsou uzavřená v R, neboť na př. $P_1 + (x) = R - \sum_{r=2}^{k} P_r$. Podle 20. $P_r + (x)$ jsou souvislá množství. Kdyby na př. P_1 neobsahovalo žádný z bodů $a_1, \ldots, a_n$, byla by $R - P_1 = \sum_{r=2}^{k} (P_r + (x))$ souvislá (podle 12.) část R obsahující všecky

[18]) Tento předpoklad je podstatný. Příklad (prostor R je částí euklidovské roviny R_2): S jest úsečka spojující body $x = (0, 1)$, $a = (0, -1)$; T skládá se z bodu x a z bodů $(t, \sin 1/t)$ $(0 < t \leq 1)$. Jest $S = I(a, x)$, $T = I(b, x)$ pro $b = (1, \sin 1)$, $ST = (x)$, nikoli však $R = S + T = I(a, b)$. Množství T není uzavřené v R.

body $a_1, \ldots, a_n$, takže by bylo $R - P_1 = R$, z čehož spor $P_1 = 0$. Nechť tedy na př. $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}$ $(m \geqq 1)$ jsou ty a jen ty z bodů $a_1, \ldots, a_n$, které jsou v P_1. Nechť S je souvislá část $P_1 + (x)$ obsahující všech $m + 1$ bodů $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}, x$. Pak $S + \sum_{r=2}^{k} (P_r + (x))$ je souvislá (opět podle 12.) část R obsahující všech n bodů $a_1, \ldots, a_n$, takže $S + \sum_{r=2}^{k} (P_r + (x)) = R$, z čehož $P_1 \subset S$, tedy $S = P_1 + (x)$. Tedy $P_1 + (x) = I\,(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}, x)$. Ježto každé z k oddělených množství P_r obsahuje aspoň jeden z bodů $a_1, \ldots, a_n$, jest $k \leqq n$. Volím-li k co největší, podle 18. P_r jsou komponenty množství $R - (x)$.

28. Specielně pro $n = 2$ máme tento výsledek: Nechť $R = I\,(a, b)$. Nechť x je další $(\neq a, b)$ bod z R. Pak $R - (x)$ má dvě komponenty $A(x)$, $B(x)$, z nichž prvá (druhá) obsahuje bod a (b). Množství $A(x)$, $B(x)$ jsou otevřená v R; množství $A(x) + (x)$, $B(x) + (x)$ jsou uzavřená v R. Mimoto $A(x) + (x) = I\,(a, x)$, $B(x) + (x) = I\,(x, b)$. Nechť nyní y je další $(\neq a, b, x)$ bod prostoru R. Pak jedno z obou souvislých množství $A(y) + (y)$, $B(y) + (y)$ je částí $R - (x)$ a tedy částí jedné z obou jeho komponent $A(x)$, $B(x)$. Není $A(y) \subset B(x)$, ježto $A(y)$ obsahuje bod a, který není v $B(x)$. Podobně není $B(y) \subset A(x)$. Tedy buďto $A(y) + (y) \subset A(x)$ nebo $B(y) + (y) \subset B(x)$, takže $R - (B(y) + (y)) \supset R - B(x)$, t. j. $A(y) \supset A(x) + (x)$. Tedy $A(x) \neq A(y)$ a buďto $A(y) \subset A(x)$ nebo $A(y) \supset A(x)$. To vede k následujícímu *uspořádání*[19]) množství R: 1° Bod a předchází každý jiný bod z R. 2° Bod b následuje za každým jiným bodem z R. 3° Jsou-li x, y dva různé další $(\neq a, b)$ body z R, pak x předchází y, když $A(x) \subset A(y)$. Zřejmě každý bod z $A(x)$ $(x \neq a, b)$ předchází x, kdežto každý bod x z $B(x)$ následuje za x.

29. Nechť prostor $R = I(a, b)$ jest uspořádán podle 28. Nazveme *intervalem* v R každou více než jednobodovou část S množství R, pro kterou platí: Když x, y, z jsou body z R, když x předchází y a y předchází z, když body x a z jsou v S, pak také y je v S. Nechť S je více než jednobodová část prostoru $R = I(a, b)$; pak S je souvislé, když a jen když je to interval v R.[20]) *Důkaz*. Nechť *předně* S jest interval v R mající první bod x a poslední bod y; jsou čtyři možné případy: 1° $x = a$, $y = b$, 2° $x = a$, $y \neq b$, 3° $x \neq a$, $y = b$, 4° $x \neq a$, $y \neq b$. V prvých třech případech jest resp. $S = R$, $S = A(y) + (y)$, $S = (x) + B(x)$, takže S je souvislé podle 28. Čtvrtý případ převede se snadno na třetí, neboť pak zřejmě S jest

---

[19]) L. c. sub [14]), str. 219, théorème XX.
[20]) L. c. sub [14]), str. 221, corollaire XXIV.

interval v $A(y) + (y) = I(a, y)$. Nechť *za druhé* S jest libovolný interval. Zvolme libovolně body x, y v S $(x \neq y)$. Když třeba x předchází y, pak *ten* interval v R, jehož prvním bodem jest x a posledním y, je souvislou částí S obsahující x i y; tedy S je souvislé podle 13. Nechť *za třetí* S není interval v R. Pak v $S - R$ existuje bod $x \neq a, b$ takový, že $S . A(x) \neq 0 \neq S . B(x)$. Ježto $S \subset R - (x) = A(x) + B(x)$, podle 11. S není souvislé.

Stejnou vlastnost má také *inversní* uspořádání množství R, které obdržíme, vyměníme-li roli bodů a, b. Zřejmě však žádné jiné uspořádání R nemůže míti také tuto vlastnost.

30. Ve 28. zavedené uspořádání prostoru $R = I(a, b)$ má také následující vlastnost:[21]) Nechť $R = S + T$; $ST = 0$. Nechť S, T jsou intervaly. Nechť bod a je v S a bod b je v T. Pak buďto existuje v S poslední bod α nebo existuje v T první bod β; ale z bodů α, β existuje jen jediný. *Důkaz.* Existuje-li α, zřejmě $S = A(\alpha) + (\alpha)$, takže (podle 28.) S jest uzavřené v R; neexistuje-li α, zřejmě S je součet všech $A(x)$, kde x probíhá S, takže S je součet množství (podle 28.) v R otevřených, tedy (1·8) S je v R otevřené. Podobně T jest uzavřené v R, existuje-li β, a otevřené v R, neexistuje-li β. Tedy, kdyby věta nebyla správná, součet $R = S + T$ měl by oddělené sčítance $\neq 0$ a prostor R by nebyl souvislý.

31. Nechť

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{1}$$

jsou různé body prostoru R $(k = 2, 3, \ldots)$. Body (1) tvoří část T prostoru R; nechť $S = R - T$. Nechť ke každému bodu a_ν z (1) existuje aspoň jeden jiný bod a_μ z (1) tak, že

$$S + (a_\nu) + (a_\mu) = I(a_\nu, a_\mu). \tag{2}$$

Pak lze body (1) rozděliti ve dvě (neprázdné) skupiny tak, že (2) platí, když a jen když body a_ν, a_μ jsou v různých skupinách. Jsou-li $b_1, \ldots, b_r$; $c_1, \ldots, c_s$ $(r + s = k)$ tyto dvě skupiny, píšeme

$$S = I^* (b_1, \ldots, b_r \mid c_1, \ldots, c_s).^{22})$$

Důkaz. Vyjděme od určitého páru a_ν, a_μ splňujícího podmínku (2) a uspořádejme $S + (a_\nu) + (a_\mu)$ podle 28. Tím je množství S také uspořádáno; věta dokázaná v odst. 29. platí pak také pro S. Máme ovšem k disposici dvě taková uspořádání S navzájem inversní. Poznámka na konci odst. 29. platí zřejmě také pro S, z čehož

---

[21]) L. c. sub [14]), str. 221, théorème XXIII.

[22]) Učiněné předpoklady dají se realisovati při libovolných r, s. Příklad: R je částí euklidovské roviny R_2. $b_\nu = (-1, \beta_\nu)$ pro $1 \leqq \nu \leqq r$, kde β_ν jsou libovolná mezi sebou různá čísla intervalu $\langle -1, 1 \rangle$; $c_\nu = (1, \gamma_\nu)$ pro $1 \leqq \nu \leqq s$, kde γ_ν jsou mezi sebou různá čísla z $\langle -1, 1 \rangle$; S je množství bodů $\left(t, \sin \dfrac{1}{1 - |t|}\right)$ pro $-1 < t < 1$.

snadno vychází, že pár navzájem inversních uspořádání množství S, ke kterému dospějeme takto pomocí bodů a_μ, a_ν, zůstane beze změny, když body a_μ, a_ν nahradíme jiným párem bodů z (1) splňujícím ovšem také podmínku (2). Rozhodněme se pro určité z těchto dvou navzájem inversních uspořádání množství S; to vyjádříme tím, že řekneme, že jsme S *orientovali*, což tedy lze právě dvěma způsoby. Zvolme nyní libovolný bod x v S a označme $P(x)$ ($Q(x)$) množství těch bodů z $S - (x)$, které předcházejí x (následují za x). Platí-li (2), podle 29. buďto množství

$$P(x) + (a_\nu),\ Q(x) + (a_\mu) \tag{*}$$

jsou souvislá a množství

$$P(x) + (a_\mu),\ Q(x) + (a_\nu) \tag{**}$$

nejsou souvislá nebo obráceně množství (*) nejsou souvislá a množství (**) jsou souvislá. Žádané rozdělení bodů (1) obdržíme pak zřejmě tak, že do první skupiny dáme ty a jen ty z bodů a_ν, pro něž $P(x) + (a_\nu)$ je souvislé, takže ve druhé skupině budou ty a jen ty z bodů a_ν, pro něž $Q(x) + (a_\nu)$ je souvislé. Řekneme pak, že body (1) z první skupiny jsou *počáteční* (*koncové*) body pro S; pro *všecky* body (1) zavedeme pak společný název: *krajní* body pro S. Změníme-li orientaci S, přejdou ovšem počáteční body v koncové a naopak.

