ČÍSLO 1. ROČNÍK LX.

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY.

REDIGUJE

BOHUMIL BYDŽOVSKÝ,

při redakci spolupůsobí

KAREL PETR, FRANTIŠEK ZÁVIŠKA, AUGUST ŽÁČEK, JAROSLAV FRIEDRICH.

VYDÁVÁ

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ZA PODPORY MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY.

V PRAZE.
TISKEM A NÁKLADEM VLASTNÍM.
1930.

Předplatné Kč 60—.

Obsah. — Sommaire.

Upozornění pp. přispivatelům. Příspěvky literární, jakož i zprávy týkající se obsahu »Časopisu« přijímají redaktoři: **B. Bydžovský**, Praha II, U Karlova 3 (články geometrické); **K. Petr**, Praha II, U Karlova 3 (články z ostatních oborů ryzí matematiky); **F. Záviška**, Praha II, U Karlova 3 (články z teoretické fysiky a příbuzných oborů matematiky aplikované); **A. Žáček**, Praha II, U Karlova 5 (články z fysiky experimentální); **J. Friedrich**, Praha I, Dušní 4 (didakticko-metodická příloha).

Příspěvky literární pro »Rozhledy« přijímá redaktor dr. **Jan Schuster**, profesor reálky, Praha II, Ječná 26.

Přesahují-li příspěvky dva tiskové archy, jest třeba k jejich otištění schválení výboru. Recense knih cizojazyčných buďtež stručné (ne přes 1 tiskovou stránku). Ke každému článku budiž připojen stručný výtah, pokud možno v jazyce francouzském. Přeje-li si autor písemné zprávy od redakce, nechť **přiloží známku na odpověď.**

Rukopis budiž psán čitelně, pokud lze strojem, po jedné straně a náležitě upraven k tisku; řecká písmena buďtež psána červeně neb aspoň červeně podtržena. Slova, jež mají býti vytištěna **tučně**, dlužno podtrhnouti úsečkou — *kursivou*, vlnitě — prostrkaná, čárkovaně. Neobvyklé značky, cizí písmena, odlišné vyznačování typografické úpravy a pod. je nutno na začátku rukopisu vysvětliti. Funkční znaky se tisknou písmem obyčejným, argumenty kursivou. Pravopis řídí se zásadami obsaženými v »Pravidlech českého pravopisu«. Obrazce schopné reprodukce buďtež nakresleny ve zvětšení dvojnásobném, jinak se zhotoví neb opraví na náklad autorův. Autorské korektury připisují se autorům k tíži. Rukopisy článků nepřijatých do tisku se nevracejí. Korektury (autorům se posílá **jen** korektura **sloupcová**) buďtež vráceny co nejdříve. Autoři se snažně žádají, aby **korekturu** prováděli **co nejpečlivěji.** Za obsah článku odpovídá jeho autor.

Každý autor vědeckého **článku** obdrží bezplatně **25 separátů** svého článku (vyjímaje články referující). Přeje-li si autor větší počet separátů než uvedených 25, musí je objednati zvláště tím, že objednávku napíše zřetelně na sloupcovou korekturu svého článku. Ceny za každých dalších 25 separátů: ¼ archu 8 Kč, ½ archu 16 Kč, ¾ archu 24 Kč, 1 archu 32 Kč.

Toto číslo vyšlo dne 31. října 1930.

Příští číslo vyjde 10. prosince 1930.

O větě Newton-Sylvestrově pro separaci kořenů rovnic algebraických.

Napsal K. Petr.

(Došlo 15. srpna 1930.)

V Časopise pro pěst. math. a fysiky, r. 36 (1907), str. 49, podal jsem důkaz věty Descartesovy a Budanovy úplnou indukcí. Této metody lze použíti i při větě Newtonově, kterou však teprve Sylvester dokázal (Philosophical magazine, IV. serie, sv. 31, r. 1866, str. 214). I zde lze docíliti podstatného zjednodušení při důkaze věty, jež vyplývá bez jakéhokoli omezení. Konečně podávám v následujícím rozšíření věty Newton-Sylvestrovy pro funkce analytické a jakožto použití tohoto rozšíření poukazuji na jedno zjednodušení věty N.-S. při rovnicích algebraických.

I.

Budiž dána rovnice stupně n-tého, kde

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, x + a_n, \qquad a_0 \neq 0.$$

Koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou vesměs čísla reálná. Věta Budanova (Budan-Fourierova) užívá k stanovení počtu kořenů položených mezi a, b počtů změn znaménkových, které vznikají v řadě ($f'(x)$ jest prvá, $f''(x)$ druhá derivace výrazu $f(x)$, atd.)

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x),\ f^{(n)}(x),$$

když tam dosadíme za x jednou a a po druhé b. Věta Newton-Sylvestrova užívá dvojité řady

$$\begin{array}{l} f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots, f^{(n)}(x) \\ \mathfrak{A}_0(x),\ \mathfrak{A}_1(x),\ \mathfrak{A}_2(x), \ldots, \mathfrak{A}_n(x), \end{array} \tag{A}$$

kde pro $k > 0$

$$\mathfrak{A}_k(x) = [f^{(k)}(x)]^2 - c_k^{(n)}\, f^{(k-1)}(x)\, f^{(k+1)}(x), \quad \mathfrak{A}_0(x) = f^2(x).$$

I tato věta počítá změny znaménkové v první z obou řad (A), avšak bere je v úvahu pouze tenkrát, když na příslušném místě v druhé řadě jest sled znaménkový. Při tom jsou $c_k^{(n)}$ vhodně volené numerické koeficienty, závislé jednak na stupni dané rovnice, jednak na indexu k.

Budeme se nejprve zabývati otázkou, jak jest třeba voliti tyto součinitele, abychom snadno mohli použíti úplné indukce při důkaze věty Newt.-Sylv. Důkaz věty se totiž provádí tak, že věta se předpokládá pro rovnici $f'(x) = 0$ a dokáže se pro rovnici $f(x) = 0$. Pro rovnici $f'(x) = 0$ se dvojřada (A) redukuje na

$$\begin{matrix} f'(x), & f''(x), & f'''(x), & \ldots, & f^{(n)}(x), \\ \overline{\mathfrak{A}}_0(x), & \overline{\mathfrak{A}}_1(x), & \overline{\mathfrak{A}}_2(x), & \ldots, & \overline{\mathfrak{A}}_{n-1}(x), \end{matrix} \qquad (\overline{\mathrm{A}})$$

kde $\overline{\mathfrak{A}}_0(x) = f'^2(x)$ a pro $k > 1$

$$\overline{\mathfrak{A}}_{k-1}(x) = [f^{(k)}(x)]^2 - c_{k-1}^{(n-1)} f^{(k-1)}(x) \, f^{(k+1)}(x).$$

Budeme požadovati, aby

$$c_{k-1}^{(n-1)} = c^{k(n)}, \qquad (1)$$

čímž docílíme, že $\overline{\mathfrak{A}}_{k-1}(x) = \mathfrak{A}_k(x)$ a dvojřady (A), $(\overline{\mathrm{A}})$ se budou úplně shodovati v posledních $(n-1)$ členech. Vztah (1) má za následek, že $c_k^{(n)}$ jest závislo pouze na rozdílu $n-k$ a my položíme

$$c_k^{(n)} = c_{n-k}.$$

Avšak ještě jednu podmínku pro numerické součinitele jest třeba zavésti, jež nás do jisté míry bude orientovat o změně znamének při $\mathfrak{A}_k(x)$. Pro derivaci funkce $\mathfrak{A}_k(x)$ jest

$$\mathfrak{A}'_k(x) = (2 - c_{n-k}) \, f^{(k)}(x) \, f^{(k+1)}(x) - c_{n-k} \, f^{(k-1)}(x) \, f^{(k+2)}(x),$$

tedy

$$f^{(k+1)}(x) \, \mathfrak{A}'_k(x) = (2 - c_{n-k}) \, \mathfrak{A}_{k+1}(x) \, f^{(k)}(x) +$$
$$+ [(2 - c_{n-k}) \, c_{n-k-1} \, f^{(k)2}(x) - c_{n-k} \, f^{(k-1)}(x) \, f^{(k+1)}(x)] \, f^{(k+2)}(x).$$

Volíme c_i tak, aby hranatá závorka na pravé straně byla pro všecka x a všecka $f(x)$ úměrna výrazu $\mathfrak{A}_k(x)$; k tomu jest nutno a postačitelno, aby

$$(2 - c_{n-k}) \, c_{n-k-1} = 1. \qquad (2)$$

Pak jest

$$f^{(k+1)}(x) \, \mathfrak{A}'_k(x) = (2 - c_{n-k}) \, \mathfrak{A}_{k+1}(x) \, f^{(k)}(x) + \mathfrak{A}_k(x) \, f^{(k+2)}(x). \qquad (3)$$

Z tohoto vztahu vyplývá následující důsledek: Budiž $x = \alpha$ nulový bod výrazu $\mathfrak{A}_k(x)$; dále $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$, $f^{(k+1)}(\alpha) \neq 0$. Potom, když x prochází hodnotou α rostouc, podíl $\mathfrak{A}_k(x)/\mathfrak{A}_{k+1}(x)$ jde od hodnot, jejichž znaménko jest

$$- \operatorname{sign} f^{(k)}(\alpha) \, f^{(k+1)}(\alpha),$$

k hodnotám znaménka protivného. Neboť podíl $\mathfrak{A}_k(x)/\mathfrak{A}'_k(x)$ jde od hodnot záporných ke kladným.

Rovnice (2) nám umožňuje vypočísti všecka c_i, je-li známo c_1. Aby věta Newton-Sylvestrova byla platna pro rovnice stupně 2, jest třeba voliti, jak seznáme, c_1 tak, aby $0 \leqq c_1 \leqq 2$; při hodnotě

2 dává věta ta výsledky přesné pro počet kořenů rovnice stupně druhého. Hodnota 0 pro c_1 jest na základě (2) nepřípustna. Volíme-li $c_1 = 2$, dostáváme ze (2)

$$(2 - c_2)\, c_1 = 1,\ c_2 = \tfrac{3}{2},\ \text{obdobně}\quad c_3 = \tfrac{4}{3}, \ldots, c_i = \frac{i+1}{i}; \qquad (4)$$

Volíme-li $c_1 = 2 - \varepsilon$, kde $0 < \varepsilon < 2$, máme stejně

$$c_2 = \frac{3 - 2\varepsilon}{2 - \varepsilon},\quad c_3 = \frac{4 - 3\varepsilon}{3 - 2\varepsilon}, \ldots, c_i = \frac{i + 1 - i\varepsilon}{i - (i-1)\,\varepsilon} \qquad (4')$$

Hodnoty (4), (4′) jsou v následujícím obojí přípustné, pokud jsou čísla kladná. Tomu bude vyhověno při každém n, požadujeme-li ještě pro ε podmínku $\varepsilon \leqq 1$.

Konečně jest třeba ještě rozhodnouti, zda výrazy $\mathfrak{A}_k(x)$ mohou býti rovny identicky nule. Snadnou úvahou vyplývá, že, má-li býti $\mathfrak{A}_k(x) = 0$ identicky, k tomu jest nutno, aby $f^{(k-1)}(x)$ bylo tvaru

$$f^{(k-1)}(x) = d(x - s)^{n-k+1};\quad d,\ s \text{ konstanty.}$$

Pak jest

$$\mathfrak{A}_k(x) = d^2(x - s)^{2n-2k}[(n - k + 1)^2 - c_{n-k}(n - k + 1)(n-k)]$$

Výraz tento jest rovný nule vskutku, volíme-li pro c_i hodnoty (4); volíme-li však (4′), pak

$$\mathfrak{A}_k(x) = \frac{d^2\,(n - k + 1)\,\varepsilon}{n - k - (n - k - 1)\,\varepsilon}\,(x - s)^{2n-2k},$$

což jest výraz, který není identicky rovný nule; jest rovný nule jenom pro tu hodnotu, pro kterou i $f^{(k)}(x)$ jest rovno nule; jinak jest stále kladný. Na základě této okolnosti *budeme výrazům $\mathfrak{A}_k(x)$, když identicky vymizí, přisuzovati hodnoty kladné pro všecka x různá od nulového bodu výrazu $f^{(k)}(x)$.*

II.

Uvedu nyní větu Newton-Sylvestrovu v předběžném znění. Buďtež a, b dvě hodnoty, pro které žádný z výrazů $f(x)$, $f^{(k)}(x)$, $\mathfrak{A}_0(x)$, $\mathfrak{A}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ není rovný nule (ledaže by některá z $\mathfrak{A}_k(x)$ byla rovna identicky nule, pak ta $\mathfrak{A}_k(a)$, $\mathfrak{A}_k(b)$ pokládáme za čísla kladná). Budiž p_a počet změn znaménkových v řadě prvé z řad (A), když za x dosadíme a; při tom však jenom takové změny znaménkové bereme v úvahu, jimž v druhé řadě jest přiřazen sled při $x = a$. Obdobný význam nechť má p_b. Pak věta Newton-Sylvestrova zní: *Počet kořenů rovnice $f(x) = 0$ položených mezi a, b, kde $a < b$, jest buď rovný $p_a - p_b$ aneb jest o sudý počet menší.*

Abychom větu tu dokázali, uvažujme nejprve počet změn znaménkových v prvé řadě (A) pro $x = a$, jimž v druhé řadě — rovněž pro $x = a$ — jest přiřazena změna znaménková. Tento počet označíme q_a. Nejprve lze tvrditi q_a jest číslo sudé. Neboť $\mathfrak{A}_0(a) > 0$, $\mathfrak{A}_n(a) > 0$ a lze tedy druhou řadu z (A), když do ní dosadíme $x = a$, rozložiti na několik oddílů tak, že prvý člen i poslední člen jeho má znaménko $+$. Ku př. kdyby $n = 7$ a měli bychom v druhé řadě tato znaménka pro $x = a$

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad +,$$

rozdělili bychom druhou řadu na tyto tři oddíly

$$\mathfrak{A}_0(a),\ \mathfrak{A}_1(a),\ \mathfrak{A}_2(a);\ \mathfrak{A}_2(a),\ \mathfrak{A}_3(a),\ \mathfrak{A}_4(a),\ \mathfrak{A}_5(a);\ \mathfrak{A}_5(a),\ \mathfrak{A}_6(a),\ \mathfrak{A}_7(a).$$

Uvažujeme-li druhý oddíl s příslušnými $f^{(k)}(a)$, máme dvojřadu

$$\begin{matrix} f''(a), & f'''(a), & f^{(4)}(a), & f^{(5)}(a) \\ \mathfrak{A}_2(a), & \mathfrak{A}_3(a), & \mathfrak{A}_4(a), & \mathfrak{A}_5(a). \end{matrix} \qquad (+)$$

Poněvadž $\mathfrak{A}_3(a)$ podle předpokladu jest záporné a $\mathfrak{A}_3(a) = f'''^2(a) - c_4 f''(a) f^{(4)}(a)$, mají $f''(a)$, $f^{(4)}(a)$ stejné znaménko; jelikož $\mathfrak{A}_4(a) < 0$, mají $f'''(a)$ a $f^{(5)}(a)$ stejné znaménko. Poskytuje tudíž prvá řádka v $(+)$ buď samé změny znaménkové aneb samé sledy. Jest tudíž příspěvek druhého oddílu k číslu q_a buď 2 aneb 0. A tak jest tomu v každém takovém oddílu, kde na kraji mají $\mathfrak{A}_k(a)$ znaménka $+$, uvnitř vesměs $-$.

Jest tedy vskutku q_a (a obdobně i q_b) číslo sudé. Z toho následuje, že $p_a - p_b$ se lišiti může od počtu kořenů rovnice $f(x) = 0$ pouze o číslo sudé (neboť $p_a + q_a - (p_b + q_b)$ se liší od počtu kořenů rovněž o číslo sudé; následuje to z věty pravící, že, jsou-li $f(a)$, $f(b)$ znaménka protivného, počet kořenů mezi a, b jest lichý atd.).

Věta Newton-Sylvestrova jest platna, jak snadno lze se přesvědčiti pro případ, že $f(x) = a_0(x - s)^n$, jakož i pro $n = 2$, jak čtenář snadným počtem dokáže. Budeme předpokládati, že věta jest dokázána pro případ, že stupeň rovnice jest menší než n a dokážeme ji pro rovnici stupně n-tého.

Počet změn znaménkových v prvé z řad $(\bar{A})$ při $x = a$, jimž přísluší ve druhé z řad $(\bar{A})$ rovněž pro $x = a$ sledy znaménkové, označíme p'_a. Budeme vyšetřovati rozdíl $p_a - p'_a$. Jestliže sign $f(a) =$ sign $f'(a)$, jest vždy $p_a - p'_a = 0$. Patrno to jest, když $\mathfrak{A}_1(a) > 0$. Avšak i když $\mathfrak{A}_1(a) < 0$, jest $p_a - p'_a = 0$, neboť pak i sign $f''(a) =$ sign $f(a)$ a znaménka tří počátečních členů jsou v řadách (A)

$$\begin{matrix} \varepsilon, & \varepsilon, & \varepsilon, \\ +, & -, & \eta; \end{matrix} \qquad \varepsilon = \pm 1, \ \eta = \pm 1$$

v řadách $(\bar{A})$ jsou znaménka dvou počátečních členů

$$\begin{matrix} \varepsilon, & \varepsilon, \\ +, & \eta. \end{matrix}$$

Jelikož pak ostatní členové v řadě (A) se shodují s ostatními členy v řadách $(\bar{A})$, jest rovnost $p_a - p'_a = 0$ pro tento případ patrna.

Zbývá vyšetřiti případ sign $f'(a) = -$ sign $f(a)$. Tu jsou dvě možnosti:

I) sign $\mathfrak{A}_1(a) = +1$ (sign $\bar{\mathfrak{A}}_1(a)$ jest vždy při $f'(a) \neq 0$ rovno $+1$). Tu jest $p_a - p'_a = 1$, jakož bezprostředně patrno.

II*a*) sign $\mathfrak{A}_1(a) = -1$, sign $\mathfrak{A}_2(a) = +1$. Tu tři, resp. dva počáteční členové řad (A) resp. $(\bar{A})$ mají tato znaménka

$$(A)\begin{cases} \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon \\ 1 & -1, & 1 \end{cases}, \qquad (\bar{A})\begin{cases} -\varepsilon, & \varepsilon \\ 1, & 1 \end{cases}$$

I jest $p_a - p'_a = -1$.

