ČÍSLO 1. ROČNÍK LVII.

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY.

REDIGUJE

BOHUMIL BYDŽOVSKÝ,

při redakci spolupůsobí

KAREL PETR, FRANTIŠEK ZÁVIŠKA, AUGUST ŽÁČEK, JAROSLAV FRIEDRICH.

VYDÁVÁ

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ZA PODPORY MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY.

V PRAZE.
TISKEM A NÁKLADEM VLASTNÍM.
1927.

Předplatné Kč 60·—.

Obsah. — Sommaire.

Strana

V. Jeřábek: O lemniskátě Boothově. (Sur la lemniscate de Booth.) 1

V. Jeřábek a dr. J. Roháček: Pseudo-versiera. (Sur la pseudo-versière.) 4

Dr. Josef Klíma: Zobecnění kinematického zobrazení. (Une généralisation de la représentation cinématique.) 7

Dr. Jan Schuster: O jisté transformaci determinantu a jejím užití na úkol Pothenotův i v mechanice. (Transformation d'un déterminant et son application au problème de Pothenot et à la statique.) . . . 25

V. Láska: Asymetrické křivky frekvencí. (Sur les courbes de fréquences asymétriques.) 37

V. Trkal: Poznámky k Schrödingerově vlnové mechanice. (Note sur la mécanique ondulatoire de Schrödinger.) 42

Miloslav A. Valouch: Elektrický oblouk nízkého napětí ve směsi rtuťových par a argonu. (Arc électrique de faible voltage dans un mélange de vapeur mercurielle et d'argon.) 51

Příloha didakticko-metodická.

Věstník literární. — Analyses, bibliographie. — Zprávy. — Communications.

Toto číslo vyšlo dne 15. prosince 1927.

Upozornění pp. přispívatelům. Příspěvky literární, jakož i zprávy týkající se obsahu »Časopisu« přijímají redaktoři: **B. Bydžovský**, Praha II, U Karlova 3 (články geometrické); **K. Petr**, Praha II, U Karlova 3 (články z ostatních oborů ryzí matematiky); **F. Záviška**, Praha II, U Karlova 3 (články z teoretické fysiky a příbuzných oborů matematiky aplikované); **A. Žáček**, Praha II, U Karlova 5 (články z fysiky experimentální); **J. Friedrich**, Praha I, Dušní 4 (didakticko-metodická příloha).

Příspěvky literární pro »Rozhledy« přijímá redaktor: dr. **Vl. Ryšavý.**

Přesahují-li příspěvky dva tiskové archy, jest třeba k jejich otištění schválení výboru. Recense knih cizojazyčných buďtež stručné (ne přes 1 tiskovou stránku). Ke každému článku budiž připojen stručný výtah, pokud možno v jazyce francouzském. Přeje-li si autor písemné zprávy od redakce, nechť **přiloží známku na odpověď.**

Rukopis budiž psán čitelně, pokud lze strojem, po jedné straně a náležitě upraven k tisku; řecká písmena buďtež psána červeně neb aspoň červeně podtržena. Slova, jež mají býti vytištěna **tučně**, dlužno podtrhnouti úsečkou — *kursivou*, vlnitě — prostrkaná, čárkovaně. Neobvyklé značky, cizí písmena, odlišné vyznačování typografické úpravy a pod. je nutno na začátku rukopisu vysvětliti. Funkční znaky se tisknou písmem obyčejným, argumenty kursivou. Pravopis řídí se zásadami obsaženými v »Pravidlech českého pravopisu«. Obrazce schopné reprodukce buďtež nakresleny ve zvětšení dvojnásobném, jinak se zhotoví neb opraví na náklad autorův. Autorské korektury připisují se autorům k tíži. Rukopisy článků nepřijatých do tisku se nevracejí. Korektury (autorům se posílá jen korektura sloupcová) buďtež vráceny co nejdříve. Autoři se snažně žádají, aby korekturu prováděli co nejpečlivěji. Za obsah článku odpovídá jeho autor.

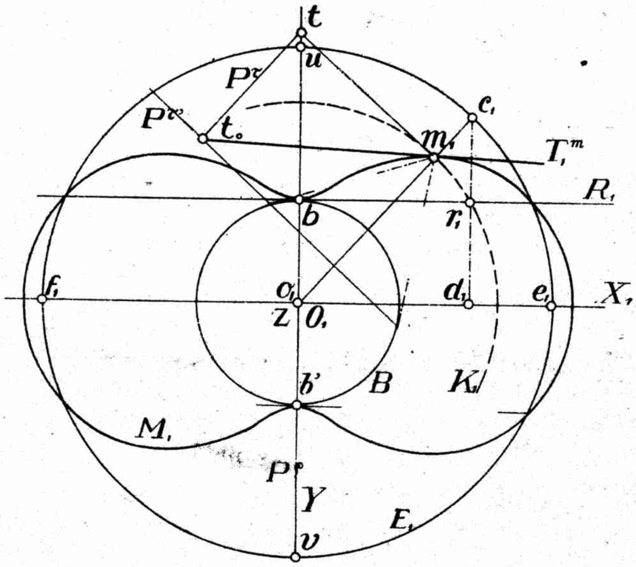
Přeje-li si autor **separátu**, oznámí to hned při předložení rukopisu. Separáty se zhotovují jen pro články vědecké, v nejmenším počtu 25 výtisků, na náklad autorův. Ceny separátů toho času jsou: za 25 výtisků $^{1}/_{4}$ archu 50 Kč, $^{1}/_{2}$ archu 68·50 Kč, $^{3}/_{4}$ archu 88·50 Kč, 1 archu 107 Kč; za každých dalších 25 výtisků 4 Kč, resp. 6, 8, 10 Kč.

Redakční uzávěrka pro 2. číslo 31. prosince 1927.

O lemniskátě Boothově.

V. Jeřábek, ředitel v. v. v Telči.
Obrazec rýsoval dr. J. Roháček.

V průmětně π buďtež dány kružnice E_1 a její dva kolmé průměry $e_1f_1 \equiv X_1$ a $uv \equiv Y$. Střed kružnice označme O_1. Pevnou přímkou $R_1 \parallel X_1$ protněme poloměr O_1u v bodě b. S bodu c_1, zvoleném na E_1, spusťme kolmici na R_1 a sestrojme její patou r_1 ze



středu O_1 kružnici K_1, jež seče poloměr O_1c_1 v bodě m_1. Geom. místem bodu m_1 jest, jak později dokážeme, *lemniskáta Boothova* M_1, která je úpatnicí elipsy, určené ohnisky e_1f_1 a vrcholem b, pro její střed O_1, jako pól.

Stanovme nyní plochy, jejichž společná křivka M promítá se do M_1 a sestrojme tečnu této křivky v bodě m_1. V bodě r_1 postavme kolmici na π a vytkněme na ní, nad průmětnou, bod r ve výšce $r_1r = br_1$. Považujme nyní R_1 za průmět přímky R spojující bod b s bodem r a K_1 za průmět kružnice K, jdoucí bodem r. Mění-li bod r na přímce R svou polohu, vytvoří kružnice K rotační hyperboloid, jehož hrdelním kruhem je B $(O_1, \overline{O_1b})$ a osou přímka O, mající svůj průmět v $O_1 \equiv o_1$ ve společném středu kruhů B a E_1. Tím určena je plocha jedna. Abychom stanovili ještě plochu druhou, které křivka M náleží, položme přímkami R a Y rovinu ϱ, která má tudíž svou stopu P^ϱ v ose Y. Kolmice vztyčené v bodech e_1, f_1 na průmětnu π, protínají rovinu ϱ v bodech e, f. Spojnice $X \parallel R$ těchto bodů má svůj průmět v ose $X_1 \parallel R_1$. Je-li nyní v rovině ϱ osami uv, ef stanovena elipsa E, její průmět je v kružnici E_1. Buďtež osa O' hyperboloidu, elipsa E a průmětna π řídícími útvary konoidu, jehož jedna površka $OC \parallel O_1C_1$ seče přímku O v bodě o a elipsu E v bodě c. Rovina $(ocr) \parallel \pi$ seče přímku X v bodě d, jehož průmět d_1 na X_1 vytíná spojnice c_1r_1. V této rovině sekou se površka oc konoidu a kružnice K rot. hyperboloidu v bodě m křivky M, společné těmto dvěma plochám. Jest tedy bod m_1, v němž o_1c_1 a K_1 se protínají, bodem křivky M_1, jakožto průmětu křivky M.

Tečnu T_1^m křivky M_1 v jejím bodě m_1 sestrojíme průmětem průsečnice rovin tečných τ, τ' konoidu resp. rot. hyperboloidu, vedených v bodě m. Rovinu τ určíme tečnou rovinou hyper. paraboloidu, který se podél površky oc konoidu dotýká a který je stanoven přímkou $O \perp \pi$, tečnou v bodě c k elipse a průmětnou π. Rovina τ v bodě m je stanovena površkami obou soustav $mc \parallel m_1c_1$ a mt, z nichž tato má svůj stopník t na stopnici P^ϱ hyp. paraboloidu a její průmět m_1t je na o_1c_1 kolmý. Stopa P^τ této roviny prochází bodem t rovnoběžně s $o_1c_1 \parallel oc$. Stopa $P^{\tau'}$ roviny tečné τ' v bodě m rot. hyperboloidu je polárou bodu m_1 vzhledem k hrdelnímu kruhu B. Průsečík t_0 stop P^τ a $P^{\tau'}$ je stopou tečny T^m křivky M v bodě m a spojnice t_0m_1 je pak tečnou T_1^m jejího průmětu.

Rovnice křivky M_1. Rovnici křivky M_1 odvodíme z rovnic ploch, které křivku M určují. Za tím účelem pokládejme $X_1, Y, Z \equiv O$ za pravoúhlou soustavu souřadnou. Pak rovnice kruhu K_1 je

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ kdež } o_1r_1 = r$$

a poněvadž bod $r(x_1, b)$ kružnici náleží

$$x_1^2 + b^2 = r^2.$$

Vyloučením r z obou rovnic obdržíme

$$x^2 + y^2 = x_1^2 + b^2$$

a klademe-li $x_1 = z$

$$x^2 + y^2 - z^2 = b^2, \qquad (1)$$

což jest rovnice rotačního hyperboloidu.

