PŘÍLOHA DIDAKTICKO-METODICKÁ.

ROČNÍK 7. (1931/32). ČÍSLO 3. a 4.

FRANTIŠEK VRÁNA:

Základní úlohy o přímce v analytické geometrii.

(Dokončení.)

Osy úhlů dvou přímek.

Na určení vzdálenosti bodu od přímky zakládá se obyčejně řešení osy úhlů dvou přímek. Osa úhlu považuje se za geometrické místo bodů stejně vzdálených od ramen úhlu. Při tom jest nutno přihlížeti i ke smyslům těchto vzdáleností. Proto jest u různých autorů řešení různé podle způsobu, jakým určují smysl vzdálenosti bodu od přímky. Tento způsob řešení není však ryze analytický, poněvadž nevychází od pojmu osy úhlu, nýbrž od její vlastnosti v planimetrii odvozené. Ryze analyticky postupujeme při řešení této úlohy takto. Poněvadž transformací souřadnic posunutím se směrnice přímek ani jejich úhly nemění, můžeme se omeziti při řešení na přímky procházející počátkem, jejichž rovnice jsou

$$y = k_1 x \quad \text{a} \quad y = k_2 x. \tag{1}$$

Čtyři vzniklé úhly budeme rozlišovati podle smyslu jejich ramen. Za kladný polopaprsek přímky p_1 budeme ve shodě se smyslem normály přímky, dříve zavedeným, považovati ten, který míří vzhůru, a označíme jej r_1, podobně u přímky p_2 označíme jej r_2. Polopaprsky smyslu protivného v obou přímkách označíme r'_1 a r'_2. Můžeme tedy rozeznávati celkem čtyři úhly kladného smyslu $\widehat{r_1 r_2}$, $\widehat{r_2 r'_1}$, $\widehat{r'_1 r'_2}$ a $\widehat{r'_2 r_1}$. Při tom jest označena přímka s menší odchylkou jako p_1. Jsou-li odchylky přímek p_1 a p_2 úhly α_1 a α_2, jsou odchylky jejich polopaprsků od kladné poloosy x postupně α_1, α_2, $\alpha_1 + 180^0$ a $\alpha_2 + 180^0$.

Při řešení osy úhlů těchto polopaprsků vyjdeme od její definice, že osa úhlu je přímka půlící daný úhel. Jest tedy vždy odchylka osy úhlu aritmetickým průměrem odchylek jeho ramen. Proto odchylky os úhlů $\widehat{r_1 r_2}$, $\widehat{r_2 r'_1}$, $\widehat{r'_1 r'_2}$ a $\widehat{r'_2 r_1}$ jsou postupně

$$\begin{aligned} \alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2),\ \alpha' = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + 90^0, \\ \alpha'' = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + 180^0,\ \alpha''' = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + 270^0. \end{aligned} \tag{2}$$

Při posledním úhlu $\widehat{r'_2 r_1}$ překročí se při jeho tvoření plný úhel a jest proto odchylku ramene r_1 voliti $360^0 + \alpha_1$.

Z těchto rovnic plyne, že osy prvního a třetího úhlu splývají v jedinou přímku a jsou protivného smyslu. Totéž platí o osách druhého a čtvrtého úhlu. Dále plyne z těchto odchylek, že osy vedlejších úhlů stojí na sobě kolmo.

Osa s_1 úhlů $\widehat{r_1 r_2}$ a $\widehat{r'_1 r'_2}$ totožných s úhlem $\widehat{p_1 p_2}$ prochází průsečíkem přímek p_1 a p_2. Má tedy rovnici tvaru

$$(y - k_1 x) + \lambda (y - k_2 x) = 0. \tag{3}$$

Z ní plyne pro její směrnici rovnice

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 + \lambda k_2}{1 + \lambda}. \tag{4}$$

Vzhledem k rovnici (2) obdržíme dále pro určení λ rovnici

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \lambda \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \lambda}, \tag{5}$$

z níž plyne

$$\lambda = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = \frac{\pm \sqrt{1 + k_1^2}}{\pm \sqrt{1 + k_2^2}}. \tag{6}$$