Jsou-li $b_1, \ldots, b_r$ ($c_1, \ldots, c_s$) počáteční (koncové) body pro S, jest

$$\overline{P(x)} = P(x) + (x) + \sum_{\nu=1}^{r}(b_\nu);\quad \overline{Q(x)} = Q(x) + (x) + \sum_{\nu=1}^{s}(c_\nu). \tag{3}$$

Důkaz. Množství $P(x)$ jest otevřené v S, takže $S - P(x) = Q(x) + (x)$ jest uzavřené v S. Kdyby bod x nebyl v $\overline{P(x)}$, $P(x)$ bylo by uzavřené v S, takže by bylo $S = P(x) + (Q(x) + (x))$ s oddělenými sčítanci, což je nemožné. Můžeme se z důvodů symetrie omeziti na důkaz prvé formule (3). Máme tedy ještě dokázati, že body b_ν jsou a že body c_ν nejsou v $\overline{P(x)}$. Kdyby některý bod b_ν nebyl v $\overline{P(x)}$, bylo by $P(x)$ uzavřené v $P(x) + (b_\nu)$, takže součet $P(x) + (b_\nu)$ by měl oddělené sčítance, což je nemožné, neboť $P(x) + (b_\nu)$ je souvislé. Kdyby některý z bodů c_ν byl v $\overline{P(x)}$, podle 15. množství $P(x) + (c_\nu)$ bylo by souvislé, což je spor.

32. Nechť

$$v_1, v_2, \ldots, v_k \quad (k = 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

jsou body prostoru R. Nechť

$$S_1, S_2, \ldots, S_l \quad (l = 1, 2, 3 \ldots) \tag{5}$$

jsou v R otevřená množství. Nechť

$$R = \sum_{\nu=1}^{k} (v_\nu) + \sum_{\nu=1}^{l} S_\nu, \tag{6}$$

při čemž každý bod z R náleží jen do *jediného* z $k + l$ sčítanců na pravo. Pro $1 \leqq \lambda \leqq l$ nechť

$$\overline{S_\lambda} = S_\lambda + \sum_{\nu=1}^{r} (a_\nu) + \sum_{\nu=1}^{s} (b_\nu) = I^*(a_1, \ldots, a_r \,|\, b_1, \ldots, b_s), \quad (r, s = 1, 2, 3 \ldots)$$

při čemž $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ jsou různé body z řady (4). Jsou-li[23]) S_λ, S_μ dvě různá z množství (5), nechť existují indexy $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ ($t = 1, 2, 3 \ldots$; $\nu_0, \nu_1, \ldots = 1, 2, \ldots l$) takové, že $\nu_0 = \lambda$, $\nu_t = \mu$ a že pro $1 \leqq i \leqq t$ jest $\overline{S}_{\nu_{i-1}} . \overline{S}_{\nu_i} \neq 0$. Ke každému μ ($1 \leqq \mu \leqq k$) nechť existuje aspoň jedno λ ($1 \leqq \lambda \leqq l$) takové, že bod v_μ náleží do $\overline{S}_2$. Je-li libovolně zvolen index λ ($1 \leqq \lambda \leqq l$), platí-li (7), je-li bod a_ν (b_ν) libovolně zvolen mezi r body $a_1, \ldots, a_r$ (mezi s body $b_1, \ldots, b_s$), nechť není možné udati indexy $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ ($t = 0, 1, 2 \ldots$; $\nu_0, \nu_1, \ldots = 1, 2, \ldots, l$) vesměs různé od indexu λ tak, aby bod a_ν náležel do S_{ν_0} a bod b_ν do S_{ν_t} a aby[24]) pro $1 \leqq i \leqq t$ bylo $\overline{S}_{\nu_{i-1}} . \overline{S}_{\nu_i} = 0$. Pak pravíme, že R jest *obecný strom*;[25]) body (4) jsou jeho *vrcholy*, množství (5) jeho *strany*.

33. Vrcholy a strany obecného stromu R nejsou *prostorem* R jednoznačně určeny, nýbrž záležejí na jeho *vytvoření*. Toto vytvoření můžeme vždy voliti tak, že dané body (v konečném počtu) prostoru R jsou vrcholy. Neboť když při daném vytvoření (6) obecného stromu R bod x prostoru R není vrcholem, nýbrž náleží třeba do strany S_λ, orientujme S_λ (podle 31.), označme $P(x)$ ($Q(x)$) množství těch bodů z S_λ, které předcházejí x (následují za x), připojme k vrcholům (4) nový vrchol x, ze stran (5) vypusťme S_λ a nahraďme ji novými stranami $P(x)$ a $Q(x)$. Čtenář snadno shledá, že při novém vytvoření prostoru R zůstanou v platnosti všecky podmínky pro obecný strom.

34. Strany (5) obecného stromu (6) lze psáti v takovém pořádku, že prostory $R_\lambda = \sum_{r=1}^{\lambda} \overline{S}_r$ ($1 \leqq \lambda \leqq l$) jsou obecné stromy.[26]) *Důkaz.* Zřejmě R_1 jest obecný strom při libovolné volbě strany S_1. Nechť při určitém λ ($2 \leqq \lambda \leqq l$) byly již strany $S_1, \ldots, S_{\lambda-1}$ tak voleny, že $R_1, \ldots, R_{\lambda-1}$ jsou obecné stromy. Je-li S_μ další strana

[23]) Tato podmínka odpadne pro $l = 1$.

[24]) Tato podmínka odpadne pro $t = 0$.

[25]) Jsou-li $\overline{S_\lambda}$ jednoduché oblouky a je-li v (7) (pro každé λ) $r = s = 1$, přejde mnou definovaný obecný strom v to, čemu v t. zv. kombinatorické topologii se říká *strom*.

[26]) Vrcholy a strany obecného stromu R_λ jsou v R_λ obsažené vrcholy a strany obecného stromu R.

(zvolená libovolně), existují strany $S_1 = S_{\nu_0}, S_{\nu_1}, \ldots, S_{\nu_t} = S_\mu$ takové, že $\overline{S}_{\nu_{i-1}} \cdot \overline{S}_{\nu_i} \neq 0$. Zvolme i tak, že $\nu_i \geqq \lambda$ a že při tom ν_i jest co nejmenší; položme pak $S_\lambda = S_{\nu_i}$. Čtenář snadno dokáže, že při této volbě strany S_λ také R_λ jest obecný strom, čímž je důkaz dokončen. Ježto $\overline{S}_\lambda \cdot \overline{S}_{\nu_{i-1}} \neq 0$, ježto $\overline{S}_{\nu_{i-1}} \subset R_{\lambda-1}$, ježto sčítanci v (6) nemají společných bodů, existuje v $R_{\lambda-1}$ vrchol a, který je krajním bodem pro S_λ. Orientujme S_λ tak, že a je počátečním bodem pro S_λ a označme b některý koncový bod pro S_λ. Pak b není v $R_{\lambda-1}$. V opačném případě by totiž existovaly v $R_{\lambda-1}$ strany S_μ, S'_μ takové, že pro prvou (druhou) bod a (b) je krajním bodem. Ježto $R_{\lambda-1}$ jest obecný strom, existovaly by indexy $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ vesměs $< \lambda$ a takové, že $\nu_0 = \mu$, $\nu_t = \mu'$ a mimo to[24]) $\overline{S}_{\nu_{i-1}} \cdot \overline{S}_{\nu_i} \neq 0$. Ježto však a (b) náleží do $\overline{S}_{\nu_0}$ ($\overline{S}_{\nu_t}$) a ježto a (b) je počáteční (koncový) bod pro S_λ a $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t \neq \lambda$, nebyl by R obecný strom.

35. Nechť bod x obecného stromu R není jeho vrcholem. Pak $R - (x)$ není souvislé množství. *Důkaz.* Označme S_λ tu stranu R, která obsahuje x a zaveďme označení (7). Orientujme S_λ tak, že body a_ν $(1 \leqq \nu \leqq r)$ jsou počáteční pro S_λ. Nechť množství A skládá se jednak z bodů a_ν $(1 \leqq \nu \leqq r)$, jednak ze všech těch $\overline{S}_\mu$ $(\mu \neq \lambda)$, pro které lze udati indexy $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t \geqq 0)$ vesměs $\neq \lambda$, tak, že některý z bodů a_ν $(1 \leqq \nu \leqq r)$ náleží do $\overline{S}_{\nu_0}$, že $\nu_t = \mu$ a že pro $1 \leqq i \leqq t$ jest[24]) $\overline{S}_{\nu_{i-1}} \cdot \overline{S}_{\nu_i} \neq 0$. Podle definice obecného stromu R žádný b_ν $(1 \leqq \nu \leqq s)$ nenáleží do A, takže množství $B = (R - S_\lambda) - A$ obsahuje všecky body b_ν. Zřejmě A jest uzavřené v R. Je-li $v \neq a$ vrchol obecného stromu R a náleží-li v do A, zřejmě A obsahuje každou stranu S_μ $(\mu \neq \lambda)$, pro kterou v je krajním bodem; z toho následuje snadno, že A jest otevřené v $R - S_\lambda$, takže B jest uzavřené v $R - S_\lambda$, tudíž (v. 5) také v R. Označme $P(x)$ $(Q(x))$ množství těch bodů z S_λ, které předcházejí x (následují za x). Pak jest $R = (A + \overline{P(x)}) + (B + \overline{Q(x)})$, oba sčítanci jsou uzavření v R a nemají jiného společného bodu než x (v. 31 (3)). Tedy

$$R - (x) = [(A + \overline{P(x)}) - (x)] + [(B + \overline{Q(x)}) - (x)]$$

s oddělenými sčítanci $\neq 0$, takže $R - (x)$ není souvislé.

