## Werk

**Label:** Article

**Jahr:** 1929

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0058|log11

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

# O půdorysu meze vlastního stínu na serpentině, osvětlené paprsky rovnoběžnými.

Napsal Dr. *Josef Klíma.*

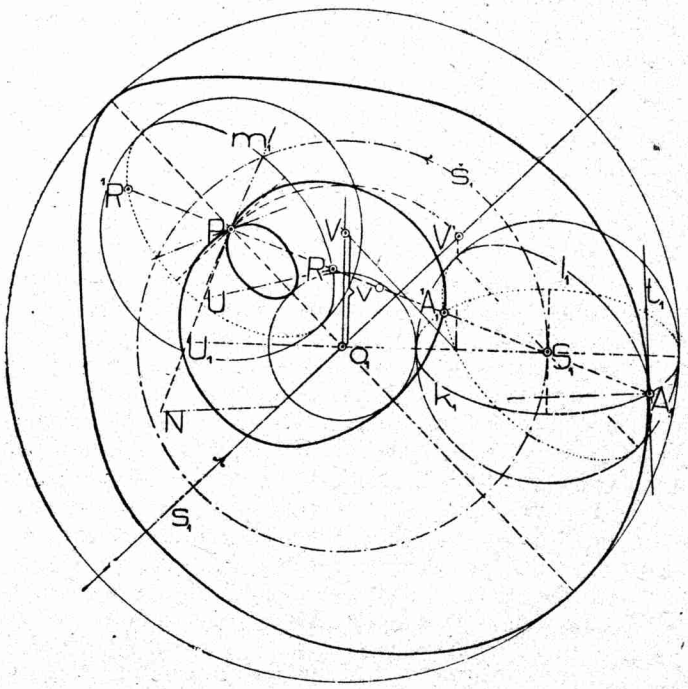
Serpentina, neb šroubová rourovitá plocha, vytvoří se co obalová plocha plochy kulové o konstantním poloměru $r$, jejíž střed $S$ pohybuje se po šroubovici $š$, která budiž na rotač. ploše válcové o ose $o$, kolmé k půdorysně, o poloměru $a$, a jejíž redukovaná výška budiž $v^0$. V obr. 1 vyznačeny jen půdorysy útvarů těch a šroubovice $š$ buď pravotočivá. Charakteristikou na libovolné poloze plochy kulové je hlavní kružnice $k$, jejíž rovina je kolma k tečně, sestrojené v jejím středu k šroubovici $š$. Ježto všechny tečny šroubovice $š$ jsou stejně skloněny k půdorysně o úhel $\alpha$ ($tg\,\alpha = v^0/a$), budou též půdorysy všech charakteristik $k$ shodné elipsy, jichž hlavní poloosa $= r$ a vedlejší poloosa $= r \sin \alpha$. Serpentinu možno si tedy též mysliti vytvořenu šroubovým pohybem kružnice $k$. Abychom určili body meze vlastního stínu na určité poloze charakteristiky $k$, sestrojíme mez vlastního stínu příslušné plochy kulové a její průsečíky s $k$ jsou dva body meze vlastního stínu serpentiny. Mez vlastního stínu na ploše kulové je hlavní kružnice $l$, jejíž rovina je kolma k paprsku $s$. Průsečíky $A$, $^1A$ kružnic $k$ a $l$ jsou dva diametrálně protilehlé body charakteristiky $k$ a proto tečny v nich k charakteristice jsou rovnoběžny a mají tudíž společný pól.[1]) Sestrojíme-li tedy pól $P$ světelných paprsků tím, že určíme vržený stín $V'$ bodu $V$ osy $o$, který je nad půdorysnou ve vzdál. $v^0$ a tento otočíme o $90^0$ ve smyslu otáčení šroubovice $š$, musí půdorysy $A_1$ a $^1A_1$ bodů meze vlastního stínu býti na průměru elipsy $k_1$, jdoucí pólem $P$.[2]) Dá se nyní snadno dokázati, že půdorys meze je cissoidou elipsy a kružnice pro pól $P$. Mysleme si tvořící plochu kulovou posunutu rovnoběžně tak, až její

[1]) Rohn-Papperitz: „Lehrbuch der darst. Geometrie", II. díl str. 144.