Přímka o_1c_1 má rovnici

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \qquad (2)$$

a že c_1 je na kružnici $(o_1, \overline{o_1e_1} = e)$

$$x_1^2 + y_1^2 = e^2,$$

a položíme-li $e_1 b = a$ je $e^2 = a^2 - b^2$ a

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 - b^2. \tag{3}$$

Zdvojmocníme-li rovnici 2) a užitím věty v úměře platné

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{e^2}{x_1^2}.$$

Položíme-li opět $x_1 = z$ obdržíme

$$(x^2 + y^2) z^2 = (a^2 - b^2) x^2 \tag{4}$$

což je rovnice konoidu.

Vyloučením z z rovnic 1) a 4) plyne

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2,$$ jako rovnice křivky M_1.

Tato rovnice je rovnicí úpatnice elipsy o poloosách a, b pro pól O_1, čili rovnicí lemniskáty Boothovy.

*

Sur la lemniscate de Booth.

(Extrait de l'article précédent.)

Cette courbe s'obtient comme la projection de l'intersection de deux surfaces de la manière suivante: dans le plan d'une ellipse E, se projetant suivant un cercle, est choisie une droite R, parallèle à son axe principal; par R et par la perpendiculaire O, abaissée du centre de l'ellipse sur le plan de projection, est déterminé un hyperboloïde de révolution; par l'ellipse E, la droite O et le plan de projection est déterminé un conoïde (du 4e ordre); l'intersection de ces deux surfaces donne la courbe en question.

Pseudo-versiera.

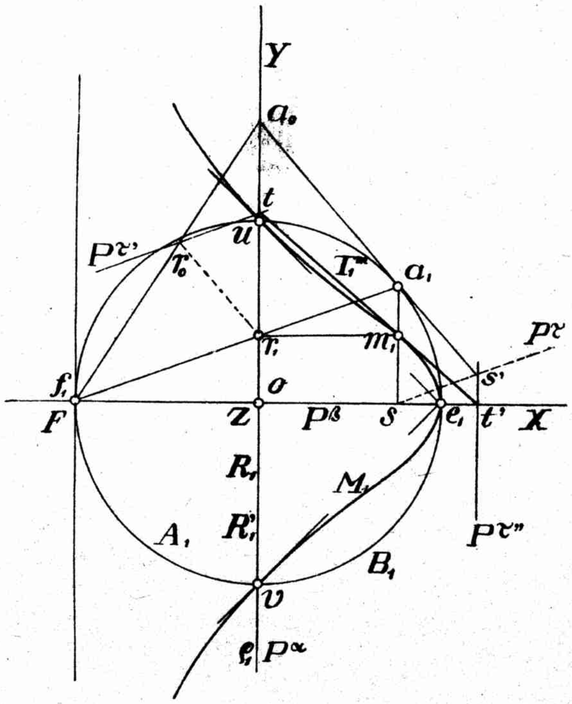
V. Jeřábek a dr. *J. Roháček.*

V průmětně π daná kružnice A_1 s kolmými průměry $uv \perp e_1 f_1$, budiž považována za průmět elipsy A, jejíž vedlejší osa uv leží v π a její rovina α, majíc svou stopu $P^\alpha \equiv uv$, je od průmětny π odkloněna o úhel $\varphi = 45^0$. Pak přímkou F, postavenou kolmo na π v bodě f_1, elipsou A a průmětnou je určen konoid $K(F, A, \pi)$. Průmětem jedné jeho površky budiž $f_1 a_1$. Rovina $\varrho \perp \pi$, jdoucí přímkou uv, seče konoid v křivce R, jejíž jedním bodem je bod r, mající průmět r_1 v průsečíku přímek $a_1 f_1$, $uv \equiv \varrho_1$. Křivkou R proložený válec $V(R)$ rovnoběžný se směrem $e_1 f_1$ a rovina elipsy α, protínají se v křivce M, jejíž jeden bod m je ve společném bodě površky válce $rm \parallel r_1 m_1 \parallel e_1 f_1$ a hlavní přímky $am \parallel a_1 m_1 \parallel P^\alpha$ roviny α. Průmět m_1 bodu m je v průsečíku průmětů příslušných přímek $rm \parallel e_1 f_1$ a $m_1 a_1 \parallel uv$.

Tečnu $T_1{}^m$ křivky M_1 v bodě m_1 sestrojíme průmětem průsečnice tečné roviny válce $V(R)$ v bodě m s rovinou α. Rovina tečná k válci v bodě m je určena površkou mr a tečnou rt řídící křivky R v bodě r. Abychom stanovili stopu t této tečny, položme podél přímky ra konoidu $K(FA\pi)$ orthog. hyp. paraboloid, určený přímkou F, tečnou aa_0 elipsy A v bodě a a průmětnou π. Jeho tečná rovina τ' v bodě r je dána površkami ar, rr_0 obou soustav, z nichž průmět $r_1 r_0$ površky rr_0 druhé soustavy je rovnoběžný s $a_1 a^0$ a má svoji stopu r_0 na stopnici $f_1 a_0$ hyp. paraboloidu. Stopa $P^{\tau'}$ roviny τ' jde bodem $r_0 \parallel a_1 r_1$ a protíná stopu roviny ϱ křivky R v bodě t; a poněvadž bod t leží též v rovině α, je spojnice tm tečnou T_m křivky M v bodě m a přímka tm_1 průmětem $T_1{}^m$ hledané tečny křivky M_1 v bodě m_1.

Křivka M_1 je též průmětem společné křivky jiných dvou prostorových útvarů. Za tím účelem budiž daný kruh $B_1 \equiv A_1$ v průmětně π považován za řídící křivku orth. válce $V(B)$. Středem o kružnice B_1 veďme přímku R', jejíž průmět $R'_1 \equiv R_1$ je kolmý na průměr $e_1 f_1$. Odchylka přímky R' od π budiž $\varphi = 45^0$. Přímkami F, R' a průmětnou π stanoven je orth. hyp. paraboloid (F, R', π), který protíná válec $V(B)$ v křivce B, promítající se do kružnice B_1. Jedním bodem křivky B je bod a společný válci a površce $ra \parallel r\, a_1$ hyp. paraboloidu. Proložíme-li nyní křivkou B válcovou plochu směru uv, jehož jedna površka, jdoucí bodem a, je $am \parallel a_1 m_1 \parallel uv$ a přímkou R' rovinu β, jejíž stopa P^β jde bodem o kolmo na uv, protínají se tyto útvary v křivce M, jejímž průmětem je křivka M_1. Hlavní přímka roviny β $rm \parallel r_1m_1$ protíná površku am válce $V(B)$ v bodě m křivky M a průměty jejich r_1m_1 a a_1m_1 sečou se v průmětu m_1, náležející křivce M_1.

Rovina tečná τ'' válce $V(B)$ v bodě m a rovina β protínají se v tečně $T^m \equiv mt'$ křivky M v bodě m. Za účelem stanovení stopy t' této tečny je vedena v bodě a hyp. paraboloidu (F, R', π) tečná ro-



vina τ, jejíž stopa $P^{\tau} \parallel r_1a_1 \parallel ra$ prochází stopou s přímky as, patřící druhé soustavě površek hyp. paraboloidu. Průsečík stop P a (a_1a_0) dává stopu s' tečny as' křivky B v bodě a. Tečná rovina τ'' má tudíž svou stopu $P^{\tau''}$ procházející bodem s' rovnoběžně s $a_1m_1 \parallel am$. $P^{\tau''}$ protíná stopu roviny β v bodě hledaném t'. Spojnice $t'm_1$ stanoví pak hledanou tečnu T_1^m křivky M_1 v bodě m_1. Tečny v bodech u, v, jimiž křivka M_1 prochází, jdou bodem e_1, což ze druhého určení křivky a z postupu sestrojování tečen přímo vysvitá. Křivka M_1, jak následovně dokážeme, je *pseudo-versiera.*

Rovnice křivky M_1. Zvolme soustavu souřadnou pravoúhlou $X \equiv e_1f_1$, $Y \equiv uv$, $Z \equiv o$; pak při prvém určení křivky M_1 je

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{kde} \quad r = \overline{oe},$$

rovnice kruhu $A_1 \equiv B_1$.

Rovnice konoidu $K(F, A, \pi)$

$$\left(\frac{r+x}{y}\right)^2 = \frac{r+z}{r-z},$$

klademe-li $\overline{os} = \overline{aa_1} = z$. Pak rovnice válce $V(R)$ je

$$\frac{r^2}{y^2} = \frac{r+z}{r-z} \tag{1}$$

Rovina α má rovnici $\quad x = z.$ (2)

Vyloučením z z rovnic (1), (2) plyne rovnice křivky M_1:

$$\frac{r^2}{y^2} = \frac{r+x}{r-x}$$

čili

$$y^2(r+x) = r^2(r-x),$$

což je rovnice pseudo-versiery.*)

Při druhém vytvoření křivky je

$$\frac{z}{r} = \frac{y}{r+x}$$

rovnicí hyp. paraboloidu (F, R', π) a

rovnici válce orthogon. $\quad x^2 + y^2 = r^2$

Válec $V(B)$ má pak rovnici

$$z^2 = \frac{r^2(r^2 - x^2)}{(r+x)^2} \tag{3}$$

a rovina β $\quad y = z;$ (4)

vyloučením z z rovnic (3) a (4) dostáváme, jako dříve

$$y^2(r+x) = r^2(r-x).$$

Sur la pseudoversière.

(Extrait de l'article précédent.)

Une ellipse A, dont l'axe latéral est situé dans le plan de projection et dont l'axe principal fait avec ce plan un angle égal à 45°, se projette sur ce plan suivant une circonférence. Par cette ellipse, par la droite menée par un sommet principal de l'ellipse perpendiculairement au plan de projection et par ce plan lui-même, est déterminé un conoïde de Plücker. Le plan ϱ, contenant l'axe latéral et perpendiculaire au plan de projection, coupe ce conoïde en une courbe. Le cylindre contenant cette courbe et dont les génératrices sont perpendiculaires à ϱ, coupe le plan de l'ellipse considérés en une courbe, dont la projection est une pseudoversière. L'auteur donne une seconde construction, basée, de même, sur des considérations des figures d'espace.