36. Zachovejme označení odst. 35. Modifikujme strany a vrcholy obecného stromu R podle 33.[27]). Čtenář snadno shledá, že

$$R_1 = A + \overline{P(x)}, \quad R_2 = B + \overline{Q(x)}$$

jsou obecné stromy; jejich vrcholy a strany jsou v R obsažené vrcholy a strany R. Obecné stromy R_1 a R_2 mají společný pouze

[27]) Symboly x, $P(x)$, $Q(x)$ ve 33 mají stejný význam jako ve 35.

bod x, který je pro oba vrcholem; každý z nich obsahuje jedinou stranu s krajním bodem x (jsou to strany $P(x)$ a $Q(x)$).

37. *Krajním bodem* obecného stromu R nazveme takový jeho vrchol, který je krajním bodem pro jedinou stranu.[28]) Každý obecný strom má aspoň dva různé krajní body. *Důkaz.* Když počet stran $l = 1$, je to zřejmé; nechť tedy $l > 1$. Pišme strany S_λ $(1 \leq \lambda \leq l)$ v takovém pořádku jako ve 34. Pak každý koncový bod pro S_l je krajním bodem pro R (neboť, jak ve 34. bylo ukázáno, není v R_{l-1}). Tedy existuje aspoň jeden krajní bod pro R. Avšak v konstrukci odst. 34. můžeme stranu S_1 voliti libovolně: tedy můžeme předpokládati, že $\overline{S}_1$ obsahuje krajní bod pro R. Ježto také $\overline{S}_l$ obsahuje krajní bod pro R, má R aspoň dva krajní body.

38. Každý obecný strom je souvislý. *Důkaz.* Každá strana S_λ je souvislá; tedy (podle 15.) také $\overline{S}_\lambda$ jsou souvislá množství. Jsou-li S_λ, S_μ dvě různé strany, existují indexy $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t \geq 1)$ takové, že $\nu_0 = \lambda$, $\nu_t = \mu$ a $\overline{S}_{\nu_{i-1}} \cdot \overline{S}_{\nu_i} \neq 0$ pro $1 \leq i \leq t$. Tedy (podle 12.) $\sum_{i=0}^{t} \overline{S}_{\nu_i}$ je souvislé. Avšak každý vrchol v_μ $(1 \leq \mu \leq k)$ je v některém množství $\overline{S}_\lambda$ $(1 \leq \lambda \leq l)$. Tedy podle (6) $\sum_{r=1}^{l} \overline{S}_r = R$, takže R je souvislé podle 13.

39. Nechť v je krajní bod obecného stromu R. Pak $R - v$ je souvislé. *Důkaz* jako ve 36., jen místo $\overline{S}_\lambda$ se vezme $\overline{S}_\lambda - (v)$.[29])

40. Bod a obecného stromu R nazveme *singulárním bodem* pro R, když $R - (a)$ je souvislé. Podle 35. každý singulární bod je vrcholem, takže singulárních bodů je konečný počet. Podle 39. každý krajní bod je singulární,[30]) takže podle 37. každý obecný strom má aspoň dva singulární body.

41. Nechť R jest obecný strom; nechť $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jsou všecky jeho singulární body (tedy $n = 2, 3, \ldots$). Pak $R = I(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Obecněji nechť $q_1, q_2, \ldots, q_m$ jsou různé body $(m \geq 2)$ obecného stromu R. Pak $R = I(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ tehdy a jen tehdy, když mezi body $q_1, \ldots, q_m$ vyskytnou se všecky body $p_1, \ldots, p_n$. *Důkaz.* Nechť S je souvislá část R obsahující všecky body p_1,

---

[28]) Uvidíme v odst. 49; že krajní body obecného stromu R jsou prostorem R jednoznačně určeny (nezávisle na jeho vytvoření).

[29]) Když $\overline{S}_{\nu_{i-1}} \cdot \overline{S}_{\nu_i} \neq 0$, jest $[\overline{S}_{\nu_{i-1}} - (v)] \cdot [\overline{S}_{\nu_i} - (v)] \neq 0$; jinak by v byl krajním bodem *obou* stran $S_{\nu_{i-1}}$, S_{ν_i}, což je spor.

[30]) Mohou existovati singulární body, které nejsou krajní. Příklad: R je částí euklidovské roviny R_2. R má čtyři vrcholy $a = (-1, -\sin 1)$, $b = (1, \sin 1)$, $c = (0, 1)$, $d = (0, -1)$ a dvě strany: prvá (druhá) je množství bodů $(t, \sin 1/t)$ pro $-1 < t < 0$ (pro $0 < t < 1$). Všecky body a, b, c, d jsou singulární, ale pouze a, b jsou krajní.

$p_2, \ldots, p_n$. Kdyby nebylo $S = R$, existoval by bod z v $R - S$. Ježto S obsahuje všecky singulární body, množství $R - (z) \subset S$ by nebylo souvislé. Tedy $R - (z) = A + B$ s oddělenými sčítanci $\neq 0$. Podle 11. při vhodném označení $BS = 0$. Množství $B + (z)$ je souvislé (podle 20.) a více než jednobodové, tedy obsahuje bod x, který není vrcholem pro R. Ježto $BS = 0$, bod x je $R - S$, takže $S \subset R - (x)$. Podle 35. a 36. jest $R - (x) = [R_1 - (x)] + [R_2 - (x)]$ s oddělenými sčítanci, kde R_1, R_2 jsou obecné stromy. Každý z obou obecných stromů R_1, R_2, má podle 37. aspoň dva krajní body, tedy aspoň jeden krajní bod $\neq x$. Každý takový bod je však zřejmě (krajním, tedy) singulárním pro R, tudíž náleží do S. Tedy $S \,.\, [R_1 - (x)] \neq 0$, $S \,.\, [R_2 - (x)] \neq 0$, což je spor proti 11. Tedy $S = R$, takže podle 38. $R = I\,(p_1, \ldots, p_n)$. Když mezi body $q_1, \ldots, q_m$ se vyskytnou všecky body $p_1, \ldots, p_n$, jest $R = I\,(q_1, \ldots, \ldots, q_m)$ podle 25. Když na př. bod p_1 se nevyskytne mezi body $q_1, \ldots, q_m$, jest $R - (p_1)$ souvislá (ježto p_1 je singulární) část R obsahující $q_1, \ldots, q_m$, takže není $R = I\,(q_1, \ldots, q_m)$.

42. Nechť $R = \sum_{r=1}^{n} P_r$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Každé P_r nechť jest uzavřené v R;[31]) každé P_r nechť jest obecný strom. Nechť x je bod prostoru R takový, že $P_r \,.\, P_s = (x)$ pro $1 \leqq r \leqq s < n$. Pak R jest obecný strom. Snadný důkaz přenechávám čtenáři.

43. Nechť $R = I\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Pak R jest obecný strom. *Důkaz.* Pro $n = 2$ je to zřejmé. Mohu tedy předpokládati, že $n > 2$ a že věta platí pro prostory ireducibilně souvislé mezi $m < n$ body. Za tohoto předpokladu podám důkaz v odstavcích 44.—48.

44. Hlavním prostředkem k důkazu ohlášené věty je výsledek odst. 27. Předpokládejme nejprve, že bod x lze zvoliti tak, že počet k komponent $P_1, P_2, \ldots, P_k$ množství $R - (x)$ je > 2. Ježto každé z množství P_r $(1 \leqq r \leqq k)$ obsahuje aspoň jeden z bodů $a_1, \ldots, a_n$, každé z nich může obsahovati nejvýš $n - 2$ z bodů $a_1, \ldots, a_n$. Jsou-li však $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}$ ty a jen ty z bodů $a_1, \ldots, a_n$, které náležejí do P_r, jest $1 < m < n - 1$ a podle 27. jest $P_r + (x) = I\,(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}, x)$, tedy podle předpokladu učiněného ve 43. $P_r + (x)$ $(1 \leqq r \leqq k)$ jsou obecné stromy. Avšak podle 27. $P_r + (x)$ jsou množství uzavřená v R a zřejmě $R = \sum_{r=1}^{k} (P_r + (x))$ a $(P_r + (x)) \,.\, (P_s + (x)) = (x)$. Tedy podle 42. R jest obecný strom. K témuž výsledku dospějeme stejnou cestou, když sice $k = 2$, avšak každá z obou komponent P_1, P_2 množství $R - (x)$ obsahuje více než jeden (tedy opět nejvýš $n - 2$) z bodů $a_1, \ldots, a_n$.