Znaménka odmocnin jest voliti shodně se znaménkem směrnic k_1 a k_2. Jsou-li odchylky obou přímek úhly ostré, jsou $\cos \alpha_1$ i $\cos \alpha_2$ hodnoty kladné a λ též kladné. Jsou-li odchylky α_1 a α_2 úhly tupé, jsou $\cos \alpha_1$ i $\cos \alpha_2$ hodnoty záporné, ale λ jest opět kladné. Je-li však α_1 úhel ostrý a α_2 úhel tupý, je λ záporné. Proto rovnice osy úhlu $\widehat{p_1 p_2}$ má tvar

$$(y - k_1 x) \pm \frac{\sqrt{1 + k_1^2}}{\sqrt{1 + k_2^2}} (y - k_2 x) = 0$$

čili

$$\frac{y - k_1 x}{\sqrt{1 + k_1^2}} \pm \frac{y - k_2 x}{\sqrt{1 + k_2^2}} = 0. \tag{7}$$

To jest však rovnice, kterou obdržíme, sečteme-li nebo odečteme-li normální rovnice obou přímek. Při tom jest pamatovati, že p_1 značí přímku s menší odchylkou od osy x. *Dále jest nutno poznamenati, že při tomto způsobu řešení osy úhlu nebylo třeba vůbec přihlížeti ke smyslům stran přímek úhel svírajících, ani ke smyslům vzdáleností bodů osy od ramen úhlu. A přece jest tento výsledek v úplné shodě s dříve zavedeným smyslem stran přímky i vzdálenosti* *bodů od přímky.* To dokážeme, odvodíme-li rovnici osy úhlu obvyklým způsobem. Jsou-li obě odchylky daných přímek α_1 i α_2 úhly ostré, jsou v jednom úhlu $\widehat{p_1p_2}$ všechny body osy úhlu s_1 nad přímkou p_1 a pod p_2. Jsou tedy vzdálenosti těchto bodů od p_1 kladné a od p_2 záporné. V druhém úhlu p_1p_2 (označeném dříve $\widehat{r'_1r'_2}$) k prvnímu vrcholovém jsou body osy s_1 pod p_1 a nad p_2, tedy vzdálenosti jejich od ramen opět smyslů protivných jako v úhlu prvním. Proto platí pro celou osu s_1 rovnice pro vzdálenosti tyto ve tvaru $v_1 = -v_2$, čili $v_1 + v_2 = 0$, což jest v úplné shodě s rovnicí (7).

Jsou-li však odchylky α_1 i α_2 úhly tupé, jsou body osy prvého úhlu $\widehat{p_1p_2}$ pod p_1 a nad p_2 a druhého nad p_1 a pod p_2. Platí tedy opět $v_1 = -v_2$ čili $v_1 + v_2 = 0$.

Je-li odchylka α_1 úhel ostrý a α_2 úhel tupý, jsou body osy prvního úhlu $\widehat{p_1p_2}$ nad p_1 i nad p_2 a v druhém úhlu $\widehat{p_1p_2}$ pod p_1 i pod p_2. Platí tedy rovnice $v_1 = v_2$ čili $v_1 - v_2 = 0$ opět souhlasně s rovnicí (7). To je další doklad správnosti zavedených smyslů stran přímek i vzdáleností bodu od přímky.

Přistupme nyní k řešení osy s_2 vedlejších úhlů k úhlu $\widehat{p_1p_2}$, které značíme $\widehat{p_2p_1}$ ($\widehat{r_2r'_1}$ a $\widehat{r'_2r_1}$). Osa s_2 jest odchýlena od osy s_1 o 90^0. Proto platí, že její směrnice rovná se vždy záporné kotangentě odchylky osy s_1.