*) Dr. G. Loria: Ebene Kurven, str. 82.

Zobecnění kinematického zobrazení.

Dr. *Josef Klíma.*

1. Roku 1911 skoro současně uveřejnili *W. Blaschke*[1]) a *J. Grünwald*[2]) zvláštní zobrazení přímek v bodové páry roviny, jež současně zobrazuje jistý neeuklidovský prostor v euklidovskou kinematiku roviny. Zvolili dvě rovnoběžné stopní roviny ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ a třetí rovinu π s nimi rovnoběžnou a půlící jich vzdálenost za průmětnu.[3]) Libovolná přímka P protíná stopní roviny v bodech ${}^1p$, ${}^2p$, jež promítají se kolmo do π do bodů ${}^1p^0$, ${}^2p^0$, tyto průměty otočí se v průmětně kol stopníku $p \equiv (P\pi)$ o 90^0 ve smyslu kladném, takže bod ${}^1p^0$ přejde do »levého« obrazu p^l a ${}^2p^0$ do pravého obrazu p^p přímky P. Body $\underline{p^l \text{ a } p^p}$ jsou též Laguerovými zástupci imaginárních bodů přímky ${}^1p^0$, ${}^2p^0$, jež dány jsou reálnými zástupci ${}^1p^0$, ${}^2p^0$. Jinak mysleme si, že roviny ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ jsou reálnými zástupci dvou imaginárních rovin ${}^1\sigma^i$, ${}^2\sigma^i$, v nichž každé mysleme si svazek minimálních paprsků, jež mají své středy v kruhových bodech $+i$ a $-i$ průmětny π. Přímka P protíná z každého svazku toho jeden paprsek. Je-li o_∞ úběžný bod kolmice k π, tu levý obraz p^l přímky P je průsečík průmětny π s příčkou z o_∞ sestrojenou k minimálním paprskům svazků $({}^1\sigma^i + i), ({}^2\sigma^i, -i)$, protínající P a podobně p^p je stopník příčky $\underline{z\ o_\infty}$ k $\underline{\text{papr}}$skům svazků $({}^1\sigma^i, -i)({}^2\sigma^i, +i)$ protínající přímku P. Příčky $o_\infty p^l$. $o_\infty p^p$ jsou též osy rotačních hyperboloidů obsahujících přímku P, jichž hrdlo je v π a imaginární poloosa rovna je vzdálenosti roviny π od ${}^1\sigma^i$ nebo ${}^2\sigma^i$

Svazky minimálních paprsků $({}^1\sigma^i, +i)$. $({}^2\sigma^i, -i)$ a $({}^1\sigma^i, -i)$ $({}^1\sigma^i, +i)$ lze uvažovati jako dvě soustavy tvořících přímek rozpadající se plochy 2^0. I lze projekci tuto uvažovati co zvláštní případ toho, kdy plocha 2^0 zde degenerovaná, bude plochou Z^2 nerozpadající se.

2. Plocha 2^0 Z^2 obsahuje dvě soustavy tvořících přímek, z nichž jednu (L) nazývejme »levou« a druhou (P) »pravou« soustavou,

---

[1]) »Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie«, Zeitschrift f. Mathematik und Physik, roč. 1911.

[2]) »Ein Abbildungsprincip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft.« Zprávy o sezení vídeňské akademie roč. 1911.

[3]) Obecněji uvažuje *E. Müller - E. Kruppa*: Vorlesungen über darstellende Geometrie I. díl »Die linearen Abbildungen«, str. 240, že roviny ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ protínají se v středové rovině při centrálním promítání a průmětna π je harmonicky sdruženou k středové rovině vzhledem k stopním rovinám ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$.

o nichž předpokládejme, že jsou reálné a tedy Z^2 jednodílným hyperboloidem neb hyperb. paraboloidem. Mimo tuto plochu buď dán střed promítání o a jeho polární rovinu ω k ploše Z^2 zvolme za průmětnu. Zobrazení přímek A prostoru přímkového v páry bodové roviny ω lze docíliti podle předchozího následovně. Přímka A protíná plochu Z^2 ve dvou bodech ${}^1a, {}^2a$, jimiž jdou dvě tvořící přímky ${}^1L$, ${}^2L$ soustavy levé a dvě přímky ${}^1P$, ${}^2P$ soustavy pravé. Příčka A^l z o k ${}^1L$, ${}^2L$ protne ω v bodě a^l. který nazývejme »levým obrazem« přímky A a stejně příčka A^p z o sestrojená k ${}^1P$, ${}^2P$ seče rovinu ω v »pravém obraze« a^p přímky A. Polárná rovina ω protíná plochu Z^2 v reálné kuželosečce O^2. Bod a^l je patrně též pólem spojnice průsečíků přímek ${}^1L$, ${}^2L$ s O^2 vzhledem k této kuželosečce a podobně bod a^p je pólem spojnice průsečíků $({}^1PO^2)$, $({}^2PO^2)$ vzhledem k O^2.[4]) Jestliže přímka A protíná plochu Z^2 v imag. bodech, pak přímky ${}^1L$, ${}^2L$ $({}^1P\,{}^2P)$ jsou imag. a dány eliptickou involucí v příslušné soustavě tvořících přímek, jež vytíná eliptickou involucí na kuželosečce O^2, jejíž střed je obrazem a^l (a^p). Protíná-li přímka A plochu Z^2 reálně (imaginárně) tu příslušné obrazy a^l, a^p jsou vně (uvnitř) kuželosečky O^2.

Jestliže přímka A je tečnou T plochy Z^2 v bodě t, tu přímky tvořící L a P bodem tím jdoucí protínají kuželosečku O^2 v bodech t^l a t^p, obrazech to tečny T. Všechny tečny plochy Z^2 v bodě t mají tytéž obrazy na O^2. Přímka L levé soustavy má levý obraz v bodě (LO^2), kdežto pravým obrazem je libovolný bod roviny ω. Jsou tudíž přímky levé soustavy singulárními přímkami vzhledem k pravým obrazům. Obráceně přímky tvořící pravé soustavy jsou singulárními přímkami vzhledem k levým obrazům.[4])

Přímka A, jež není singulární přímkou, má za obraz jediný orientovaný pár bodový a^l, a^p. Avšak nikoliv obráceně, dáno-li a^l, a^p neodpovídá jediná přímka A v prostoru, nýbrž dvě. Spojnice $\overline{oa^l}$ protíná plochu Z^2 ve dvou bodech ${}^1l, {}^2l$, jimiž jdou dvě tvořící přímky ${}^1L, {}^2L$ levé soustavy a přímka $\overline{oa^p}$ protíná dvě přímky ${}^1P, {}^2P$ pravé soustavy v bodech ${}^1p, {}^2p$. Přímky ${}^1L, {}^2L, {}^1P, {}^2P$ tvoří na Z^2 zborcený čtyřúhelník, který má dvě úhlopříčky A a A', z nichž prvá spojuje body $({}^1P\,{}^1L)$, $({}^2P\,{}^2L)$ a druhá $({}^1P\,{}^2L)$, $({}^2P\,{}^1L)$. Přímky A a A' jsou sdruženými polárami vzhledem k ploše Z^2. Koincidenčním útvarem v prostoru, t. j. souhrnem všech paprsků, jež mají oba obrazy splývající, je trs paprsků o středu o a paprskové pole ω, jakožto útvary polární vzhledem k Z^2. Jestli obrazy a^l, a^p jsou na

---

[4]) Je tudíž tato projekce přímkového prostoru zvláštním případem projekce uvažované *Eckhartem:* »Ueber die Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie«, Zprávy vídeňské akademie, roč. 1923, str. 177 a v poslední době *F. Rehbockem* v pojednáních: »Die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahlabbildungen der darstellenden Geometrie« a »Projektive Aufgaben aus der darstellenden Geometrie des Strahlenraumes« v 5. a 6. seš. časopisu »Zeitschrift f. angew. Math. und Mechanik«, roč. 1926. Zmínka o této projekci je též v *Eckhart:* »Konstruktive Abbildungsverfahren«, str. 56.

kuželosečce O^2, pak jim odpovídá ∞^1 přímek v prostoru, jež jsou tečnami plochy Z^2 v průsečíku levé tvořící přímky, jdoucí a s pravou tvořící přímkou, jdoucí a^p. Splyne-li a^l s a^p na O^2, tu odpovídají obrazům těmto tečny v bodě tom k Z^2 sestrojené. Náležejí tudíž ke koincidenčnímu útvaru též tečny plochy Z^2 v bodech kuželosečky O^2.

3. Zaměníme-li orientaci páru a^l a a^p a označíme $a^l \equiv b^p$ a $a^p \equiv b^l$, tu příslušná přímka B protíná přímky pravé soustavy jdoucí body ${}^1l, {}^2l$ a přímky levé soustavy, jdoucí body ${}^1p, {}^2p$. Plocha Z^2 je pak v centrálné involutorní kolineaci o středu o a samodružné rovině ω, při čemž přímky levé soustavy přecházejí v přímky pravé soustavy a naopak. Budou tedy přímky B, B', odpovídající obrazům $b^l \equiv a^p$, $b^p \equiv a^l$ odpovídati přímkám A, A' v centrální involuci $(o\omega)$.

»Přeorientování obrazů přímek, odpovídá v prostoru centrální involuce $(o\omega)$.«

Přímky, jež mají týž levý obraz a^l vyplňují paprskovou lineárnou kongruenci o řídicích přímkách ${}^1L, {}^2L$ levé soustavy, jež jdou průsečíky ${}^1l, {}^2l$ přímky $\overline{oa^l}$ se Z^2. Jmenujeme tyto přímky, protínající tytéž dvě přímky levé soustavy »levorovnoběžnými« a stejně přímky protínající tytéž dvě přímky pravé soustavy »pravorovnoběžnými«, jež mají týž pravý obraz. Tak všechny tečny plochy Z^2 v bodech téže přímky levé soustavy jsou levorovnoběžnými, majíce týž levý obraz na O^2, kdežto pravý obraz probíhá kuželosečku O^2.

