Obsah. — Somaire.

Minor prvku x je $\sin\beta \sin\gamma \sin(\gamma - \beta)$, a podobně ostatní. Tím přejde rovnice přímky v

$$x\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha} + y\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta} + z\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = 0$$

nebo

$$x\frac{b^2-c^2}{a^2} + y\frac{c^2-a^2}{b^2} + z\frac{a^2-b^2}{c^2} = 0.$$

Tato přímka jde Lemoineovým bodem $a^2 : b^2 : c^2$, bodem $a^4 : b^4 : c^4$, i středem opsaného kruhu, neboť se rovnice splní také pro bod $\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma$. Tomuto středu odpovídající φ plyne srovnáním souřadnic z rovnic

$$\cos(\varphi-\alpha) = \pm\cos\alpha,\ \cos(\varphi-\beta) = \pm\cos\beta,$$
$$\cos(\varphi-\gamma) = \pm\cos\gamma$$

a splní se pro $\varphi = 0^0$ a 180^0.

Další zájem mohou mít hodnoty φ, pro které přejde šestiúhelník v pětiúhelník. Neboť pak musí na př. $A_1 \equiv C_2$, tedy

$$r\xi\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} + a\,\xi\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} = b,$$

$$\text{nebo } \xi\sin\varphi\left[\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha\sin\beta)} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\beta}\right] = 1$$

a podle str. 110

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\gamma + 2\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\varphi,$$

tedy $\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}\varphi$, $\varphi = \beta$. Podobně bude $\varphi = \alpha$, $\varphi = \gamma$ při $B_1 \equiv A_2$, $C_1 \equiv B_2$.

Opíšeme-li zase kružnici trojúhelníku CC_1C_2 a čtyřúhelníku C_1C_2AB, obdržíme pro vzdálenosti d_c resp. d'_c středů od $\overline{C_1C_2}$

$$d_c = r\,\xi\sin\varphi\operatorname{cotg}\gamma, \qquad d'_c = r\,\xi\sin\varphi(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma).$$

Zase je tedy $S_cS'_c = d_c + d'_c = r$,

$$d'_c - d_a - d_b = r\,\xi\cos\varphi$$

nezávisle na zvolené straně, tedy pro všecky tři páry stejně.

Pro poloměry máme: $r_c^2 = r^2\,\xi_1^2\sin^2\varphi\operatorname{cosec}^2\gamma$,

$$r'_c = r^2\xi^2\sin^2\varphi\,[1 + (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + + \operatorname{cotg}\varphi)^2].$$

Odtud pak

$$r'^2 - r_c^2 = r^2\xi^2\sin^2\varphi\,[1 + (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\varphi)^2 - \operatorname{cosec}^2\gamma]$$
$$= r^2\xi^2\sin^2\varphi\,[(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\varphi)^2 - \operatorname{cotg}^2\gamma]$$
$$= r^2\xi\sin\varphi\,[\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{cotg}\gamma].$$

Když sečteme cyklicky tvořené výrazy, bude

$$r'^2_a + r'^2_b + r'^2_c - r_a^2 - r_b^2 - r_c^2 =$$
$$= r^2 \xi \sin\varphi\,[\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma + 3\operatorname{cotg}\varphi] = r^2\,(1 + 2\xi\cos\varphi).$$

Ježto je $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ tětivový šestiúhelník, leží průseky protějších stran, na př. C_1C_2 a B_1B_2 na Pascalově přímce.

Určíme ji z dělicího poměru bodu F vzhledem na A a B. Je totiž

$$\frac{FA}{FB} = AC_2\,\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} : BC_1\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} =$$
$$= \xi b\,\frac{\sin(\alpha+\varphi)\sin\beta}{\sin\alpha} : \xi a\,\frac{\sin(\beta+\varphi)\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{b^3\sin(\alpha+\varphi)}{a^3\sin(\beta+\varphi)}.$$

Když provedeme tuto úvahu pro stopu na straně BC, bude rovnice hledané přímky

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ -\dfrac{a^3}{\sin(\alpha+\varphi)}, & \dfrac{b^3}{\sin(\beta+\varphi)}, & 0 \\ 0, & -\dfrac{b^3}{\sin(\beta+\varphi)}, & \dfrac{c^3}{\sin(\gamma+\varphi)} \end{vmatrix} = 0$$

nebo

$$\frac{x}{a^3}\sin(\alpha+\varphi) + \frac{y}{b^3}\sin(\beta+\varphi) + \frac{z}{c^3}\sin(\gamma+\varphi) = 0.$$

Když rozvineme siny, vznikne rovnice

$$\frac{x}{a^3}\sin\alpha + \frac{y}{b^3}\sin\beta + \frac{z}{c^3}\sin\gamma +$$
$$+ \operatorname{tg}\varphi\left[\frac{x}{a^3}\cos\alpha + \frac{y}{b^3}\cos\beta + \frac{z}{c^3}\cos\gamma\right] = 0.$$

patří tedy uvažovaná přímka svazku určenému Lemoineovou přímkou

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} = 0 \text{ a přímkou } \frac{x}{a^3}\cos\alpha + \frac{y}{b^3}\cos\beta + \frac{z}{c^3}\cos\gamma = 0.$$

Tato je přímka stop antiparalel Lemoineovým bodem vedených, na stranách základního trojúhelníku.

Průsek obou přímek je

$$a^3\sin(\beta-\gamma) : b^3\sin(\gamma-\alpha) : c^3\sin(\alpha-\beta),$$

tedy trilineární pól geometrického místa středů kruhů opsaných šestiúhelníkům.