[31]) Tento předpoklad je podstatný, jak ukazuje příklad v pozn. [18])

45. Zbývá provésti důkaz za předpokladu, že při každé volbě bodu $x \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$ v prostoru R množství $R - (x)$ má dvě komponenty, z nichž jedna — označme ji $P_1(x)$ — obsahuje právě jeden z n bodů $a_1, \ldots, a_n$ — nechť je to bod $a_{\nu(x)}$ — kdežto druhá komponenta $R - (x)$ — označme ji $P_2(x)$ — obsahuje body a_r $(1 \leqq r \leqq n;\ r \neq \nu(x))$. Vyšetřme nejprve ten případ, že při všech možných volbách bodu x index $\nu(x)$ nabude méně než n hodnot. Při vhodném označení bude pak stále $\nu(x) > 1$. Můžeme předpokládati, že není $R = I\ (a_2, \ldots, a_n)$, neboť jinak R jest obecný strom podle předpokladu učiněného ve 43. Tedy existuje souvislé $S \subset R$, $S \neq R$ obsahující všecky body $a_2, \ldots, a_n$. Není-li $S = R - (a_1)$, existuje v $R - S$ bod $x \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$; pak $S \subset R - (x) \doteq P_1(x) + P_2(x)$, tedy podle 11. a 19. buďto $S \subset P_1(x)$ nebo $S \subset P_2(x)$; ježto S obsahuje $n - 1 > 1$ z bodů $a_1, \ldots, a_n$, není $S \subset P_1(x)$, takže $S \subset P_2(x)$, ale ani to není možné, ježto $\nu(x) > 1$, takže bod $a_{\nu(x)}$ je v S, ale nikoli v $P_2(x)$. Tedy za učiněných předpokladů o S musí býti $S = R - (a_1)$, takže $R - (a_1) = I\ (a_2, \ldots, a_n)$. Tedy podle předpokladu učiněného ve 43. jest $R - (a_1)$ obecný strom. Nechť

$$v_1, v_2, \ldots, v_k \quad (k \doteq 2, 3 \ldots) \tag{4}$$

jsou vrcholy a

$$S_1, S_2, \ldots, S_l \quad (l = 1, 2, 3 \ldots) \tag{5}$$

jsou strany obecného stromu $R - (a_1)$. Kdyby bylo $R - (a_1) = \overline{R - (a_1)}$, bylo by $R = (R - (a_1)) + (a_1)$ s oddělenými sčítanci $\neq 0$, což je nemožné; tedy $R = \overline{R - (a_1)}$, takže (v. 4·3) existuje aspoň jedno λ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$ takové, že bod a_1 náleží do $\overline{S_\lambda}$ (tedy do $\overline{S_\lambda} - S_\lambda$).

46. Nechť S_λ je taková strana obecného stromu $R - (a_1)$, že bod a_1 náleží do $\overline{S_\lambda} - S_\lambda$. Orientujme S_λ (podle 31.). Je-li x libovolný bod z S_λ, označme $Q_1(x)$ $(Q_2(x))$ systém těch bodů z S_λ, které předcházejí x (následují za x). Pak jest $S_\lambda = Q_1(x) + (x) + Q_2(x)$, tedy $\overline{S_\lambda} = \overline{Q_1(x)} + (x) + \overline{Q_2(x)}$, takže bod a_1 náleží do $\overline{Q_1(x)}$ nebo do $\overline{Q_2(x)}$. Označme $T_1(T_2)$ systém těch x z S_λ, pro něž a_1 náleží do $\overline{Q_1(x)}$ $(\overline{Q_2(x)})$; pak $S_\lambda = T_1 + T_2$. Předpokládejme nejprve, že v S_λ existují body x, y takové, že x předchází y nebo $x = y$, že x je v T_1 a že y je v T_2. Podle 29. množství $Q_1(x)$, $Q_2(y)$ jsou souvislá; tedy podle 15. množství $Q_1(x) + (a_1)$, $Q_2(y) + (a_1)$ jsou souvislá, takže podle 12. množství $S'_\lambda = Q_1(x) + Q_2(y) + (a_1)$ je souvislé. Zřejmě $S'_\lambda \subset S_\lambda - (x)$. Podle (3) v odst. 31. a podle 15. množství S''_λ vzniklé z S'_λ připojením krajních bodů strany S_λ obecného stromu $R - (a_1)$ je také souvislé. Myslíme-li si v odst. 38. provedený důkaz souvislosti obecného stromu aplikován na $R - (a_1)$, vidíme

snadno, že zůstane v platnosti, když S_λ a jeho uzavřený obal v $R - (a_1)$ nahradíme resp. množstvími S'_λ, S''_λ, t. j. že množství $[(R - (a_1)) - S_\lambda] + S'_\lambda = R_1$ je souvislé. Avšak toto množství obsahuje všecky body $a_1, \ldots, a_n$, ale nikoli bod x, takže není souvislé, neboť $R = I(a_1, \ldots, a_n)$. Tedy učiněný předpoklad o bodech x, y je nemožný, takže $T_1 . T_2 = 0$ a každý bod z T_2 předchází každý bod z T_1. Je-li $T_1 \neq 0 \neq T_2$, označme b (c) některý počáteční (koncový) bod strany S_λ obecného stromu $R - (a_1)$, takže $S_\lambda + (b) + (c) = I(b, c)$. Předpoklady věty ve 30. jsou pak zřejmě splněny, když místo R, S, T vezmeme resp. $S_\lambda + (b) + (c)$, $T_2 + (b)$, $T_1 + (c)$. Tedy v S_λ existuje bod x, který je buďto posledním pro T_2 nebo prvním pro T_1. Modifikujme podle 33. vytvoření obecného stromu $R - (a_1)$ tak, že k vrcholům (4) přidáme jako nový vrchol právě určený bod x, kdežto stranu S_λ nahradíme novými stranami $Q_1(x)$, $Q_2(x)$. Pak shledáváme: Bod a_1 je v jednom a jen jednom z množství $\overline{Q_1(x)}$, $\overline{Q_2(x)}$; je-li a_1 v $\overline{Q_1(x)}$ a píšeme-li $Q_1(x) = T'_1 + T'_2$ analogicky s hořejším rozkladem $S_\lambda = T_1 + T_2$, je $T'_1 = 0$; je-li a_1 v $\overline{Q_2(x)}$ a píšeme-li obdobně $Q_2(x) = T''_1 + T''_2$, jest $T''_2 = 0$.[32])

47. Dospěli jsme k výsledku, že (za předpokladů učiněných ve 45.) lze vytvoření obecného stromu $R - (a_1)$ z vrcholů (4) a stran (5) voliti tak, že pro každou stranu S_λ takovou, že bod a_1 je v $\overline{S_\lambda} - S_\lambda$, jest $T_1 = 0$ nebo $T_2 = 0$ (v označení odst. 46.). Při vhodné orientaci S_λ bude $T_2 = 0$. Nechť $b_1, \ldots, b_r$ ($c_1, \ldots, c_s$) ($r, s = 1, 2 \ldots$) jsou počáteční (koncové) body takové strany S_λ. Ježto (podle 6.) uzavřený obal S_λ v prostoru $R - (a_1)$ jest $\overline{S_\lambda} - (a_1)$, jest

$$\overline{S_\lambda} - (a_1) = I^*(b_1, \ldots, b_r \mid c_1, \ldots, c_s)\,. \tag{8}$$

a

$$\overline{S_\lambda} = S_\lambda + (a_1) + \sum_{\nu=1}^{r} (b_\nu) + \sum_{s}^{\nu=1} (c_\nu).$$

Množství $S_\lambda + (a_1) + (c_1)$ je souvislé podle 15. Nechť U je souvislá část tohoto množství obsahující body a_1 a c_1. Je-li $U \neq S_\lambda + (a_1) + (c_1)$, existuje bod x v $S_\lambda - U$, tedy $U \subset (S_\lambda - (x)) + (a_1) + (c_1)$. Definujme $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ jako ve 46., takže $S_\lambda - (x) = Q_1(x) + Q_2(x)$ s oddělenými sčítanci. Podle 31. (3) bod c_1 není v $\overline{Q_1(x)}$, takže (v. 6) $Q_1(x)$ jest uzavřené v $Q_1(x) + (c_1)$; tedy součet $Q_1(x) + (c_1)$ má oddělené sčítance. Ježto $T_2 = 0$, bod a_1 není v $\overline{Q_2(x)}$, takže součet $Q_2(x) + (a_1)$ má oddělené sčítance. Konečně $a_1 \neq c_1$, takže součet $(a_1) + (c_1)$ má oddělené sčítance. Tedy podle 9. také součet

[32]) Předpokládá se ovšem, že nové strany $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ jsou orientovány souhlasně s S_λ.

$$[Q_1(x) + (a_1)] + [Q_2(x) + (c_1)] \supset U$$

má oddělené sčítance. Tedy podle 11. $U \,.\, [Q_1(x) + (a_1)] = 0$ nebo $U \,.\, [Q_2(x) + (c_1)] = 0$, což je spor, neboť U obsahuje body a_1 i c_1. Tím je dokázáno, že $S_\lambda + (a_1) + (c_1) = I\,(a_1, c_1)$. Z toho a z (8) následuje podle 31., že

$$\overline{S}_\lambda = I^*\,(a_1, b_1, \ldots, b_r \mid c_1, \ldots, c_s).$$

To platí pro všecky takové indexy λ, pro něž $(a_1) \subset \overline{S}_\lambda$. Pro ostatní indexy λ platí (8), kde $\overline{S}_\lambda - (a_1) = S_\lambda$.