Rovnice osy s_2 má opět tvar

$$(y - k_1x) + \lambda' (y - k_2x) = 0, \tag{8}$$

z něhož plyne pro její směrnici rovnice

$$\frac{k_1 + \lambda' k_2}{1 + \lambda'} = -\operatorname{cotg} \alpha = -\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2). \tag{9}$$

Stejným způsobem jako dříve obdržíme pro λ' hodnotu

$$\lambda' = -\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)} = -\frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = -\lambda. \tag{10}$$

Z toho jest patrno, že rovnici osy úhlů vedlejších obdržíme opět sečtením nebo odečtením normálních rovnic obou přímek daných. Výkon pro osu s_2 jest vždy protivný výkonu pro osu s_1. Z tohoto způsobu řešení plyne pro výpočet rovnice os úhlů dvou přímek pravidlo:

Jsou-li odchylky obou daných přímek úhly ostré nebo tupé, jest rovnice osy úhlu $\widehat{p_1p_2}$ dána součtem normálních rovnic obou přímek a rovnice osy úhlu $\widehat{p_2p_1}$ jejich rozdílem. Je-li však odchylka přímky p_1

úhel ostrý a přímky p_2 *úhel tupý, jest osa úhlu* $\widehat{p_1 p_2}$ *dána rozdílem a osa úhlu* $\widehat{p_2 p_1}$ *součtem normálních rovnic obou přímek.*

Stejně jako dříve lze dokázati i pro úhel $\widehat{p_2 p_1}$ úplnou shodu tohoto řešení se smysly vzdáleností bodů od přímky dříve zavedenými.

Pravidlo pro osy úhlů přímek p_1 *a* p_2 *lze vystihnouti ještě jinak takto:*

K daným přímkám můžeme si mysliti vždy rovnoběžky procházející počátkem O. Pak vždy v jedné dvojici vrcholových úhlů těchto rovnoběžek jest obsažena osa y a v druhé dvojici nikoliv. V úhlu, v němž jest osa y obsažena, jsou body osy úhlu na souhlasných stranách obou ramen p_1 *a* p_2 *a proto jest nutno normální jejich rovnice od sebe odečítati a v druhém úhlu, jímž osa y neprochází, sečítati.*

Všimněme si ještě případu, kdy jedna přímka nemá rovnici ve tvaru směrnicovém. Pak jest dána rovnicí $x - p = 0$ a druhá přímka rovnicí $y - kx - q = 0$. Rovnice os lze psáti ve tvaru

$$(x - p) + \lambda\,(y - kx - q) = 0. \tag{11}$$

Je-li k kladné, jest přímka nerovnoběžná s osou y méně odchýlena od osy x a označíme ji opět p_1 a rovnoběžku s osou y označíme p_2. Pak osa úhlu $\widehat{p_1 p_2}$ má odchylku od osy x rovnou $\frac{1}{2}(\alpha_1 + 90^0)$. Vzhledem k rovnici (11) platí tedy pro směrnici osy $\widehat{p_1 p_2}$ rovnice

$$\frac{\lambda k - 1}{\lambda} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + 90^0), \tag{12}$$

z níž obdržíme

$$\lambda = \frac{1}{k - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 + 90^0)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 + 90^0)}. \tag{13}$$

Po krátké úpravě bude dále

$$\lambda = -\cos \alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2}}. \tag{14}$$

Má tedy rovnice osy úhlu $\widehat{p_1 p_2}$ tvar

$$(x - p) - \frac{y - kx - q}{\sqrt{1 + k^2}} = 0. \tag{15}$$

Jest to opět rozdíl normálních rovnic obou přímek.

Body této osy mají podle našeho smyslu stran přímek od p_1 i od p_2 souhlasné smysly vzdáleností. Jsou totiž v horním úhlu nad p_1 a napravo od p_2 a v dolním úhlu pod p_1 a nalevo od p_2.

Osa úhlu vedlejšího $\widehat{p_2p_1}$ bude pak dána součtem normálních rovnic obou přímek, jak lze stejným způsobem jako dříve dokázati.