[2]) Tamtéž neb pojednání od Ch. Hanocq: „Sur la separatrice d'ombre et de lumière dans le serpentine" v Annales de la Société scientifique de Bruxelles XXVII (3), rok 1902—1903, II. díl. Pojednání to nebylo mi přístupné, ale v referátě o tomto v „Revue semestrielle des publications mathématiques", sv. XII, roč. 1903, str. 19, praví se, že dokázán tam násl. theorém: Průměry tvořící koule, jichž koncové body náležejí mezi vlastního stínu j sou površkami konoidu, majícího za rovinu řídící rovinu kolmou k svět. paprsku, za řídící přímku svislou přímku (v našem obraze je to vertikála bodem $P$) a za řídící křivku šroubovici $š$, jíž probíhá střed, tvořící plochy kulové.

střed je v pólu $P$ a sestrojme půdorys $m_1$ její meze vlastního stínu. Označíme-li průsečíky spojnice $\overline{P^1A_1A_1}$ s elipsou $m_1$ $R$ a $^1R$ a s kružnicí $š_1$ označený $S_1$, tu je patrně $\overline{S_1A_1} = \overline{PR}$ a $\overline{S_1{}^1A_1} = \overline{P^1R}$. Dostáváme tedy:

„*Půdorys meze vlastního stínu na serpentině, o ose kolmé k půdorysně, je cissoidou kružnice $š_1$, půdorysu to zákl. šroubovice a elipsy $m_1$, půdorysu to meze vlast. stínu shodné plochy kulové s tvořicí, jež má střed ve světelném pólu $P$, pro střed této elipsy co pólu.*“




Obr. 1.

Cissoida ta je stupně *osmého*, je souměrna podle osy $\overline{Po_1}$, v bodě $P$ a má čtyřnásobný bod, a tečny v něm procházejí průsečíky kružnice $š_1$ a elipsy $m_1$, z nichž dvě jsou v našem případě reálné a dvě imaginární. Křivka ta má úběžné body elipsy $m_1$ za samodot. dvojné body a tečny v nich splývají s asymptotami elipsy $m_1$ a stejně má imag. brody kruhové za samodot. body dvojné a tečný v nich jsou minimální přímky, jdoucí středem $o_1$ je to tedy křivka *bicirkulární* a bod $o_1$ je jejím význačným ohniskem. Křivka ta v našem případě skládá se ze dvou částí. Vnitřní se podobá Paskalově závitnici (tato by vznikla, kdyby $m_1$ byla kružnicí a pól $P$ byl na $š_1$), a vnější tvaru oválového.

Na základě toho, že půdorysem meze vlastního stínu je cissoida elipsy $m_1$ a kružnice $š_1$ pro pól $P$, můžeme snadno sestrojiti tečnu v obecném jejím bodě, na př. $A_1$ tím, že polární subnormála cissoidy = součtu polárních subnormál křivek základních $m_1$ a $š_1$. Tak v obr. 1 sestrojena normála $\overline{A_1N}$ ($\overline{PN} = \overline{PU} + \overline{PU_1}$), kde $\overline{UR}$ a $\overline{U_1A_1}$ jsou normály elipsy $m_1$ a kružnice $š_1$. Stejně bychom mohli určiti střed křivosti v bodě $A_1$, jak ukázáno třeba ve spise Wieleitnerově „Spezielle ebene Kurven" str. 4 neb ve Wienerově „Lehrbuch der darstellenden Geometrie", II. díl, str. 225.

*Zvláštní případy*: 1. Kdyby redukovaná výška $v^0 = 0$, přešla by serpentina v *annuloid*, pól $P$ splyne se středem $o_1$ a dostaneme známý výsledek, že půdorys meze vlastního stínu annuloidu o ose kolmé k půdorysně, je cissoida elipsy a soustředné s ní kružnice pro pól ve společném jich středu, jež je tu též konchoidou elipsy.

2. Křivka, jež je půdorysem meze vlastního stínu serpentiny, *rozpadne se v elipsu* $m_1$ *a bicirkulární křivku* $6^0$, když pól $P$ světelných paprsků padne na kružnici $š_1$, t. j. když sklon světelných paprsků = sklonu tečen šroubovice $š$. Ježto střed $o_1$ kružnice $š_1$ je na hlavní ose elipsy $m_1$, je nemožné, by kružnice $š_1$ indukovala v $P$ touž involuci, jako je involuce sdruž. průměrů elipsy $m_1$ a proto cissoida ta nemůže se rozpadnouti ve dvě kvartiky.