II*b*) sign $\mathfrak{A}_1(a) = -1$, sign $\mathfrak{A}_2(a) = -1$.

V tomto případě máme tato znaménka na počátku řad (A) resp. $(\bar{A})$

$$(A)\begin{cases} \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon \\ 1, & -1, & -1 \end{cases}, \qquad (\bar{A})\begin{cases} -\varepsilon, & \varepsilon \\ 1, & -1 \end{cases}.$$

Tu máme $p_a - p'_a = +1$.

Tím vyšetřeny všechny možné vztahy mezi p_a a p'_a, při čemž mlčky předpokládáno, že v (A) a $(\bar{A})$ jsou voleni titíž numeričtí součinitelé c_i.

Vedle předpokladu pro a, b na počátku II. odst. učiněného zavedu prozatím ještě tento předpoklad: Mezi a a b leží toliko jediná hodnota c, pro kterou jeden nebo i více výrazů z $f(x)$, $f^{(k)}(x)$, $\mathfrak{A}^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ jsou rovny nule. Dokáži pak větu Newton-Sylvestrovu pro takový interval (a, b) a to nejprve v případě, že

a) v (a, b) není nulová hodnota polynomu $f(x)$. Je-li v tomto případě věta *N.-S.* platna, pak $p_a - p_b \geqq 0$. Dejme tomu, že neplatí pro polynom $f(x)$; pak jest $p_a - p_b \leqq -2$ (neboť $p_a - p_b = -1$ býti nemůže, jelikož $p_a - p_b$ a počet kořenů rovnice $f(x)$ mezi a, b jsou čísla stejné parity). Potom ani $f'(x)$ nemůže míti nulový bod v (a, b), neboť, kdyby $f'(x)$ měla nulový bod v (a, b), bylo by $p'_a - p'_b \geqq 1$ podle věty N.-S. předpokládané pro polynomy stupně $n - 1$. Avšak podle úvahy předchozí (týkající se vztahů mezi p_a, p'_a) jest

$$p_a - p_b \geqq p'_a - p'_b - 2, \text{ tedy } p_a - p_b \geqq -1,$$

což odporuje nerovnině $p_a - p_b \leqq -2$. Neplatí-li tedy věta N.-S.

pro $f(x)$ a pro interval (a, b) a nemá-li $f(x)$ v (a, b) nulový bod, nemá jej i $f'(x)$. Současně jest patrno, že $p'_a - p'_b$ nutně jest rovno nule a že zároveň musí, aby nebyla v platnosti věta N.-S. pro $f(x)$ a pro (a, b),

$$p_a - p'_a = -1, \quad p_b - p'_b = +1, \quad p_a - p_b = -2,$$

t. j. v bodě a nastává případ IIa), v bodě b pak buď případ I) aneb IIb). Nastává-li v a případ IIa), v bodě b pak případ I), jsou počáteční tři členové řad (A) těchto znamének

$$\text{v bodě } a \begin{cases} \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon \\ 1, & -1, & 1 \end{cases} \qquad \text{v bodě } b \begin{cases} \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon' \\ 1, & 1, & \eta' \end{cases} .$$

Mění tedy $\mathfrak{A}_1(x)$ v intervalu (a, b) své znaménko a má tedy v (a, b) nulový bod c, kde $a < c < b$. Avšak podle důsledku vyplývajícího z rovnice (3) má býti podíl $\mathfrak{A}_1(x) : \mathfrak{A}_2(x)$ pro x v intervalu $(a, c - 0)$ kladný, ve skutečnosti jest však záporný. Nemůže tedy nastati v bodě a případ IIa), v bodě b pak případ I.

Nastává-li v bodě a případ IIa), v bodě b případ IIb), máme pro znaménka počátečních členů v řadách (A) tyto hodnoty

$$\text{v bodě } a \begin{cases} \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon, & -\varepsilon \\ 1, & -1, & 1, & 1 \end{cases} \qquad \text{v bodě } b \begin{cases} \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon, & -\varepsilon \\ 1, & -1, & -1, & 1 \end{cases}$$

Mohli jsme vypisovati již znaménka čtvrtých členů na základě těchto úvah: Nejprve sign $f'''(b) =$ sign $f'(b)$, neboť sign $\mathfrak{A}_2(b) = -1$. $\mathfrak{A}_2(x)$ mění své znaménko, má tedy v bodě c nulový bod i jest tedy sign $\mathfrak{A}_2(a) : \mathfrak{A}_3(a) = +1$, sign $\mathfrak{A}_2(b) : \mathfrak{A}_3(b) = -1$; konečně $f'''(x)$ není rovno nule v bodě c, neboť pak by bylo rovno tam i $f''(x)$ nule a sign $f''(b) =$ sign $f'''(b)$, tedy sign $f'''(a) =$ sign $f'''(b)$.

Ze znamének vypsaných jest patrno, že $p_a = 1 + p'''_a$, $p_b = 1 + p'''_b$, kde p'''_a, p'''_b jsou čísla obdobná ku p_a, p_b, avšak pro polynom $f'''(x)$ stupně $n - 3$, pro který tedy platí $p'''_a - p'''_b \geqq 0$. I jest tedy $p_a - p_b \geqq 0$ a není tedy $p_a - p_b = -2$. Jest tedy i tento případ nemožný a jest vždy $p_a - p_b \geqq 0$, není-li v (a, b) nulový bod polynomu $f(x)$.

β) V (a, b) budiž nulový bod c polynomu $f(x)$ a to řádu r-tého. Pak má $f'(x)$ nulový bod v c řádu $r - 1$. Můžeme psáti $f(x)$, $f'(x)$, $\mathfrak{A}_1(x)$ v tomto tvaru

$$f(x) = u_0(x - c)^r + u_1(x - c)^{r+1} + \ldots, \quad f'(x) = ru_0(x - c)^{r-1} + \ldots,$$

$$f''(x) = r(r-1)\, u_0(x - c)^{r-2} + \ldots,$$

$$\mathfrak{A}_1(x) = ru_0^2(x - c)^{2r-2} + v_1(x - c)^{2r-1} + \ldots$$

$u_0, u_1, v_1, \ldots$ jsou čísla nezávislá na x; sign u_0 značme ε. Z výrazů napsaných jsou patrna tato počáteční znaménka v řadách (A) pro $x = a$, resp. pro $x = b$

$$\text{v bodě } a\begin{cases}(-1)^r\varepsilon, & (-1)^{r-1}\varepsilon\\ +1, & +1\end{cases} \qquad \text{v bodě } b\begin{cases}\varepsilon, & \varepsilon\\ 1, & 1\end{cases}$$

I jest $p_a = p'_a + 1$, $p_b = p'_b$ a poněvadž podle věty N.-S. platné pro mnohočlen $n-1$ stupně jest $p'_a - p'_b \geqq r - 1$, jest v tomto případě $p_a - p_b \geqq r$; tedy i v tomto případě věta N.-S. dokázána.

Jelikož věta Newton-Sylvestrova jest platna pro součet intervalů (a, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{h-1}, b) — kterýžto součet jest právě interval (a, b) — platí-li pro každý jednotlivý interval, a jelikož každý interval (a, b), o jehož koncových bodech činíme předpoklad na počátku odst. II o a, b učiněný, lze rozložiti v konečný počet intervalů takových, že body, ve kterých mnohočleny $f(x)$, $f^{(k)}(x)$, $\mathfrak{A}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ nabývají hodnoty nulové, nacházejí se uvnitř jednotlivých intervalů a v každém intervalu toliko jediný takový bod, jest patrna věta N.-S. platí pro každý interval (a, b), jehož koncové body jsou v platnosti pouze předpoklad na počátku II. odstavce učiněný.

III.

Věta Newton-Sylvestrova byla dokázána v předcházejícím pro interval (a, b) za předpokladu, že žádná z funkcí $f(x)$, $f^{(k)}(x)$, $\mathfrak{A}_k(x)$; $k = 1, 2, \ldots, n$ není rovna nule ani pro $x = a$, ani pro $x = b$. Chceme-li užíti této věty i v případech, kdy tato podmínka není splněna, nahradíme interval (a, b) intervalem $(a + \delta, b - \delta)$, kde δ jest číslo takové, že v intervalech $(a + 0, a + \delta)$, $(b - \delta, b - 0)$ není položen žádný nulový bod uvedených právě funkcí. Označíme stručně číslo δ, které si můžeme zvoliti libovolně malé, jakožto nekonečně malé. Dosazování ve skutečnosti netřeba prováděti, neboť nám běží pouze o znaménka a ta jsou z předcházejících úvah ihned patrna. Objasním věc na příkladech.

Dejme tomu, že bychom obdrželi pro $x = a$ tyto hodnoty (u hodnot od nuly různých vypisuji jenom znaménka)

i	4	5	6	7	8	9
$f^{(i)}(x)$	+,	0,	0,	0,	0,	—
$\mathfrak{A}_i(x)$	+,	0,	0,	0,	0,	+

(×)

Vypsané hodnoty pro $\mathfrak{A}_4(a)$, $\mathfrak{A}_5(a)$, ..., $\mathfrak{A}_9(a)$ vyplývají jednoznačně z hodnot prvého řádku. Má tudíž $f^{(5)}(x)$ v bodě a nulový bod 4. řádu. Lze ji psáti $f^{(5)}(x) = + b_0(x - a)^4 + b_1(x - a)^5 + \ldots$, kde b_0 jest číslo záporné (neboť $f^{(9)}(x)$ — což jest 4. derivace z $f^{(5)}(x)$ — jest v bodě $x = a$ podle předpokladu záporná). Pro funkce $\mathfrak{A}_5(x)$, $\mathfrak{A}_6(x)$, $\mathfrak{A}_7(x)$, $\mathfrak{A}_8(x)$ máme tyto rozvoje (uvádím pouze prvé, o znaménku rozhodující členy)

$$\mathfrak{A}_5(x) = b'(x-a)^3 + \ldots, \mathfrak{A}_6 = b''(x-a)^6 + \ldots, \mathfrak{A}_7 = b'''(x-a)^4 + \\ + \ldots, \mathfrak{A}_8 = b''''(x-a)^2 + \ldots,$$

kde b', b'', b''', b'''' jsou čísla kladná. Nastupují tudíž místo uvedených hodnot pro $x = a + \delta$ hodnoty o znaménkách

$$\begin{array}{cccccc} + & - & - & - & - & - \\ + & + & + & + & + & + \end{array}$$

které poskytují pouze jednu jednotku jakožto příspěvek k počítání čísla p_a. Kdyby hodnoty uvedené v ($\times$) byly vznikly při dosazování čísla b (horní hranice daného intervalu), dostali bychom pro $x = b - \delta$ tato znaménka u vyznačených funkcí

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & + & + & + \end{array}$$

poskytující 3 jednotky pro číslo p_b.

Jako další příklad budu předpokládati tyto hodnoty při $x = a$ (resp. $x = b$):

i	3	4	5	6	7	8
$f^{(i)}(x)$	+	—	+	—	+	—
$\mathfrak{A}_i(x)$	—	0	0	0	0	+

Pro $x = a + \delta$ máme na základě důsledku odvozeného z rovnice (3) tato znaménka

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \end{array}$$

tedy žádný příspěvek k p_a. Kdyby předpokládané hodnoty byly platny při $x = b$, dostali bychom pro $b - \delta$ hodnoty znamének

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & - \\ - & + & + & + & + & + \end{array}$$

které dávají pro p_b příspěvek 4 jednotek.

Obdobně lze postupovati v každém případě bez jakýchkoliv potíží a netřeba uváděti větu platnou pro každé a, b, která, jak se zdá, nebyla by zvlášť jednoduchá a prakticky by byla téměř bezvýznamná.

Konečně lze ještě dokázanou větu doplniti následovně. Můžeme ji totiž použíti na rovnici $f(-x) = 0$ a interval $(-b, -a)$; počet kořenů nové rovnice v $(-b, -a)$ jest rovný počtu kořenů rovnice $f(x) = 0$ v intervalu (a, b). Dvojřada (A) se v tomto případě redukuje na dvojřadu

$$\begin{array}{llllll} f(-x), & -f'(-x), & +f''(-x), & -f'''(-x), & \ldots, & (-1)^n f^{(n)}(-x) \\ \mathfrak{A}_0(-x), & +\mathfrak{A}_1(-x), & \mathfrak{A}_2(-x), & \mathfrak{A}_3(-x), & \ldots, & \mathfrak{A}_n(-x). \end{array}$$

Dosadíme-li do této dvojřady za x hodnotu $-a$ a počítáme-li počet změn znaménkových v prvé řádce doprovázených sledem v řádce druhé, jest to totéž, jako bychom v řadě (A) počítali počet sledů znaménkových v řádce prvé doprovázených sledem v řádce druhé. Můžeme tudíž tvrditi: Jsou-li funkce $f(x)$, $f^{(k)}(x)$, $\mathfrak{A}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ vesměs pro $x = a$ i pro $x = b$ různé od nuly (nehledě k případu, ve kterém $\mathfrak{A}_k(x)$ identicky jsou rovny nule, kdy $\mathfrak{A}_k(x)$ pokládáme za čísla kladná i pro $x = a$ i pro $x = b$), pak jest počet kořenů rovnice $f(x) = 0$ položených mezi a, b buď rovný číslu $s_b - s_a$ aneb menší než $s_b - s_a$ a to o sudé číslo. Při tom jest s_a počet sledů znaménkových v prvé řadě z řad (A), jimž v druhé řadě jsou přiřazeny rovněž sledy; obdobný význam má s_b. Dále jest $b > a$.

IV.

Důkaz věty Newton-Sylvestrovy, který byl v předcházejícím podán pro rovnice $f(x) = 0$, kde $f(x)$ jest mnohočlen n-tého stupně, dá se rozšířiti i na případ, že $f(x)$ jest funkce holomorfní na jisté části osy reálných čísel (na kteréž části nabývá $f(x)$ hodnoty reálné). Nechť jest tedy ve všech bodech intervalu $(\alpha + 0, \beta - 0)$ položeného na reálné ose $f(x)$ funkcí holomorfní (t. j. v každém bodě toho intervalu rozvinutelnou v řadu mocninnou) a budiž $\alpha \leqq a < b \leqq \beta$; při tom znaménko rovnosti mezi α a a (a obdobně mezi β a b) jenom tenkráte jest přípustno, když holomorfie nastává i pro $x = \alpha$. V okolí bodu a jest pak platný tento rozvoj

$$f(x) = f(a) + \frac{x - a}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

Buďme předpokládati, že počet změn znaménkových v řadě

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a), \ldots$$

jest konečný. Pak od jistého indexu p počínajíc mají $f^{(k)}(a)$ stále totéž znaménko aneb jsou rovny nule. Jestliže $b > a$ — jakož předpokládáme — mají i $f^{(k)}(b)$ pro $k = p,\ p + 1,\ p + 2, \ldots$ rovněž stále totéž znaménko a stejné jako čísla $f^{(k)}(a)$, $k = p$, $p + 1, \ldots$ (pokud nejsou ovšem rovna nule).

Uvažujme pak dvojřadu

$$\left.\begin{matrix} f(x), & f'(x), & f''(x), & \ldots, & f^{(p)}(x) \\ \mathfrak{A}_0(x), & \mathfrak{A}_1(x), & \mathfrak{A}_2(x), & \ldots, & \mathfrak{A}_p(x) \end{matrix}\right\} \qquad \text{(B)}$$

kde

$$\mathfrak{A}_k(x) = [f^{(k)}(x)]^2 - c_{p-k}\, f^{(k-1)}(x)\, f^{(k+1)}(x),\ \mathfrak{A}_0(x) = f^2(x),$$

při čemž c_j jsou čísla ve (4) stanovená, $c_0 = 0$. Označíme-li počet změn znaménkových vznikajících pro $x = a$ v prvé řadě z řad (B), jež jsou doprovázeny v řadě druhé sledy znaménkovými, znakem p_a, pak můžeme vysloviti větu Sylvestr-Newtonovu pro funkci $f(x)$ takto:

Počet nulových bodů funkce $f(x)$ v intervalu $(a + 0, b - 0)$ jest buď $p_a - p_b$ anebo jest o sudé číslo menší. Při tom nulový bod řádu r-tého se počítá za r nulových bodů a zároveň se předpokládá, že žádné z čísel $f^{(k)}(a)$, $f^{(k)}(b)$, $\mathfrak{A}_k(x)$, $\mathfrak{A}_k(b)$, $k = 0, 1, \ldots, p$ není rovno nule. Není-li tento poslední předpoklad splněn, pak nahradíme-li čísla p_a, p_b vhodnými čísly podle návodu podaného ve (III), *zůstane věta Sylvestrova i tu v platnosti.*

Nazývejme funkci $f(x)$ holomorfní na (a, b), $a < b$, jejíž derivace $f^{(k)}(a)$ pro $k = p, p + 1, p + 2, \ldots$ mají (pokud nejsou rovny nule) totéž znaménko, *funkce p-členné na* (a, b). Pak $f'(x)$ jest na (a, b) $(p - 1)$-členná. Věta N.-S. jest očividně platna pro funkce 0-členné a jednočlenné. Podáme-li tedy důkaz, že věta N.-S. jest platna pro p-členné funkce, je-li platna pro funkce p'-členné, kde $p' < p$, pak věta N.-S. dokázána. Avšak onen důkaz jest identický s důkazem svrchu podaným tvrzení, že věta N.-S. jest platna pro rovnice algebraické stupně n-tého, platí-li pro rovnice stupně menšího než n; netřeba jej opakovati a lze tedy větu N.-S. pokládati za dokázanou pro rovnice $f(x) = 0$, kde $f(x)$ jest holomorfní na (α, β) a má předpokládané vlastnosti.