Je-li jedna přímka rovnoběžna s osou y a druhá má odchylku $\alpha_2 > R$, jest odvození rovnice osy úhlu $\widehat{p_1p_2}$ stejné jako dříve až k rovnici (14), podle níž bude

$$\lambda' = -\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}. \tag{16}$$

Jest totiž $\cos\alpha_2 < 0$. Proto rovnici osy úhlu $\widehat{p_1p_2}$ obdržíme sečtením normálních rovnic obou přímek a rovnici osy úhlu $\widehat{p_2p_1}$ jejich odečtením. Přihlédneme-li opět ke smyslům vzdáleností bodů os úhlů od jejich ramen, vidíme opět úplný souhlas se zavedenými smysly stran přímky.

Osy úhlů trojúhelníku.

Tato úloha působí nejvíce obtíží, jak je patrno z jejího řešení, pokud jest v učebnicích uvedeno. Někdy jak v učebnicích školských, tak i v dílech vědeckých jest úloha ta i nesprávně řešena, takže uvedené v nich výsledky jsou chybné. Důvod tohoto v matematice nezvyklého zjevu jest ten, že autoři volí buď příliš libovolně předpoklady pro určení smyslu stran přímky anebo vůbec ničeho v tomto smyslu nestanoví. Tak nejsou obecně správné rovnice os vnitřních úhlů trojúhelníku v učebnici Vojtěchově na str. 30, vyd. 3, kde jsou uvedeny všechny ve tvaru rozdílů normálních rovnic obou stran příslušný úhel svírajících. To by bylo správné jen v případě, že body všech os úhlů jsou na souhlasných stranách všech tří stran trojúhelníku. Vojtěch však v novém vydání vůbec určitě a přesně neurčuje ani smysl stran přímky, ani smysl vzdáleností bodů od přímky. Ve vydání starším považována je ta strana přímky za kladnou, na níž leží počátek O. Pak by uvedené rovnice os vnitřních úhlů trojúhelníku byly správné jen v případě, že počátek O leží uvnitř trojúhelníku. Ale to není poznamenáno ani ve vydání starším. Další doklad nesprávného řešení os vnitřních úhlů trojúhelníku nalezl jsem ve vědecké dvojdílné učebnici analytické geometrie od prof. Cranze, která je částí díla: „Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exacten Natur-Wissenschaften", díl I, str. 65, úloha 78. Cranz počítá osy vnitřních úhlů stejně jako Vojtěch. Uvádí však v příslušném odstavci pravidlo, že se normální rovnice ramen toho úhlu od sebe odečítají, v němž leží počátek O. Ale v příkladě uvádí trojúhelník, v němž počátek O neleží. Leží totiž velmi blízko jedné strany vně trojúhelníku.

Proto dvě rovnice autorem uváděné jako rovnice os vnitřních úhlů jsou ve skutečnosti rovnice os úhlů vnějších. Stává se tedy řešení os úhlů trojúhelníku zakládající se na rozlišování smyslu stran přímky podle polohy počátku O bez přesného obrazce snadno nesprávným a mimo to je vždy i neúplné, nepodávajíc návrhu, jak řešiti úlohu, prochází-li rameno úhlu počátkem.

A přece nevyžaduje řešení této úlohy žádných nových předpokladů. *Stačí úplně určiti pořadí ramen úhlů trojúhelníku a počítati jejich osy jako osu úhlu dvou přímek.* Ukáži to na příkladě trojúhelníku ABC daného rovnicemi stran a, b, c ve tvaru obecném

$$12x - 5y + 60 = 0, \quad 4x + 3y - 36 = 0, \quad 4x - 3y = 0.$$

Předně určíme směrnice stran trojúhelníku a z nich pořadí jejich odchylek podle velikosti. Směrnice stran jsou $\frac{12}{5}$, $-\frac{4}{3}$, $\frac{4}{3}$, z nichž poznáváme, že nejmenší odchylku má strana c, větší strana a, největší strana b. Označíme proto stranu c značkou s_1, stranu a značkou s_2 a stranu b značkou s_3. Vnitřní úhly trojúhelníku jsou vždy $\widehat{s_1s_2}, \widehat{s_2s_3}, \widehat{s_3s_1}$. Jsou tedy vnitřní úhly trojúhelníku $\alpha = \widehat{bc}$, $\beta = \widehat{ca}$ a $\gamma = \widehat{ab}$.