Z tohoto výsledku vychází snadno, že připojením bodu a_1 k vrcholům (4) obecného stromu $R - (a_1)$ při ponechání stran (5) vzniklý prostor R jest obecný strom. Neboť všecky ve 32. vyjmenované vlastnosti obecného stromu až na poslední jsou zřejmě splněny. Poslední vlastnost zní: Je-li a počáteční a b koncový bod strany S_λ, není možné udati indexy $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ ($t \geqq 0$) vesměs různé od λ tak, aby bod a náležel do $\overline{S}_{\nu_0}$, bod b do $\overline{S}_{\nu_t}$ a aby[24]) pro $1 \leqq i \leqq t$ bylo $\overline{S}_{\nu_{i-1}} \,.\, \overline{S}_{\nu_i} \neq 0$. Předpokládejme naopak, že při určité volbě S_λ, a, b lze udati $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$. Zvolme v S_λ bod x a definujme $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ jako ve 46. Množství

$$(\overline{Q_1(x) - (x)}) + \sum_{i=0}^{t} \overline{S}_{\nu_i} + (\overline{Q_2(x) - (x)}) = S_\lambda^*$$

podle 31. (3) obsahuje všecky krajní body strany S_λ a podle 12. je souvislé. Z toho důvodu důkaz souvislosti provedený v odst. 38. platí, když množství $\overline{S}_\lambda$ (pro daný index λ) nahradíme množstvím S_λ^*. To znamená, že

$$R_1 = (R - \overline{S}_\lambda) + S_\lambda^*$$

je souvislé množství. To je však spor, neboť R_1 obsahuje všecky body $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nikoli však x a $R = I\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

48. Zbývá provésti důkaz za předpokladu, že při ponechání předpokladů vyjmenovaných na počátku odst. 45. index $\nu(x)$ nabude (když x probíhá $R - \sum_{r=1}^{n} (a_r)$) všech hodnot $1, 2, \ldots, n$. Pro $1 \leqq r \leqq n$ označme A_r součet všech množství $P_1(x)$ (v označení zavedeném na počátku odst. 45.) příslušných těm x z $R - \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu)$, pro něž $\nu(x) = r$. Tedy bod a_r náleží do A_r pro $1 \leqq r \leqq n$. Mimo to A_r jsou v R otevřená množství podle 1·8, neboť $P_1(x)$ jsou v R otevřená podle 27. Tedy součet $\sum_{r=1}^{n} A_r$ má otevřené sčítance $\neq 0$;

ježto R je souvislý prostor, je tudíž $\sum_{r=1}^{n} A_r \neq R$, takže mohu zvoliti bod x v $R - \sum_{r=1}^{n} A_r$. Ježto bod a_r je v A_r, jest $x \neq a_1, \ldots, a_n$. Tedy podle našich předpokladů existuje rozklad $R - (x) = P_1(x) + P_2(x)$. Při vhodném označení jest $\nu(x) = 1$, takže podle 27. $P_1(x) + (x) = I\,(a_1, x)$, $P_2(x) + (x) = I\,(a_2, \ldots, a_n, x)$; množství $P_1(x) + (x)$, $P_2(x) + (x)$ podle 27. jsou uzavřená v R a jest

$$[P_1(x) + (x)] + [P_2(x) + (x)] = R; \; [P_1(x) + (x)] \,.\, [P_2(x) + (x)] = (x).$$

Ježto $P_1(x) + (x) = I\,(a_1, x)$, $P_1(x) + (x)$ jest obecný strom. Stačí dokázati, že také $P_2(x) + (x)$ jest obecný strom, neboť pak R jest obecný strom podle 42. Když v $P_2(x)$ existuje bod $y \neq a_2, \ldots, a_n$ takový, že buďto $(P_2(x) + (x)) - (y)$ má více než dvě komponenty, nebo že v každé komponentě tohoto množství jsou aspoň dva z bodů $x, a_2, \ldots, a_n$, pak $P_2(x) + (x)$ jest obecný strom podle 44. Nechť tedy při každé volbě y, $(y) \subset P_2(x) - \sum_{r=2}^{n} (a_r)$, množství $P_2(x) + (x)$ má právě dvě komponenty $S_1(y)$, $S_2(y)$, z nichž prvá obsahuje *jediný* z n bodů $x, a_2, \ldots, a_n$. Stačí dokázati, že při žádné volbě bodu y v $P_2(x) - \sum_{r=2}^{n} (a_r)$ není bod x v $S_1(y)$; neboť pak $P_2(x) + (x) = I\,(a_2, \ldots, a_n, x)$ jest obecný strom podle důkazu v odst. 45.—47. Kdyby však při nějaké volbě bodu y bod x náležel do $S_1(y)$, množství $S_1(y) + P_1(x) = S_1(y) + [P_1(x) + (x)]$ bylo by souvislé podle 12. Avšak

$$S_1(y) + S_2(y) + P_1(x) = [(P_2(x) + (x)) - (y)] + P_1(x) = $$
$$= [P_1(x) + (x) + P[_2(x)] - (y) = R - (y),$$

tedy

$$[S_1(y) + P_1(x)] + S_2(y) = P_1(y) + P_2(y).$$

Sčítanci na levo jsou souvislí, na pravo oddělení; tedy podle 11. buďto

$$S_1(y) + P_1(x) = P_1(y), \; S_2(y) = P_2(y)$$

nebo

$$S_1(y) + P_1(x) = P_2(y), \; S_2(y) = P_1(y).$$

Druhý případ je však nemožný, neboť $S_2(y)$ obsahuje body $a_2, \ldots, \ldots, a_n$, kdežto $P_1(y)$ obsahuje jediný z bodů $a_1, \ldots, a_n$. Tedy $S_1(y) + P_1(x) = P_1(y)$. Avšak bod a_1 náležel by do $P_1(x)$ a bod x do $S_1(y)$; tedy by $P_1(y)$ obsahovalo body a_1, x, takže by bylo $\nu(y) =$

$= a_1$, $(x) \subset P_1(y)$, tedy $(x) \subset A_1$. To je spor, neboť bod x byl zvolen v $R - \sum_{r=1}^{n} A_r$.

49. Singulární body obecného stromu R byly definovány topologickou vlastností; naproti tomu krajní body byly v odst. 37. definovány pouze na základě určitého vytvoření obecného stromu. Lze však také krajní body obecného stromu definovati topologickou vlastností: Nechť v je bod obecného stromu R. Bod v je krajním bodem pro R tehdy a jen tehdy, když $S \subset R$, $S \neq 0$ je souvislé, kdykoli $S + (v)$ je souvislé. *Důkaz.* Nechť *předně* bod v není vrcholem pro R, nýbrž náleží třeba straně S_λ. Pak $S = S_\lambda - (v)$ není souvislé (v. 29.), avšak $S + (v) = S_\lambda$ je souvislé. Nechť *za druhé* bod v je vrcholem, nikoli však krajním bodem pro R. Pak existují dvě různé strany S_λ, S_μ obecného stromu R takové, že bod v je v $\overline{S}_\lambda \,.\, \overline{S}_\mu$. Množství S_λ, S_μ jsou otevřená v R, takže součet $S = S_\lambda + S_\mu$ má oddělené sčítance; tedy S není souvislé, avšak $S + (v) = [S_\lambda + (v)] + [S_\mu + (v)]$ je souvislé podle 15. a 12. Nechť *za třetí* bod v je krajním bodem pro R, tedy krajním bodem jediné strany S_λ. Orientujme S_λ tak, že v je koncový bod pro S_λ. Nechť $S \subset R$, $S \neq 0$ a nechť $S + (v)$ je souvislé; máme dokázati, že S je souvislé. Ježto $(R - S_\lambda) - (v) = \Sigma \overline{S}_\mu + \Sigma(v_\nu)$, kde S_μ probíhá od S_λ různé strany a v_ν od v různé vrcholy obecného stromu R, množství $(R - S_\lambda) - (v)$ jest uzavřené v R, takže součet $[(R - S_\lambda) - (v)] + (v)$ má oddělené sčítance. Kdyby bylo $S \subset \subset R - S_\lambda$, podle 8. také součet $S + (v)$ měl by oddělené sčítance a množství $S + (v)$ nebylo by souvislé. Tedy $S \,.\, S_\lambda \neq 0$. Je-li x libovolný bod z S_λ, označme $P(x)$ $(Q(x))$ množství těch bodů z S_λ, které předcházejí x (následují za x). Mohli bychom podle 33. zavésti bod x jako nový vrchol; pak by (v. 31. (3)) $Q(x)$ byla jediná strana s krajním bodem v; z toho následuje, že jako bylo $SS_\lambda \neq 0$, je také $SQ(x) \neq 0$ při libovolné volbě bodu x v S_λ. Ježto $SS_\lambda \neq 0$, zvolme x v SS_λ. Dokážeme, že $Q(x) \subset S$. V opačném případě mohli bychom zvoliti $(y) \subset Q(x) - S$. Ježto $SQ(y) \neq 0$, zvolme $(z) \subset \subset S \,.\, Q(y)$. Podle 33. můžeme zavésti body x, z jako nové vrcholy; bod x bude pak počáteční a bod z koncový bod nové strany $T = Q(x) - [Q(z) - (z)]$ a bude $(y) \subset T$. Podle důkazu ve 35. bude $R - (y) = A + B$ s oddělenými sčítanci, z nichž prvý (druhý) obsahuje x (z). Tedy $AS \neq 0 \neq BS$. To je spor proti 11., neboť $(y) \subset Q(x) + S$, takže $S + (v)$ je souvislá část $R - (y)$. Tím je dokázáno, že $Q(x) \subset S$. Viděli jsme, že, když bod x zavedeme jako nový vrchol, strana S_λ se nahradí stranou $Q(x)$; je to tedy pouze dovolená změna vytvoření obecného stromu R, budeme-li předpokládati, že $S_\lambda \subset S$. Nechť nyní $S = A + B$ s oddělenými sčítanci; při vhodném označení podle 11. $S_\lambda \subset A$. Tedy $B \subset (R -$

$- S_\lambda) - (v)$, takže součet $B + (v)$ má oddělené sčítance. Tedy podle 9. také součet $(A + (v)) + B$ má oddělené sčítance. Avšak $(A + (v)) + B = S + (v)$ je souvislé; tedy $B = 0$. Tedy S je souvislé.

*

Sur les ensembles connexes irréductibles entre n points.