Lze dokonce tohoto výsledku použíti pro rovnice algebraické k jistému rozšíření věty N.-S. Objasním to na specielním případě. Budiž dána rovnice stupně šestého $a_0x^6 + a_1x^5 + \ldots + a_5x + a_6 = 0$. Pak pro odhad počtu kořenů kladných (t. j. kořenů v intervalu $(0, \infty)$) užíváme podle věty N.-S. této dvojřady

$$\begin{array}{lllllll} a_6, & a_5, & a_4, & a_3, & a_2, & a_1, & a_0 \\ a_6^2, & a_5^2 - \frac{2}{1}\cdot\frac{6}{5}\,a_4a_6, & a_4^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\,a_3a_5, & a_3^2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\,a_2a_4, & a_2^2 - \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\,a_1a_5, & \ldots, & a_0^2 \end{array} \tag{C}$$

(v prvé řadě jsou $f^{(k)}(0)$ dělené k, v druhé řadě $\mathfrak{A}_k(0)$ sestrojené podle (I) a dělené $(k!)^2$; dvojřadu pro $x = \infty$ netřeba vypisovati, neboť první její řada má vesměs sledy znaménkové). Počet kořenů kladných dané rovnice stupně šestého jest roven podle věty N.-S. nejvýše počtu změn znaménkových v prvé z řad (C) doprovázených v druhé řadě sledy (omezují se na případ, kdy žádné z čísel v (C) není rovno nule, v opačném případě pomocí úvah odst. III příslušné číslo snadno najdeme).

Budiž první z čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$, jež jest záporné, a_3. Pak k stanovení počtu kořenů kladných dané rovnice st. 6 jest zpravidla výhodnější užití jiné dvojřady a sice té, kterou dostaneme, pokládáme-li levou stranu dané rovnice za funkci v $(0, \infty)$ 4-člennou; neboť $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0), \ldots$ jsou, pokud jsou různy od nuly, čísla kladná. Dostaneme tak dvojřadu

$$\left.\begin{array}{lllll} a_6, & a_5, & a_4, & a_3, & a_2 \\ a_6^2, & a_5^2 - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{3}\,a_4a_6, & a_4^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\,a_3a_5, & a_3^2 - \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\,a_2a_4, & a_2^2 \end{array}\right\} \tag{C'}$$

Použití této dvojřady jest stejné jako dvojřady (C), součinitelé numeričtí při druhých členech ve výrazech pro $\mathfrak{A}_1(0), \ldots$ jsou v (C′) v absolutní hodnotě větší než v (C), čímž se právě stane, že v (C′) dostáváme v druhém řádku často více hodnot záporných než v (C).

*

Sur le théorème de Newton-Sylvester concernant la séparation des racines des équations algébriques.

(Extrait de l'article précédent.)

J'ai donné, dans ce Journal, t. 36 (1907), p. 49, une démonstration du théorème de Descartes et de Budan, basée sur le principe d'induction mathématique. On peut appliquer cette méthode de même au théorème de Newton, démontré, cependant, seulement par Sylvester (Philosophical Magazine, IV. série, t. 31, 1866, p. 214). Ici encore, on réussit à simplifier essentiellement la démonstration du théorème, lequel en découle sans aucune restriction. Je donne, de plus, une extension du théorème de N.-S. aux fonctions analytiques; il en suit une simplification ultérieure de ce théorème pour les équations algébriques.

O podmínkách dostačujících v teorii krajních hodnot funkcí.

E. Bunický.

(Došlo 13. VIII. 1930.)

1. Rozbor podmínek dostačujících pro existenci krajních hodnot funkcí jedné nebo několika proměnných souvisí s výpočtem derivací druhého a někdy i vyšších řádů. Odvodím některé věty, jež mají za účel usnadniti postup často obtížný, jenž záleží v postupném derivování. Tyto věty lze pokládati za jakési zevšeobecnění metody udané E. Goursatem pro určování krajních hodnot poměru dvou funkcí.*)

Krajní hodnoty funkcí jediné proměnné.

2. Budeme nazývati funkci $y = f(x)$ proměnné x, která je definována v daném intervalu a má v tomto intervalu konečné derivace až do n-ho řádu, f u n k c í n-k r á t e d e r i v o v a t e l n o u v daném intervalu, při čemž lze slova „v daném intervalu" vynechati, kdykoli to nevede k nedorozumění.

Potřebujeme dokázati nejprve tuto pomocnou větu:

Pomocná věta I. *Buďtež*

$$y, u_1, u_2, \ldots, u_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$$

funkce v počtu $2n + 1$ proměnné x, definované v daném intervalu a vyhovující vztahům

$$y' = p_1u_1, u'_1 = p_2u_2, \ldots, u'_k = p_{k+1}u_{k+1}, \ldots, u'_{n-1} = p_nu_n. \quad (1)$$

Funkce $y, u_1, u_2, \ldots, u_n$ jsou mimo to alespoň jednou derivovatelné v daném intervalu a funkce p_i $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ resp. n-i krát. Za těchto podmínek je funkce y n-krát derivovatelná, a derivace y', y'', ..., $y^{(n)}$ lze vyjádřiti lineárně funkcemi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ podle vzorců

*) E. Goursat, „Cours d'analyse mathématique", v jednom ze starších vydání.

$$y^{(\nu)} = p_1 p_2 \dots p_\nu u_\nu + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} q_{\nu i} u_i, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \qquad (2)$$

kde koeficienty $q_{\nu i}$ jsou mnohočleny dokonale určené, vyjádřené ve svém souhrnu funkcemi $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ a jejich derivacemi různých řádů.

Poznámka. Pro $\nu = 1$ zní vzorec (2)

$$y' = p_1 u_1 \qquad (3)$$

a ztotožňuje se s první rovnicí (1). Ponecháváme hodnotu 1 pro index ν ve vzorcích (2) jen proto, aby další výpočty byly souměrnější.

Pro $n = 1$ vzorce (2) platí. Neboť pro tento případ se redukují, jak jsme právě viděli, na rovnici (3), která platí podle předpokladu. Položme $n = 2$. Pro $n = 2$ a $\nu = 1$ nabude vzorec (2) opět tvaru rovnice (3), již potvrzené. V tomto případě je funkce p_1 derivovatelná, podle předpokladu, (2—1)krát, t. j. jednou, a totéž platí o funkci u_1. Derivujeme-li tedy rovnici (3) a dosadíme do ní hodnotu u'_1 vypočtenou z druhého vztahu (1), dostaneme

$$y'' = p_1 p_2 u_2 + p'_1 u_1. \qquad (4)$$

Člen $p_1 p_2 u_2$ je totožný s členem $p_1 p_2 \dots p_\nu u_\nu$ vzorce (2) pro $\nu = 2$. Jestliže mimoto položíme $p'_1 = q_{21}$, shledáme, že koeficient q_2 závisí na p_1, totiž na derivaci p'_1, což souhlasí se zněním pomocné věty v případě $n = 2$, $\nu = 2$. Platí tedy vzorce (2) pro $n = 1$ a $n = 2$.

Připusťme, že vzorce (2) platí pro $n = m$, kde m je libovolné číslo celé větší než 1, a položme potom $n = m + 1$. Pro tuto hodnotu n nabudou vztahy (1) tvaru

$$y' = p_1 u_1,\ u'_1 = p_2 u_2, \dots, u'_{m-1} = p_m u_m,\ u'_m = p_{m+1} u_{m+1}, \qquad (5)$$

kde funkce p_j ($j = 1, 2, \dots, m$) jsou derivovatelné resp. $(m + 1 - j)$ kráte. Zvláště platí

$$y' = p_1 u_1,\ u'_1 = p_2 u_2, \dots, u'_{m-2} = p_{m-1} u_{m-1},\ u'_{m-1} = p_m u_m, \qquad (6)$$

kde funkce p_i ($i = 1, 2, \dots, m - 1$) jsou derivovatelny resp. $(m + 1 - i)$-kráte, tím spíše tedy $(m - i)$-krát. Užijeme-li tedy pomocné věty, jejíž platnost pro $n = m$ předpokládáme, na m rovnic (6) a na funkce $y, p_1, \dots, p_m, u_1, \dots, u_m$, obdržíme vzorce

$$y^{(\nu)} = p_1 p_2 \dots p_\nu u_\nu + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} q_{\nu i} u_i \quad (\nu = 1, 2, \dots, m), \qquad (7)$$

kde koeficienty $q_{\nu i}$ jsou mnohočleny vyjádřené funkcemi $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ a jejich derivacemi různých řádů.

Položíme-li v posledních m rovnicích (5)

$$u_1 = Y,\ p_{l+1} = P_l,\ u_{l+1} = U_l, \quad (l = 1, 2, \dots, m)$$

obdržíme

$$Y' = P_1 U_1,\ U'_1 = P_2 U_2, \ldots, U'_{m-1} = P_m U_m,$$

kde funkce $P_i = p_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ jsou podle předpokladu derivovatelné resp. $m + 1 - (i + 1) = (m - i)$-kráte. Užijeme-li tudíž znovu pomocné věty pro $n = m$ na funkce $Y_1, P_1, \ldots, P_m, U_1, \ldots, U_m$, obdržíme

$$Y^{(\nu)} = P_1 P_2 \ldots P_\nu U_\nu + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} Q_{\nu i} U_i. \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m), \tag{8}$$

kde koeficienty $Q_{\nu i}$ jsou mnohočleny vyjádřené funkcemi $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ a jejich derivacemi různých řádů.

Vraťme se k původnímu označení a pišme poslední vzorec (8) zvláště; obdržíme tak

$$u_1^{(\nu)} = p_2 p_3 \ldots p_{\nu+1} u_{\nu+1} + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} Q_{\nu i} u_{i+1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m-1), \tag{9}$$

$$u_1^{(m)} = p_2 p_3 \ldots p_{m+1} u_{m+1} + \sum_{i=1}^{i=m=1} Q_{mi} u_{i+1}, \tag{10}$$

kde koeficienty $Q_{\nu i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ a Q_{mi} jsou mnohočleny, jež ve svém souhrnu jsou vyjádřeny funkcemi $p_2, p_3, \ldots, p_m$ a jejich derivacemi různých řádů. Je tedy funkce u_1 derivovatelná m-krát a derivace $u'_1, u''_1, \ldots, u_1^{(m)}$ lze vyjádřiti lineárními formami funkcí $u_2, u_3, \ldots, u_{m_1}$, při čemž souhrn koeficientů hodnot $u_2, u_3, \ldots, u_m, u_{m+1}$ v těchto lineárních formách (počítaje mezi ně i výrazy $p_2 p_3 \ldots p_{\nu+1}$ a $p_2 p_3 \ldots p_{m+1}$) závisí na funkcích $p_2, p_3, \ldots, p_m, p_{m+1}$ a na derivacích různých řádů funkcí $p_2, p_3, \ldots, p_m$. Mimoto je funkce p_1 podle předpokladu derivovatelná $(m + 1) - 1 = m$-krát a totéž platí o funkci u_1. Derivujeme-li tudíž první ze vztahů (5) m-krát, obdržíme podle vzorce Leibnizova

$$y^{(m+1)} = p_1 u_1^{(m)} + \sum_{i=0}^{i=m-1} \frac{m!}{i!(m-i)!} p_1^{(m-i)} u_1^{(i)} \quad (u_1^{(0)} = u_1;\ 0! = 1)$$

Nahradíme-li v této rovnosti derivace $u'_1, u''_1, \ldots, u_1^{(m-1)}, u_1^{(m)}$ jejich hodnotami vypočtenými ze vzorců (9) a (10) a hledíme-li k tomu, že funkce u_{m+1} a p_{m+1} se vyskytují jen ve vzorci (10), můžeme vyjádřiti derivaci $y^{(m+1)}$ v tvaru

$$y^{(m+1)} = p_1 p_2 \ldots p_{m+1} u_{m+1} + \sum_{i=1}^{i=m} q_{m+1,i} u_i, \tag{11}$$

kde koeficienty $q_{m+1,i}$ jsou mnohočleny, jichž souhrn je vyjádřen funkcemi $p_1, p_2, \ldots, p_m$ a jejich derivacemi různých řádů.

Připojíme-li rovnici (11) k rovnicím (7), obdržíme

$$y^{(\nu)} = p_1 p_2 \ldots p_\nu u_\nu + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} q_{\nu i} u_i \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m, m + 1),$$

kde koeficienty $q_{\nu i}$ jsou mnohočleny, jichž souhrn je vyjádřen funkcemi $p_1, p_2, \ldots, p_m$ a jejich derivacemi různých řádů.

Je tedy potvrzena platnost pomocné věty pro $n = m + 1$, když se předpokládá její platnost pro $n = m$. Platí tedy tato věta obecně.

Poznámka. Malou úpravou provedené úvahy dalo by se dokázati, že koeficienty $q_{\nu i}$ ve vzorcích (2) jsou mnohočleny homogení, resp. stupně i, vyjádřené obecně funkcemi $p_1, p_2, \ldots, p_i$ a jejich derivacemi až do řádu $\nu - i$. Zvláště platí vždy $q_{\nu 1} = p_1^{(\nu-1)}$. Nebudeme se zabývati podrobnostmi tohoto druhu.

3. Věta I. *Buďtež* $y = f(x)$ *a*

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$$

funkce proměnné x *v počtu* $2n - 1$, *jež jsou definovány v daném intervalu a splňují vztahy*

$$y' = p_1 u_1, u'_1 = p_2 u_2, \ldots, u'_j = p_{j+1} u_{j+1}, \ldots, u'_{n-2} = p_{n-1} u_{n-1}. \quad (12)$$

Funkce $y, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ *buďtež derivovatelné alespoň jednou a funkce* p_i $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ *resp.* $(n - i)$*-krát v daném intervalu. Předpokládejme, že derivace* $y'(x)$ *má jeden kořen* c *uvnitř daného intervalu, při čemž funkce* $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ *a* $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ *splňují pro* $x = c$ *vztahy*

$$p_1(c) \neq 0, \; p_2(c) \neq 0, \ldots, p_{n-1}(c) \neq 0, \quad (13)$$

$$u_2(c) = u_3(c) = \ldots = u_{n-2}(c) = 0, \quad (14)$$

$$u'_{n-1}(c) \neq 0 \quad (15)$$

Celé číslo n *budiž podle předpokladu rovno nejméně* 2, *při čemž se vztahy* (13), (14), (15) *redukují pro* $n = 2$ *na nerovnosti* $p_1(c) \neq 0$, $u'_1(c) \neq 0$.

Za těchto předpokladů, je-li n *číslo liché, nemá funkce* y *krajní hodnoty pro* $x = c$.

Je-li n *číslo sudé a splňuje-li součin*

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c)$$

(*který není roven nule, jak ukazují nerovnosti* (13) *a* (15)) *podmínku*

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c) < 0, \quad (16)$$

nabývá funkce y *pro* $x = c$ *maxima vnitřního a vlastního.*

Je-li n *sudé a je splněna podmínka*

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c) > 0, \quad (17)$$

nabývá funkce y *pro* $x = c$ *minima vnitřního a vlastního.*

Poznámka. Maximum nebo minimum funkce definované v intervalu nazývá se vnitřním, nabývá-li funkce této hodnoty pro hodnotu $x = c$ nezávisle proměnné x ležící uvnitř daného intervalu. Toto maximum nebo minimum nazývá se **vlastní**, jestliže rozdíl $y(x) - y(c)$ je záporný, resp. kladný (aniž se anuluje) pro všechny hodnoty x vyhovující nerovnostem $0 < |x - c| < \delta$, kde δ je dané číslo kladné.*)

Aby výpočty byly souměrnější, položme

$$p_n = 1, \tag{18}$$

$$u_n = u'_{n-1}; \tag{19}$$

pak lze psáti rovnice (12) v tvaru

$$y' = p_1 u_1, u'_1 = p_2 u_2, \ldots, u'_{n-2} = p_{n-1} u_{n-1}, u'_{n-1} = p_n u_n. \tag{20}$$

Ježto funkce $y', u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ jsou derivovatelné jednou a funkce p_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ resp. $n - i$-krát, je funkce y podle vztahu (20) a ve shodě s pomocnou větou derivovatelná n-krát a jejích n derivací lze vyjádřiti vzorci

$$y^{(\nu)} = p_1 p_2 \ldots p_\nu u_\nu + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} q_{\nu i} u_i, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

kde $q_{\nu i}$ jsou funkce úplně určené. Je-li c kořen derivace y', a ježto $p_1(c)$ je podle první nerovnosti (13) různé od nuly, platí $y'(c) = p_1(c)\, u_1(c) = 0$, z čehož plyne $u_1(c) = 0$. Spojíme-li tuto rovnost s rovnostmi (14), obdržíme

$$u_1(c) = u_2(c) = \ldots = u_{n-2}(c) = u_{n-1}(c) = 0.$$

Položíme-li tedy v identitách (21) $x = c$, shledáme, že

$$y'(c) = y''(c) = \ldots = y^{(n-1)}(c) = 0,$$

$$y^{(n)}(c) = p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, p_n(c)\, u_n(c)$$

čili, vzhledem k rovnostem (18) a (19)

$$y^{(n)}(c) = p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c).$$

Mimoto platí podle nerovností (13) a (15)

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c) \neq 0 \text{ čili } y^{(n)}(c) \neq 0.$$

Máme tedy konečně

$$y'(c) = y''(c) = \ldots = y^{(n-1)}(c) = 0,$$

$$y^{(n)}(c) = p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c) \neq 0. \tag{22}$$

Je-li n číslo liché, nemá funkce y krajní hodnoty pro $x = c$, což plyne přímo ze vztahů (22), podle známých pravidel z teorie maxim a minim.

---

*) Německy eingentliches Extremum, francouzsky extrême strict ou propre, anglicky proper extremum. Srv. *Hadamard* „Leçons sur le calcul des variations", 1910, str. 2—5.

Je-li n číslo sudé a jestliže součin $p_1(c)\, p_2(c) \dots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c)$ vyhovuje nerovnosti (16), platí podle vztahů (22)

$$y'(c) = y''(c) = \dots = y^{(n-1)}(c) = 0,\ y^{(n)}(c) < 0.$$

Má tedy funkce y pro $x = c$ maximum vnitřní a vlastní.

Je-li n číslo sudé a jestliže součin $p_1(c)\, p_2(c) \dots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c)$ vyhovuje nerovnosti (17), platí

$$y'(c) = y''(c) = \dots = y^{(n-1)}(c) = 0,\ y^{(n)}(c) > 0.$$

Má tedy funkce y v tomto případě pro $x = c$ minimum vnitřní a vlastní.