4. Buď dán v prostoru bod m, pak jím jde ∞^2 přímek, tvořící trs, jenž bude míti za obraz jistou příbuznost mezi levým a pravým polem obrazů přímek trsu toho. Polární rovina μ bodu m k ploše Z^2 protíná plochu tuto v kuželosečce M^2. Tečny z m k Z^2 zobrazují se v páry bodové na kuželosečce O^2. Zvolíme-li tři tyto páry a^la^p, b^lb^p, c^lc^p na O^2, jsou tím určeny tři tečné roviny plochy Z^2, jež se protínají v příslušném bodě m. Libovolnému bodu x, co levému obrazu přímky X, jdoucí bodem m, odpovídá v prostoru jediná přímka X, jež jde bodem m a náleží lineární kongruenci levorovnoběžných přímek, mající týž levý obraz x^l a tedy dostaneme jediný odpovídající bod x^p.

Řadě bodové R^l bodů x^l, odpovídá na ploše involuce přímek v levé soustavě a příčky odpovídajících přímek této tvoří lineární komplex podle vytvoření Chaslesova. Přímky tohoto komplexu, jdoucí bodem m, tvoří svazek paprskový, vytínající v pravé soustavě involuci a příčky k odp. párům z o tvoří opět svazek, který na ω vytíná řadu R^p pravých obrazů přímek trsu m, jež mají levé obrazy na přímce R^l. Je tedy přiřaděnost $x^l \longleftrightarrow x^p$ mezi obrazy přímek X' trsu m kolineací. Ježto pak body kuželosečky O^2 odpovídají si v této kolineaci, jako obrazy tečen plochy Z^2 jdoucí bodem m, dostáváme výsledek:

»Body v prostoru zobrazují se jako kolineace reprodukující kuželosečku O^2.«

Uvažujeme-li kuželosečku O^2 jako absolutní v rovině ω, lze to vysloviti též takto:

»Body v prostoru zobrazují se v grupu pohybů hyperbolické roviny.«

Na O^2 je projektivita určena třemi páry $a^l a^p$, $b^l b^p$, $c^l c^p$, jež má dva samodružné body $p^l \equiv p^p$, $q^l \equiv q^p$ v průsečících s osou $M \equiv (\mu\omega)$ projektivních řad na O^2. Pól m^c přímky M k O^2 je třetím samodružným bodem této kolineace a je centrálním průmětem bodu m z bodu o a splývajícími obrazy paprsku $\overline{om}$.

Jestliže bod m je v rovině ω, tu rovina μ jde středem o a bodu tomu odpovídá involutorní homologie pro střed $m \equiv m^c$ a osu μ^c, jež je polárou bodu m vzhledem k O^2. Řadě samodružných bodů na μ^c odpovídají paprsky svazku $(m\omega)$ a sice odpovídající bod a přímka jsou pólem s příslušnou polárou vzhledem k O^2.

Bod o má za obraz identitu $x^l \equiv x^p$. Je-li bod m na kuželové ploše (oO^2) mimo O^2, je jeho obrazem kolineace, jejíž všechny tři samodružné body splývají v bodě m^c na O^2.

Bod z plochy Z^2 zobrazuje se v dvojnásob singulární kolineaci v ω. Bodem tím procházejí na ploše Z^2, tvořící přímky L a P. Tečnám plochy v rovině (LP), jdoucím bodem z, odpovídá týž pár $s^l \equiv (LO^2)$, $s^p \equiv (PO^2)$. Libovolnému bodu x na tečně L^c k O^2 v bodě s^l odpovídají všechny body na tečně P^c k O^2 v bodě s^p co pravé obrazy a obráceně. Libovolnému bodu x^l odpovídá bod s^p a naopak s^l je singulárním bodem v poli levých obrazů. V levém obraze je singulární přímka L^c s incidentním singulárním bodem s^l a v pravém P^c s s^p. Průsečík z^c tečen P^c a L^c je centrálním průmětem bodu z. Na O^2 vzniká projektivita singulární o singulárních bodech s^l a s^p.

Pro každý bod m v prostoru vzniká tak na kuželosečce O^2 projektivita jejích bodů a dostáváme tak současně zobrazení bodů prostoru v projektivity na kuželosečce, k němuž dospěl již *Stephanos*[5]) jiným způsobem.

5. Mysleme si v prostoru čtyři body s_i $(i = 1, \ldots, 4)$ téže přímky S, tu budou jim v rovině ω odpovídati čtyři kolineace (s_i), jež reprodukují kuželosečku O^2 a stanoví tudíž na kuželosečce O^2 čtyři projektivity. Buď a' libovolný bod na O^2, stanovme odpovídající jeho body v projektivitách na O^2, určených kolineacemi (s_i). Bodem a' jde na Z^2 přímka L levé soustavy a přímka P pravé soustavy. Polárné roviny σ_i bodů s_i k ploše Z^2 tvoří svazek rovin o ose S', poláře to k S vzhledem k Z^2, který je projektivní s řadou bodů s_i. Roviny ty sečou přímku L v bodech, jimiž jdoucí přímky pravé soustavy, vytínají na O^2 odpovídající body a_i^p v kolineacích (s_i). I je patrně

$$(a_1^p\, a_2^p\, a_3^p\, a_4^p) = (s_1\, s_2\, s_3\, s_4).$$

[5]) V pojednání »Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'éspace avec application à l'étude des rotations sphériques« v Mathematische Annalen roč. 1883, str. 299.

Stejně počítáme-li bod a^l k pravému obrazu a označíme-li jej b^p, tu třeba průsečíky přímky P s rovinami σ_i vésti na Z^2 přímky levé soustavy a dostaneme na O^2 body b_i^l a je opět

$$(b_1^l \ldots b_4^l) = (a_1^p \ldots a_4^p) = (s_1 \ldots s_4).$$

Mysleme si v rovině ω libovolný bod x^l a určeme k němu odpovídající body x^p v kolineacích (s_i). Spojnice $\overline{ox^l}$ protíná na Z^2 dvě přímky ${}^1L, {}^2L$ levé soustavy, k nimž z bodů s_i sestrojíme příčky T_i, které patrně jsou v druhé soustavě tvořících přímek hyperboloidu určeného přímkami $S, {}^1L, {}^2L$ co přímkami prvé soustavy. I vytínají přímky T_i na ${}^1L$ a ${}^2L$ řady ${}^1t_i$ a ${}^2t_i$, jež jsou projektivní. Těmito body jdou na Z^2 přímky pravé soustavy ${}^1P_i$, ${}^2P_i$, jež tvoří na ploše té dvě projektivní řady, jejímiž samodružnými přímkami jsou ony dvě přímky pravé soustavy, jež protínají přímku S. Příčky z o k odpovídajícím přímkám těchto řad určují v ω odpovídající body x_i^p Roviny $(o\,{}^1P_i)$ a $(o\,{}^2P_i)$ opisují dva projektivní svazky druhé třídy, jež obalují tutéž kuželovou plochu (oO^2) a tedy svými průsečnicemi vytvářejí kuželovou 2^0, dvojnásob se dotýkající kuželové plochy (oO^2). Bodu x^l odpovídají vzhledem ke všem kolineacím (s_i), v něž zobrazují se body s_i přímky S, body x_i^p, jež jsou na kuželosečce S_p^2 dvojnásob se dotýkající kuželosečky O^2 v bodech, v nichž O^2 protínají přímky pravé soustavy, jež sečou přímku S. Pól společné dotyčné tětivy $\overline{{}^1p\,{}^2p}$ je pravým obrazem s^p přímky S. Dostáváme tudíž:

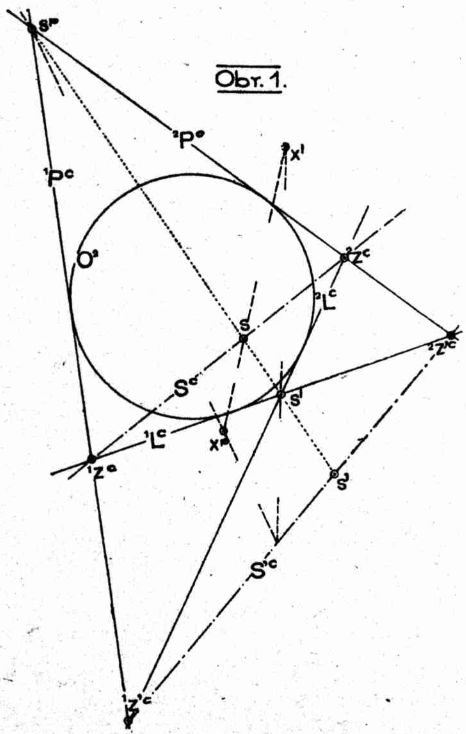
»Přímky, jež mají týž levý obraz x^l neb jsou levorovnoběžné a protínají přímku S, mají pravé obrazy na kuželosečce S_p^2, dvojnásob se dotýkající kuželosečky O^2 a pól dotyčné tětivy je v pravém obraze přímky S.«

Ve smyslu neeuklidovské geometrie pro absolutní kuželosečku O^2 je S^2_p kružnicí o středu s^p.

Tutéž kuželosečku S_p^2 dostaneme k bodu x^l pro libovolnou přímku osnovy 2^0 $({}^1L\,{}^2LS)$. Tyto přímky protínají tytéž dvě přímky ${}^1P, {}^2P$ pravé soustavy, ježto plochy Z^2 a $({}^1L\,{}^2LS)$ mají dvě přímky jedné soustavy ${}^1L, {}^2L$ společny a tedy podle Steinerovy věty též dvě přímky ${}^1P, {}^2P$ druhé soustavy. Mají tudíž všechny přímky soustavy 2^0 $({}^1L\,{}^2LS)$ tentýž pravý obraz s^p a ježto projektivita, jíž vytínají přímky druhé soustavy na ${}^1L, {}^2L$, je pro všechny tyto přímky S táž, je též kuželosečka S_p pro všechny táž.