(Extrait de l'article précédent.)

Soient

$$v_1, v_2, \ldots, v_k \ (k = 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

des points et

$$S_1, S_2, \ldots, S_l \ (l = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

des sousensembles ouverts d'un espace topologique R. Soit

$$R = \sum_{\mu=1}^{k} (v_\mu) + \sum_{\lambda=1}^{l} S_\lambda,$$

les $k + l$ sommandes à droite étant disjoints deux à deux. Pour $1 \leqq \lambda \leqq l$ soit

$$\bar{S}_\lambda = S_\lambda + \sum_{p=1}^{r} (a_p) + \sum_{q=1}^{s} (b_q), \tag{3}$$

les $r + s$ points a_p et b_q figurant dans la suite (1); en outre, supposons que, pour $1 \leqq \lambda \leqq l$, $1 \leqq p \leqq r$ et $1 \leqq q \leqq s$, l'ensemble $\bar{S}_\lambda$ soit connexe irréductible entre a_p et b_q. Supposons que, pour $1 \leqq \lambda < \mu \leqq l$, il existe des indices $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t = 1, 2, \ldots)$ tels que $\nu_0 = \lambda$, $\nu_t = \mu$ et $\bar{S}_{\nu_{i-1}} \cdot \bar{S}_{\nu_i} \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq t$. Supposons que pour chaque μ $(1 \leqq \mu \leqq k)$ il existe au moins une valeur de λ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$ telle que $(v_\mu) \subset \bar{S}_\lambda$. Enfin si, pour $1 \leqq \lambda \leqq l$, on choisit des points a_p et b_q (*voir* (3)), supposons qu'il soit impossible de déterminer des indices $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t = 0, 1, 2, \ldots;$ $1 \leqq \nu_i \leqq l$ et $\nu_i \neq \lambda$ pour $0 \leqq i \leqq t)$ de manière que l'on ait $(a_p) \subset \bar{S}_{\nu_0}$, $(b_q) \subset \bar{S}_{\nu_t}$ et $\bar{S}_{\nu_{i-1}} \cdot \bar{S}_{\nu_i} \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq t$. Un point v de l'espace R soit appelé *singulier* lorsque l'ensemble $R - (v)$ est connexe. Tous les points singuliers de R figurent dans la suite (1). Le point v_μ $(1 \leqq \mu \leqq k)$ soit appelé une *extrémité* de R si l'inclusion $(v_\mu) \subset \bar{S}_\lambda$ n'est valable que pour une seule valeur de λ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$. L'espace R possède au moins deux extrémités; chaque extrémité est nécessairement un point singulier; mais il peut arriver aussi qu'il existe des points singuliers qui ne sont pas des extrémités. Un point v de R en est une extrémité s'il n'existe aucun sousensemble S non connexe de R tel que l'ensemble $S + (v)$ soit connexe; et cette propriété est caractéristique pour les extrémités. Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont tous les points singuliers de R, l'espace R est *connexe irréductible entre les points* $p_1, p_2, \ldots, p_n$: ceci signifie que R est connexe et qu'aucun vrai sousensemble connexe de R ne peut contenir simultanément les n points $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Réciproquement, si un espace topologique R est connexe irréductible entre m points $q_1, q_2, \ldots, q_m$, alors R a la structure qui vient d'être décrite et tous les points singuliers de R figurent dans la suite $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

O křížnici a střížnici.

V. Jeřábek.

(Došlo v červnu 1928.)

1. V rovině π dána jest přímka X a na ní tři pevné body a, e, o. V bodech a, e postavme kolmo na X resp. přímky $R_1 \parallel H_1$. Přímkou M_1 jdoucí bodem o protněme R_1 v bodě r_1. Kružnice K_1, jejíž střed je o a poloměr $\overline{or_1} = r$, seče přímku H_1 v bodě n_1. Vedeme-li tímto bodem rovnoběžku N_1 s X protne, přímku M_1 v bodě m_1. Geom. místem tohoto bodu je křivka L_1.

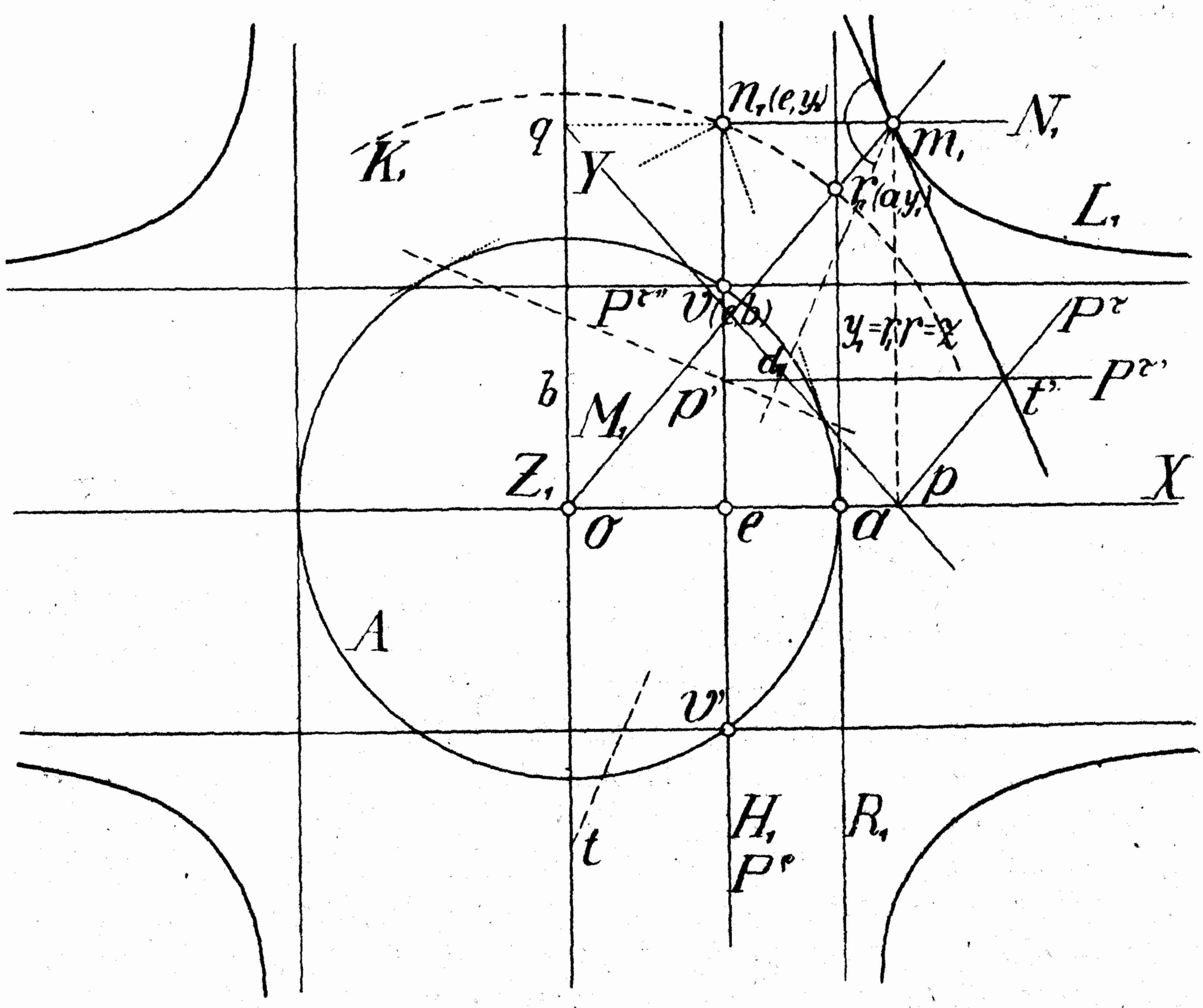
2. Rovinu π zvolme za průmětnu a pokládejme r_1 za průmět bodu r, jehož výška $\overline{r_1 r}$ nad rovinou π rovná se $\overline{ar_1} = z$. Spojnice R bodů a, r má tudíž svůj průmět v R_1. Přímkou Z ($Z_1 \equiv o$), postavenou v bodě o kolmo na π, přímkou R a průmětnou π určen je hyp. paraboloid, jehož jedna plošná přímka M je rovnoběžná se svým průmětem M_1.

Otáčením přímky R kolem osy Z vznikne rotační hyperboloid, jedna povrchová kružnice, vytvořená bodem r, promítá se do K_1. Středem kruhu hrdelního je o a poloměr $\overline{oa} = a$. Rovina ϱ ($\varrho_1 \equiv H_1$), jdoucí přímkou H_1 kolmo ku π, seče rot. hyperboloid v hyperbole H, jejíž průmět je v přímce H_1. Bod n_1 je průmětem bodu n hyperboly H, v němž kružnice K seče rovinu ϱ. Pokládáme-li N_1 za průmět přímky $N \parallel N_1 \parallel X$, lze přímku N míti za površku a X za osu válce proloženého hyperbolou H. Ježto body r a n mají stejnou výšku $\overline{r_1 r} = \overline{n_1 n} = z$ nad průmětnou π, leží površky M, N v jedné rovině (rnm) rovnoběžné s π, náleží tudíž jejich společný bod m křivce L, v níž hyperbolický paraboloid a hyp. válec se protínají; je tedy L_1 průmětem křivky L.

3. Tečnu křivky L_1 v bodě m_1 sestrojíme průmětem $m_1 t'$ průsečnice rovin tečných τ, τ' v bodě m resp. hyp. paraboloidu a hyp. válce. Rovinu tečnou τ stanovíme dvěma površkami $M \parallel M_1$, mp různých soustav paraboloidu. Površka mp je rovnoběžná s řídicí rovinou (RR_1) $\perp \pi$ a její průmět $m_1 p \parallel R_1$ vytíná na površce X

první soustavy ležící v průmětně π stopu p površky mp. Je tedy rovnoběžka P^τ, vedená bodem p s přímkou $M \parallel M_1$, stopou roviny tečné τ.

