K jedné větě Petrově o racionálních křivkách třetího řádu.

J. Sobotka.

1. V literární činnosti profesora Petra shledáváme se též, jmenovitě v jeho mladších letech, s cennými pracemi geometrickými. Ve vzpomínce na první dobu společného dlouholetého působení vracím se zde k pojednání, jež uveřejnil v ročníku XXV. (r. 1906.) tohoto časopisu a v němž dospívá k zajímavým vztahům jistých trojin bodových na racionálních křivkách řádu třetího, abych některé vztahy v něm uvedené odvodil způsobem čistě geometrickým.

Obsah věty, o níž se tu jedná, uvádím v následujícím doslovně, jak jest ve vzpomenutém pojednání vysloven, až na označení, jež bylo poněkud pozměněno.

„Budiž c_3 racionální křivka třetího stupně o dvou různých tečnách t_1, t_2 ve dvojném bodě. Tyto tečny nechť protínají přímku inflexních bodů v bodech T_1, T_2. Budiž k jakákoliv kuželosečka dotýkající se tečen t_1, t_2 v bodech T_1, T_2, Kuželosečka tato protíná c_3 v šesti bodech. Těchto šest bodů lze rozložiti ve dvě trojiny bodové $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$. Označme za tím účelem inflexní body I_1, I_2, I_3. Zvolíme si kterýkoliv ze šesti bodů, na př. A_1, a promítneme-li postupně ze tří inflexních bodů tento bod A_1 na kuželosečku k, dostaneme body B_1, B_2, B_3 jedné trojiny, a to jiné, než té, ke které patří A_1. Podobný výrok lze učiniti ovšem též o A_2 a A_3. Zvolíme-li si vhodně označení u zmíněných trojin, pak přímky

$$\begin{array}{llll} A_1B_1, & A_2B_3, & A_3B_2 & \text{procházejí bodem } I_1, \\ A_1B_3, & A_2B_2, & A_3B_1 & \quad ,, \qquad ,, \quad I_2, \\ A_1B_2, & A_2B_1, & A_3B_3 & \quad ,, \qquad ,, \quad I_3. \end{array} \qquad \text{(I)}$$

Pojmenujeme dvě takto určené trojiny $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ trojinami sdruženými. Mezi svazek kuželoseček dotýkajících se tečen t_1, t_2 v bodech T_1, T_2 náleží jako jednoduchý případ kuželosečka k_0, jež se křivky c_3 dotýká ve třech bodech K_1, K_2, K_3. Při této kuželosečce splývají obě trojiny bodové. Prochází pak tečna v K_1 ku c_3 bodem I_1, přímka K_2K_3 bodem I_1 atd.

Budiž $A_1^{(1)}A_2^{(1)}A_3^{(1)}$ jedna z trojin na kuželosečce k_1 svazku dotýkajícího se tečen t_1, t_2 v T_1, T_2, $B_1^{(2)}B_2^{(2)}B_3^{2)}$ jedna z trojin na kuželosečce k_2 toho svazku. Pak platná jest věta:

$$\begin{array}{lll} A_1^{(1)}B_1^{(2)},\ A_2^{(1)}B_3^{(2)},\ A_3^{(1)}B_2^{(2)} & \text{procházejí bodem } C_1, & \\ A_1^{(1)}B_3^{(2)},\ A_2^{(1)}B_2^{(2)},\ A_3^{(1)}B_1^{(2)} & \quad ,, \qquad ,, \quad C_2, & \text{(II)} \\ A_1^{(1)}B_2^{(2)},\ A_2^{(1)}B_1^{(2)},\ A_3^{(1)}B_3^{(2)} & \quad ,, \qquad ,, \quad C_3. & \end{array}$$

C_1, C_2, C_3 jsou pak body na křivce c_3 a jsou jednou trojinou na kuželosečce k_3 našeho svazku.

Sestrojíme-li z $B_1^{(1)}B_2^{(1)}B_3^{(1)}$, $A_1^{(2)}A_2^{(2)}A_3^{(2)}$ (trojin to sdružených ku $A_1^{(1)}A_2^{(1)}A_3^{(1)}$, resp. $B_1^{(2)}B_2^{(2)}B_3^{(2)}$) trojici třetí podobně jako v (II), dostaneme trojici $D_1\ D_2\ D_3$ sdruženou té, jež plyne z $A_1^{(1)}A_2^{(1)}A_3^{(1)}$ a $B_1^{(2)}B_2^{(2)}B_3^{(2)}$."