V obr. 1. dána kuželosečka O^2 v rovině ω splývající s nákresnou, tu k obrazům s^l. s^p libovolně zvoleným, náležejí v prostoru dvě přímky S a S', jichž centrální průměty z pólu o jsou diagonálami S^c a S'^c čtyřstranu určeného tečnami k O^2 z bodů s^l a s^p mimo diagonálu $\overline{s^ls^p}$. Průsečík s (s') přímky S (S') s ω je v průsečíku průmětu se spojnicí $\overline{s^ls^p}$. Z obrazu patrno, že body s, s' jsou harmonicky sdruženy nejen k O^2, ale i k páru s^ls^p. Vrcholy čtyřstranu, ležící na $S^c (S'^c)$ jsou centrálními průměty průsečíků přímky

S (S') s plochou Z^2. Body s (s') jsou póly přímek $S^c(S'^c)$ vzhledem k O^2. Obsahuje-li plocha Z^2, jak předpokládáme, reálné přímky tvořící, pak páry s^l, s^p, jež jsou vně kuželosečky O^2, jsou obrazy přímek protínající reálně plochu a jsou-li uvnitř O^2, jsou obrazy přímek, protínajících Z^2 imaginárně, jak již uvedeno v odst. 2. Kdyby jeden obraz byl uvnitř a druhý vně kuželosečky O^2, pak příslušné přímky jsou konjugovaně imaginárné, mimoběžné.



Obr. 1.

Pro kuželosečku S_2^p, jež odpovídá bodu x^l v kolineacích, v něž se promítají body přímky S, dostaneme jeden bod x^p, sestrojíme-li k x bod harmonicky sdružený vzhledem k s a poláře S'^c, ježto stopníku s přímky S odpovídá centrální involuce $(s\ S'^c)$. Podle obr. 1 též body s^l a s^p odpovídají si v této centrální involuci a tedy délky $\overline{s^l x^l}$ a $\overline{s^p x^p}$ jsou stejné ve smyslu hyperbolické geometrie o absolutní kuželosečce O^2. Je tudíž S_2^p kružnicí o středu s^p a poloměru $\overline{s^l x}$.[6])

Naopak, myslíme-li si bod x^p na S_2^p, bude mu vzhledem k bodům na S odpovídati ∞^1 bodů x^l, jež jsou na kružnici S_2^l o středu s^l a téhož poloměru rovném $\overline{s^p x^p}$. Odpovídající si tak kružnice

[6]) Na př. *Hlavatý:* »Úvod do neeuklidovské geometrie«, kapitola IV. a V.

$S_9{}^p$, $S_2{}^l$, protínají se na centrálním průmětu S^c, jehož body jsou splývající levý a pravý obraz přímek jdoucích bodem o a protínajících přímku S. Zároveň dostáváme větu:

»Aby dvě přímky S a X se protínaly, musí jich obrazy vyhovovati podmínce $\overline{s^l x^l} = \overline{s^p x^p}$ *ve smyslu hyperbolické geometrie o absolutní kuželosečce* O^2.«

Jestliže přímka S dotýká se plochy Z^2, tu kuželosečka $S_2{}^p$ odpovídající bodu má s O^2 dotyk třetího stupně, neb je *horocyklem.*[6])

6. *Prochází-li přímka S středem promítání o,* pak bodu o odpovídá totožnost, průsečíkům ${}^1z$, ${}^2z$ s plochou Z^2 odpovídají dvojnásob singulární kolineace, jichž singulární body v pravém obraze jsou v bodech ${}^1d, {}^2d$, v nichž přímky pravé soustavy jdoucí body ${}^1z, {}^2z$ protínají kuželosečku O^2. Body ${}^1d, {}^2d$ jsou též dvojnými body všech projektivit, jež stanoví na O^2 kolineace, jež jsou obrazy bodů přímky S. Procházejí totiž polárné roviny bodů přímky S toutéž přímkou $S' \equiv \overline{{}^1d\,{}^2d}$, obsaženou v ω. Buď s libovolný bod na $S \equiv \overline{o\,{}^1z\,{}^2z}$. Zvolíme-li bod x' na O^2, budou mu v kolineacích $({}^1z)$, $({}^2z)$, (o), (s) odpovídati pravé obrazy ${}^1d$, ${}^2d$, x^l, x^p a podle dříve dokázané věty platí

$$({}^1d\,{}^2d\,x^l\,x^p) = ({}^1z\,{}^2z\,o\,s),$$

což je dvojpoměr projektivity určené na O^2 kolineací (s), odpovídající bodu s v prostoru. Zvolíme-li bod x' libovolně mimo O^2, pak odpovídající body x^p ve všech kolineacích, v něž se zobrazují body s řady S, jdoucí bodem o, vyplní kuželosečku dvojnásob se dotýkající O^2 v bodech ${}^1d, {}^2d$, která jde též bodem x. Řada bodů x^p na této kuželosečce je projektivní s řadou bodů na S. Společný pól obou kuželoseček k dotyčné tětivě $\overline{{}^1d\,{}^2d}$ je centrálním průmětem s^c paprsku S.

Promítají se tudíž odpovídající body x^l, x^p v kolineaci (s) z vrcholu ${}^1d$ samodružného trojúhelníka této kolineace paprsky, jež se stranami trojúhelníka toho tvoří dvojpoměr

$${}^1d\,(s^c\,{}^2d\,x^l\,x^p) = ({}^1z\,{}^2z\,o\,s) = k.$$

Z bodu ${}^2d$ dostaneme obdobně

$${}^2d\,(s^c\,{}^1d\,x^l\,x^p) = ({}^2z\,{}^1z\,o\,s) = \frac{1}{k}$$

a tedy je

$$s^c({}^1d\,{}^2d\,x^l\,x^p) = k^2.$$

Označíme-li

$$\overline{{}^1ds^c} \equiv {}^1P^c, \quad \overline{{}^2ds^c} \equiv {}^2P^c, \quad \overline{s^c x^l} \equiv X^l \text{ a } \overline{s^c x^p} \equiv X^p,$$

je úhel přímek X^l a X^p v uvedené již hyperbolické geometrii dán[6])

$$M(X^l X^p) = \frac{i}{2} \log ({}^1P^c\,{}^2P^c\,X^l\,X^p) = i \log k.$$

Dostáváme tudíž větu:

»*Body s prostoru zobrazují se v otáčení kol centrálního průmětu s^c bodu toho o úhel $M(X^l X^p) = i \log k$, je-li k dvojpoměr, jejž určuje střed promítání o a bod s se základní plochou Z^2.*«

Pro bod s v rovině ω je $k = -1$ a úhel $= -\pi$, což je symetrie podle středu s. Pro průsečíky ^1z a ^2z je $k = \infty$ resp. 0, příslušné kolineace jsou singulární. Pro bod s' harmonicky sdružený k s vzhledem k o a ω je $k' = ({}^1z\,{}^2zos') = ({}^2z\,{}^1zos) = \frac{1}{k}$ a tedy příslušný úhel $M' = -M$. Kolineace (s) a (s') jsou inversní, t. j. odpovídající páry bodové $x^l \longleftrightarrow x^p$ jsou přeorientovány.

Místem bodů, k nimž patří týž úhel otočení je plocha druhého stupně, dotýkající se plochy Z^2 podél O^2 a sice bodům plochy té od roviny ω na jednu stranu odpovídá úhel $+M$ a na druhou $-M$.

7. K libovolnému trsu paprskovému s je vzhledem k Z^2 polární pole paprskové σ a toto má totéž zobrazení jako bod s. Dostáváme tudíž:

»*Roviny σ zobrazují se v kolineace (σ) reprodukující kuželosečku O^2, jejíž samodružné body jsou v průsečících $(O^2\sigma)$ a v pólu s^c této průsečnice $(\omega\sigma)$ vzhledem k O^2. Ve smyslu hyperbolické geometrie je to otočení kol s^c o úhel $M = i \log k$, kde k je dvojpoměr náležející pólu s roviny σ.*«

Obrazy bodů a rovin jsou zde stejné. Tečné roviny τ plochy Z^2 zobrazují se v dvojnásob singulární kolineace, jež též zobrazují příslušný bod dotyku; singulární body jsou v průsečících tečné roviny τ s O^2 a sice průsečík s levou tvořící přímkou obsaženou v τ je singulární bod v levém obraze a průsečík O^2 s pravou tvořící přímkou v τ je singulárním bodem v pravém obraze. Tečny v singulárních bodech k O^2 jsou singulárními přímkami. Roviny σ, jdoucí středem o promítání, zobrazují se v centrální involuce reprodukující O^2 o ose $(\omega\sigma)$.

8. Paprskový svazek $(a\beta)$, o středu a a rovině β, zobrazuje se se svým polárním svazkem $(b\alpha)$ vzhledem k Z^2, ve dvě projektivní řady bodové A^l, A^p, v nichž odpovídají si průsečíky s kuželosečkou O^2 a tedy ve smyslu hyperbolické geometrie v řady shodné. Řady tyto odpovídají si ve dvou O^2-kolineacích a sice (a) a (b), kde b je pól roviny β.

Dvě O^2-kolineace (a), (b) mají obecně společný jeden pár x^l, x^p odpovídajících si bodů mimo O^2,[7]) jenž je obrazem spojnice $X \equiv \overline{ab}$ nebo průsečnice X' polárných rovin α, β bodů a, b vzhledem k Z^2. Jestli kolineace ty mají společné dva páry odpov. si bodů $x^l\ x^p$, y^l, y^p mimo O^2, pak odpovídají si též průsečíky spojnic $\overline{x^l y^l}$ a $\overline{x^p y^p}$

---

[7]) Další dva páry společné jsou na O^2 a odpovídají přímkám, jež body a, b spojují s dotyčnými body tečných rovin sestrojených přímkou $\overline{ab}$ k ploše Z^2. Jest-li spojnice $\overline{ab}$ dotýká se plochy Z^2, pak všechny tři páry splynou v témž páru na O^2.

s O^2 a tedy všechny body těchto spojnic a páry odpovídajících si tak bodů jsou obrazy svazku paprskového $(\alpha\beta)$ nebo $(b\alpha)$.