Věta odvozená. *Budiž $y = f(x)$ funkce x, která je definována a alespoň jednou derivovatelná v daném intervalu. Nechť lze derivaci y' vyjádřiti v tvaru*

$$y' = pu, \tag{23}$$

kde p a u jsou funkce x, derivovatelné n—1-krát v daném intervalu. Předpokládejme, že derivace y' má uvnitř daného intervalu kořen c vyhovující vztahům

$$p(c) \neq 0,\ u'(c) = u''(c) = \dots = u^{(n-2)}(c) = 0,\ u^{(n-1)}(c) \neq 0. \tag{24}$$

Číslo n budiž celé kladné, větší než 1, při čemž se relace (24) redukují pro $n = 2$ na nerovnosti $p(c) \neq 0$, $u'_1(c) \neq 0$. Za těchto předpokladů, je-li n číslo liché, nemá funkce y krajní hodnoty pro $x = c$. Je-li číslo n sudé a jestliže součin $p(c)\, u^{(n-1)}(c)$ je záporný, má funkce y pro $x = c$ maximum vnitřní a vlastní. Je-li n číslo sudé a součin $p(c)\, u^{(n-1)}(c)$ je kladný, má funkce y pro $x = c$ minimum vnitřní a vlastní.

Tuto větu odvodíme ihned z věty právě dokázané, jestliže položíme $p_1 = p$, $u_1 = u$, $p_2 = p_3 = \dots = p_{n-1} = 1$.

Lze ji dokázati také dosti jednoduše a nezávisle na větě I., jestliže derivujeme identitu (23) n—1-krát a položíme ve všech rovnicích, jež tak obdržíme, $x = c$.

Poznámka. Věta I. může často posloužiti k tomu, aby se zjednodušilo řešení úloh o krajních hodnotách funkcí jediné proměnné. Mějme totiž určiti krajní hodnoty funkce $y(x)$, jejíž derivace $y'(x)$ má reálný kořen uvnitř intervalu, kde je funkce $y(x)$ definována. Předpokládejme, že se derivace $y'(x)$ dá rozložiti ve dva činitele $p(x)$ a $u_1(x)$, vyhovující vztahům $p_1(c) \neq 0$ a $u_1(c) = 0$. Aby se vyzkoušel kořen c, stačí podle věty I. derivovati činitel $u_1(c)$ a nikoli derivaci $y'(x)$. Tento postup zjednodušuje řešení problému ve všech případech, kde výpočet derivace $u'_1(x)$ je jednodušší, než výpočet druhé derivace $y''(x)$. Jestliže $u'_1(c) \neq 0$ a $p_1(c)\, u'_1(c) < 0$ (anebo $p_1(c)\, u'_1(c) > 0$), je $y(c)$ maximum (minimum) funkce $y(x)$. Jestliže $u'_1(c) = 0$, hledíme znovu rozložiti derivaci $u'_1(x)$ ve dva činitele $p_2(x)$ a $u_2(x)$, z nichž jen druhý je roven nule pro $x = c$. Pokračujíce tímto způsobem, snažíme se sestrojiti úplnou posloupnost funkcí $p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_{n-1}, u_{n-1}$, vyhovujících vztahům (13), (14), (15) jakož i všem ostatním podmínkám věty I, která poskytuje dostatečný návod k tomu, aby se dokončilo vyzkoušení kořenu c. Po každé, kdy se nepodaří rozložení jedné z derivací $u'_\nu(x)$ $(\nu < n-1)$ ve dva činitele $p_{\nu+1}(x)$ a $u_{\nu+1}(x)$, které by vyhovovaly vztahům $p_{\nu+1}(c) \neq 0$ a $u_{\nu+1}(c) = 0$, nutno položiti $p_{\nu+1}(x) = 1$. Poslední dvě funkce p_i, u_i jsou označeny v textu věty I indexem $i = n-1$ tak, aby první derivace funkce y, která se pro $x = c$ neanuluje, měla index n. Nahradí-li se $n-1$ indexem k, nabudou rovnice (12) a vztahy (13), (14), (15) tvaru

$$y' = p_1 u_1,\ u'_1 = p_2 u_2, \ldots, u'_j = p_{j+1}\, u_{j+1}, \ldots, u'_{k-1} = p_k u_k;$$
$$p_1(c) \neq 0,\ p_2(c) \neq 0, \ldots, p_k(c) \neq 0;$$
$$u_2(c) = u_3(c) = \ldots = u_{k-1}(c) = 0;\ u'_k(c) \neq 0.$$

Ježto liché a sudé hodnoty k odpovídají sudým, resp. lichým hodnotám n, nutno důsledek transformované věty vysloviti tímto způsobem: je-li k číslo sudé, hodnota $y(c)$ funkce $y(x)$ není krajní; jestliže k je číslo liché a platí

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_k(c)\, u'_k(c) < 0,$$

je $y(c)$ maximum funkce $y(x)$; jestliže k je liché a platí

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_k(c)\, u'_k(c) < 0,$$

je $y(c)$ minimum funkce $y(x)$.

Objasníme užití věty I několika příklady. Abychom zestručnili označení, budeme v řešeních příkladů psáti funkce $p_1, p_2, \ldots, p_k$ vždycky do závorek, mimo to vynecháme někdy v součinu $p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_k(c)\, u'_k(c)$ činitele zřejmě kladné, což nemá vlivu na znaménko příslušného součinu. Konečně ponecháme všude čtenáři, aby si potvrdil platnost vztahů (13), (14), (15) jakož i všech ostatních podmínek věty I.

4. **Příklady.** 1. *Jest určiti krajní hodnoty funkce $y(x)$ definované rovnicí*

$$y = \sin^6 x - 6 \sin^4 x. \tag{25}$$

Řešení. Derivováním rovnice (25) obdržíme

$$y' = 6\,(\sin^2 x - 4) \sin^3 x \cos x.$$

Ježto výraz $\sin^2 x - 4$ je stále záporný pro reálné hodnoty x, jsou reálné kořeny derivace y definovány rovnicí $\sin^3 x \cos x = 0$, která je ekvivalentní dvěma rovnicím $\sin x = 0$, $\cos x = 0$. Má tedy derivace y' dvě posloupnosti reálných kořenů, totiž

$$x = c = m\pi,\ x = c' = (m + \tfrac{1}{2})\pi,$$

kde m je libovolné číslo celé.

Vyzkoušení kořenů $c = m\pi$.

$$y' = \{6(\sin^2 x - 4)\cos x\}\sin^3 x,\ u_1 = \sin^3 x;\ u'_1 = \{3\cos x\}\sin^2 x,$$

$$u_2 = \sin^2 x\ ;\quad u'_2 = \{2\cos x\}\,.\,\sin x,\quad u_3 = \sin x;\quad u'_3 = \cos x,$$

$$\cos c = (-1)^m,\ [(\sin^2 x - 4)\cos x\,.\,\cos x\,.\,\cos x\,.\,\cos x]_{x=c} =$$

$$= -4\,.\,(-1)^{4m} < 0.$$

Pro $x = m\pi$ má funkce (25) maximum $y(m\pi) = 0$ vnitřní a vlastní.

Vyzkoušení kořenů $c' = (m + \frac{1}{2})\pi$.

$$y' = \{6(\sin^2 x - 4)\sin^3 x\}\cos x,\ u_1 = \cos x,\ u'_1 = -\sin x,$$

$$\sin c' = (-1)^m,$$

$$[(\sin^2 x - 4)\sin^3 x(-\sin x)]_{x=c'} = (1-4)(-\sin^4 c') = 3 > 0.$$

Funkce (25) má pro $x = (m + \frac{1}{2})\pi$ minimum $y\,[(m + \frac{1}{2})\pi] = -5$ vnitřní a vlastní.

2. *Krajní hodnoty funkce*

$$y = e^{5x}\cos^5 x. \tag{26}$$

Řešení. Derivování rovnice (26) dá

$$y' = 5e^{5x}(\cos x - \sin x)\cos^4 x.$$

Pro kořeny derivace y' platí rovnice

$$\cos x - \sin x = 0,\ \cos x = 0.$$

Odtud plynou kořeny $x = c = (m + \frac{1}{4})\pi$ a $x = c' = (m + \frac{1}{2})\pi$, kde m je libovolné číslo celé.

Kořeny $c = (m + \frac{1}{4})\pi$. $\qquad y' = \{5e^{5x}\cos^4 x\}(\cos x - \sin x)$,

$$u_1 = \cos x - \sin x;\ u'_1 = -(\sin x + \cos x),\ u'_1(c) = \mp\frac{2}{\sqrt{2}} = \mp\sqrt{2}.$$

Je-li m číslo sudé, $m = 2k$, kde k je libovolné číslo celé. V tomto případě mají kořeny c tvar $c_1 = (2k + \frac{1}{4})\pi$; platí pro ně $u'_1(c_1) = -\sqrt{2} < 0$. Má tedy funkce (26) pro $x = (2k + \frac{1}{4})\pi$ maxima vnitřní a vlastní, rovná $y(c_1) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}e^{5(2k+\frac{1}{4})\pi}$.

Je-li m číslo liché, je $c = c_2 = (2k + 1 + \frac{1}{4})\pi = (2k + \frac{5}{4})\pi$, $u'_1(c_2) = \sqrt{2} > 0$. Má tedy pro $x = (2k + \frac{5}{4})\pi$ funkce (26) minima vnitřní a vlastní, rovná $-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}e^{5(2k+\frac{5}{4})\pi}$. Při zkoušení kořenů c nedbali jsme kladného činitele $5e^{5c}\cos^4 c$.

Kořeny $c' = (m + \frac{1}{2})\pi$. $\qquad y' = \{5e^{5x}(\cos x - \sin x)\}\cos^4 x$,

$$u_1 = \cos^4 x\ ;\ u'_1 = \{-4\sin x\}\cos^3 x,\ u_2 = \cos^3 x;$$

$$u'_2 = \{-3 \sin x\} \cos^2 x, \quad u_3 = \cos^3 x; \quad u'_3 = \{-2 \sin x\} \cos x,$$
$$u_4 = \cos x; \; u'_4 = -\sin x, \; u'_4 = \mp 1 \neq 0.$$

První derivace u'_k, která se neanuluje pro $x = c$, má index sudý $k = 4$. Nemá tedy funkce (26) pro hodnoty $x = (m + \frac{1}{2})\pi$ proměnné x ani maxima ani minima.

3. *Jest určiti krajní hodnoty funkce**)

$$y = \frac{(x + 3)^3}{(x + 2)^2}. \tag{27}$$

Řešení. Derivování této rovnice dává

$$y' = \frac{(x + 3)^2 \, x}{(x + 2)^3}.$$

Derivace y' má dva reálné kořeny $x = c_1 = 0$, $x = c_2 = -3$.

Kořen $c_1 = 0.$ $y' = \left\{\frac{(x + 3)^2}{(x + 2)^3}\right\} x, \; u_1 = x; \; u'_1 = 1, \; \left[\frac{(x + 3)^2}{(x + 2)^3} . 1\right]_{x = c_1 = 0} =$

$$= \frac{9}{8} > 0.$$

Funkce (27) má tedy minimum $y\,(0) = {}^{27}/_4$ vnitřní a vlastní.

Kořen $c_2 = -3.$ $y' = \left\{\frac{x}{(x + 2)^3}\right\}(x + 3)^2, \quad u_1 = (x + 3)^2;$

$u'_1 = \{2\}\,(x + 3), \; u_2 = x + 3; \; u'_2 = 1 \neq 0.$

První derivace u'_2, která se neanuluje pro $x = c_2$, má sudý index 2. Nemá tedy funkce (27) pro $x = c_2 = -3$ ani maxima ani minima.

Poznámka. Při řešení příkladů 1), 2), 3) nutno míti na paměti, že funkce (25) a (26) jsou definovány v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a že funkce (27), která se stává rozpojitou pro $x = -2$, je definována ve dvou oddělených intervalech $(-\infty, -2)$ a $(-2, +\infty)$, při čemž hodnota -2 je po každé vyloučena. Kořeny $x = -3$ a $x = 0$, zkoumané v příkladu 3), leží jeden uvnitř prvního, druhý uvnitř druhého tohoto intervalu.

Krajní hodnoty funkcí dvou nezávisle proměnných.

5. Metoda výše vyložená může býti rozšířena na funkce několika proměnných. V tomto článku se omezím na případ funkcí dvou proměnných. Bude třeba dokázati nejprve pomocnou větu.

---

*) V. F. Frenet, „Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal" 1891, str. 23, § X, Maxima et minima, problème 195.

Pro stručnost v označení, budeme označovati znaky w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy} po řadě parciální derivace $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ libovolné funkce $w(x, y)$ dvou proměnných x a y. Hodnotu $w(x_0, y_0)$ funkce $w(x, y)$ pro dané hodnoty $x = x_0$ a $y = y_0$ proměnných x, y označíme w_0, po případě $(w)_0$ nebo $[w]_0$, kdyby označení funkce w bylo již komplikováno některými indexy nebo závorkami.

Pomocná věta II. *Budiž $z = f(x, y)$ funkce dvou nezávisle proměnných x a y, definovaná v oboru dvourozměrném D a mající v tomto oboru konečné parciální derivace až do druhého řádu včetně. Nechť lze parciální derivace z_x a z_y vyjádřiti vzorci*

$$z_x = Pu, \ z_y = pv, \tag{28}$$

kde $P = P(x, y)$, $u = u(x, y)$, $p = p(x, y)$ a $v = v(x, y)$ jsou funkce proměnných x, y, definované v témže oboru D a mající tam konečné parciální derivace podle x i y. Nechť dále

$$u_0 = u(x_0, y_0) = 0, \ v_0 = v(x_0, y_0) = 0, \tag{29}$$

kde x_0, y_0 jsou souřadnice některého daného bodu $(x_0\, y_0)$ v oboru D.

Jsou-li všechny tyto podmínky splněny, platí rovnosti

$$(z_{xx})_0 = P_0(u_x)_0, \ (z_{yy})_0 = p_0(v_y)_0 \tag{30}$$

a

$$H_0 = (z_{xx})_0\,(z_{yy})_0 - (z_{xy}{}^2)_0 = P_0 p_0 \begin{vmatrix} (u_x)_0 & (u_y)_0 \\ (v_x)_0 & (v_y)_0 \end{vmatrix} = P_0 p_0 \left[\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right] = \\ = P_0 p_0 J_0, \tag{31}$$

kde H a $J = \frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ jsou stručná označení pro Hessián $z_{xx}\, z_{yy} - z^2_{xy}$ funkce z a pro Jacobián funkcí u, v vzhledem ku proměnným x, y.

Derivujeme-li identity (28) podle x a y, obdržíme $z_{xx} = Pu_x + P_x u$, $z_{xy} = Pu_y + P_y u$, $z_{xy} = pv_x + p_x v$, $z_{yy} = pv_y + p_y v$.

Dosadíme-li v těchto identitách $x = x_0$, $y = y_0$, a přihlížíme zároveň k rovnicím (29), obdržíme

$$(z_{xx})_0 = P_0(u_x)_0 \tag{32}$$

$$(z_{xy})_0 = P_0(u_y)_0 \tag{33}$$

$$(z_{xy})_0 = p_0(v_x)_0 \tag{34}$$

$$(z_{yy})_0 = p_0(v_y)_0 \tag{35}$$

Tím jsou dokázány rovnosti (30), které jsou úplně totožné s rovnostmi (32) a (35). Mimoto se odvodí užitím rovnic (32), (33), (34), (35):

$$H_0 = \begin{vmatrix} (z_{xx})_0 & (z_{xy})_0 \\ (z_{xy})_0 & (z_{yy})_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_0(u_x)_0, & P_0(u_y)_0 \\ p_0(v_x)_0, & p_0(v_y)_0 \end{vmatrix} = P_0\,p_0 \begin{vmatrix} (u_x)_0 & (u_y)_0 \\ (v_x)_0 & (v_y)_0 \end{vmatrix} =$$

$$= P_0 p_0 \left[\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right]_0 = P_0 p_0 J_0.$$

Tím jsou dokázány také rovnosti (31).

Věta II. *Budiž*

$$z = f(x, y)$$

funkce nezávisle proměnných x a y, mající ve dvourozměrném oboru D, v němž je definována, všechny parciální derivace prvního i druhého řádu spojité.

Nechť má soustava rovnic

$$z_x = 0, \; z_y = 0$$

řešení $x = x_0$, $y = y_0$, kde bod (x_0, y_0) leží uvnitř oboru D, a nechť lze vyjádřiti parciální derivace z_x a z_y v oboru D rovnicemi

$$z_x = Pu, \; z_y = pv, \tag{37}$$

kde P, u, p, v jsou funkce proměnných x, y, mající v oboru D konečné derivace prvního řádu. Zvláště nechť vyhovují funkce P, p nerovnostem

$$P_0 \neq 0, \; p_0 \neq 0. \tag{38}$$

Za těchto předpokladů a položíme-li

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = J,$$

platí tyto věty:

Jestliže

$$P_0 p_0 J_0 < 0, \tag{39}$$

funkce z nemá krajní hodnoty v bodě (x_0, y_0).

Jestliže naproti tomu

$$P_0 p_0 J_0 > 0, \tag{40}$$

má funkce z v bodě (x_0, y_0) krajní hodnotu vnitřní a vlastní. V tom případě jsou hodnoty $P_0(u_x)_0$ a $p_0(v_y)_0$ různé od nuly a mají stejné znaménko.

Je-li splněn vztah (40) a jestliže mimoto

$$P_0(u_x)_0 < 0$$

(čili, což je ekvivalentní,

$$p_0(v_y)_0 < 0), \tag{41}$$

má funkce z v bodě (x_0, y_0) maximum vnitřní a vlastní.

Je-li splněn vztah (40) a jestliže mimo to

$$P_0(u_x)_0 > 0$$

(čili, což je ekvivalentní,

$$p_0(v_y)_0 > 0), \tag{42}$$

má funkce z v bodě (x_0, y_0) minimum vnitřní a vlastní.

Poznámka. Maximum nebo minimum $z(x_0, y_0)$ funkce $z(x, y)$ definované v oboru D nazývá se vnitřním, leží-li bod (x_0, y_0) uvnitř oboru D. Toto maximum nebo minimum $z(x_0, y_0)$ nazývá se vlastním, jestliže rozdíl $z(x, y) - z(x_0, y_0)$ zůstává záporný, resp. kladný pro všechny hodnoty x a y, které splňují vztah $0 < | x - x_0 | + | y - y_0 | < \delta$, kde δ je dané číslo kladné*).