2. Ve větě uvedený svazek kuželoseček $k_0, k_1, k_2, \ldots$ označme (k) a dvojný bod křivky c_3 označme T. Křivku k_0 nazveme hlavní křivkou svazku (k).

Při geometrickém důkazu vytčené věty vycházíme z vlastnosti, že přímky ve svazku, jehož vrcholem jest kterýkoliv bod inflexní, protínají křivku c_3 ještě v párech bodových tak, že body, jež tyto páry dělí harmonicky, leží na přímce, která prochází bodem T a oním z bodů K_1, K_2, K_3, který přísluší vytknutému bodu inflexnímu, v němž tedy tečna k c_3 tímto bodem inflexním prochází.

Označení jest voleno tedy tak, aby bodům I_1, I_2, I_3 příslušely po řadě body K_1, K_2, K_3. Pro libovolné dva takto sobě přiřaděné body I_λ, K_λ jest jak libovolná křivka k ve svazku (k), tak křivka c_3 v involuci pro I_λ jakožto střed a TK_λ jakožto osu involuce, z čehož plyne, že společné body křivek k a c_3 leží na třech přímkách bodem I_λ procházejících.

Buďtež $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ společné body křivek k a c_3, a sice označíme libovolný z nich A_1; pak označíme B_1 onen bod, v němž A_1I_1 protíná ještě křivku c_3, dále označíme B_3, onen bod křivky c_3, který leží na A_1I_2 a B_2 bod na c_3, který leží na A_1I_3.

Těch šest bodů k a c_3 společných lze spojiti patnácti přímkami, z nichž třikráte tři směřují k bodům inflexním jakožto středům homologie trojúhelníků utvořených zbývajícími šesti z uvedených patnácti spojnic. Každým z uvažovaných bodů jdou mimo přímky směřující k bodům inflexním ještě dvě spojnice s body ostatními, a to jsou strany jednoho z těch trojúhelníků. Z toho jest patrno, že $B_1B_2B_3$ jest jedním z obou trojúhelníků, kdežto druhý jest k němu třikráte homologický pro I_1, I_2, I_3 jakožto střed homologie.

V bodě I_1 se sbíhají s A_1B_1 ještě dvě spojnice homologických bodů. Jedna obsahuje bod B_2 a jeden z bodů A_2, A_3, označme jej A_3; pak třetí spojnice homologických bodů jest přímka B_3A_2. V této homologii přísluší tudíž bodům B_1, B_2, B_3 body A_1, A_2, A_3.

Bodem I_2 prochází podle prve uvedeného uspořádání přímka B_3A_1; může tedy jím procházeti dále jen buďto B_2A_3, anebo B_2A_2; ale podle předcházejícího označení prochází B_2A_3 bodem I_1, musí tudíž bod, v němž B_2I_2 protíná ještě c_3 býti označen A_2; zbývá pak ještě přímka B_1A_3 procházející bodem I_2. Máme pak ještě spojnice B_1A_2, B_2A_1, B_3A_3, které musí procházeti bodem I_3.

Tím jsme dospěli k prvé části věty (I), že totiž přímky A_1B_1, A_2B_3, A_3B_2 se protínají v bodě I_1, přímky A_1B_3, A_2B_2, A_3B_1 v bodě I_2 a přímky A_1B_2, A_2B_1, A_3B_3 v bodě I_3.

3. Stanovme nyní na k prométnost, která má osu inflexní i (obsahující body I_1, I_2, I_3) za osu prométnosti, a v níž bodu A přísluší bod $A'_1 \equiv A_2$. V této prométnosti přísluší bodu B_1 bod B'_1 té vlatnosti, že se přímky $A_1B'_1$, A'_1B_1 protínají na ose prométnosti i; jelikož $A_2B_1 \equiv A'_1B_1$, protíná i v bodě I_3, musí I_3A_1 protnouti k v bodě B'_1; avšak I_3A_1 podle předcházejícího protíná k v bodě B_2. Jest proto $B'_1 \equiv B_2$. Přísluší tedy bodu B_1 v naší prométnosti bod B_2.