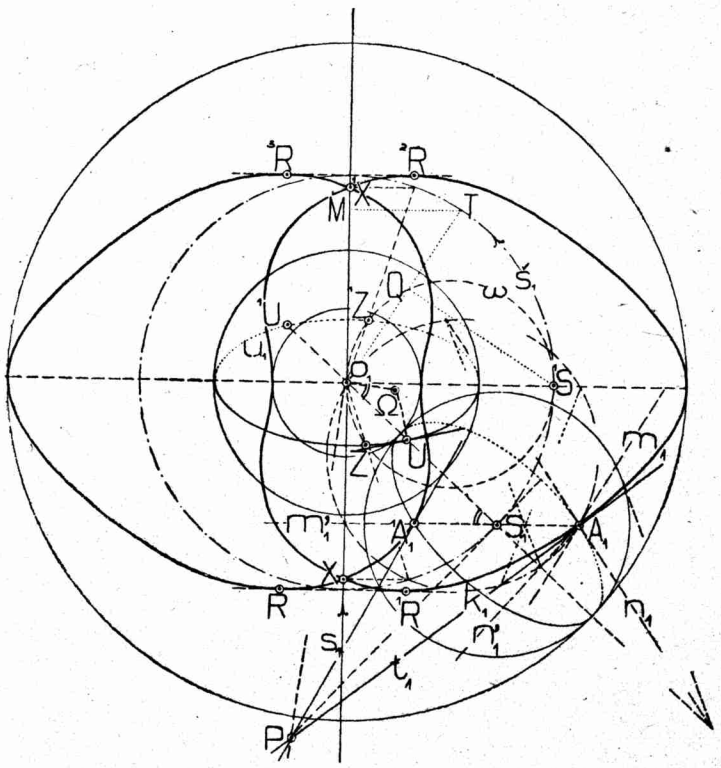
3. V případě, že *paprsek s je rovnoběžný s půdorysnou*, nelze užíti naší konstrukce, ježto elipsa $m_1$ přejde v úsečku a pól $P$ paprsku $s$ je úběžným bodem kolmice k $s_1$. I možno tu půdorys meze, jenž je též půdorysem nárysného obrysu, je-li $s$ kolmo k nárysně, sestrojiti následovně (obr. 2). Na každé charakteristice $k$, o středu $S$, jsou dva body meze $A$, $^1A$, jichž půdorysy jsou na průměru elipsy $k_1$ kolmém k půdorysu $s_1$ paprsku. Bychom nemuseli elipsu $k_1$ otáčeti kol středu $o_1$, možno též konstrukci bodů $A$, $^1A$, prováděti následovně. Sestrojme elipsu $u_1$ o středu $o_1$, jejíž hlavní osa je kolma k $s_1$ a jež je shodna s půdorysem charakteristiky (hlavní poloosa $= r$ a vedlejší $= r \sin \alpha = \frac{rv^0}{\sqrt{a^2 + v^{02}}}$). Označíme-li průsečíky spojnice $\overline{o_1S_1}$ s elipsou $u_1$, $U$ resp. $^1U$, tu patrně poloměry $\overline{o_1U} = \overline{o_1{}^1U} = \overline{S_1A_1} = \overline{S_1{}^1A_1}$, ježto svírají s hlavními osami shodných elips $u_1$ a $k_1$ týž úhel. I dostaneme půdorys nárysného obrysu tím, že středem $o_1$ sestrojíme libovolný paprsek $\overline{o_1S_1}$ a na přímku jdoucí průsečíkem jeho $S_1$ s kružnicí $š_1$ kolmo k $s_1$, naneseme poloprůměr $o_1U$ elipsy $u_1$ od průsečíku $S_1$ na obě strany. Křivka takto odvozená skládá se ze dvou částí souměrných podle $s_1$ tvarů srdcových, jež mají společnou osu souměrnosti $\perp s_1$.[3]) Z této konstrukce křivky určí se

[3]) Je-li poloměr šroubovice $š$ opět $a$ a poloměr koule tvořící $r$ a reduk. výška šroubovice $š$ označena $v^0$, je rovnice křivky té, když $x \equiv o_1{}^1S$ a $y \equiv s_1$:

$$(v^{02} + y^2)^2 (x^2 + y^2 - a^2)^2 - 2r^2 v^{02} (x^2 - y^2 + a^2)(v^{02} + y^2) + r^4 v^{04} = 0,$$

křivka stupně *osmého* a sice *bicirkulární*.

snadno body její $R$, $^1R$, $^2R$, $^3R$, v nichž tečny jsou kolmy k $s_1$ a jež odpovídají vrcholům vedlejší osy elipsy $u_1$. Lze též určiti dvojné body $X$, $^1X$ křivky, jež jsou průsečíky obou částí na ose $s_1$. Kdybychom totiž při naší konstrukci elipsu $u_1$ nahradili kružnicí $\omega$ opsanou nad poloměrem $\overline{o_1{}^1S} \perp s_1$ co průměrem, tu bod $M$, který sestrojíme podobně jako bod $^1A_1$ tím, že přeneseme $\overline{MT} = \overline{o_1Q}$ a $\overline{MT} \perp s_1$, padne na přímku $s_1$, jak plyne se shodnosti trojúhelníků




Obr. 2.