»*Incidence bodu s rovinou vyjádřena v obraze tím, že obě O^2-kolineace, zobrazující útvary ty, mají ∞ párů společných, ležících na dvou odpovídajících si přímkách.*«

Různé věty týkající se vzájemné polohy útvarů v prostoru, skýtají věty o O^2-kolineacích. Na příklad:

Tři body (roviny) obecně položené určují rovinu (bod).	Tři O^2-kolineace určují obecně jedinou O^2-kolineaci, jež s každou z těchto má ∞^1 párů odpovídajících si bodů společných.
Rovina (bod) a v ní neležící (jím nejdoucí) přímka určují bod (rovinu).	Dána-li O^2 kolineace a v ní neobsažený pár $x^l x^p$, tu lze určiti dvě jiné O^2 kolineace, v nichž odpovídají si x x^p a jež s prvou O^2 kolineací mají společné dvě řady odpovídajících si bodů.
Čtyři mimoběžky $ABCD$ v prostoru mají obecně dvě příčky XY.	Ke čtyřem párům obrazů $a^l a^p$, $b^l b^p$, $c^l c^p$, $d^l d^p$ lze obecně určiti 16 párů bodových $x^p x^l$, by $\overline{x^l a^l} = \overline{x^p a^p}, \dots$ ve smyslu hyp. geometrie.

Při dvou posledních větách vpravo třeba uvážiti, že páru $a^l a^p$ odpovídají dvě přímky A, A' konjugované k Z^2 atd. I lze kombinovati různě vždy jednu přímku z každého páru a určovati pak jich společné příčky. Při tom třeba pamatovati, že příčky čtyř přímek jsou konjugovány k Z^2 s příčkami čtyř jich polár a tedy mají týž obraz. Atd.

9. Provedeme-li po sobě dvě O^2-kolineace (a) a (b) patřící k bodům a, b, dostaneme co výsledek neb součin opět O^2-kolineaci (c), jejímž prostorovým obrazem je bod c. Jak z bodů a, b dostaneme bod c[5])? Body libovolné přímky R v prostoru mají za obrazy O^2 kolineace, jež mají společný pár odpovídajících si bodů r^l, r^p, jenž je obrazem přímky R. Těchto ∞^1 O^2-kolineací nazývá se *svazkem*. Budiž mimo to ještě jedna O^2-kolineace (a) neobsažená v tom svazku. Je-li b libovolný bod na R, tu součin $(a).(b)$ bude kolineace (c), jež obsahuje pár ${}^1r^l$, ${}^1r^p \equiv r^p$, jest-li v (a) bodu ${}^1r^l$ odpovídá bod r^l. Tento pár ${}^1r^l$, ${}^1r^p$ ale obsahují všechny O^2-kolineace (c), probíhá-li (b) svazek (R). Tvoří tudíž (c) opět svazek $({}^1R)$ a body c jsou na přímce ${}^1R$. Mezi body b a c při pevném a je tudíž kolineace. Splyne-li přímka R s přímkou ${}^1L$ $({}^2L)$ levé soustavy, již protíná spojnice $\overline{oa}$, pak svazek (R) je svazkem singulárních O^2-kolineací o společném singulárním bodu ${}^1s^l$ $({}^2s^l)$ a singulární přímce

$^1L^c(^2L^c)$ v levém poli obrazů. Bod a^c je na $^1L^c(^2L^c)$ a má tudíž (a) v $^1s^l(^2s^l)$ dvojný bod. Je patrno, že součinem $(a)(b)$, je-li b na $^1L\,(^2L)$ je táž singulární O^2-kolineace (b). Jsou tudíž body b a c při pevném a ve zborcené kolineaci o osách ^1L, ^2L. Bodu o odpovídá identita v obraze a proto počítáme-li bod o, co b, odpovídá mu co c bod a, čímž kolineace ta určena. V této zborcené kolineaci plocha Z^2 odpovídá sama sobě a sice přímky pravé soustavy jsou samodružnými, i odpovídají si též polárné roviny odpovídajících si bodů vzhledem k Z^2. Odpovídá tudíž rovině ω prostoru b polárná rovina α bodu a k Z^2 v prostoru c. Body b v rovině ω zobrazují se (odst. 4) v centrální involuce a je-li b_ω jeden bod ten, tu platí

$$a\,.\,b_\omega = c_\alpha, \quad \text{z čehož} \quad b_\omega = a^{-1}c_\alpha, \quad \text{tedy:}$$

„Body, jichž součinem s daným bodem a je bod v ω, jsou v rovině α' homologické v centr. involuci $(o\omega)$ k polární rovině α bodu a vzhledem k Z^2“ (odst. 3).

Ve svazku O^2-kolineací existuje tudíž obecně jedna O^2-kolineace, jež s jinou O^2-kolineací neobsaženou ve svazku, má za součin centrální involuci, odpovídá průsečíku řady bodové, jejímž obrazem je svazek, s rovinou α'.

Obráceně, je-li bod b a tedy (b) pevné, tu je mezi body a a $c = a\,.\,b$ též zborcená kolineace, jejíž osy jsou v pravých tvořících přímkách, protínající spojnici $\overline{ob}$, při čemž bodu o co a odpovídá bod b co c.

Z toho plyne následující konstrukce bodu $c = a\,.\,b$, dány-li body a a b. Spojnice oa protíná dvě přímky ^1L, ^2L levé soustavy a ob protíná dvě přímky ^1P, ^2P pravé soustavy. Příčka z a sestrojená k ^1P, ^2P a příčka z b k ^1L, ^2L se protínají v hledaném bodě c, který je na ploše 2^0, určené přímkami $^1L^2L^1P^2P$ a bodem o.

10. Dán-li bod $c = a\,.\,b$, tu body a, b jsou opět v kolineaci K^c, jak patrno z jich obrazů. Probíhá-li (a) svazek o páru odpovídajících bodů r^l, r^p, tu (b) probíhá svazek o základních bodech $^1r^l \equiv r^p$ a $^1r^p$, jenž v kolineaci (c) odpovídá bodu r^l. Je-li (a) singulární O^2-kolineací, je též (b) singulární kolineací, ale probíhá-li a přímku levé soustavy a příslušné singulární kolineace mají týž levý singulární bod, tu (b) mají týž pravý singulární bod, jenž dostane se transformací (c) z levého singulárního bodu. Jestliže svazek kolineací (a) má týž pravý singulární bod, tu (b) má v bodě tom týž levý singulární bod.

V kolineaci mezi body a, b odpovídá si plocha Z^2 a to tak, že přímky jedné soustavy přecházejí v přímky druhé soustavy. Jelikož bodu o odpovídá identita, bude bodu tomuto co a odpovídati bod c co b. Přímce levé soustavy odpovídá přímka pravé soustavy, protínající se s ní na kuželosečce, v níž polárná rovina γ bodu c protíná Z^2. Kdežto pravé soustavě počítané prostoru a odpovídající přímky levé soustavy protínají se na O^2. Kolineace K^c převádí v obou směrech přímky ${}^1L$, ${}^1P$, resp. ${}^2L$, ${}^2P$, jež jsou v téže tečné rovině jdoucí k ploše $\mathbf{Z}^2$ přímkou oc. Přímky Q, jež protínají přímky ${}^1L$, ${}^2L$ mají týž levý obraz q v bodě $c^c \equiv ({}^1L^c\, {}^2L^c)$ a ježto bod ten je samodružným v (c), budou přímky v kolineaci K^c odpovídající přímkám Q míti týž pravý obraz v tomtéž bodě c^c t. j. budou protínati přímky ${}^1P$, ${}^2P$. Body $({}^1P\,{}^1L)$, $({}^2P\,{}^2L)$ jsou samodružnými body kolineace K^c a druhé dva jsou na poláře spojnice těchto vzhledem k $\mathbf{Z}^2$, t. j. na přímce $\overline{oc}$. Na této přímce $\overline{oc}$ odpovídající body tvoří involuci, ježto pár $({}^1L\,{}^2P)$, $({}^2L\,{}^1P)$ odpovídá si involutorně. Druhý pár této involuce je o, c, čímž samodružné body ${}^1m$, ${}^2m$ určeny a jich obrazy jsou jediné dvě O^2-kolineace, jichž dvojmocí je (c), nepřihlížíme-li k singulárním kolineacím, náležejícím k druhým dvěma samodružným bodům.

Jest-li bod c je na $\mathbf{Z}^2$ pak (c) je singulární o singulárních bodech s^l a s^p na O^2 se singulárními přímkami L^c, P^c, tečnách to k O^2 v singulárních bodech. Libovolnému bodu a přísluší co obraz O^2 kolineace (a), jejíž levé pole přechází kolineací (c) v pravé pole kolineace (b) a levé pole při (b) je totožno s pravým při (a). Přímce L^c odpovídá při (a) přímka L'^c, jež s P^c dává singulární kolineaci (b). Libovolnému bodu a odpovídá tudíž bod b na $\mathbf{Z}^2$, jenž je na pravé tvořící přímce P bodu c a levá jeho tvořící přímka protíná se na O^2 s pravou tvořící přímkou protínající se s levou přímkou bodu c na polárné rovině bodu a. Všem bodům téže tečné roviny v bodě přímky L mimo body na L odpovídá týž bod na P. Mezi přímkami na ploše $\mathbf{Z}^2$ je singulární projektivita a sice levým přímkám odpovídá táž přímka pravá P, jdoucí bodem c, jen levé přímce L bodu c odpovídá libovolná přímka pravá. Pravým přímkám odpovídají přímky levé, protínající se s nimi na kuželosečce O^2. Je-li bod a na $\mathbf{Z}^2$, je (a) singulární o singulárních bodech v dotyčných bodech singulárních přímek ${}^1L^c$, ${}^1P^c$, centr. to průmětech z o přímek ${}^1L$, ${}^1P$, jdoucích bodem a na $\mathbf{Z}^2$. Přímka L^c přejde kolineací (a) v přímku ${}^1P^c$, jež co singulární v levém poli se sing. přímkou P^c v pravém poli určuje kolineaci (b). Odpovídá tudíž bodu a na $\mathbf{Z}^2$ bod b na P a sice průsečík této s přímkou levou, protínající se s pravou, jdoucí bodem a, na O^2. Takže body a na téže pravé přímce mají týž bod na P za odpovídající. Jestliže ale bod a je na přímce L, jdoucí bodem c, tu jeho odpovídající bod b je kterýkoliv bod tečné roviny v bodě přímky P, v němž tato je protata levou přímkou, protínající se s pravou přímkou bodu a na O^2. Kolineace tato je singulární a sice na přímkách L a P, jdoucích bodem c, jsou dvě projektivní řady. Libovolnému bodu řady L odpovídá kterýkoliv bod v tečné rovině sestrojené k $\mathbf{Z}^2$ v odpovídajícím bodě řady na P a naopak. Projektivita na těchto přímkách vyťata přímkami, jež sečou se na kuželosečce O^2.