Hledejme dále bod B'_2 prométně příslušný bodu B_2. Tu musí se přímky $A_1B'_2$, $A'_1B_2 \equiv A_2B_2$ protínati na i. Přímka A_2B_2 protíná i v bodě I_2 a bodem tím prochází přímka A_1B_3, z čehož plyne, že $B'_2 \equiv B_3$.

Konečně bodu B_3 přísluší bod B'_3, pro nějž $A_1B'_3$, $A'_1B_3 \equiv A_2B_3$ se protnou na i, avšak A_2B_3 protíná i v bodě I_1 a jelikož A_1I_1 protíná k ještě v bodě B_1, proto jest $B'_3 \equiv B_1$.

Tím docházíme k výsledku, že naše prométnost jest cyklickou, v níž B_1, B_2, B_3 tvoří jeden cyklus o třech prvcích, a jejíž dvojné prvky jsou T_1, T_2. Skládá se tudíž naše prométnost ze samých cyklů o třech prvcích. Druhý takový cyklus má A_1, A_2 za dva body po sobě následující. Abychom sestrojili třetí bod jeho A'_2, použijeme na př. vztahu, že $A_2B'_2$, A'_2B_2 se protínají v bodě na i; jelikož je $A_2B'_2 \equiv A_2B_3$, jest tento bod I_1, jímž prochází přímka A_3B_2; proto je $A'_2 \equiv A_3$. Následkem toho tvoří A_1, A_2, A_3 taktéž cyklus v naší prométnosti.

Svazek (k) má tedy vlastnost, že každá jeho kuželosečka protíná c_3 v bodech, jež se rozkládají ve dvě samostatné skupiny po třech; tedy involuce šestého řádu, již libovolný svazek kuželoseček z c_3 vytíná, rozkládá se tu v involuci řádu třetího, pro niž každá kuželosečka v (k) obsahuje dvě skupiny bodové, a která se promítá z bodu T involucí ve svazku [T]. Z tečen t_1, t_2 v bodě dvojném T sjednocuje v sobě každá jednu trojici, čímž tato involuce přechází v prométnost cyklickou Π_τ ve svazku [T].

4. Každá involuce kvadratická ve svazku [T] protíná c_3 v involuci. Spojnice párů bodových této involuce na c_3 buďto obalují kuželosečku e, která se křivky c_3 ve třech bodech dotýká, anebo tvoří svazek přímek, jehož vrchol leží na křivce c_3. Poslední případ nastává jen tenkráte, když tečny t_1, t_2 v dvojném bodě T tvoří jeden pár v involuci. Zvláštní případ nastává též, když t_1, t_2 jsou dvojnými paprsky involuce v [T]. V případě tom tvoří přímky TI_1, TK_1 jeden pár, rovněž tak přímky TI_2, TK_2 a též i přímky TI_3, TK_3, a proto se příslušná kuželosečka involuční e dotýká přímek t_1, t_2, K_1I_1, K_2I_2, K_3I_3; tyto přímky jsou, jak z předcházejícího patrno, tečnami křivky k_0. Jest tedy $e \equiv k_0$. Kterékoliv dvě přímky ve svazku [T], jež oddělují harmonicky t_1 a t_2, protnou

c_3 v bodech M_1, M_2, jejichž spojnice M_1M_2 se následkem toho dotýká křivky k_0. Uvažujeme-li nyní involuci v $[T]$, která má TM_1, TM_2 za dvojné přímky, pak tvoří t_1, t_2 jeden její pár a proto spojnice párů bodových, v nichž tato involuce křivku c_3 protíná, tvoří svazek přímek protínajících se v jednom bodě M na c_3. Svazku tomu náležejí též tečny k c_3 v dvojných bodech involuce M_1, M_2. Má tudíž involuce na c_3 utvořená z párů M_1, M_2; ... tu vlastnost, že tečny k c_3 v bodech každého páru se protínají na c_3. Jest zřejmo, že platí také naopak, že body dotyku tečen ke křivce c_3 z libovolného bodu M na ní položeného a různé od tečny v bodě M samém se dotýkají křivky c_3 ve dvou bodech M_1, M_2, jež tvoří jeden pár v involuci příslušné kuželosečce k_0. Involuci tuto můžeme nazvati involucí hlavní. Přiřadění bodů $M, \ldots$ na c_3 a přímek $M_1M_2, \ldots$ jest jedno- jednoznačné; odpovídají si proto body $M, \ldots$ křivky c_3 a tečny $M_1M_2, \ldots$ křivky k_0 promětně; rovněž jest řada bodů $M, \ldots$ promětná s involucí příslušných párů $M_1M_2, \ldots$