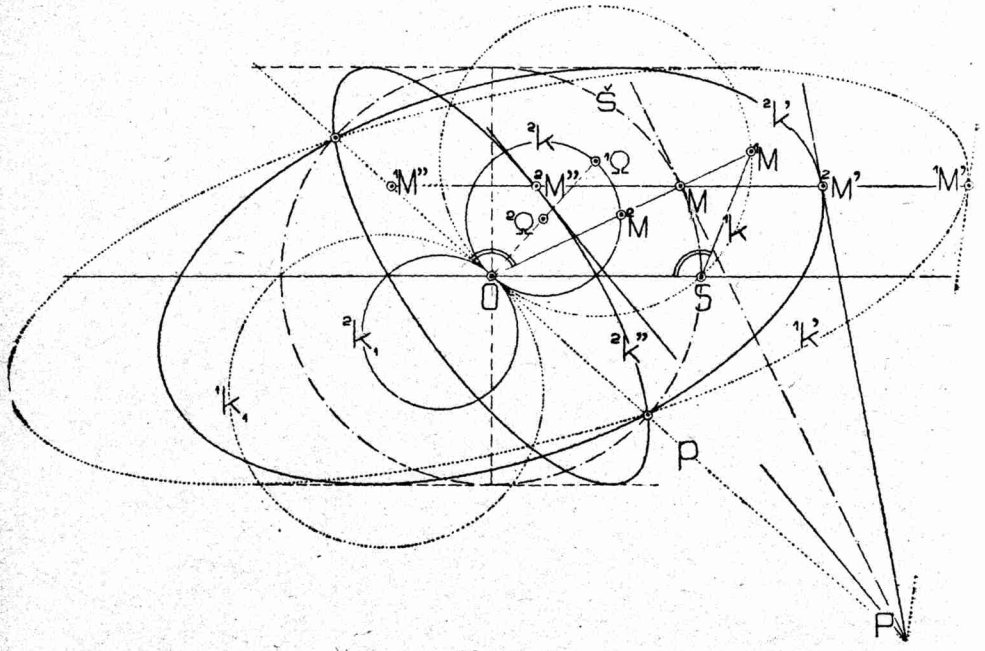
$o_1{}^1SQ$ a $o_1{}^1TM$. Abychom tedy určili body $X$ a $^1X$ na $s_1$, v nichž se protínají obě části, stačí určiti body odpovídající průsečíkům $Z$, $^1Z$ kružnice $š_1$ s kružnicí $\omega$.

Tečnu k této křivce lze v bodě $A_1$ sestrojiti dvojím způsobem.

1. Podle theorému Dupinova možno v bodě tom určiti dva páry konjugovaných tečen, jež určují involuci, která v bodě $A_1$ je eliptickou, a hledaná tečna je pak sdruženou přímkou v této involuci k směru $s_1$. Jeden pár involuce té je tečna $m$ k šroubovici jdoucí bodem $A$ ($m_1 \perp \overline{o_1A_1}$) a sdružená tečna $m'$ je spádová přímka v pří-

slušné rovině tečné, jež je rovnoběžná s paprskem $s$ a tedy $m' \perp s_1$. Druhý pár sdruž. tečen je tečna $n$ k charakteristice $k$ a směr $n'$ povrchových přímek opsané plochy válcové serpentině podle $k$ a je patrně $n' \perp \overline{o_1 S_1}$. Sdruž. přímku k směru $s$, tečnu to $t$ ke křivce, sestrojíme nejlépe užitím kružnice opsané nad $\overline{o_1 S_1}$ jako průměrem.

2. Možno odvoditi tečnu tu též na základě konstrukce bodů této křivky. Přihlédněme blíže k vztahu, jenž je mezi body elipsy $u_1$ a body křivky. Kružnici opsané nad $\overline{OS}$ (obr. 3) jako průměrem




Obr. 3.

a k ní souměrné kružnici podle středu $O$ odpovídal průměr $s_1$ kružnice $š$ kolmý k $\overline{OS}$ a elipsa, jež je afinní ke kružnici $š$ podle osy $s_1$, směru $\overline{OS}$ a charakteristiky 2. Též ale libovolné kružnici ${}^1k$ jdoucí body $O$, $S$ a k ní souměrné ${}^1k_1$ podle středu $O$ odpovídá přímka $p$, jež je tečnou společnou obou kružnic v dotyč. bodě $O$ a elipsa ${}^1k'$ afinní ke kružnici $š$ podle osy $p$, směru $OS$ a charakteristiky 2. Označíme-li bodu ${}^1M$ kružnice ${}^1k$ odpovídající body ${}^1M'$ a ${}^1M''$ (${}^1M''\,{}^1M'\parallel\overline{OS}$, $\overline{{}^1M''} = \overline{{}^1M'} = \overline{O\,{}^1M}$) a průsečík $\overline{O\,{}^1M}$ s $š$ bod $M$, tu je patrně

$$\triangle OS\,{}^1M \cong \triangle O\,{}^1M''$$

a tudíž bod ${}^1M''$ padne vždy na tečnu $p$.