Z konstrukce bodu $c = a \,.\, b$ z bodů a, b (odst. 9) vyplývá, že bod ten je harmonicky sdružen s bodem $c' = b \,.\, a$ vzhledem k rovině (oab) a pólu této roviny k ploše Z^2 a oběma bodům přináleží totéž k a tedy (c) a (c') jsou rotace o týž úhel (odst. 4).

11. Svými obrazy s^l, s^p (obr. 1) byla přímka S určena dvojznačně. Stopníky s, s' obou vyhovujících přímek S, S' na rovině ω jsou body na spojnici $s^l s^p$, jež k těmto obrazům i kuželosečce O^2 jsou harmonicky sdruženy. Zvolíme-li bod s co stopník přímky určené obrazy s^l, s^p, je tím přímka S určena jednoznačně. Jaký je vztah mezi poli $[s^l]$, $[s^p]$, $[s]$. Předpokládejme, že bod s je pevný, tu s^l, s^p jsou v centrální involuci, jež je obrazem bodu s, střed involuce je v bodě s a osou je polára bodu toho k O^2.

Jestliže bod s^l je pevný, tu ke každému s^p patří dva body s, s', ale bodu s odpovídá jediný bod s^p. Probíhá-li bod s přímku M, pak bod s^p podle odst. 5 probíhá kuželosečku M^2, dvojnásob se dotýkající kuželosečky O^2 v průsečících M s O^2, jež jde též bodem s^l. Dvěma přímkám M, N odpovídají tak dvě kuželosečky M^2, N^2, dvojnásob se dotýkající O^2, jež vedle bodu s^l mají ještě tři body společné, z nichž jen jeden je na spojnisi s^l s (MN) a odpovídá bodu (MN), kdežto dva další průsečíky jsou body, jimž odpovídají na M, N různé body s, jichž spojnice jde bodem s^l. Probíhá-li bod s^p přímku R^p, tu odpovídající páry s, s' probíhají kuželosečku R^2, tvoříce na ní involuci o středu s^l, projektivní s řadou bodů na R^p Kuželosečka R^2 jde body dotyku tečen sestrojených z s^l k O^2 a dotýká se přímek spojujících s^l s průsečíky (R^pO^2) v těchto průsečících. To vyplývá též z prostoru. Svazek přímek, promítající řadu bodovou R^p z bodu o, vytíná v pravé soustavě tvořících přímek na Z^2 involuci, jež na přímkách ${}^1L$, ${}^2L$ levé soustavy, jež sečou $\overline{os^l}$, vytínají páry involuce, jichž spojnice jsou přímkami v prostoru o daných obrazech a jich stopníky na ω dají křivku R^2. Spojnice odpovídajících párů projektivních involucí na dvou mimoběžných přímkách, vytvářejí obecně zborcenou plochu 4^0, jež ale zde rozpadá se v plochu Z^2 a plochu 2^0, jdoucí přímkami ${}^1L$, ${}^2L$ a přímkami pravé soustavy, jdoucími body (R^pO^2) a její přímky po dvou jsou konjugovány vzhledem k Z^2.

»*Při daném obrazu* s^l *jsou pole* $[s]$ *a* $[s^p]$ *v* $[2, 1]$*-značné příbuznosti v obou směrech kvadratické a »perspektivné« pro střed* s^l.«

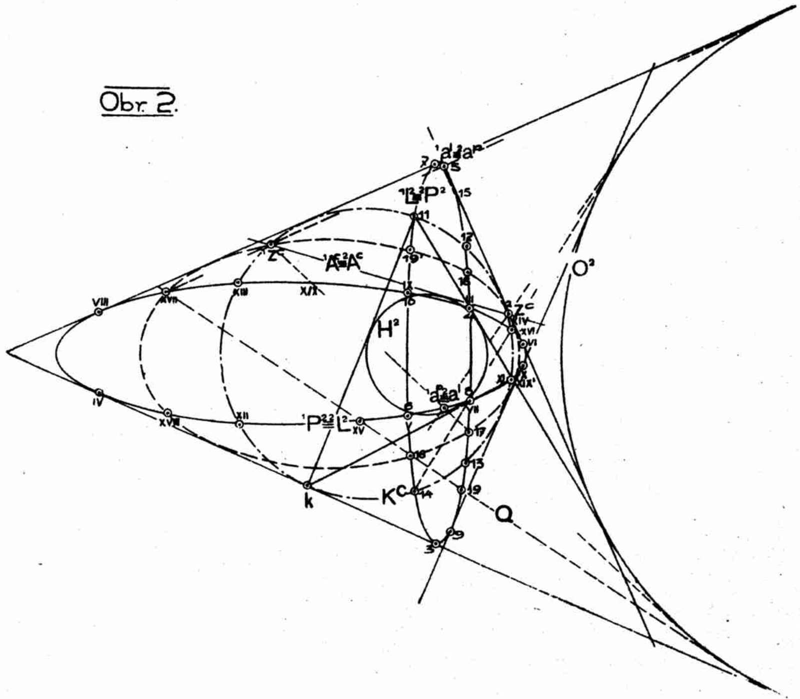
V dvojnásobném poli $[s^p]$ je O^2 křivkou přechodu, t. j. jejím bodům odpovídají splývající body v témže bodě a spojnice jich jde bodem s^l. Bodům s^p na téže straně kuželosečky jako bod s^l odpovídají reálné body s, na opačné imaginárné.

Obdobný vztah panuje mezi poli bodovými $[s]$ a $[s^l]$ při pevném s^p.

12. Přímková plocha **P** n-tého stupně vytíná mezi levými přímkami plochy Z^2 involutorní příbuznost $[n]$-značnou, při čemž odpovídají si ony přímky, jež protínají tutéž tvořící přímku plochy **P**. Paprskový svazek o středu o a libovolné rovině, vytíná v soustavě levých přímek kvadratickou involuci, jež má s involutorní příbuzností $[n]$ společných n párů odpovídajících si přímek. Je tedy le-

vým obrazem plochy **P** křivka P^l n-tého stupně a podobně pravým obrazem křivka téhož stupně P^p. Body těchto křivek jsou obecně v příbuznosti jednoznačné a jsou tudíž téhož rodu. Průsečná křivka ($\mathbf{PZ}^2$) je stupně $2n$ a tu na **P** existuje podle *Segreova* vzorce[8]) $2n$ přímek tvořících, jež dotýkají se této křivky a tedy plochy $\mathbf{Z}^2$. Tyto přímky mají své obrazy na kuželosečce O^2 a tedy projektivita mezi body křivek P^l a P^p musí býti taková, že odpovídá sobě $2n$-průsečíků levého obrazu s O^2 s $2n$-průsečíky pravého obrazu s O^2.

Obr. 2.



»*Přímková plocha n^0 má za obrazy dvě projektivní křivky n^0, jichž průsečíky s kuželosečkou O^2 si odpovídají.*«

Týž obraz má plocha **P**′, polárně sdružená k $\mathbf{Z}^2$. Jestliže plocha **P** je polárně reciprokou k $\mathbf{Z}^2$, pak obrazy plochy té jsou křivky stupňů polovičních, ježto obrazy dvou polárně sdružených přímek tvořících jsou v témž páru bodovém.

Tvořící přímky rozvinutelné plochy zobrazují se ve dvě isometrické křivky vzhledem k absolutní kuželosečce O^2, ježto odpovídající si elementy obou křivek musí býti stejné (odst. 5), co vzdálenosti obrazů soumezných vzájemně se protínajících tvořících přímek. Kuželové neb válcové plochy zobrazují se ve dvě shodné

[8]) Pascal: Repertorium der höheren Mathematik, II. díl, 2. část, str. 730.

řady na dvou křivkách, z nichž jedna přechází v druhou pohybem, zobrazujícím vrchol plochy té.

Obrazem jedné soustavy přímek na ploše druhého stupně $\mathbf{P}^2$ jsou dvě kuželosečky ${}^1L^2$, ${}^1P^2$, jichž body jsou projektivně přiřaděny tak, že průsečíky s O^2 si odpovídají. Ježto čtyři prvé body kuželosečky ${}^1L^2$ lze na O^2 zvoliti ∞^4 a tři body druhé kuželosečky ${}^1P^2$ na O^2 ∞^3 způsoby, kdežto čtvrtý průsečík s O^2 je již určen a čtyřmi body lze vždy proložiti ∞^1 kuželoseček, lze takých párů projektivních kuželoseček zvoliti ∞^9, což odpovídá mohutnosti ploch 2^0 v prostoru.

Druhá soustava přímek tvořících plochy $\mathbf{P}^2$ zobrazuje se ve dvě jiné kuželosečky ${}^2L^2$, ${}^2P^2$, jichž projektivní řady vyhovují téže podmínce jako při prvé soustavě. Lze ukázati, že kuželosečky ${}^1L^2$, ${}^2L^2$ a O^2 náležejí téže řadě kuželoseček, t. j. že dotýkají se těchže čtyř tečen a stejně ${}^1P^2$, ${}^2P^2$ a O^2 náležejí jiné řadě.