Podle vzorce pro výpočet úhlu dvou přímek obdržíme dále

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}} = -\frac{24}{7} \text{ a } \alpha = 106^0\, 15'\, 37'',$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{12}{5} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{12}{5} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{16}{63} \text{ a } \beta = 14^0\, 15',$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{12}{5}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{12}{5}} = \frac{56}{33} \text{ a } \gamma = 59^0\, 29'\, 23''.$$

Vnější úhly jsou dány pořadím ramen $\widehat{s_1s_3}, \widehat{s_3s_2}$ a $\widehat{s_2s_1}$. Jest tedy možno je též přímo vypočítati. Poněvadž se v příslušných vzorcích změní pouze pořadí směrnic v čitateli zlomku, jsou úhly vnější výplňky úhlů vypočtených.

Přistupme nyní k výpočtu rovnic os vnitřních úhlů u_α, u_β a u_γ. Úhel α má pořadí ramen $\widehat{bc}$. Strana b má odchylku tupou, c ostrou. Myslíme-li si v počátku přímky k nim rovnoběžné, vidíme, že v tomto úhlu není osa y a proto jest rovnice stran sečítati. Úhel β je dán pořadím ramen $\widehat{ca}$. Obě strany mají odchylky ostré, a to strana c menší než a. V tomto úhlu myšleném opět v počátku není obsažena osa y a proto jest rovnice stran opět sečítati. Úhel γ má pořadí ramen $\widehat{ab}$. Odchylka strany a je ostrá, strany b tupá. V tomto úhlu přeneseném do počátku jest osa y a proto jest rovnice stran odečítati. Převedeme tedy rovnice stran na normální tvar a podle předepsaného postupu obdržíme pro osy u_α, u_β a u_γ rovnice

$$\tfrac{1}{5}(4x + 3y - 36) - \tfrac{1}{5}(4x - 3y) = 0 \text{ čili } y - 6 = 0,$$

$$-\tfrac{1}{13}(12x - 5y + 60) - \tfrac{1}{5}(4x - 3y) = 0 \text{ čili } 28x - 16y + 75 = 0,$$

$$-\tfrac{1}{13}(12x - 5y + 60) - \tfrac{1}{5}(4x + 3y - 36) = 0 \text{ čili } 8x + y - 12 = 0.$$

Určíme nyní rovnice os úhlů vnějších. Úhel α' má pořadí ramen $\widehat{cb}$. Strana c má odchylku ostrou, b tupou. V tomto úhlu přeneseném do počátku jest osa y a proto jest rovnice stran odečítati. Úhel β' má pořadí ramen $\widehat{ac}$. Obě odchylky stran jsou ostré, ale odchylka strany a je větší. V tomto úhlu jest osa y a proto jest rovnice stran odečítati. Úhel γ' má pořadí ramen $\widehat{ba}$. Odchylka strany b je tupá, strany a ostrá. V tomto úhlu není osa y a proto je rovnice stran sečítati. Podle tohoto postupu obdržíme rovnice os u'_α, u'_β a u'_γ ve tvaru

$$2x - 9 = 0, \quad 4x + 7y + 150 = 0, \quad x - 8y + 96 = 0.$$

Že jsou to skutečně osy úhlů vnějších, dokážeme tím, že rovnice u'_α, u'_β a u_γ násobíme postupně čísly 26, 1, — 7 a sečteme. Tím obdržíme výraz totožný s nulou. Pro osy u'_β, u'_γ a u_α jsou na př. příslušná čísla 1, — 4, — 39 a pro osy u'_α, u'_γ, u_β čísla 13, 2, — 1. Totéž lze dokázati pro vypočtené rovnice os úhlů vnitřních, násobíme-li je postupně čísly — 39, — 2, 7. Tím je dokázáno, že osy vnitřních úhlů procházejí jedním bodem a podobně i dvě osy úhlů vnějších a osa protějšího vnitřního.