5. Protněme svazek $[T]$ jednak některou kuželosečkou u, jež prochází body T, T_1, T_2, jednak přímkou i, čímž obdržíme jednak na u promětnost cyklickou Π, jednak na i promětnost cyklickou Π_i, jež jsou obě perspektivní s Π_τ. Tím se promítají cykly $A_1A_2A_3, \ldots$ na c_3 v cykly $A'_1A'_2A'_3, \ldots$ v Π na u. Seznáváme, že strany $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, $A'_3A'_1, \ldots$ každého trojúhelníka $A'_1A'_2A'_3, \ldots$ tvořícího cyklus v Π protínají přímku i v bodech A'_{12}, A'_{23}, $A'_{31}, \ldots$ jež tvoří jeden cyklus promětnosti v Π_i.

Vytkneme-li si totiž na i promětnost, která má T_1, T_2 za dvojné elementy, a v níž bodu A'_{12} přiřaděn jest bod A'_{23}, a hledáme bod X, jemuž je promětně přiřaděn bod A'_{12}, takže body X, A'_{23} odpovídají oboustraně bodu A'_{12}, víme, že bod Y harmonický k A'_{12} vzhledem k X a A'_{23} tvoří s X jeden pár involuce k promětnosti sdružené; proto body A'_{12}, Y oddělují harmonicky body T_1, T_2. Následkem toho tvoří T_1, T_2; A'_{23}, X dva páry involuce, která má A'_{12} a Y za body dvojné. Budiž J pól přímky i vzhledem k u. Pak jest přímka A'_3J polárou bodu A'_{12} vzhledem k u a protíná i v bodě sdruženém k bodu A'_{12} vzhledem k u, pročež průsečík L'_3 přímky A'_3I s přímkou i jest totožný s bodem Y.

Jest proto bod X harmonický k A'_{23} vzhledem k bodům A'_{12}, L'_3; jest to bod, v němž přímka $A'_3A'_1$ protíná i; splývá tudíž s bodem A'_{31}, poněvadž přímky $A'_3A'_2$, $A'_3A'_1$ jsou harmonické k přímkám $A'_3A'_{12}$, A'_3I. Obdobně dokážeme, že v uvažované promětnosti přísluší bodu A'_{31} bod A'_{12}. Tedy tvoří A'_{12}, A'_{23}, A'_{31}, cyklus. Tím docházíme k výsledku, že průsečíky stran trojúhelníků $A'_1A'_2A'_3, \ldots$ s přímkou i tvoří cyklickou promětnost Π_{ik}.

Strany trojúhelníků $A'_1A'_2A'_3, \ldots$ obalují kuželosečku u^*, která se kuželosečky u v bodech T_1, T_2 dotýká, takže má bod I též za pól přímky i. Tečny s bodu T ke křivce u^* nechť protnou u ještě v bodech G'_2, G'_3, které s bodem $G'_1 \equiv T$ tvoří rovněž jeden cyklus v Π, který se s bodu T promítá v jeden cyklus v Π_i; avšak průměty bodů G'_1, G'_2, G'_3 z T na i jsou jednak průsečík tečny v T k u, jenž splývá s bodem G'_{23}, v němž strana $G'_2G'_3$ protíná i, jednak průsečíky G'_{12}, G'_{31} přímek $G'_1G'_2$, $G'_3G'_1$ s přímkou i. Následkem toho mají Π_{ik} a Π_i právě uvedený cyklus společný, takže prométnost Π_{ik} jest totožná s Π_i.