Podle předpokladu platí $(z_x)_0 = 0$, $(z_y)_0 = 0$, čili, vzhledem k rovnicím (37),

$$P_0 u_0 = 0, \; p_0 v_0 = 0,$$

odkudž plyne podle nerovností (38)

$$u_0 = 0, \; v_0 = 0. \tag{43}$$

Vyhovují tedy funkce z, P, p, u, v všem podmínkám pomocné věty II. Neboť funkce z má v oboru D parciální derivace konečné a dokonce spojité a to řádu prvního a druhého. Parciální derivace z_x a z_y jsou vyjádřeny v oboru D rovnicemi (37), při čemž funkce P, u, p, v mají v témže oboru konečné první derivace podle x a y. Mimoto se funkce u a v anulují v bodě (x_0, y_0), jak ukazují rovnice (43). Je tedy podle pomocné věty II

$$(z_{xx})_0 = P_0(u_x)_0, \; (z_{yy})_0 = p_0(v_y)_0 \tag{44}$$

a

$$P_0 p_0 J_0 = H_0 = (z_{xx})_0 (z_{yy})_0 - (z_{xy}^2)_0. \tag{45}$$

Platí-li nerovnost (39), je vzhledem k relacím (45) $H_0 < 0$, z čehož plyne podle známé věty z analyse, že funkce z nemá krajní hodnoty v bodě (x_0, y_0). Platí-li nerovnost (40), je $P_0 p_0 J_0 = H_0 > 0$; v tomto případě má funkce z, jak známo, krajní hodnotu v bodě (x_0, y_0), při čemž jsou čísla $(z_{xx})_0$ a $(z_{yy})_0$ různá od nuly a mají společné znaménko. Avšak $(z_{xx})_0$ a $(z_{yy})_0$ jsou podle rovností (44) rovna výrazu $P_0(u_x)_0$, resp. $p_0(v_y)_0$; jsou tedy výrazy $P_0(u_x)_0$ a $p_0(v_y)_0$ různé od nuly a mají společné znaménko.

Platí-li nerovnosti (40) a (41) zároveň, nalezneme, hledíce k rovnicím (45) a (44), že platí $H_0 > 0$ a $(z_{xx})_0 < 0$ [čili $(z_{yy})_0 < 0$], z čehož plyne, že funkce z má v bodě (x_0, y_0) maximum vnitřní a vlastní. Jestliže konečně platí zároveň nerovnosti (40) a (42), obdržíme $H_0 > 0$ a $(z_{xx})_0 > 0$ [čili $(z_{yy})_0 > 0$]. Má tedy funkce z v bodě (x_0, y_0) minimum vnitřní a vlastní.

Poznámka. Platí-li rovnost $J_0 = 0$, je také vzhledem k rovnicím (45) $H_0 = 0$, což znamená, že nastává případ pochybný.

*) J. Hadamard, l. c.

6. **Příklady.** 1. *Jest určiti krajní hodnoty funkce*

$$z = \frac{3a^2xy - x^2y^2}{x + y}, \tag{46}$$

kde a je dané číslo reálné, nikoli rovné nule. Funkce z proměnných x, y je definována v celé rovině xy, vyjímaje body přímky

$$x + y = 0. \tag{47}$$

Řešení. Označme přímku (47) písmenem l. Tato přímka dělí rovinu xy na dvě poloroviny. Označme znakem Δ_1 polorovinu, která obsahuje úhel kladných smyslů os souřadných, znakem Δ_2 druhou polorovinu, při čemž v každé polorovině Δ_1 a Δ_2 všechny body přímky l podle předpokladu jsou vyloučeny. V každé polorovině takto sestrojené má funkce z všechny parciální derivace prvního a druhého řádu spojité. Ježto funkce z závisí jen na a^2, lze v rovnici (46) nahraditi a hodnotou $|a|$. Jinými slovy, lze pokládati a za číslo kladné.

Derivujeme-li rovnici (46) podle x a y, obdržíme

$$z_x = \frac{y^2(3a^2 - 2xy - x^2)}{(x + y)^2}, \quad z_y = \frac{x^2(3a^2 - 2xy - y^2)}{(x + y)^2}.$$

Položíme-li z_x a z_y rovno nule, obdržíme

$$y^2(3a^2 - 2xy - x^2) = 0, \quad x^2(3a^2 - 2xy - y^2) = 0. \tag{48}$$

Soustava rovnic (48) je obecně ekvivalentní těmto čtyřem soustavám:

$$y^2 = 0, \quad x^2 = 0 \tag{I}$$

$$y^2 = 0, \quad 3a^2 - 2xy - y^2 = 0 \tag{II}$$

$$3a^2 - 2xy - x^2 = 0, \quad x^2 = 0 \tag{III}$$

$$3a^2 - 2xy - x^2 = 0, \quad 3a^2 - 2xy - y^2 = 0 \tag{IV}$$

Soustava (I) dává řešení $x = 0$, $y = 0$, které nevyhovuje, ježto bod $(0, 0)$ leží na přímce l. Soustavy (II) a (III) vedou k rovnostem $y = a = 0$ a $x = a = 0$, jež jsou nemožné, ježto číslo a je podle předpokladu kladné. Zbývá tedy jen soustava (IV). Odečteme-li v ní první rovnici od druhé, obdržíme

$$x^2 - y^2 = 0, \text{ čili } (x + y)(x - y) = 0.$$

Ježto první činitel nemůže býti roven nule, je

$$x = y. \tag{49}$$

Rovnice (49), kombinovaná s jednou nebo druhou z rovnic (IV), dává tato dvě řešení

$$x = a, \quad y = a \tag{50}$$

$$x = -a, \quad y = -a. \tag{51}$$

Vyzkoušení řešení (50). Položíme-li

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{y^2}{(x+y)^2}, \quad u = 3a^2 - 2xy - x^2, \\ p &= \frac{x^2}{(x+y)^2}, \quad v = 3a^2 - 2xy - y^2, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

platí

$$z_x = Pu, \quad z_y = pv; \tag{53}$$

$P(a, a) = P_0 = \dfrac{a^2}{4a^2} = \dfrac{1}{4} > 0$, $p(a, a) = p_0 = \dfrac{1}{4} > 0$, $u(a, a) = u_0 =$ $= 0$; $v(a, a) = v_0 = 0$; $u_x = -2x - 2y$, $u_y = -2x$, $v_x = -2y$, $v_y = -2x - 2y$; $H_0 = P_0 p_0 J_0 = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} \left[\begin{vmatrix} -2x - 2y, & -2x \\ -2y, & -2x - 2y \end{vmatrix} \right]_{x=a,\, y=a} =$

$$= \frac{3}{4} a^2 > 0; \quad (z_{xx})_0 = P_0 (u_x)_0 = \frac{1}{4} u_x(a, a) = -a < 0.$$

Je tedy $H_0 > 0$, $(z_{xx})_0 < 0$. Z toho plyne, že funkce (46) nabývá v bodě (a, a) poloroviny Δ_1 maxima $z(a, a) = a^3$ vnitřního a vlastního.

Vyzkoušení řešení (51). Užijeme-li opět rovnic (52) a (53), obdržíme pro $x = -a$, $y = -a$

$$P(-a, -a) = P_0 = \frac{1}{4} > 0, \quad p(-a, -a) = p_0 = \frac{1}{4} > 0,$$

$$u(-a, -a) = u_0 = 0, \; v(-a, -a) = v_0 = 0; \; H_0 =$$

$$= P_0 p_0 \left[\begin{vmatrix} -2x - 2y, & -2x \\ -2y, & -2x - 2y \end{vmatrix} \right]_{x=-a,\, y=-a} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 12a^2 =$$

$$= \frac{3}{4} a^2 > 0, \quad (z_{xx})_0 = P_0 (u_x)_0 = \frac{1}{4} u_x(-a, -a) = \frac{4a}{4} > 0.$$

Má tedy vzhledem k nerovnostem $H_0 > 0$, $(z_{xx})_0 > 0$ funkce (46) v bodě $(-a, -a)$ poloroviny Δ_2 minimum $z(-a, -a) = -a^3$, minimum vnitřní a vlastní.

Poznámka. Příklad právě rozřešený vyjadřuje geometricky velmi známou úlohu: najíti mezi všemi pravoúhlými rovnoběžnostěny o daném povrchu $6a^2$ ten, jehož objem je největší. Odpověď (že je to krychle o hraně a) je dána řešením (50).

2. *Jest určiti krajní hodnoty funkce z definované rovnicí*

$$z = e^{x+y} (x - 2)(y - 1) \tag{54}$$

pro všechny reálné hodnoty x a y.

Řešení. Derivováním rovnice (54) obdržíme

$$z_x = e^{x+y} \cdot (x - 1)(y - 1), \quad z_y = e^{x+y} \cdot (x - 2)\, y.$$

Soustava rovnic $z_x = 0$, $z_y = 0$ je ekvivalentní soustavě

$$(x - 1)(y - 1) = 0, \quad (x - 2)y = 0,$$

jež dává řešení

$$x = 1, \ y = 0, \tag{55}$$

$$x = 2, \ y = 1. \tag{56}$$

Řešení (55). Položíme-li

$$P = e^{x+y} \, . \, (y - 1), \ u = x - 1, \ p = e^{x+y} (x - 2), \ v = y,$$

obdržíme

$$z_x = Pu, \ z_y = pv; \ P_0 = P(1, 0) = -e, \ p_0 = p(1, 0) = -e;$$

$$u_0 = u(1, 0) = 0, \ v_0 = v(1, 0) = 0; \ u_x = 1, \ u_y = 0, \ v_x = 0, \ v_y = 1;$$

$$H_0 = P_0 p_0 J_0 = (-e)(-e) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^2 > 0, \ (z_{xx})_0 = P_0(u_x)_0 =$$

$$= -e \, . \, 1 = -e < 0.$$

Nerovnosti $H_0 > 0$ a $(z_{xx})_0 < 0$ ukazují, že funkce (54) má v bodě (1, 0) maximum $z(1, 0) = e$ vnitřní a vlastní.

Řešení (56). Položíme-li

$$P = e^{x+y}(x - 1), \ u = y - 1, \ p = e^{x+y}y, \ v = x - 2,$$

vypočteme

$$z_x = Pu, \ z_y = pv; \ P_0 = P(2, 1) = e^3, \ p_0 = p(2, 1) = e^3;$$

$$u_0 = u(2, 1) = 0, \ v_0 = v(2, 1) = 0; \ u_x = 0, \ u_y = 1, \ v_x = 1, \ v_y = 0;$$

$$H_0 = P_0 p_0 J_0 = e^3 \, . \, e^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -e^6 < 0.$$

Vzhledem k nerovnosti $H_0 < 0$ nemá funkce (54) v bodě (2, 1) ani maxima ani minima.

3. *Jest určiti krajní hodnoty funkce z definované pro všechny reálné hodnoty proměnných x a y rovnicí*)*

$$z = xe^{y + x \sin y}. \tag{57}$$

Řešení. Soustava rovnic

$$z_x = e^{y + x \sin y}(x \sin y + 1) = 0, \ z_y = x \, . \, e^{y + x \sin y}(1 + x \cos y) = 0$$

redukuje se na ekvivalentní soustavu (předpoklad $x = 0$ odporuje rovnici $z_x = 0$)

$$x \sin y + 1 = 0, \ 1 + x \cos y = 0. \tag{58}$$

Píšeme-li tuto soustavu v tvaru

$$\sin y = \cos y = -1/x,$$

*) V. Vera Šiv, Sbírka cvičení a úloh z počtu diferenciálního a integrálního (rusky), 1899, sv. I., str. 102, úl. 17.

nalezneme posloupnost hledaných kořenů

$$y = y_0 = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x = x_0 = (-1)^{k+1}\sqrt{2},$$

kde k je libovolné číslo celé.

Položíme-li

$$P = e^{y+x\sin y}, \quad u = x\sin y + 1, \quad p = xe^{y+x\sin y}, \quad v = 1 + x\cos y,$$

obdržíme

$z_x = Pu$, $z_y = pv$; $P_0 = P(x_0, y_0) = e^{y_0+x_0\sin y} > 0$; $p_0 = p(x_0, y_0) = x_0 e^{y_0+x_0\sin y_0} \neq 0$ (ježto $x_0 \neq 0$); $u_x = \sin y$, $u_y = x\cos y$, $v_x = \cos y$, $v_y = -x\sin y$;

$$H_0 = P_0 p_0 J_0 = e^{2y_0+2x_0\sin y_0} x_0 \cdot \begin{vmatrix} \sin y_0 & x_0\cos y_0 \\ \cos y_0 & -x_0\sin y_0 \end{vmatrix} =$$

$$= -x_0^2 e^{2y_0+2x_0\sin y_0}.$$

Odtud plyne, vzhledem k nerovnosti $x_0 \neq 0$, pro každé řešení $x = x_0$, $y = y$ soustavy (58)

$$H_0 = -x_0^2 e^{2y_0+2x_0\sin y_0} < 0.$$

Nemá tedy funkce (57) krajní hodnoty pro žádnou hodnotu proměnných x, y.

*

Sur les conditions suffisantes dans la théorie des extrema des fonctions.

(Extrait de l'article précédent.)

Ces conditions sont exprimées par les théorèmes suivants:

I. Soient

$$y = f(x) \text{ et}$$

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$$

$2n-1$ fonctions d'une variable x qui sont définies dans un intervalle donné et qui satisfont aux relations

$$y' = p_1 u_1,\ u'_1 = p_2 u_2, \ldots, u_i' = p_{i+1} u_{i+1}, \ldots, u'_{n-2} = p_{n-1} u_{n-1}.$$

Les fonctions $y, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sont, par hypothèse, au moins une fois, et les fonctions p_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ respectivement $(n-i)$-fois dérivables dans l'intervalle donné. Supposons que la dérivée $y'(x)$ ait une racine c à l'intérieur de l'intervalle donné, les fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ satisfaisant pour $x = c$ aux relations

$$p_1(c) \neq 0,\ p_2(c) \neq 0, \ldots, p_{n-1}(c) \neq 0, \tag{13}$$

$$u_2(c) = u_3(c) = \ldots = u_{n-2}(c) = 0, \tag{14}$$

$$u'_{n-1}(c) \neq 0. \tag{15}$$

Le nombre entier n est, par hypothèse, égal au moins à 2, les trois dernières relations se réduisant pour $n = 2$ aux inégalités $p_1(c) \neq 0$, $u'_1(c) \neq 0$. Cela posé, si n est un nombre impair, la fonction y n'a pas d'extremum pour $x = c$. Si n est un nombre pair et que le produit $p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c)$ (différent de zéro en vertu des inégalités (13) et (15)) satisfait à la condition

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c) < 0,$$

la fonction y atteint pour $x = c$ un extremum maximum intérieur et propre. Si n est pair et que l'on a

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c) > 0,$$

la fonction y atteint pour $x = c$ un extremum minimum intérieur et propre.

II. Soit

$$z = f(x, y)$$

une fonction des variables indépendantes x et y qui a toutes les dérivées partielles du premier et du second ordre continues dans un domaine à deux dimensions D, où elle est définie. Par hypothèse, le système d'équations

$$z_x = 0, \; z_y = 0$$

a une solution $x = x_0$, $y = y_0$, le point x_0, y_0 étant situé à l'intérieur du domaine D. De plus, les dérivées partielles z_x et z_y peuvent s'exprimer dans le domaine D au moyen des équations

$$z_x = Pu, \; z_y = pv,$$

P, u, p, v étant des fonctions des variables x, y qui ont dans le domaine D des dérivées finies du premier ordre. En particulier, les fonctions P et p satisfont, par hypothèse, aux inégalités $P_0 \neq 0$, $p_0 \neq 0$. Toutes ces hypothèses étant remplies on a, en posant $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)} = J$, les propositions suivantes. Si l'on a $P_0 p_0 J_0 < 0$, la fonction n'a pas d'extremum au point (x_0, y_0). Si l'on a, au contraire,

$$P_0 p_0 J_0 > 0, \tag{40}$$

la fonction z a au point (x_0, y_0) un extremum intérieur et propre. En ce cas, les nombres $P_0(u_x)_0$ et $p_0(v_y)_0$ sont différents de zéro et on le même signe. Si la relation (40) est satisfaite et que l'on a, de plus, $P_0(u_x)_0 < 0$ (ou, ce qui est une condition équivalente, $p_0(v_y)_0 < 0$), la fonction z a au point (x_0, y_0) un maximum intérieur et propre. Si la relation (40) est satisfaite et que de plus on a $P_0(u_x)_0 > 0$ (ou, ce qui est une condition équivalente, $p_0(v_y)_0 > 0$), la fonction z a au point (x_0, y_0) un minimum intérieur et propre.

Ces deux théorèmes sont appliqués à plusieurs problèmes spéciaux.

O vlivu valence iontů na průběh křivky elektrokapilární. (Výtah z disertace.)

R. N. Dr. Sestra *T. Marešová.*

(Došlo 15. března 1930.)

Vliv valence iontů na průběh elektrokapilární křivky byl studován experimentálně metodou Kučerovou za přístupu vzduchu ve vodních roztocích různých elektrolytů. Ukázalo se, že valence iontů na průběh křivky elektrokapilární vlivu nemá.

Zabývajíc se studiem zjevů elektrokapilárních po stránce teoretické i experimentální, shledala jsem, že většina zkoumání se dála na chloridech a síranech a že hlavně byly řešeny otázky, jež se týkají průběhu elektrokapilární křivky vůbec a úchylek téže křivky experimentem získané od křivky teoretické, t. j. od „ideální paraboly Lippmannovy". Pokud jsem v literatuře našla, bylo experimentálně zjištěno, že:

1. elektrokapilární křivka není nikdy úplně symetrická (8), (9);
2. průběh jmenované křivky závisí jednak na povaze rozpuštěné látky, jednak na koncentraci roztoku (9);
3. průběh elektrokapilární křivky závisí na povaze aktivního aniontu resp. kationtu (9), (8), (10), (4);
4. na vzestupné větvi křivky jeví se při dynamické metodě Kučerově vedle obvyklých anomalií, jako jsou posun a deprese maxima, ještě „anomalie Kučerovy", jež jsou tím markantnější, čím jsou roztoky zředěnější a čím pomaleji se kapky tvoří (4);
5. příčinou anomalií Kučerových jest adsorpce atmosférického kyslíku v mezipovrchu Hg/roztok (7).