*

Na konec poznamenávám, že i nynější učebnice analytické geometrie, užívané na německých středních školách v naší republice, mají tytéž nedostatky po stránce metodické i věcné, které jim byly vytýkány německými profesory odborníky dávno před světovou válkou. Jsou to tři učebnice, jejichž autoři jsou: Franz Schiffner, Močnik (zpracoval J. Spielmann) a R. Suppantschitsch.

Základní úlohy řeší autoři většinou metodou planimetrickou nebo trigonometrickou z obrazců zvláštních, pravidelně jednoduchých poloh jako naše učebnice. Zvláště Schiffnerovo řešení obsahu trojúhelníku není přímé ani analytické. Z obsahu trojúhelníku odvozuje pak rovnici přímky jdoucí počátkem! Smysl přímky Schif. vůbec neuvádí. Jen při odvození délky úsečky praví: „Směr úsečky nejlépe se udá úhlem, který tvoří s kladným směrem osy x.“ Udává jej směrnicí úsečky. Ta určuje však odchylku přímky, v níž úsečka leží, a nikoli směr. Výsledek jeho příkladu není také podle obrazce správný. Praví: „Úsečka P_1P_2 má směrnici — 2·916, což odpovídá asi úhlu 109°.“ Ale tento úhel přísluší úsečce P_2P_1, kdežto úsečce P_1P_2 přísluší úhel 289°. Tuto výtku nerozlišování úseček AB a BA lze učiniti všem třem autorům na několika místech.

Moč.-Spiel. volí za kladný ten smysl přímky, do něhož přejde kladná poloosa x při kladném otočení kolem průsečíku svého s přímkou o úhel dutý. Ale smysl normály s počátku O na přímku spuštěné volí vždy kladný a odchylku její od osy x v mezích od 0° do 360°. Tedy není tu důslednosti. Supp. první zavádí pojem usměrněné (orientované) přímky. Nazývá ji „gerichtete Grade" a praví: „Není-li výslovně žádáno něco jiného, budiž přiznán každé přímce, která není rovnoběžna s osou x, onen smysl, v němž se vzdaluje bod přímky na kladné straně osy x od této osy."

Volí tedy oba autoři kladný smysl přímky shodně jako autor tohoto pojednání, ale nijak volbu svoji neodůvodňují a také ji důsledně ani sami ve všech případech nezachovávají. Supp. volí na př. pro normálu ku přímce za kladný smysl ten, do něhož přejde kladný smysl přímky při otočení o 90° v kladném smyslu. Pak ale kladný smysl normály ku přímce, jejíž odchylka $\alpha > R$, míří dolů!

O smyslu přímky rovnoběžné s osou x se autor nezmiňuje. Úhel dvou přímek řeší Sch. a Moč. podle obrazce na základě poučky o vnějším úhlu trojúhelníku, kdežto Supp. počítá úhel přímek, jdoucích počátkem O rovnoběžně s přímkami danými. Sch. počítá z obrazce jen úhel ostrý $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$, kde $\alpha_2 > \alpha_1$. To však není vždy úhel ostrý! Moč. a Supp. počítají úhel kladných smyslů obou přímek, pro nějž zavádí Supp. vzorec zbytečně komplikovaný ve tvaru $\operatorname{tg} \vartheta = \varepsilon \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, kde značí $\varepsilon = \pm 1$ podle toho, je-li $\alpha_2 \gtrless \alpha_1$. To je zbytečné, položíme-li vždy v menšenci čitatele směrnici přímky více odchýlené.