Body L'_1, L'_2, L'_3, v nichž přímky IA'_1, IA'_2, IA'_3 protínají přímku i, tvoří rovněž jeden cyklus v Π_i, poněvadž body T_1, T_2 oddělují harmonicky body v párech A'_{12}, L'_3; A'_{23}, L'_1; A'_{31}, L'_2, a tudíž na př. bodu L'_3 příslušejí v Π_i oboustraně body L'_1, L'_2.

Promítáme-li kterýkoliv cyklus v Π z libovolného bodu H'_1 kuželosečky u na přímku i, obdržíme rovněž jeden cyklus v Π_i; neboť cyklus $H'_1H'_2H'_3$ v Π se promítá s bodu H'_1 v body H'_{23}, H'_{31}, H'_{12}, v nichž strany trojúhelníka $H'_1H'_2H'_3$ přímku i protínají, takže cyklická prométnost, vznikající jakožto průmět prométnosti Π s H'_1 na i, má T_1, T_2 za body dvojné a má dále cyklus $H'_{23}H'_{31}H'_{12}$ s Π_i společný; splývá tudíž cele s Π_i.

Jsou-li A'_1, A'_2, A'_3; B'_1, B'_2, B'_3 libovolné dva cykly v Π, platí prométnosti

$$(A'_1, A'_2, A'_3, \ldots) \overline{\wedge} (B'_1, B'_2, B'_3, \ldots),$$
$$(A'_1, A'_2, A'_3, \ldots) \overline{\wedge} (B'_2, B'_3, B'_1, \ldots),$$
$$(A'_1, A'_2, A'_3, \ldots) \overline{\wedge} (B'_3, B'_1, B'_2, \ldots),$$

z nichž plyne, že trojúhelníky $A'_1A'_2A'_3$, $B'_1B'_2B'_3$ jsou na tři způsoby homologické, a protínají se přímky $A'_1B'_2$, $A'_2B'_1$, $A'_3B'_3$ v jednom bodě E'_3, přímky $A'_2B'_3$, $A'_3B'_2$, $A'_1B'_1$ v jednom bodě E'_1 a přímky $A'_3B'_1$, $A'_1B'_3$, $A'_2B'_2$ rovněž v jednom bodě E'_2 na přímce i. Body E'_1, E'_2, E'_3 můžeme považovati za průměty bodů B'_1, B'_3, B'_2 z bodu A'_1, z čehož jest patrno, že tvoří jeden cyklus v Π_i.

6. Z perspektivního vztahu řad bodových na c_3 a u plyne pro dvě trojice A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3 na c_3, ježto páry A'_1, B'_1; A'_2, B'_3; A'_3, B'_2 tvoří involuci, jejíž střed E_1 leží na přímce i, a která proto obsahuje body T_1, T_2 jakožto jeden pár, že páry bodů A_1, B_1; A_2, B_3; A_3, B_2 na c_3 tvoří involuci, promítající se s bodu T involucí ve svazku [T], která má tečny t_1, t_2 v dvojném bodě za jeden pár; pročež spojnice A_1B_1, A_2B_3, A_3B_2 protínají se v jednom bodě C_1 na c_3. Obdobně soudíme, že spojnice A_2B_2, A_3B_1, A_1B_3 se protínají v jednom bodě C_2 na c_3 a spojnice A_3B_3, A_1B_2, A_2B_1 taktéž v jednom bodě C_3 na c_3.

Buďtež dále m', n', p' poláry bodů E'_1, E'_2, E'_3 vzhledem k u, které nechť tuto kuželosečku protnou v párech bodů M'_1, M'_2; N'_1, N'_2; P'_1, P'_2, jímž odpovídají perspektivně na c_3 páry bodů M_1, M_2; N_1, N_2; P_1, P_2. Probíhá-li bod E'_1 řadu bodovou na přímce i, popisuje pár M'_1, M'_2 na u involuci k ní prométnou, které přísluší perspektivně pomocí svazku [T] involuce bodů $M_1M_2, \ldots$ na c_3. Tečny v M_1, M_2, dvojných to bodech involuce

$A_1, B_1 . A_2, B_3 . A_3, B_2$ protínají se v bodě C_1. Jest tudíž přímka $M_1M_2 \equiv m$ tečnou kuželosečky k_0 ve svazku (k) dříve uvažovaném. Máme tedy promětné vztahy

$$E'_1, \ldots \barwedge m', \ldots \barwedge M'_1M'_2, \ldots \barwedge M_1M_2, \ldots \barwedge m, \ldots \barwedge C_1, \ldots$$

Následkem těchto promětností přechází každý cyklus $E'_1E'_2E'_3$ v Π_i v cyklus příslušných bodů C_1, C_2, C_3. Tím se převádí promětnost cyklická Π_i v promětnost cyklickou Γ vytvořenou příslušnými cykly $C_1C_2C_3$.