Po těchto předběžných informacích předložila jsem si otázku: „Má-li valence iontů vliv na průběh křivky elektrokapilární?" — Řešení tohoto problému provedla jsem experimentálně; volila jsem ke zkoumání dvě řady elektrolytů:

I. řada: Jednomocný kation kalia $K^{\cdot}$ tvoří s anionty jedno- až čtyřmocnými tyto soli: $K^{\cdot}\,Cl'$, $K^{\cdot}_2\,(SO_4)''$, $K^{\cdot}_3\,[Fe(CN)_6]'''$ resp. $Na^{\cdot}_3\,(PO_4)'''$, $K^{\cdot}_4\,[Fe(CN)_6]''''$.

II. řada: Jedno- až čtyřmocný kation dává s jednomocným aniontem kyseliny dusičné $(NO_3)'$ tyto soli: $K^{\cdot}(NO_3)'$, $Ba^{\cdot\cdot}(NO_3)_2'$, $Al^{\cdot\cdot\cdot}(NO_3)_3'$, $Th^{\cdot\cdot\cdot\cdot}(NO_3)_4'$.

I. Volba metody.

Na měření povrchového napětí je metod několik. Dvou z nich, Lippmannovy a Kučerovy, se nejvíce užívá. Uvedu, proč volím druhou.

a) Lippmann (1) užívá metody statické: z pohybu menisku rtuti v kapiláře soudí na povrchové napětí. Meniskus, který změnil v kapiláře následkem variace povrchového napětí svou polohu, uvádí Lippmann do původní polohy tlakovým zařízením a vyšetřuje tento tlak. Klade pak povrchové napětí úměrno tomuto tlaku a nanáší na osu y-ovou tlak v *mm* Hg a na osu x-ovou vnější polarisující E. M. S. ve voltech. Tak dostává elektrokapilární křivku. Uvedenou metodu modifikoval Quincke (2), (3). Této modifikované metody jsem užívala při orientačních měřeních. Shledala jsem, že citovaná metoda má jisté výhody, zejména ty, že se spotřebuje celkem málo rtuti a že lze dosti rychle měřiti. Zdála se mi však málo přesnou u přirovnání s metodou „kapkovou", která je však dosti zdlouhavá.

b) Metodu „kapkovou" zavedl r. 1903 profesor české university v Praze, B. Kučera (4), aby jí stanovil mezipovrchové napětí rtuti v roztocích tím, že váží kapky rtuti, jež vykapává z úzké kapiláry v roztoku zkoumaném. Metoda Kučerova považuje váhu kapky za úměrnou povrchovému napětí. To je princip této metody, kterou lze u přirovnání s metodou Lippmannovou nazvati dynamickou.

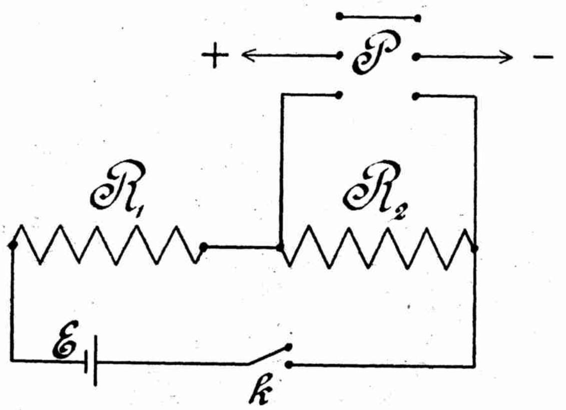
Zda lze jen tak jednoduše souditi o závislosti váhy kapky na povrchovém napětí, o tom jsou teoretikové ve sporu a názory jejich se rozcházejí. Teorie vykapávání je velmi těžká a dosud se nepodařilo vypsati tuto závislost vzorcem, jenž by ji úplně a správně vyjadřoval.

Pro můj účel, kde jen srovnávám povrchová napětí, postačí, kladu-li povrchové napětí úměrno váze kapky. Opírám se při tom jednak o práci Rayleighovu (5), jednak o vztah odvozený Lohnsteinem (6):

$G = 2\pi r \,.\, \gamma \,.\, f(r/x)$, kde znamená: G váhu kapky, r poloměr kapiláry, γ povrchové napětí, x kapilární konstantu, danou relací $\gamma = \frac{1}{2}\, x^2 \varrho$, kdež ϱ je specifická hmota látky, jejíž povrchové napětí určujeme. — V úpravě Kučerově je následkem velmi malého otvoru vytažené kapiláry veličina r/x velmi malá; tudíž bude $f(r/x)$ hodnota blízká jedné a při změně povrchového napětí γ, jež ve vzorci intervenuje v x, následkem malého r málo se projeví, takže i $f(r/x)$ málo se změní. Opírám se též o dosavadní zkušenost, která — ačkoliv těch veličin, které mají vliv na váhu kapky, jest mnoho a málo jich je známo — zdá se potvrzovati fakt, že váha kapky, když je vztahujeme na tutéž kapiláru a na tutéž vždy stejnou dobu kapkovou, je velmi přesně úměrna povrchovému napětí zkoušené kapaliny. Metoda ,,kapková" je přesnější jiných, neboť udává tak malé změny povrchového napětí, že by se jinými metodami těžko daly dokázati. — K elektrokapilární křivce dospěji pak tím, že budu nanášeti na osu x-ovou polarisující E. M. S. ve voltech, na osu y-ovou váhu 50 kapek rtuti v *mg*.

II. Experimentální uspořádání.

Měření prováděla jsem přesně podle aparatury, jak jí užíval prof. Kučera (4).



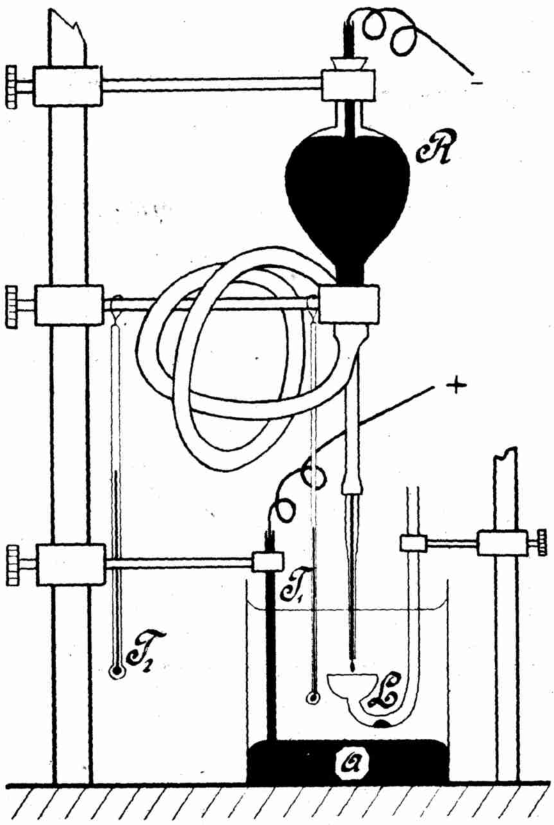
Obr. 1.

Zdrojem proudu byl Edisonův akumulátor, o jehož konstantní elektromotorické síle 1·4 voltu jsem se přesvědčila před každým měřením. Spádu napětí bylo dosaženo dvěma kolíčkovými reostaty, jejichž úhrnný odpor činil $R_1 + R_2 = 1400\ \Omega$, takže $100\ \Omega$ odpovídalo spádu 0·1 voltu. V několika málo případech pouze byla E. M. S. = 1·38 voltu; podle toho byl pak též úhrnný odpor upraven, aby opět každou změnou o $100\ \Omega$ změnila se E. M. S. právě o 0·1 voltu. Schema zapojení podává obraz 1.

Ze svorek R_2 odváděla jsem proud přes přepinač P na obě elektrody. Tím bylo umožněno buď zavésti polarisaci nebo spojiti obě elektrody ,,na krátko".

Rtuť, jíž bylo užíváno, byla propírána v roztoku HNO_3 as třikráte za sebou, potom ve vodě destilované a konečně byla destilována (aparát destilační sestaven podle návodu Strouhalova (11)).

Soli, jichž roztoky byly zkoumány, byly od fy Merck, původní balení, „pro analysi“.



Obr. 2.

Vodní roztoky byly připraveny vždy těsně před vlastním měřením až na ojedinělé případy, což vždy uvedu. Roztoky byly přechovávány v nádobách se zabroušenými zátkami.

Kapilární elektroda je velmi malá, aby platil předpoklad, že všecka síla polarisující působí na kapilární elektrodě, neboť je jasno, že množství elektrické, které způsobuje v kapilární elektrodě polarisaci, nezpůsobí na daleko větší ploše anody znatelné polarisace. Kapilára, jež sloužila za elektrodu, byla vytažena ze skleněné trubice průměru circa několik desetin milimetru až celý *mm*. Byla vyzkoušena celá řada kapilár, až byla nalezena taková, která (zatím v destilované vodě) kapala v intervalech dosti dlouhých. V různých roztocích tvoří se kapičky s různou rychlostí. Ve zvolených elektrolytech vznikaly kapičky tak, že 50 kapek se utvořilo přibližně za 210—220 sec. Výjimku toliko činil roztok $Na^{\cdot}_3(PO_4)'''$, jak bude uvedeno. — I tehdy, když jsem nezkoumala určitého roztoku, kapala rtuť z kapiláry pod destilovanou vodou, tedy ustavičně. Průměr ústí kapilárky asi 10^{-3} *cm*. Kapilára byla tlustostěnnou trubicí kaučukovou spojena s reservoirem rtuti. (Celé uspořádání podává obraz 2.)

Do reservoiru R, jakož i do klidné rtuti na dně A byly vloženy elektrody upravené takto: Přívodní drát měděný byl zbaven isolace, jemným smirkem obroušen, potřen $HgCl_2$, hojně opláchnut, destilovanou vodou a ponořen do úzké skleněné nádoby válcovité rtutí naplněné, do jejíhož dna zataven byl Pt — drát. Takto upravená elektroda prochází zátkou, jež těsně uzavírá reservoir rtuti. Stejně druhá elektroda ponořena do nádoby s elektrolytem tak, aby platinový drátek byl cele ve rtuti.

Vše upevněno na stativu, aby se během měření poměry neměnily. Reservoir vyzdvižen do takové výše, že se kapičky tvořily rychlostí, jak již uvedeno.

Kaučukové trubice byly před použitím vyvařeny ve vodním roztoku sody a pročištěny vodní parou.

Skleněné části byly velmi pečlivě propláchnuty koncentrovanou HCl, vymyty „chromovou směsí", hojně promyty destilovanou vodou a horkým vzduchem vysušeny.

Nádoba, v níž byl elektrolyt, byla planparalelní a těchto rozměrů: 10 : 10·5 : 3·5 . . . *cm*. Než byla nádoba definitivně naplněna novým roztokem, byly všechny části, jež s ním přijdou ve styk (lžička, elektroda, teploměr a nádoba sama), opláchnuty tímto novým roztokem.

Kapičky zachycovala jsem do skleněné lžičky L, jež byla připevněna ke stativu tak, že bylo možno podle potřeby ji posunouti pod kapiláru nebo ji vyndati.

Temperatura roztoku byla odčítána na teploměru T_1, jenž byl upevněn blízko kapiláry. — Temperatura laboratoře (T_2) zjištěna na počátku a konci každého měření. Diference během měření někdy 1° C.

Celý kapkový aparát byl sestaven na okenní kamenné desce laboratoře fysikálního ústavu, kde účinky otřesu byly velmi nepatrné.

III. Měření.

Obecné poznámky. Uvádím roztoky v pořadí, jak časově byly zkoumány. Číselných tabulek pro nedostatek místa neuvádím vůbec, z grafů jen ty, jež obsahují výsledek nebo něco zvláště zajímavého. Kompletně je obojí obsaženo v disertaci. Ježto jedno proměření elektrolytu trvalo průměrně 5 hodin, byly křivky měřeny v různé dny a tudíž při různých temperaturách. Číslování grafů i jednotlivých křivek ponecháno jako v disertaci. — Následují jednotlivá měření.

Vodní roztok K·Cl′.

E. M. S. = 1·35 voltu při roztocích *n*/10, *n*/100, *n*/500;
E. M. S. = 1·4 „ „ roztoku *n*/1000.

Temp. síně	19° C ...	*n*/10 ...	Temp. rozt.	18·5° C.
„ „	19·2° C ...	*n*/100 ...	„ „	19° C.
„ „	21° C ...	*n*/500 ...	„ „	20·8° C.
„ „	20° C ...	*n*/1000 ...	„ „	20° C.

Průběh měření normální. Dostávám křivky celkem hladké. S rostoucím zředěním jeví se zřetelně deprese maxima a jeho posun směrem vpravo; též větev vzestupná je značným poklesem povrchového napětí deformována. Větev sestupná neukazuje nic zvláštního.

Vodní roztok $K^{\cdot}_{2}(SO_4)''$.

E. M. S. stále 1·4 voltu.

Temp. síně	19° C ...	*n*/10 ...	Temp. rozt.	19° C.
„ „	20° C ...	*n*/100 ...	„ „	19·8° C.
„ „	19·8° C ...	*n*/1000 ...	„ „	19·5° C.
„ „	19·2° C ...	*n*/500 ...	„ „	19° C.
„ „	19° C ...	*n*/1 ...	„ „	19° C.

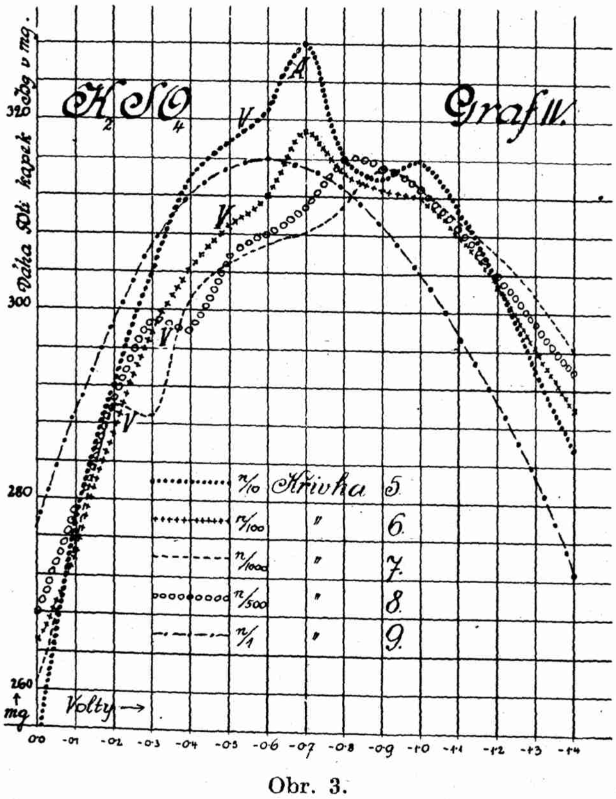
Nejprve zkoušeny koncentrace *n*/10, *n*/100, *n*/1000; potom teprve *n*/500. Křivka 8. (*n*/500) — viz obraz 3 — zapadne dosti dobře mezi křivky 6, 7, kam podle koncentrace roztoku náleží.

Křivky vykazují různé vypnuliny na větvi vzestupné: jsou to známé „anomalie Kučerovy“ (*A*). Zajímavo je, že s rostoucím zředěním stává se vypnulina *V* nejen markantnější, ale že i postupuje směrem k počátku. Na konec ještě proměřen roztok *n*/1 (křivka 9); tentokráte užila jsem za rozpouštědlo vody destilované, dvakráte převařené. Dostávám křivku úplně hladkou. Provedené měření je novým dokladem působení aniontu na větvi kladné.

Vodní roztok $K^{\cdot}_{4}\,[Fe(CN)_6]''''$.

E. M. S. stále 1·4 voltu.

Temp. síně	18·2° C . . .	$n/10$	. . . Temp. rozt.	18°	C.
,,	,, 17·6° C . . .	$n/100$	. . . ,,	,, 17·5°	C.
,,	,, 18° C . . .	$n/1000$	. . . ,,	,, 18°	C.
,,	,, 20·5° C . . .	$n/5000$	. . . ,,	,, 20°	C.
,,	,, 20° C . . .	$n/500$	. . . ,,	,, 19·8°	C.



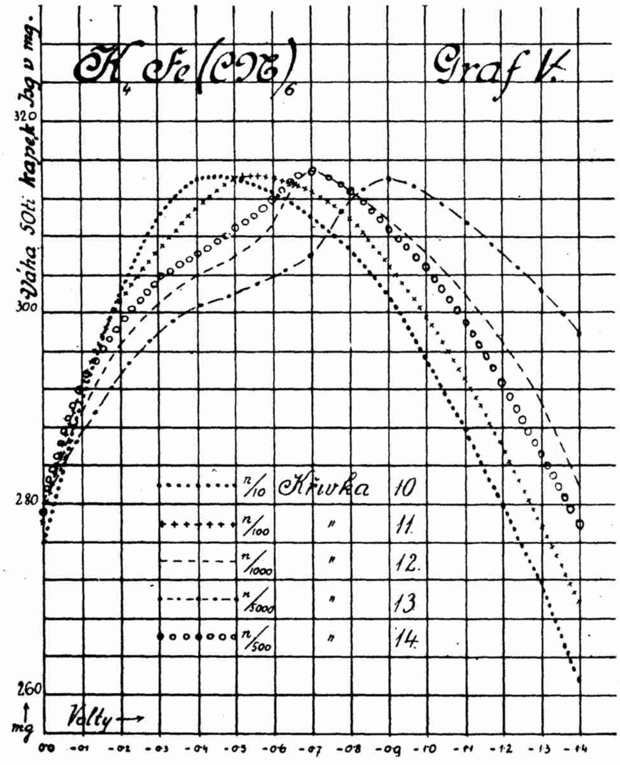
Obr. 3.

Nejprve zkoušeny koncentrace $n/10$ a $n/100$; křivky 10 a 11 (viz obr. 4) jsou hladké, normální. Maximum křivky 10 je při — 0·45 voltu, při další křivce 11 již je vpravo posunuto a nastává při — 0·55 voltu. Na křivkách dalších 12 a 13 je viděti deformaci větve kladné; opět posun maxima v témž směru. Zvláštní je, že hodnota maxima je u všech pěti koncentrací téměř táž. — Na konec zkoumala jsem $n/500$ roztok; křivka 14 velmi dobře zapadá mezi křivky 11 a 12 a je již deformována na vzestupné části. Z grafu je viděti, jak s rostoucím zředěním křivky se „rozevírají“, kdežto při malých polarisacích větve kladné téměř splývají.