Úhly trojúhelníku řeší jedině Supp., ale jen ve zvláštním příkladu, v němž jsou dány vrcholy A (4, 5), B (— 1, 3) a C (3, — 6). Podle jeho orientace přímek mají strany trojúhelníku smysl daný pořadím vrcholů CB, BA, CA. Bod, pohybující se po obvodu trojúhelníku stále ve směru orientovaných stran, může při B pokračovati ve svém pohybu na obvodě. U tohoto bodu je tedy úhel vnější. Podobně se rozhodne i bez obrazce u všech trojúhelníků. Tak řeší autor tuto úlohu bez bližšího odůvodnění svého postupu. Kromě toho vyžaduje tento postup, aby byly známy souřadnice vrcholů, čímž se úloha při daných rovnicích stran trojúhelníku zbytečně ztěžuje.

Smysl stran přímky a smysl vzdáleností bodů od přímky volí každý z autorů jinak. Sch. volí za kladnou stranu tu, na níž leží počátek O. Moč. volí vzdálenost bodu od přímky za kladnou, shoduje-li se se smyslem normály ku přímce s počátku O na ni spuštěné. Je s podivením, že se při tomto způsobu všeobecně přehlíží, že se vlastně touto volbou smyslu počítá vzdálenost přímky od bodu a nikoliv bodu od přímky, jak všichni autoři ji jmenují. Označíme-li bod B a patu kolmice z něho na přímku spuštěné P, je přece vzdálenost *bodu od přímky* úsečka PB, a nikoli BP! Moč. volí pro body ležící na téže straně jako počátek O smysl vzdálenosti BP, ale pro body na druhé straně klade $-BP$, tedy vlastně PB. Ale toto PB je stejnosměrné s BP na druhé straně přímky, jak je z obrazce patrno. Mají tedy body na obou stranách přímky *podle obrazce* smysl vzdálenosti stejný, ačkoliv početně podle vzorce vychází správně různý.

Supp. volí tu stranu přímky za kladnou, na níž leží trojúhelníky kladného obsahu. Při tom předpokládá, že první strana trojúhelníku má orientaci jako přímka. Tak přichází k tomu, že levou stranu orientované přímky jest pokládati za kladnou a pravou za zápornou. Stejný smysl volí i pro vzdálenosti bodů od přímky, kterou udává správně podle našeho označení PB. Tato volba smyslu stran přímky není však logicky správně odůvodněna, neboť trojúhelník může míti obsah kladný nebo záporný bez ohledu na to, leží-li na té či oné straně přímky. To záleží pouze na pořadí jeho vrcholů. Smysl obsahu je tedy dán již pořadím prvních dvou vrcholů v jedné straně. Volí-li se tedy první strana v kladném smyslu orientované přímky, jsou na její levé straně trojúhelníky kladné. Ale tato kladnost jest *následkem* souhlasné volby orientace první strany trojúhelníku a přímky a nikoli *důvodem* pro kladnost levé strany přímky. Smysl obsahu trojúhelníku není tedy vhodným kriteriem pro rozhodování o smyslu stran přímky, poněvadž kterákoli strana přímky může se na tomto základě voliti za kladnou nebo zápornou. To záleží pak jen na orientaci přímky.

Normální rovnici přímky volí Sch. i Moč. ve tvaru jako naše učebnice. Supp. však odvozuje normální tvar z obecného tvaru $Ax + By + C = 0$ tím, že dělí rovnici výrazem $\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}$, kde $\varepsilon = \pm 1$ podle toho, je-li $A \lesseqgtr 0$. Tím obdržíme normální rovnici ve tvaru

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha + d = 0.$$

Význam veličiny d vysvětluje až v odstavci jednajícím o vzdálenosti bodu od přímky. Jest tedy znaménko prvního členu vždy záporné.

Pro vzdálenost bodu od přímky užívá Sch. i Moč. známého vzorce Hesseova, Supp. svého normálního tvaru rovnice. Učiňme zkoušku tohoto vzorce, abychom ukázali nedůslednost v užívání smyslu přímek. Rovnice přímek přetínajících I. až IV. čtvrt buďtež ve tvaru

$$3x + 4y - 12 = 0, \tag{1}$$