O korespondencích s charakteristickými křivkami o rovnici $dx^3 - dy^3 = 0$.

Napsal *O. Borůvka.*

V úvahách o analytických korespondencích mezi dvěma projektivními rovinami vyskytl se mi typ korespondencí (závislých na pěti konstantách) vyznačujících se vlastností, že diferenciální *rovnici* jejich charakteristických křivek lze uvésti na tvar $dx^3 - dy^3 = 0$.[1]) Jest otázka, jaká jest obecnost nejobecnějších korespondencí majících tuto vlastnost.

V tomto článku ukáži, že nejobecnější korespondence toho druhu závisí na *jedné libovolné funkci dvou argumentů.* Pozoruhodný jest jejich zvláštní případ, kdy lze kubickou diferenciální *formu,* jež definuje charakteristické křivky, psáti ve tvaru $dx^3 - dy^3$. O takových korespondencích ukáži, že závisí obecně na *šesti libovolných funkcích jednoho argumentu.*

*

1. Korespondence o něž jde, mohou býti jenom prvního druhu. Lze je tedy definovati systémem Pfaffových rovnic[2])

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \omega_1 & \tau_2 &= \omega_2, \\ \tau_{11} - \tau_{00} &= \omega_{11} - \omega_{00}, & \tau_{22} - \tau_{00} &= \omega_{22} - \omega_{00}, \\ \tau_{12} &= \omega_{12} + \omega_1, & \tau_{21} &= \omega_{21} + \omega_2, \\ \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} &= 0, & \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

a podmínkami položenými na charakteristické křivky. Rovnice charakteristických křivek korespondencí definovaných systémem (1) jest

$$\omega_1{}^3 - \omega_2{}^3 = 0,$$

a tedy, aby byla ekvivalentní s rovnicí

$$dx^3 - dy^3 = 0,$$

---

[1]) Viz mé pojednání „Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs“ (Deuxiéme partie) (Spisy vyd. přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, čís. 85) str. 19.

[2]) Pokud definice forem ω_{ik}, τ_{ik} se týče, viz cit. pojednání str. 7. Systém (1) definuje nejobecnější korespondence prvního druhu (srov. *první* část cit. pojednání str. 17; Spisy vyd. přír. fak. Masarykovy univ. čís. 72).

jest nutné a stačí, aby existovaly proměnné t, x, y takové, že platí identicky

$$t\omega_1 = dx, \quad t\omega_2 = dy. \tag{2}$$

Hledané korespondence jsou tedy definovány systémem Pfaffových rovnic (1) a (2).

Ukáži, že tento systém jest v involuci a jeho řešení závisí na jedné libovolné funkci dvou argumentů. Vskutku, pro každé dva lineární integrální elementy v involuci tohoto systému platí bilineární relace

$$\begin{gathered}
[\omega_1(2\overline{\omega_{10}-\tau_{10}}+\overline{\omega_{21}+\tfrac{1}{2}\omega_2})]+[\omega_2\,(\overline{\omega_{20}-\tau_{20}}-\overline{\omega_{12}+\tfrac{1}{2}\omega_1})]=0,\\
[\omega_1\,(\overline{\omega_{10}-\tau_{10}}-\overline{\omega_{21}+\tfrac{1}{2}\omega_2})]+[\omega_2(2\overline{\omega_{20}-\tau_{20}}+\overline{\omega_{12}+\tfrac{1}{2}\omega_1})]=0,\\
[\omega_1(\overline{2\omega_{11}-\omega_{00}}-\overline{\omega_{22}-\omega_{00}})]-[\omega_2\,(\overline{\omega_{10}-\tau_{10}}-\overline{\omega_{21}+\tfrac{1}{2}\omega_2})]=0,\\
[\omega_1\,(\overline{\omega_{20}-\tau_{20}}-\overline{\omega_{12}+\tfrac{1}{2}\omega_1})]-[\omega_2(\overline{2\omega_{22}-\omega_{00}}-\overline{\omega_{11}-\omega_{00}})]=0,\\
\left[\omega_1\left(\frac{dt}{t}-\overline{\omega_{11}-\omega_{00}}\right)\right]-[\omega_2(\omega_{21}+\tfrac{1}{2}\omega_2)]=0,\\
[\omega_1(\omega_{12}+\tfrac{1}{2}\omega_1)]-\left[\omega_2\left(\frac{dt}{t}-\overline{\omega_{22}-\omega_{00}}\right)\right]=0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Z nich plyne bezprostředně, že systém charakteristický přidružený systému (1) a (2) jest dán tímto systémem a rovnicemi

$$\begin{gathered}
\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0,\\
\omega_{10}-\tau_{10} = 0, \quad \omega_{20}-\tau_{20} = 0,\\
\omega_{11}-\omega_{00} = 0, \quad \omega_{22}-\omega_{00} = 0,\\
\omega_{12} = 0, \quad dt = 0, \quad \omega_{21} = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Tedy jest třída daného systému *19* a tedy počet proměnných (n), jež se v něm podstatně vyskytují *19*, z nichž *2* neodvislé. Původní systém obsahuje ($s =$) *10* nezávislých rovnic a pro jeho charaktery s_1, s_2 platí, jak se zjistí snadným počtem,

$$s_1 = 6, \quad s_1 + s_2 = 7;$$

tedy jest

$$q\,(= n - s - 2) = 7$$

a tedy

$$2q - s_1 = 8.$$

Na druhé straně plyne z rovnic (3), že počet parametrů, na nichž závisí obecný integrální element E_2, pro nějž formy ω_1, ω_2 jsou nezávislé, jest rovněž *8*. Tedy jest uvažovaný systém v involuci a jeho řešení závisí na jedné libovolné funkci dvou argumentů.

Nejobecnější korespondence, jejichž charakteristické křivky lze vyjádřiti rovnicí $dx^3 - dy^3 = 0$, *závisí na jedné libovolné funkci dvou argumentů.*

2. Jako zvláštní případ uvažovaných korespondencí vytknu ty, jejichž kubickou diferenciální *formu*, jež definuje charakteristické křivky, lze uvésti na tvar $dx^3 - dy^3$. Takové korespondence