Takto se převádějí cyklické promětnosti opět v cyklické promětnosti:

$$E'_1, E'_2, E'_3, \ldots \barwedge m', n', p', \ldots \barwedge m, n, p, \ldots \barwedge C_1, C_2, C_3, \ldots \quad (1)$$

Bodům I_1, I_2, I_3 na c_3 odpovídají body I'_1, I'_2, I'_3 na u a průsečíky I'_{23}, I'_{31}, I'_{12} stran trojúhelníka $I'_1I'_2I'_3$ s přímkou i, a v důsledku rovnice (1) jest též $I'_{23}, I'_{31}, I'_{12}, \barwedge JI'_1, JI'_2, JI'_3, \wedge I_1K_1, I_2K_2, I_3K_3 \barwedge I_1, I_2, I_3$.

Přímky JI'_1, JI'_2, JI'_3 spojují totiž páry bodové $I'_1K'_1$, $I'_2K'_2$, $I'_3K'_3$ harmonické k bodům T_1, T_2 a tečny k c_3 v bodech I_1, K_1 se protínají v bodě I_1, v bodech I_2, K_2 se protínají v I_2 a tečny v bodech I_3, K_3 v bodě I_3. Následkem toho cyklická promětnost utvořená z cyklů $C_1C_2C_3$, na c_3 jest totožná s cyklickou promětností, která se promítá s bodu T promětností Π_τ, a jest tvořená cykly $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3, \ldots$ prve uvažovanými, poněvadž má s ní jeden cyklus $I_1I_2I_3$ společný.

Body dvou sdružených cyklů na c_3, t. j. takových, které leží na jedné kuželosečce svazku (k), lze uspořádati ve tři involuce, jejichž dvojné body jsou páry I_1, K_1; I_2, K_2; I_3, K_3. Tyto cykly promítají se s bodu T na u ve dva cykly, jejichž body náležejí rovněž třem involucím majícím I'_1, K'_1; I'_2, K'_2; I'_3, K'_3 za dvojné body, takže trojúhelníky z těchto cyklů jsou trojím způsobem homologické pro body I'_{23}, I'_{31}, I'_{12} jakožto středy homologie.

7. Uvažujme blíže promětnost cyklických promětností v (1) vyjádřených

$$E'_1, E'_2, E'_3, \ldots \barwedge m', n' p', \ldots \barwedge m, n, p, \ldots \barwedge C_1, C_2, C_3, \ldots$$

pro zvláštní cykly v nich obsažené. Nechť protnou přímky JI'_1, JI'_2, JI'_3 přímku i v bodech $\bar{I}'_1$, $\bar{I}'_2$, $\bar{I}'_3 \ldots$ Involuce $JI'_{23}, JI'_1 . JI'_{31}, JI'_2 . JI'_{12}, JI'_3$ má za dvojné prvky přímky JT_1, JT_2. Této involuci přísluší involuce tečen křivky k_0, která má t_1, t_2 za prvky dvojné. Proto se protínají páry tečen této involuce na i; přímce JI'_1 involuce předcházející přísluší tu přímka I_1K_1; následkem toho přímce JI'_{23} přísluší tečna inflexní i_1 v bodě I_1. Označíme-li i_2, i_3 tečny inflexní v bodech I_2, I_3, máme tedy involuci $i_1, I_1K_1 . i_2, I_2K_2 . i_3, I_3K_3$. Přímkám těm přísluší podle čl. 4 na c_3 promětně body, a to přímce I_1K_1 bod K_1, přímce i_1 bod I_1 atd.; jest pak v důsledku rovnice (1)

$$I'_{23}, I'_{31}, I'_{12}; I'_1, I'_2, I'_3; \ldots \barwedge K_1, K_2, K_3; I_1, I_2, I_3, \ldots$$