Vodní roztok $Ba^{\cdot\cdot}(NO_3)_2'$.

E. M. S. stále 1·4 voltu.

Temp. síně 16·5° C . . .	$n/10$	. . . Temp. rozt.	16·6° C.
„ „ 17·6° C . . .	$n/100$	. . . „ „	17·6° C.
„ „ 17° C . . .	$n/1000$	. . . „ „	17° C.



Obr. 4.

Při měření nebylo pozorováno nic zvláštního. Z roztoku $n/10$ odebrána křivka 6. března, z roztoku $n/100$ hned 8. března, avšak z $n/1000$ roztoku teprve 24. března. V té době vyměnila jsem rtuť v reservoiru rtutí znova promytou a předestilovanou. Též tato křivka probíhá jako druhé dvě normálně a je hladká.

Vodní roztok $K^{\cdot}NO_3'$.

E. M. S. stále 1·4 voltu.

Temp. síně 17° C ... $n/10$ ... Temp. rozt. 17° C.
„ „ 17·2° C ... $n/100$ ... „ „ 17° C.
„ „ 18° C ... $n/1000$ ... „ „ 17·8° C.

Měření probíhalo normálně, neposkytujíc nic zvláště zajímavého. Z roztoků $n/10$ a $n/100$ odebrány křivky téhož dne a je nápadné, že probíhají téměř paralelně. Z roztoku $n/1000$ odebrána křivka dne následujícího. Na ní již se jeví deformace větve vzestupné (prudký pokles povrchového napětí), kdežto sestupná je opět rovnoběžná s ostatními. Podle teorie byl by to nějaký povrchově aktivní anion, jenž se zde uplatňuje a způsobuje náhlý pokles povrchového napětí a posun maxima.

Vodní roztok $K_3^{\cdot}\,[Fe(CN)_6]'''$.

E. M. S. stále 1·4 voltu.

Temp. síně 19° C .... $n/10$ ... Temp. rozt. 18·8° C.
„ „ 20° C .... $n/100$ ... „ „ 18·5° C.

Zkoumán roztok $n/10$. Hned od počátku jsem znamenala, že kapičky rtuti, vpadší do lžičky, nesplývají v jednu, jsouce silně obaleny roztokem. Teprve po vynětí a osušení filtračním papírem splynuly. Naměřeno pouze pět hodnot, křivka klesá; měření přerušeno. Hned zkoumán $n/100$ roztok; křivka je neobyčejně deformována, avšak přece stoupá. Po době jednoho měsíce (zatím zkoumán roztok $Al^{\cdots}(NO_3)_3{}'$) opět jsem se zabývala roztokem $K_3^{\cdot}\,[Fe(CN)_6]'''$ a vyšetřovala zase $n/10$ roztok. Dostávám opět křivku klesající, s onou, jež byla před měsícem odebrána, v prvních pěti hodnotách paralelní. Ježto červená krevní sůl okysličuje rtuť jsouc silným oxydačním činidlem, nebyla další měření konána. Místo této soli s aniontem trojmocným $[Fe\,(CN)_6]'''$ volena jiná, a to $Na^{\cdot}_3(PO_4)'''$.

Vodní roztok $Al^{\cdots}(NO_3)_3{}'$.

E. M. S. stále 1·4 volt.

Temp. síně 19° C ... $n/10$ ... Temp. rozt. 18·8° C.
„ „ 20·3° C ... $n/100$ ... „ „ 20° C.
„ „ 20° C ... $n/1000$ ... „ „ 20° C.
„ „ 19·8° C ... $n/500$ ... „ „ 19·5° C.

Při zkoumání vodního roztoku $Al^{\cdots}(NO_3)_3{}'$ pozorováno nejprve, že kapičky rtuti ve lžičce nesplývají. To se jeví tím dříve, čím zředěnější je roztok:

při $n/10$ rozt. splynou ještě dosti dobře;
„ $n/100$ „ je třeba mírně poklepati od polarisace — 0·5 voltu počínaje;
„ $n/500$ „ nesplynou od polarisace — 0·5 voltu počínaje ani po poklepání;
„ $n/1000$ „ nesplynou vůbec hned od počátku.

Úkaz souvisí s hydrolysou; je přítomen kolloidní $Al^{\cdots}(OH)_3'$, jenž se adsorbuje na kapičkách rtuti, které pak nemohou splynouti. — Zajímavý je průběh křivek. K roztoku *n*/10 náleží křivka hladká, jež se velmi blíží křivce Lippmannově; maximum má při — 0·85 voltu. S rostoucím zředěním však maximum pravidelně stoupá a posouvá se vpravo. Před maximem je vždy zřetelná deprese povrchového napětí, jež je tím zřetelnější, čím je roztok řidší.

Vodní roztok $Th^{\cdots\cdot}(NO_3)_4'$.

E. M. S. stále 1·4 voltu.

Temp. síně	18·2° C	. . . *n*/10	. . . Temp. rozt.	18° C.	
,, ,,	18° C	. . . *n*/100	. . . ,, ,,	17° C.	
,, ,,	19° C	. . . *n*/1000	. . . ,, ,,	18·5° C.	

Měření toto časově následovalo po druhém pokusu s červenou krevní solí, po němž byla nádoba velmi pečlivě vyčištěna. Zkoumány roztoky v uvedených koncentracích. Opět následkem silné hydrolysy tvoří se kolloidní $Th^{\cdots\cdot}(OH)_4'$ a adsorbuje se na kapičkách; odtud jejich nesplývání. Křivky, příslušející roztokům *n*/10 a *n*/100, jsou normální, hladké. Třetí křivka (*n*/1000) ukazuje značnou a prudkou depresi těsně před maximem (viz obr. 5). Hodnoty při E. M. S. = — 0·7 voltu, — 0·8 voltu byly měřeny dvakráte za sebou a vždy vážilo 50 kapek 301 *mg*, resp. 296 *mg*. Hodnota při E. M. S. = — 0·9 voltu byla též kontrolována, ale až po skončeném měření. Po prvé vážilo 50 kapek 295·4 *mg*, po druhé 298 *mg*, tedy asi o 3 *mg*, což je asi 1%, více. Hodnota pro E. M. S. = — 0·8 voltu ještě po třetí měřena a opět naváženo 296 *mg* jako po prvé a po druhé. Jsou tedy hodnoty v místech prudké deprese relativně dosti zaručeny.

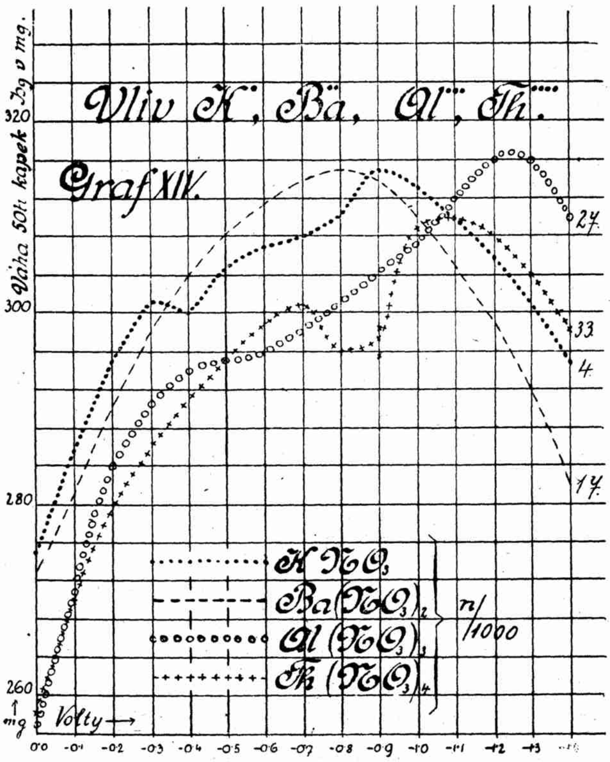
Vodní roztok $Na_3{\cdot}(PO_4)'''$.

E. M. S. stále 1·4 voltu.

Temp. síně	19° C	. . . *n*/10	. . . Temp. rozt.	19° C.	
,, ,,	19·5° C	. . . *n*/100	. . . ,, ,,	20° C.	
,, ,,	22° C	. . . *n*/1000	. . . ,, ,,	21·5° C.	

Tuto sůl jsem volila, abych doplnila řadu solí s různomocnými anionty, jelikož jsem z ní vyloučila komplexní sůl $K_3{\cdot}[Fe(CN)_6]'''$.

Avšak hned první měření dala opět křivky deformované. Roztok *n*/10 zkoumán 4kráte po sobě. S počátku všechny křivky klesají. Kdyby nebylo u některých z nich stoupání, od polarisace — 0·4 voltu počínajíc, zdálo by se, že dostávám pouze část sestupné větve křivky elektrokapilární, jejíž maximum leží v kladné polarisaci. Tomu by též nasvědčovala křivka další, kde jsem zkusila též kladnou polarisaci. — Avšak není dosti jasné, proč by trojmocný anion měl se chovati tak abnormálně, když při studiu dvoja čtyřmocného nic takového nebylo pozorováno. Proto jsem opět ceteris paribus zkoušela roztok K·Cl′, jenž byl měřen hned na počátku a dával zcela normální křivku, a ukázalo se totéž, co u roztoku $Na_3\cdot(PO_4)'''$. Totéž dala zkouška s roztokem $K_2\cdot(SO_4)''$.



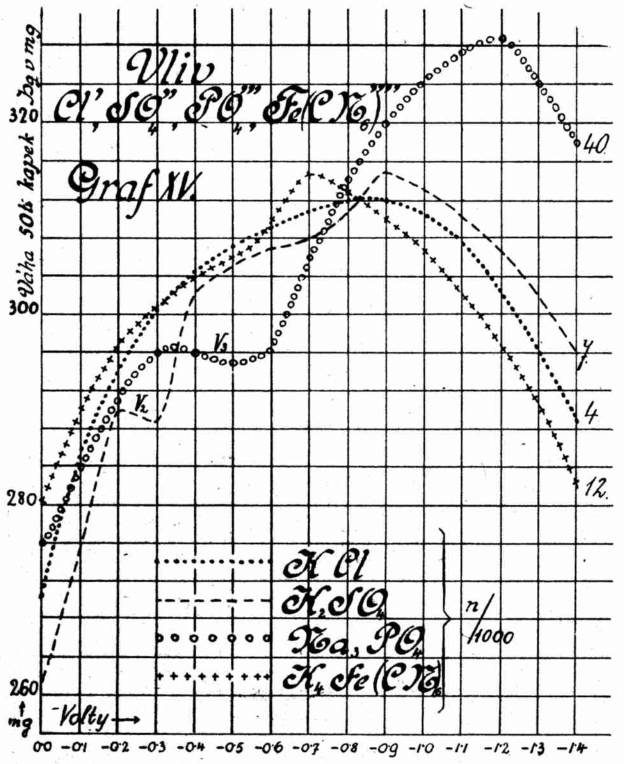
Obr. 5.

I bylo jasno, že nemůže zde hráti roli nějaká specifická vlastnost trojmocného aniontu. Vzala jsem tedy jinou kapiláru. Reservoir vyzdvižen do takové výše, aby byly stejné poměry tlakové jako dříve. Rychlost, se kterou se kapičky tvořily ve vodě destilované, přibližně táž jako dosud, v roztoku však větší: 50 kapek za 197·5 sec. Dostávám nyní pro roztoky $n/10$, $n/100$ křivky celkem hladké; křivka příslušející $n/1000$ roztoku má opět značnou a prudkou depresi před maximem.

IV. Diskuse výsledků.

a) Vykonaná měření metodou Kučerovou ukazují a znova potvrzují, co dosud bylo známo o průběhu elektrokapilární křivky:

1. že není nikdy úplně symetrická (křiv. 9, 10, 11);
2. že průběh křivky závisí na koncentraci roztoku (křiv. 10, 13);
3. že o průběhu rozhoduje povaha povrchově aktivního aniontu (křiv. 7, 12);



Obr. 6.

4. na větvi vzestupné jeví se „anomalie Kučerovy" velmi jasně, je-li koncentrace roztoku malá (obr. 3, 5, 6).

b) Výsledek hlavní:

O průběhu křivky elektrokapilární, získané metodou „kapkovou" za přístupu vzduchu ve vodních roztocích různých elektrolytů, lze na základě vykonaných měření říci toto:

1. Na vrcholu paraboly vliv valence ani kationtu ani aniontu se nejeví, ježto se v okolí maxima ani prvý ani druhý druh iontů zvláště uplatniti nemůže.

2. Vliv kationtů jeví se na větvi sestupné. Vykreslím-li tedy elektrokapilární křivky získané v $n/1000$ roztocích s různomocnými kationty a přihlížím-li k větvím záporným (viz obr. 5), mohu říci, že sestupné větve neukazují žádné zvláštní nápadné deformace, kterou by bylo možno přičísti na vrub mocenství kationtu.

3. Anionty uplatňují se na větvi vzestupné. Vykreslím tedy křivky získané v $n/1000$ roztocích solí s různomocnými anionty (viz obr. 6). Všimněme si větví kladných:
Vidíme u křivky pro $K^{\cdot}Cl'$, že kladná její větev je hladká a celkem málo deformovaná. Jinak je tomu u křivky pro $K_2^{\cdot}(SO_4)''$; její kladná větev má zřetelnou vypnulinu V_2. U křivky pro $Na_3^{\cdot}(PO_4)'''$ vidíme na kladné větvi vypnulinu V_3 markantnější. Čekali bychom, že křivka pro $K_4^{\cdot}[Fe(CN)_4]''''$ ukáže na kladné větvi největší vypnulinu. Avšak kladná větev křivky pro vodní roztok žluté krevní soli je poměrně málo deformovaná, méně, než táž větev u křivky pro roztoky s aniontem $(SO_4)''$ resp. $(PO_4)'''$.
Nelze tedy říci, že by valence aniontů měla na tyto deformace vliv.

Résumé: Zdá se, že je možno prohlásiti: Valence ani kationtu ani aniontu na průběh elektrokapilární křivky vlivu nemá.

Poznámka: Takto pozorované vlivy iontů týkají se polarisace mezifází komplikované přítomností adsorbovaného kyslíku vzdušného; nelze zatím rozhodnouti, jak daleko působí anionty na adsorpci kyslíku a tím nepřímo na povrchové napětí a jak dalece — a zda vůbec — by působily na mezipovrchové napětí rtuti v roztocích vzduchu dokonale zbavených.

Z II. odd. fysikálního ústavu university Karlovy v Praze.

*

Influence de la valence des ions sur la forme de la courbe électrocapillaire.

(Extrait de l'article précédent.)

Ce problème a été résolu expérimentalement. J'ai choisi deux séries d'électrolytes:

I[e] série: Le cation monovalent $K^{\cdot}$ constitue avec des anions mono- à tetravalents les sels suivants:

$K^{\cdot}Cl'$,
$K^{\cdot}_2(SO_4)''$,
$K^{\cdot}_3[Fe(CN)_6]'''$ resp. $Na^{\cdot}_3(PO_4)'''$,
$K^{\cdot}_4[Fe(CN)_6]''''$.

II^e^ série: Le cation mono- à tetravalent constitue avec l'anion monovalent de l'acide azotique les sels suivants:

$$K^{\cdot}(NO_3)',$$
$$Ba^{\cdot\cdot}(NO_3)_2',$$
$$Al^{\cdot\cdot\cdot}(NO_3)_3',$$
$$Th^{\cdot\cdot\cdot\cdot}(NO_3)_4'.$$

De toutes les méthodes qui conduisent à mesurer la tension superficielle, j'ai choisi celle de Kučera, c'est à dire la méthode „à gouttes". Pour construire la courbe électrocapillaire, j'ai porté la force électromotorique polarisante E. M. S. en abscisse (en volts) et le poids de 50 gouttes de mercure en ordonnée (en *mg*).

Les mesures donnent les résultats suivants sur l'allure de la courbe électrocapillaire qui a été obtenue sous l'accès de l'air par la méthode „à gouttes" dans des solutions aqueuses de divers électrolytes:

1. Ni le cation ni l'anion n'exercent d'influence au sommet de la parabole, parce qu'aucune de ces deux espèces d'ions ne peut intervenir d'une manière efficace aux environs du maximum.

2. L'influence des cations se manifeste dans la branche descendante (négative) de la parabole. Si l'on dessine les courbes électrocapillaires qui apartiennent aux solutions n/1000 contenant des cations aux valences diverses, et si l'on considère les branches négatives, on peut dire que ces branches ne montrent aucune déformation spéciale et remarquable qu'on puisse attribuer à la valence du cation.

3. Les anions entrent en cause dans la branche ascendante (positive). Donc, si l'on dessine les courbes électrocapillaires qui apartiennent aux solutions n/1000 des sels avec des cations aux valences diverses et que l'on étudie les branches positives, il apparaît qu'elles sont déformées, mais nous ne pouvons pas affirmer que ces déformations tiennent à la valence des anions.

Résumé: Il paraît que la valence ni des cations ni des anions n'exerce aucune influence sur l'allure de la courbe électrocapillaire.

Literatura:

(1) Pogg. Ann., 149, 1873.
(2) „ „ 139, 1870.
(3) „ „ 153, 1874.
(4) Drud. Ann., 1903.
(5) Phil. Mag. XLVIII, 1899.
(6) Ann. der Phys. 20, 21, 1906.
(7) Rozpr. II. tř. Čes. Akad., 36, 37, 1928.
(8) Ann. d. chim. et d. phys., (7) 29, 1903.
(9) Freundlich: Kapillarchemie, 1909.
(10) Zeitschrift f. phys. Chemie, 32, 1900.
(11) Strouhal: Mechanika, 1901.

VĚSTNÍK LITERÁRNÍ.

Hilda P. Hudson: **Cremona transformations in plane and space.** Cambridge, University Press 1927; XX, 454 str.

Obsáhlá kniha H. P. Hudsonové je významný čin na poli algebraické geometrie; je to v literatuře první souborný spis o Cremonových transformacích v prostoru dvou- a třírozměrném, podávající skoro úplný přehled tohoto oboru nejen po stránce věcné, nýbrž i historické a bibliografické. Při tom se neomezuje podání příslušných teorií na stav dnešní, nýbrž podává pohledy i do budoucnosti naznačováním neřešených problémů, jimiž bude třeba teorie doplniti.