Rovinu tečnou τ' hyp. válce v bodě m stanovme površkou N a tečnou np' hyperboly H v bodě n. Stopu p' tečny np' na H_1 vytíná polára $P^{\tau''}$ bodu n_1 vzhledem ke kruhu A. Neboť polára



Obr. 1.

tato je stopou roviny tečné τ'' v bodě n rot. hyperboloidu a H_1 stopou P^ϱ roviny ϱ hyperboly H. Sestrojíme-li tedy stopu $P^{\tau'} \parallel N_1 \parallel X$ jdoucí bodem p', protnou se stopy P^τ, $P^{\tau'}$ v bodě t', jehož spojnice s bodem m je tečnou křivky L a spojnice m_1t' tečnou jejího průmětu L_1.

4. Rovnice křivky L_1. Buďtež X, Y osy pravoúhlé soustavy souřadné. Rovnice přímky M_1 spojující bod o s bodem r_1 (a, y_1) jest

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{a}. \tag{1}$$

Kružnici K_1 pak náleží rovnice

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{2}$$

Ježto bod r_1 (a, y_1) leží na kružnici K_1,

$$a^2 + y_1^2 = r^2$$

a poněvadž bod n_1 (e, y_2) též kruhu K_1 náleží

$$e^2 + y_2^2 = r^2,$$

tedy

$$a^2 + y_1^2 = e^2 + y_2^2$$

a položíme-li $a^2 - e^2 = b^2$,

$$y_2^2 - y_1^2 = b^2. \tag{3}$$

Rovnice přímky N_1 je

$$y = y_2.$$

Vyloučíme-li y_2 z posledních dvou rovnic,

$$y^2 - y_1^2 = b^2. \tag{4}$$

a vyloučením ještě y_1 z rovnic (1), (4) plyne

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1,$$

což značí rovnici křivky L_1.

Je-li v rovnici $a^2 - e^2 = b^2$, dříve uvedené, $a > e$, je b^2 kladné a rovnice ta vede nás (obr. 1) k trojúhelníku pravoúhlému oev, kde v (e, b) je společným bodem přímky H_1 a kružnice A. V tomto případě pojmenujme křivku L_1 křížnicí (la kreuzcourbe).*)

Je-li však $a < e$, je b^2 záporné a touž rovnicí jsme vedeni (obr. 2) k trojúhelníku prav. oac, kde c (a, b) je průsečíkem přímky R_1 s kružnicí (o, e).[1]) V tomto druhém případě nazveme křivku L_1 střížnicí[2]) (la kohlenspitzencourbe).

5. Určeme kuželosečku E středem o, vrcholem a a ohniskem e. Je-li E elipsou, jsou její vrcholové tečny $x = \pm a$, $y = \pm b$ asymptotami křížnice L_1 a bod o isolovaným bodem dvojným. Je-li však hyperbolou, jsou její vrcholové tečny $x = \pm a$ asymptotami střížnice a její tečny ve dvojném inflekčním bodě o jsou asymptotami $x = \pm b/a$ hyperboly.

6. Buď q průsečíkem osy Y s přímkou $m_1 n_1$ a p průsečíkem osy X s P^r. Pak poláry bodů p $(x_1, 0)$, q $(0, y_1)$ vzhledem ke kuželosečce mají rovnice

$$x x_1 = a^2, \quad y y_1 = b^2$$

a jejich průsečík (x, y) je pólem přímky pq. Za podmínky, že bod m_1 (x_1, y_1) náleží křivce L_1, vylučme z rovnic předešlých a z rovnice

---

*) Dr. K. Zahradník. O jisté biracionál. kubické transformaci. Č. M. a F. r. XXXIV, 341. Dr. H. Wieleitner. Spezielle ebene Kurven pq. 19. Dr. G. Loria-Schütte. l. c. pg. 210, pg. 696.

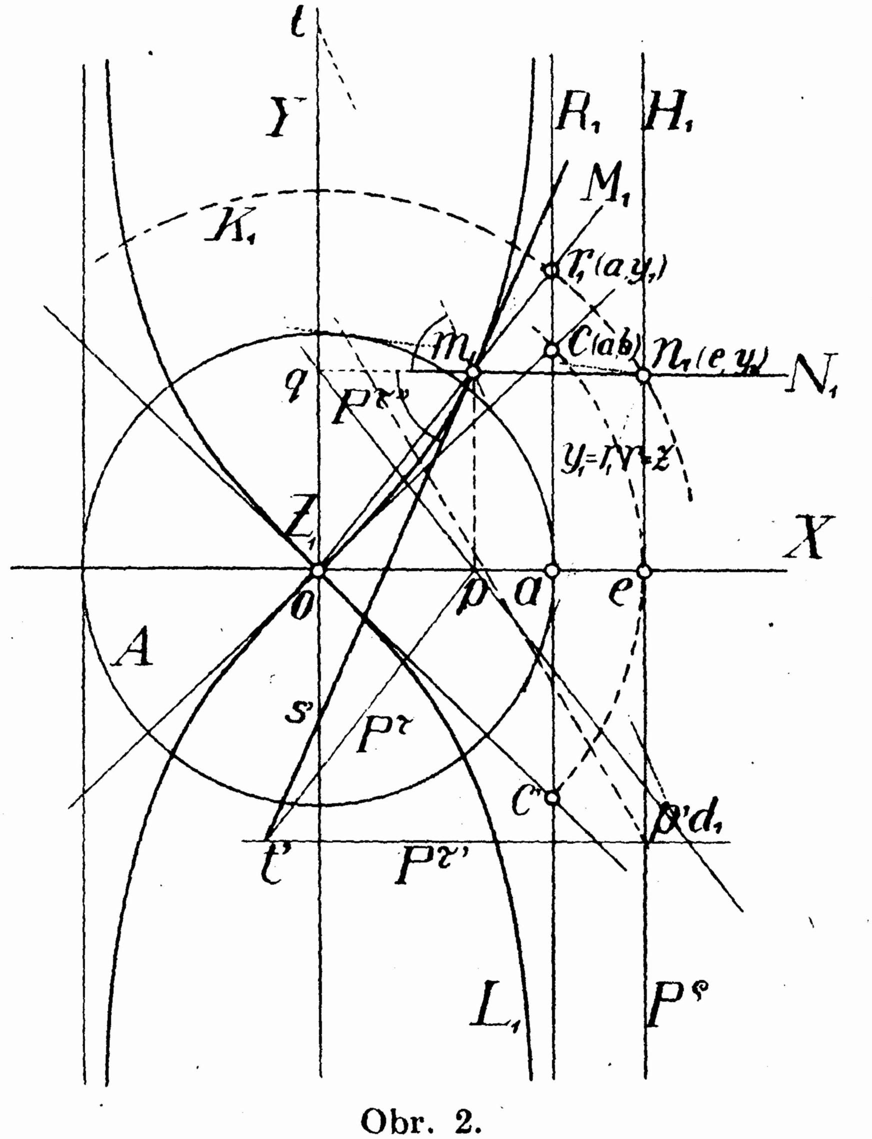
[1]) (o, e) značí kružnici, jejíž střed je o a poloměr $oe = e$.

[2]) Pojmenování toto voleno podle jednoho cviku tělocvičného.

křivky L_1 x_1, y_1, čímž obdržíme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

je tedy pól (x, y) na kuželosečce E, z čehož vyplývá, že pq je tečnou této kuželosečky. Je tedy, jak známo, křivka L_1 z kuželosečky E odvozená. Lze tudíž křivku L_1 sestrojiti, když tečnou elipsy



Obr. 2.

resp. hyperboly protneme přímky X, Y v bodech p, q, jimiž vedené rovnoběžky s příslušnými osami protínají se v bodě m_1 křivky L_1.

7. Mějme X, Y, Z za osy pravoúhlé soustavy souřadné prostorové. Ježto souřadnice z kteréhokoliv bodu přímky M v případě jednom a kruhu K v případě druhém rovná se $y_1 = ar_1 = r_1 r = n_1 n$ a píšeme-li tedy v rovnicích (1), (4) z místo y_1, bude