Zvolme na c_3 libovolné dva cykly A_1, A_2, A_3; $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$; ty jsou na trojí způsob homologické; jejich středy homologie C_1, C_2, C_3 jsou promětné k středům homologie E'_1, E'_2, E'_3, na i ležícím, cyklů $A'_1A'_2A'_3$, $\bar{A}'_1\bar{A}'_2\bar{A}'_3$, jež jim na u příslušejí. Promítněme body těchto cyklů z jednoho z bodů $I'_{12}, I'_{23}, I'_{31}$ na př. z bodu I'_{23} na u do bodů B'_1, B'_2, B'_3 resp. $\bar{B}'_1, \bar{B}'_2, \bar{B}'_3$. Tyto body odpovídají bodům B_1, B_2, B_3 resp. $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3$ na c_3 a cykly $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ jsou sdružené; rovněž tak i cykly $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3$, neboť libovolný bod v prvém a libovolný bod v druhém cyklu leží na c_3 harmonicky vzhledem k jednomu z bodů inflexních I_λ a příslušnému bodu K_λ, poněvadž to platí o příslušných bodech na u.

Trojúhelníky $B'_1B'_2B'_3$, $\bar{B}'_1\bar{B}'_2\bar{B}'_3$ jsou rovněž třikráte ho-homologické pro body F'_1, F'_2, F'_3 na i, obdobné bodům E'_1, E'_2, E'_3, jakožto středy homologie, a jak z konstrukce patrno, jsou I'_{23}, I'_1 dvojnými body involuce $E'_1, F'_1 . E'_2, F'_2 . E'_3, F'_3$. Odpovídají-li bodům F'_1, F'_2, F'_3 v důsledku rovnice (1) body D_1, D_3, D_2, jest

$$E'_1, E'_2, E'_3;\ F'_1, F'_2, F'_3 \barwedge C_1, C_2, C_3;\ D_1, D_3, D_2$$

a podle předcházející rovnice obdržíme involuci $C_1, D_1 . C_2, D_3 . C_3, D_2$, jež má K_1, I_1 za dvojné elementy. Procházejí následkem toho spojnice C_1D_1, C_2D_3, C_3D_2 bodem I_1, z čehož již soudíme, že C_1, C_2, C_3; D_1, D_2, D_3 jsou dvě trojice sdružené na c_3.

Uvedené cykly jsou vesměs reálné, když tečny t_1, t_2 jsou sdružené imaginárné; jsou-li však t_1, t_2 reálné, pak jest v každém cyklu toliko jeden prvek reálný a dva jsou sdruženě imaginárné.

8. Jsou-li tečny t_1, t_2 křivky c_3 sdruženě imaginárné, můžeme si na ní odvoditi nekonečně mnoho cyklů o jakémkoliv počtu n prvků v nich obsažených. Involuce ve svazku [T], jež má t_1, t_2 za přímky dvojné, vytíná z osy inflexní involuci eliptickou. Budiž S jeden bod v rovině křivky, z něhož se tato involuce promítá involucí pravých úhlů. Opíšeme-li kružnici v rovině naší o středu S a vepíšeme jí některý pravidelný n-úhelník jakéhokoliv možného druhu $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n$, obdržíme pravidelný svazek n přímek $S\bar{A}_1$, $S\bar{A}_2, \dots S\bar{A}_n$; pak přímky, které spojují bod T s průsečíky přímek těchto s i, vytínají z c_3 cyklus o n prvcích. Otočíme-li v rovině svazek S ($\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots \bar{A}_n$) o libovolný úhel a spojíme-li bod T s průsečíky přímky i s tímto otočeným svazkem, protnou spojnice c_3 v dalším cyklu o n prvcích.

Cyklům $A_1, \dots A_n; \dots$ na c_3 odpovídají cykly $A'_1, \dots A'_n; \dots$ na u.

Kterékoliv dva cykly $A'_1, \dots, A'_n$; $B'_1, \dots B'_n$, jsou n-krát homologické. Spojnice bodů

$$A'_1B'_n,\ A'_2B'_{n-1},\ A'_3B'_{n-2}, \dots A'_kB'_{n-k+1}$$

protínají se v jednom bodě E'_1 na i; jsou to tedy spojnice takových