Stručný obsah vysvítá z nadpisu kapitol a jejích oddílů: I. Náčrt obecné teorie rovinné. II. Věta Clebschova. III. Rovinná transformace kvadratická. (Roviny různé. Roviny totožné. Involuce.) IV. Skládání a rozkládání rovinných transformací. (Problém skládání a rozkládání. Sestrojování tabulek. Vlastnosti charakteristických čísel.) V. Transformace v téže rovině. (Roviny superponované. Involuce.) VI. Speciální rovinné transformace. (Transformace Jonquières-ovy. Jiné speciální transformace.) VII. Rozklad singularit rovinných křivek. VIII. Věta Noetherova. — IX. Náčrt obecné teorie prostorové. X. Transformace obapolně kvadratické. (Prostory různé. Prostory superponované.) XI. Postulace a ekvivalence. XII. Podmínky dotykové. (Body totálního dotyku. Body částečného dotyku. Křivky dotyku.) XIII. Hlavní systém. XIV. Speciální transformace prostorové. (Transformace nízkého stupně. Bilineární transformace kubickokubická. Transformace monoidální. Jiné speciální typy.) XV. Příklad transformace kubicko-bikvadratické. XVI. Rozklad plošných singularit. (Skládání prostorových transformací. Rozklad plošných singularit. Druhá metoda rozkladu. Klasifikace transformací.) XVII. Historie a literatura.

Bibliografie obsahuje tituly a heslovitý obsah 417 pojednání; je velmi úplná, m. j. jsou uvedeny i česky psané práce našich matematiků.

Již názvy kapitol a oddílů ukazují, že se kniha pouští i do nejpodrobnějších partií teorie; k nim náleží na př. obtížné a pracné zkoumání t. zv. dotykových podmínek, které souvisí s otázkou vícenásobných hlavních prvků. Věta Noetherova, jež ovládá teorii rovinnou, je probrána velmi úplně, právě se zřetelem k možnosti vícenásobných hlavních bodů. Zkušenosti, kterou má každý, kdo se někdy zabýval Cremonovými transformacemi, že totiž nejlépe se vnikne do teorie obecné na vhodně voleném příkladu zvláštním, jenž však jeví znaky obecně platné, je užito rozsáhlou měrou, nejen tím, že je podrobnému zkoumání vždy předeslán případ kvadratických transformací, nýbrž i v podrobnostech. Zvláště pracné, ale také obratné je zpracování neuzavřené ještě teorie prostorové, kde se spisovatelka — jež sama přispěla četnými pracemi právě k této teorii — pohybuje s dokonalou znalostí věci a metod i s bystrým pohledem pro naskytající se problémy na samém okraji dnešní algebraické geometrie. V této části teorie ukazuje správně, že tu zbývá mnoho práce i ve zkoumání transformací speciálních, kterážto práce je v oboru rovinném v podstatě provedena.

Jak již bylo řečeno, obsahově kniha vyčerpává svou látku téměř úplně; kde tak nečiní podrobným výkladem, alespoň naznačuje cestu a odkazuje k literatuře. Z celého rozsáhlého oboru, jímž se zabývá, snad jediná část je vynechána; otázka (konečných i nekonečných) grup Crtemonových transformací; avšak i pro tuto partii, v níž — hlavně v prostoru — je dosti neřešených problémů, uvádí alespoň literaturu. Prostorů vícerozměrných se kniha nedotýká.

Kniha má známou úpravu cambridgských tisků; její čitelnost by byla značně zvýšena, kdyby pro význačné věty a výsledky byl volen odchylný tisk. Monotonost tisku ztěžuje přehled v této knize, jež je v první řadě ne učebnicí, nýbrž kompendiem.

Knihu lze doporučiti každému, kdo se zajímá o hlubší problémy algebraické geometrie; obsahuje mnoho podnětů. *Bydžovský.*

F. Schuh: **Het getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal (Noorhoff's verzameling van wiskundige werken, 13)**, P. Noordhoff, Groningen, 1927, 286 str., cena 7·50 hol. zl.

Holandsko jest skvělým příkladem, že i malý národ, jsou-li jeho životní poměry příznivé, může se vykázati pěknou, dobře vypravenou vědeckou literaturou. Čilé nakladatelství Noordhoffovo vydává krásnou, skvěle vypravenou, v poměru k německým knihám nikoli drahou sbírku matematických vysokoškolských učebnic. Autora, profesora delftské vysoké školy technické, požádal redaktor „Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde", P. Wijdenes, aby napsal článek o teorii irracionálních čísel. To bylo podnětem že přikročil k uskutečnění svého dávného úmyslu, napsati učebnici, kde by různé teorie iracionálního čísla byly přesně vědecky zpracovány a spolu srovnány, neboť pokládá teorie tyto, jakožto základ celé analyse, za velmi důležité pro každého, kdo studuje matematiku. První kapitola obsahuje všeobecné úvahy o soustavách čísel a tvoří tak všeobecný úvod, kde zvláště podány podmínky, dovolující rozšíření číselného oboru. V druhé kapitole rozšiřuje se tento o nulu, čísla záporná a lomená. Ve třetí kapitole přistupuje autor k vlastní látce své knihy, k číslům iracionálním, a to nejdříve k teorii, Cantorově, ve čtvrté k teorii Dedekindově, v páté k teorii Baudetově a v šesté k teorii Weierstrassově. Zakončení a vyvrcholení každé teorie jest vždy stanovení horní meze. Schuh nejvíce si váží teorie, kterou postavil jeho krajan předčasně zemřelý Pierre Joseph Henry Baudet (22./1. 1891—25./12. 1921), neboť jest v mnohém směru nejjednodušší a vede nejrychleji ke stanovení horní meze. Autor doufá, že jeho kniha přispěje k tomu, aby tato dosud málo známá teorie pronikla. V dalších čtyřech kapitolách ukazuje spisovatel, jak stanovení horní meze jest základem analyse, totiž teorie řad a funkcí (kap. VII.), diferenciálního počtu (kap. VIII.), zavedení goniometrických funkcí na základě řad (kap. IX.) a zavedení cyklometrických funkcí a řad na základě integrálů (kap. X.). V závěrečné kapitole srovnává všecky čtyři teorie a ukazuje, jak definují tatáž čísla. Obsažný rejstřík činí tuto knihu vhodnou příručkou. *Q. Vetter.*

H. Schwerdt: **Einführung in die praktische Nomographie (Math.-nat.-techn. Bücherei, 6)**, O. Salle, Berlin, 1927, VII + 122 str., cena 3 Mk.

Schwerdtova knížka jest dobrou příručkou pro praktické užívání nomografických metod. Teoretický význam nomografických deformací podává se čtenáři jen potud, pokud jest jejich znalost potřebnou pro rýsování nomografů a jich použití. Výklad jest jasný, proložený hojnými příklady z prakse jak všedního života, tak fysikálních zákonů. Autor, studijní rada berlínského reálného gymnasia a docent vysoké zemědělské školy, volil látku na základě svých zkušeností z pracovních pospolitostí na reálném gymnasiu i z přednáškových kursů. K jednotlivým částem jsou připojeny „podněty", vlastně úlohy v heslovité formě, hodně všeobecné, nad nimiž se může čtenář zamysliti a jež podněcují k studiu celé větší otázky. Látka jest rozdělena do těchto částí: I. Stupnice. II. Funkční sítě. III. Síťový nomograf. IV. Stupnicový nomograf. V. Teoretické otázky. K tomu jsou připojeny dva dodatky, příklady pro zvláštní nomografy a seznam literatury a nomografů, jakož i seznam provedených příkladů a rejstřík. *Q. Vetter.*

G. Loria: **Curve piane speciali algebriche e trascendenti, teoria e storia, vol. I., curve algebriche con 122 figure,** prima ed. italiana, U. Hoepli, Milano, 1930, XVI + 574 str., cena 75 lir.

Každý, kdo se obíral křivkami, zná jistě vynikající spis Loriův „Spezielle algebraische und transcendente Kurven", jehož první vydání vyšlo r. 1902 a druhé r. 1910-11. Bylo by proto nevhodným mluviti zde o obsahu a kvalitě tohoto spisu. Téměř čtvrt století po prvním vydání doplnil známý geometr a historik matematiky své dílo třetím, dlouho slibovaným dílem o křivkách prostorových, o němž jsem svého času v tomto časopise referoval. Díl ten nevyšel již německy, nýbrž italsky. Tím mlčky byl dán italské matematické veřejnosti slib, že příští vydání spisu o křivkách rovinných bude také italské. Splnění tohoto slibu, vlastně jeho první části, leží nyní před námi. Srovnáme-li toto vydání s prvním vydáním německým, vidíme, že Loria pečlivě doplnil svou práci novými výsledky, zvláště bohatými citáty literatury nové i nejnovější. Prvé tři knihy o křivkách druhého a čtvrtého stupně doznaly jen změny hlavně formální, zato knihy čtvrtá a pátá o křivkách vyšších stupňů než čtvrtého v některých částech jsou velmi podstatně rozšířeny, ba i zcela přepracovány. Zvláště to platí o kapitolách 1. a 2. čtvrté knihy, pojednávajících o křivkách pátého a šestého stupně. Tu vidíme, srovnáme-li toto vydání s prvním vydáním z r. 1902, jaký veliký pokrok učinilo matematické badání za poslední tři desetiletí. Že se i italské zpracování krásně čte, nemusíme ani poznamenávati. Knihu tu lze vřele doporučiti. *Q. Vetter.*

F. de Almeida e Vasconcellos: **Historia das matemáticas na Antiguidade,** Aillaud e Bertrand, Paris-Lisboa, 1925, XXIV + 653, cena ?

Je jistě zajímavo, že portugalský trh snese tak obšírně psané dějiny matematických věd. Svazek Vasconcellův obsahuje dějiny matematiky od dob nejstarších až po vyznění řecké matematiky ve středověku na straně jedné a kořeny matematické renesance v Indii a říši arabské na straně druhé. Je to tedy asi látka, kterou zahrnuje I. díl velkých dějin Cantorových. Bylo by si přáti, aby i další vývoj naší vědy byl tak zpracován, což by ovšem vyplnilo, soudě podle uvedeného německého vzoru, do konce XVIII. století další tři díly, do konce XIX. stol. pak nejméně ještě dva. O tom, jak obšírně jsou jednotlivé partie zpracovány, nás nejlépe poučí stručný výčet obsahu. Po předmluvě tu přichází: Úvod (str. 15—54), Kap. I. Primitivní kultury (55—59), Kap. II. Egypťané (59—89), Kap. III. Babyloňané (90—116), Kap. IV. Féničané, Hebrejci, Peršané a Řekové, t. j. do VI. stol. př. Kr. (116—146). Kap. V. Matematika předeukleidovská (147—233), Kap. VI. Pokroky v matematických vědách za doby předeukleidovské (234—279), Kap. VII. První škola alexandrinská, t. j. asi od r. 300 do r. 30 př. Kr. (279—408), Kap. VIII. O pokrocích matematických věd v období řecko-alexandrinském (408—417), Kap. IX. Druhá škola alexandrinská, t. j. od r. 30 př. Kr. do r. 641 po Kr. (417—562), Kap. X. O pokrocích matematických věd ve druhé škole alexandrinské (562—569), Kap. XI. Arijská škola matematických věd v Indii, t. j. od stol. IV. až ke konci školy alexandrinské (571—587), Kap. XII. O Arabech a Maurech (589—612), Kap. XIII. O latinském západu (613—627), Jmenný rejstřík (629—641), Dopis Marinhy de Campos autoru (643—653). Bylo by příliš obšírné, probírati kriticky jednotlivosti a vymykalo by se to z rámce pouhého referátu. Omezíme se proto jen na několik všeobecných poznámek. Autor velmi pěkně uvádí čtenáře do celého prostředí, v němž jednotlivé epochy vývoje matematických věd vyrůstaly. Pravíme matematických věd, neboť se neomezuje jen na matematiku v našem slova smyslu, nýbrž všímá si i astronomie a některých částí fysiky. Hezké jsou také konečné souhrnné přehledy na konci jednotlivých období. Z literatury jsou citovány hlavně jen základní díla v jazycích světových a několik prací portugalských. Rozvrh na periody zdá se mi trochu nestejnoměrný, dělí-li autor vývoj matematických věd na období I. pod vlivem civilisací východních, II. řecké až do r. 641, III. od této doby až po renesanci matematiky v XVII. stol. a IV. až po dobu nejnovější. Celkem lze však říci, že dílo je obohacením matematicko-historické literatury a že by si bylo přáti, aby autor zpracoval tak podrobně i doby pozdější. *Q. Vetter.*

ZPRÁVY.

Rozhlas. Z konfederace duševních pracovníků se nám oznamuje, že Radiojournal přípisem č. j. 8832 zn. L/Na ze dne 16. t. m. stanovil pořad relací takto: Středa: 17·30—17·40 hod., čtvrtek: 16·20—16·30 hod. a sobota: 17·30—17·40 hod. (Dřívější relace byly: pondělí 16·50—17·— hod., úterý 16·30—16·40 hod. a pátek 16·40—16·50 hod.)

Poněvadž v dohledné době nutno stanoviti směrnice pro sestavení pořadu podzimního a zimního období, jsme žádáni, abychom v okruhu členstva JČMF učinili výzvu pro pisatele rozhlasových přednášek s podotknutím, aby své zamýšlené náměty (ne přednášky samé) nezávazně hlásili nejlépe přímo sekretariátu K. D. P., Praha I., Jilská 4. Přednášky se strany pp. autorů bylo by předložiti až na výslovné vyzvání Konfederace duševních pracovníků ČSR. — Této výzvě tímto vyhovujeme. *Redakce.*

O rozdělení a pohybech mezihvězdné hmoty ve vesmíru. V roce 1904 objevil Hartmann při zkoumání spektra třídy B dvojhvězdy δ Orionis zajímavý úkaz. Ostré K a H absorpční čáry kalcia nebraly podílu na změnách polohy ostatních čar spektra, vznikajících pohybem dotyčné dvojhvězdy. Nazvány tyto čáry proto „detached *Ca*-lines“, či „stationary *Ca*-lines“, neboť bylo okamžitě poznáno, že nemohou vznikati v atmosféře hvězdy, neboť by se u nich nutně projevoval Dopplerův efekt, nýbrž že vznikají buď v *Ca*-mraku velkých rozměrů obklopujícím hvězdu, neb na cestě, kterou probíhá světlo hvězdy, než dosáhne naši Zemi. Pozdější pozorování potvrdilo, že tento úkaz se vyskytuje jen u nejteplejších hvězd třídy O—$B3$. Je-li u ostatních hvězd dosud neznatelný, můžeme hledati toho příčinu v silnějších a širších absorpčních čarách jejich spekter, které slabší „stacionární“ *Ca*-čáry zakrývají. Problém, zda tato *Ca*-mračna jsou spojena, třeba jen částečně, s hvězdou neb volně se vznášejí v prostoru, dá se rozřešiti zkoumáním radiálních rychlostí hvězd. R. K. Young podrobil celou řadu podobných pozorování důkladnému rozboru a přišel k názoru, že „stacionární“ *Ca*-čáry vznikají absorpcí dvojhvězdu obklopujícího mraku ionizovaného *Ca*, který v některých případech se otáčí se stejnou periodou, ale s menší amplitudou jako tato. Novému důkladnému rozboru podrobil tuto otázku J. S. Plaskett, ředitel Dominion Astrophysical Observatory v Kanadě. Nalezl, že „stacionární" *Ca*-čáry nalézají se nejen ve spektrech dvojhvězd, nýbrž i u všech hvězd spektrální třídy *O*, nevyjímaje ani Wolf-Rayet hvězdy. V roce 1926 zkoumal Eddington teoreticky fysikální podmínky a vlastnosti difusní hmoty rozprostřené v mezihvězdném prostoru a nalezl, že tato je stejnoměrně rozložena aspoň v naší hvězdné soustavě a její průměrná hustota má přibližně hodnotu $10^{-24}\,gm/cm^3$. Teplota, definovaná molekulární rychlostí, dosahuje 10.000—12.000 abs. st.; podle odhadů Gerasimovičových a Struveho je ještě poněkud větší a to 15.000°. Existence této difusní hmoty v mezihvězdném prostoru musela by míti podle Eddingtonovy hypotézy dva následky vzhledem k „stacionárním" či lépe řečeno „interstelárním" *Ca*-čarám *H* a *K*. Předně dalo by se očekávati, že tyto čáry budou přítomné ve spektrech všech hvězd a dále musely by v absorpci neb intensitě se zvětšovati s rostoucí vzdáleností hvězd. Experimentální zkoumání těchto dvou důsledků přineslo následující poznatky. „Interstellární" čáry vyskytují se v některých *B*3 a *B*5 hvězdách, mimo v již uvedených ostatních, nebyly ale dosud v pozdějších typech nalezeny. K potvrzení druhého důsledku přispívá práce Struveho z Yerkes-Observatory, který potvrdil vzrůst intensity „interstellárních" *K* čar se zdánlivou velikostí (magnitudou) hvězd. V poslední době uveřejnili Y. S. Plaskett a J. A. Pearce výsledky svých zkoumání o pohybu a rozdělení mezihvězdné hmoty ve vesmíru. Použili měřených radiálních rychlostí 261 hvězd spektrální třídy *B*, u nichž „interstelární" *K* a *H* čáry byly zaručeny a určili pohyb našeho Slunce vůči mezihvězdným mrakům *Ca*. Nalezli pro tento hodnotu 19·9 *km*, ale polohu apexu poněkud odlišnou od pravidelně přijaté, což se dá připsati nesymetrickému rozdělení k výpočtu použitých hvězd. Rotační člen zavedený Oortem a způsobený rotací naší galaktické soustavy má hodnotu + 7·3 *km*, odpovídající střední vzdálenosti mraků asi 400 *parsec*. Zvlášť pozoruhodné je, že rotační člen hvězd je téměř dvakráte tak velký jako stejný člen vypočtený pro *Ca*-mraky; výsledek, který zvlášť dobře potvrzuje moderní názor o rotačním pohybu celé naší galaktické soustavy kolem vzdáleného hmotného středu, ležícího ve stejném směru jako střed soustavy kulových hvězdokup. Můžeme tedy bráti za dokázané, že difusní mezihvězdná hmota bere účast na diferenciálních pohybech určených galaktickou rotací a je stejnoměrně, bez zvláštních kondensací rozložena v naší hvězdné soustavě. *Hubert Slouka.*