$$xz = ay$$

rovnice hyperbolického paraboloidu a

$$y^2 - z^2 = b^2$$

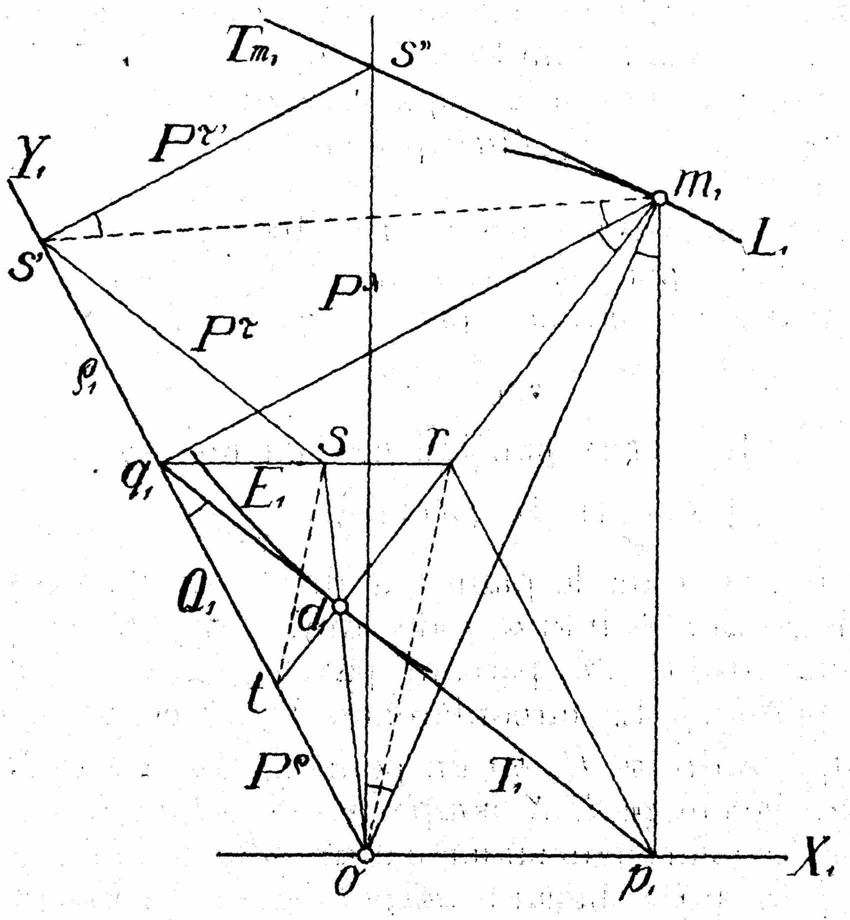
rovnice hyp. válce. Vyloučíme-li z těchto rovnic z, obdržíme rovnici křivky L_1, kterážto je průmětem křivky L společné hyper. paraboloidu a hyp. válce, jak již dříve bylo uvedeno.

8. Buďtež dány v rovině π křivka E_1 a dvě přímky $X_1 Y_1$, jež se sečou v bodě o. Tečnou T_1 křivky E_1 v bodě d_1 protněme přímku X_1 v bodě p_1 a přímku Y_1 v bodě q_1. Bodem o veďme přímku X svírající se svým průmětem X_1 daný úhel α, na př. $\alpha = 45^0$. Do bodu p_1 promítněme bod p přímky X a bodem tímto veďme přímku $pm \parallel p_1 m_1$ v daném směru. Proložme křivkou E_1 plochu válcovou kolmou ku π. Bodem p vedená přímka $T \parallel T_1$ dotýká se válce v bodě d, jenž má svůj průmět v d_1. Je-li T_1 proměnnou tečnou křivky E_1, vytvoří proměnný bod tečny $T \parallel T_1$ na válci křivku E, jejíž průmět je v E_1. Stanovme křivkou E, přímkou X a průmětnou π konoid, jehož obrysová křivka je E. Je tedy rovina $(TT_1) \perp \pi$ rovinou tečnou konoidu v bodě d. Rovina ϱ, vedená přímkou Y_1 kolmo ku π, seče konoid v určité křivce Q, jejíž jeden bod q, v němž T protíná rovinu ϱ, má svůj průmět v q_1. Veďme opět jiným daným směrem bodem q přímku $qm \parallel q_1 m_1$, která přímku pm seče v bodě m; tím vznikne trojúhelník pqm, který má svůj průmět v $\triangle\ p_1 q_1 m_1$. Stanovme body opm rovinu λ, jejíž stopa P^λ jde bodem o rovnoběžně s přímkou $mp \parallel m_1 p_1$. Pak proložme křivkou Q válec, rovnoběžný s π, jehož jedna površka $qm \parallel q_1 m_1$ má s rovinou λ společný bod m, který tudíž náleží křivce L, v níž rovina λ válec proložený křivkou Q seče a která promítá se do L_1.

9. Tečna T_{m1} křivky L_1 je průmětem průsečnice T_m roviny $\lambda \equiv opm$ s rovinou tečnou τ' válce (QL) podél površky qm. Rovina τ' obsahuje tečnu qs' křivky Q v bodě q. Sestrojíme-li stopu s' tečny qs, lze též zobraziti stopu $P^{\tau'} \parallel q_1 m_1 \parallel qm$ jdoucí bodem s', takže spojnice průsečíků stop $P^{\tau'}$, P^λ s bodem m bude hledanou tečnou T_m. Jde tudíž o sestrojení bodu s'. Za tím účelem položme podél površky T konoidu tečný hyp. paraboloid, jehož útvary řídicími jsou: přímka X, tečna $d_1 d \perp \pi$ konoidu v bodě d ležící v jeho tečné rovině $(TT_1) \perp \pi$ vedené bodem d, a průmětnou π. Spojnice od_1 je površkou hyp. paraboloidu ležící v rovině π. Rovnoběžky X_1 a $q_1 s$ jsou průměty dvou površek X a qs hyp. paraboloidu téže soustavy. Má tedy qs svou stopu v bodě s, v němž $q_1 s \parallel X_1$ seče površku od_1 hyp. paraboloidu ležící v průmětně π. Vedeme-li tedy bodem s rovnoběžku $P^\tau \parallel T_1 \parallel T$, obdržíme stopu společné tečné roviny τ hyp. paraboloidu a konoidu v bodě q. Je tedy průsečíkem stop P^ϱ a P^τ stanovena hledaná stopa s' tečny qs' křivky Q. Nyní lze již stopu $P^{\tau'}$ roviny tečné τ sestrojiti; spojíme-li její průsečík s'' se stopou P^λ s bodem m_1, dostáváme tečnu T_{m1} křivky L_1 v bodě m_1.

10. Přímky $p_1 r \parallel oq_1$ a $q_1 r \parallel op_1$ sekou se ve vrcholu r rovnoběžníka $op_1 rq_1$. Protneme-li stranu jeho oq_1 spojnicí rd_1 v bodě t, je známo, že ts a or jsou spolu rovnoběžné a že rovnoběžky tyto

jsou úhlopříčkou p_1q_1 půleny; poněvadž p_1q_1 a ss' jsou rovnoběžné, jest $q_1t = s'q_1$. Z toho jest patrno, kterak lze setrojiti tečnu T_{m_1} křivky L_1, je-li dán dotyčný bod d_1 křivky E_1 anebo, kterak naopak, lze vyznačiti na E_1 dotyčný bod d_1, známe-li tečnu T_{m_1} křivky L_1 v bodě m_1. Tímto způsobem je sestrojen dotyčný bod d_1 na tečně p_1q_1 hyperboly v obr. 2.



Obr. 3.

11. Jsou-li přímky m_1p_1, m_1q_1 kolmy k X_1Y_1 a je-li tečna T_{m_1} kolmá k om_1 (obr. 3), je td_1 výškou trojúhelníka $p_1q_1m_1$ jdoucí průsečíkem r druhých dvou výšek $p_1r \perp q_1m_1$, $q_1r \perp m_1p_1$. Neboť, spojíme-li bod m_1 s bodem t, pak

$$\sphericalangle p_1q_1o = \sphericalangle p_1m_1o = \sphericalangle m_1os'' = \sphericalangle m_1s's'' = \sphericalangle s'm_1q_1 = \sphericalangle q_1m_1t.$$

Neboť první dva úhly jsou stejné obvodové úhly v kruhu $op_1m_1q_1$ nad společnou tětivou op_1; druhé dva jsou stejné úhly střídavé při rovnoběžkách $p_1m_1 \parallel os''$; třetí dva jsou v kruhu $om_1s''s'$ stejné úhly obvodové nad tětivou m_1s''; čtvrté dva jsou stejné úhly střídavé, při rovnoběžkách $s's'' \parallel m_1q_1$ a poslední dva jsou stejné úhly v rovnoramenném trojúhelníku $ts'm_1$ při vrcholu m_1. Z rovnosti prvního a posledního úhlu plyne, že $m_1d_1 \perp p_1q_1$; prochází tudíž tm_1 bodem r. Přímka td_1r, majíc s výškou tm_1 společné dva body t, r je s řečenou výškou totožná. Je tedy pata d_1 výšky tm_1 bodem dotyčným křivky E_1.

12. Je-li křivka L_1 kružnicí, procházející bodem o, obaluje přímka p_1q_1 křivku Steinerovu, jsou-li přímky p_1m_1 a q_1m_1 kolmé na X_1 a Y_1. Myslíme-li si totiž, že kružnice L_1 protíná přímky X_1, Y_1 v bodech x_1, y_1, pak přímka p_1q_1 jest přímkou Eulerovou v trojúhelníku ox_1y_1 a obalová křivka tečny T_1 jest křivkou Steinerovou, jejíž dotyčný bod d_1 lze způsobem dříve uvedeným sestrojiti.

13. Je-li bod o středem kružnice L_1, pak proměnná přímka p_1q_1 obaluje šikmou asteroidu, jejíž dotyčný bod d_1 je patou kolmice, spuštěné s bodu m_1 na T_1, čímž přicházíme k známé již konstrukci dotyčného bodu d_1.

Jest mi milou povinností vzdáti díky p. prof. dru J. Roháčkovi, který podle mého manuskriptu článek tento do tisku upravil a příslušné obrazce pečlivě vyrýsoval.

*

Sur deux courbes du sixième ordre.

(Extrait de l'article précédent.)

Étant donné, dans le plan, une droite X et trois points a, e, o d'elle, menons, aux points a, e des droites R_1, H_1 perpendiculaires à X. Par une droite M_1 passant par le point o la droite R_1 est coupée au point r_1. La circonférence K_1 au centre o et au rayon $\overline{or_1} = r$ coupe la droite H_1 en un point n_1. La droite N_1 menée par ce point parallèlement à X coupe M_1 en un point m_1. Le lieu de ce point est une courbe du sixième ordre, dont deux espèces l'auteur étudie de plus près, faisant usage des méthodes de géométrie descriptive.