Uvažujme nejprve v obr. 2 případ, že plocha $\mathbf{P}^2$ je v involutorní homologii o středu o a rovině samodružné ω jako plocha $\mathbf{Z}^2$. V tomto případě budou splývati ${}^1L^2 \equiv {}^2P^2$ a ${}^2L^2 \equiv {}^1P^2$. Průsečná křivka 4^0 K ploch $\mathbf{Z}^2$ a $\mathbf{P}^2$ bude míti za centrální průmět z o na ω kuželosečku K^c, jež prochází průsečíky kuželoseček O^2 a H^2, v nichž rovina ω protíná plochy $\mathbf{Z}^2$ a $\mathbf{P}^2$ a které tvoří pro toto centrální promítání příslušný obrys. Tvořící přímka ${}^1A$ prvé soustavy na $\mathbf{P}^2$ má průmět v tečně ${}^1A^c$ kuželosečky H^2 a protíná kuželosečku K^c v bodech ${}^1z^c$, ${}^2z^c$, jež jsou centr. průměty průsečíků přímky A s plochou $\mathbf{Z}^2$. Průměty přímek levé soustavy, jdoucích těmito body na $\mathbf{Z}^2$, jsou v příslušných tečnách kuželosečky O^2, jdoucí body ${}^1z^c$, ${}^2z^c$ a jež protínají se v levém obraze ${}^1a$ přímky ${}^1A$. Druhé možné tečny z ${}^1z^c$ a ${}^2z^c$ k O^2 protínají se v příslušném pravém obraze ${}^1a^p$ téže přímky ${}^1A$. Probíhá-li přímka ${}^1A$ prvou soustavou plochy $\mathbf{P}^2$, budou body ${}^1a^l$ resp. ${}^1a^p$ opisovati dvě projektivné kuželosečky ${}^1L^2$, ${}^1P^2$, jichž průsečíky s O^2 si odpovídají. V obr. 2 vyznačeny příslušné si body obou kuželoseček stejnými ciframi a sice na ${}^1L^2$ arabskými a na ${}^1P^2$ římskými. Libovolná tečna Q kuželosečky O^2 protíná tyto obě kuželosečky a sice každou v reálných dvou bodech, pokud seče kuželosečku K^c ve dvou reálných bodech. Jestliže Q stane se společnou tečnou kuželosečky K^c a O^2, tu splynou oba průsečíky přímky té s kuželosečkami ${}^1L^2$, ${}^1P^2$ a tedy kuželosečky ty mají s O^2 a též K^c společné tečny. Kuželosečka K^c protíná kuželosečky ${}^1L^2$, ${}^1P^2$ v odpovídajících si bodech a to platí pro všechny kuželosečky řady určené kuželosečkami O^2 a K^c, mezi jiným též o kuželosečkách řady, jež přešly v diagonály čtyřstranu opsaného oběma kuželosečkám.

Průsečíkům kuželoseček ${}^1P^2$, ${}^1L^2$, počítaným ke kuželosečce ${}^1L^2$, odpovídají v projektivitě té dotyčné body kuželosečky ${}^1P^2$ se společnými tečnami, jako průsečíky kuželosečky ${}^1P^2$ se soumeznou kuželosečkou řady. Naopak bodům těm, počítaným ke kuželosečce

${}^{1}P^{2}$, odpovídají dotyčné body kuželosečky ${}^{1}L^{2}$ se společnými tečnami. Toto vyplývá z věty (obr. 2):

»*Tečny sestrojené ke kuželosečkám svazku $(H^{2}K^{c})$ z libovolného bodu k, protínají kuželosečku K^{c} svazku, bodem k jdoucí v párech bodových, jichž spojnice obalují kuželosečku svazku O^{2}, která dotýká se tečny sestrojené ke K^{c} v bodě k.*«

Tečny ty tvoří ve svazku k involutorní příbuznost [2]-značnou a tedy na K^{c} vzniká též involutorní příbuznost [2]-značná, spojnice pak odpovídajících bodů obalují kuželosečku, jež musí jíti základními body svazku a dotýkati se tečny v bodě k ke K^{c}, jakožto spojnice průsečíků kuželosečky K^{c} s tečnami k téže sestrojené z k.

Uvažujeme-li ${}^{1}A^{c}$ co průmět přímky druhé soustavy ${}^{2}A$, jež je k prvé homologická v centrální involuci $(o\omega)$, tu přeorientuje se pár ${}^{1}a^{l}, {}^{1}a^{p}$ v ${}^{2}a^{p} \equiv {}^{1}a^{l}$ a ${}^{2}a^{l} \equiv {}^{1}a^{p}$ a tedy druhá soustava přímek tvořících na $\mathbf{P}^{2}$ zobrazuje se v tytéž řady projektivné na kuželosečkách ${}^{2}P^{2} \equiv {}^{1}L^{2}$ a ${}^{2}L^{2} \equiv {}^{1}P^{2}$. Ježto přímky různých soustav jsou různoběžné, musí délky, na př. $\overline{5VI}$ a $\overline{V6}$ býti ve smyslu hyperbolické geometrie stejné pro kuželosečku absolutní O^{2}. Mezi body kuželoseček ${}^{1}L^{2}$, ${}^{1}P^{2}$ dostaneme tak zobecněnou *Ivoryho* příbuznost, jež platí pro konfokální kuželosečky.

Dána-li obecně položená plocha $\mathbf{P}^{2}$, pak lze určiti kolineaci, jež reprodukuje plochu $\mathbf{Z}^{2}$ a převádí plochu $\mathbf{P}^{2}$ v jinou, která je v involutorní homologii $(o\omega)$. Buďtež x, ξ vrchol a rovina protější stěny společného polárního čtyřstěnu ploch $\mathbf{P}^{2}$ a $\mathbf{Z}^{2}$. Proveďme takou kolineaci, aby třem bodům kuželosečky $(\xi\mathbf{Z}^{2})$ odpovídaly tři body kuželosečky $O^{2} \equiv (\omega\mathbf{Z}^{2})$ a přímky tvořící těchže soustav body těmi jdoucí nechť si odpovídají. Tu plocha $\mathbf{Z}^{2}$ přejde v sebe a plocha $\mathbf{P}^{2}$ přejde v jinou ${}^{1}\mathbf{P}^{2}$, jež má bod o a rovinu ω za pól s rovinou polárnou. Při této kolineaci pole levých obrazů tvořících přímek plochy $\mathbf{P}^{2}$ a ${}^{1}\mathbf{P}^{2}$ jsou v kolineaci, jež reprodukuje kuželosečku O^{2} a stejně pole pravých obrazů. Budou tudíž kuželosečky ${}^{1}L^{2}$, ${}^{2}L^{2}$, na nichž jsou levé obrazy obou soustav tvořících přímek obecně položené plochy 2^{0} s kuželosečkou O^{2} v téže řadě a podobně kuželosečky pravých obrazů ${}^{1}P^{2}$, ${}^{2}P^{2}$ jsou s O^{2} v řadě. Ježto oba tyto páry obrazů vznikly pohybem z těchže dvou kuželoseček ve smyslu hyperbolické geometrie, jsou kuželosečky ty shodné atd.

Jestliže plocha $\mathbf{P}^{2}$ dotýká se základní plochy $\mathbf{Z}^{2}$ podél kuželosečky, tu oba obrazy obou soustav splynou s kuželosečkou O^{2} a příslušné řady bodové jsou na této projektivné a pro obě soustavy shodné.

Plocha $\mathbf{P}^{2}$, jež má se $\mathbf{Z}^{2}$ společné dvě tvořící přímky jedné soustavy, obsahuje též dvě tvořící přímky druhé soustavy. Kuželosečky ${}^{1}L^{2}$ a ${}^{2}P^{2}$ přejdou v bod a kuželosečky ${}^{1}P^{2}$ a ${}^{2}L^{2}$ v kuželosečky, jež se dvojnásob dotýkají kuželosečky O^{2} a sice prvá v bodech, v nichž polára bodu ${}^{2}P^{2}$ vzhledem k O^{2} tuto protíná a druhá obdobně v průsečících s polárou bodu ${}^{1}L^{2}$. Atd.

13. *Zobrazeni paprskových kongruencí.* Libovolnému bodu x^l co levému obrazu paprsku kongruence, bude odpovídati obecně určitý počet bodů co pravých obrazů x^p přímek kongruence, jež současně náležejí lineární kongruenci o řídících přímkách ^1L, ^2L, jež náležejí levé soustavě na Z^2 a protínají ox_l. Ježto kongruence stupně m a třídy n, neboli $[m, n]$, má podle věty Halphenovy s lineární kongruencí $(m+n)$ společných přímek, odpovídá tolikéž bodů x^p bodu x^l. Stejnou příbuznost dostaneme obráceně.

»*Kongruence* $[m, n]$ *zobrazuje se v příbuznost* $[m+n, m+n]$-*značnou mezi polem levých a pravých obrazů.*«

Tak pro lineární kongruenci dostaneme příbuznost $[2, 2]$-značnou. Probíhá-li bod x^l přímku O, tu přímky ^1L, ^2L, v předchozím vytknuté, budou na Z^2 tvořiti involuci kvadratickou a příčky odpovídajících si přímek vyplňují podle Chaslesova vytvoření lineární komplex. Tento komplex má s kongruencí $[m, n]$ společnou plochu stupně $m+n$ a ta podle odst. 12 má za pravý obraz křivku $(m+n)$ stupně. Je tedy příbuznot $[m+n, m+n]$-značná obou polí, jež je obrazem kongruence, stupně $m+n$.

14. Máme-li konečně *paprskový komplex* n^0, tu bude se zobrazovati v jistou příbuznost bodo-křivkovou mezi poli levých a pravých obrazů. Zvolíme-li si bod x^l co levý obraz paprsku komplexu, tu lineární kongruence levorovnoběžných přímek o obrazu levém x^l má s komplexem daným společnou přímkovou plochu stupně a třídy $2n$. Přímková tato plocha má řídící přímky ^1L, ^2L lineární kongruence za n-násobné řídící přímky a se soustavou pravou na Z^2 má $2n$ přímek společných, jež jsou společny této soustavě a danému komplexu. Pravým obrazem této plochy je křivka stupně $2n$, jež dotýká se O^2 v průsečících této s přímkami pravé soustavy, náležejícími komplexu.

»*Obrazem komplexu paprskového* n^0 *je příbuznost bodo-křivková mezi poli obraznými a sice stupně* $2n$, *při čemž křivky téhož pole dotýkají se kuželosečky* O^2 *v těchže* $2n$ *bodech.*

Lineární komplex zobrazuje se tudíž v příbuznost bodo-kuželosečkovou. V levé soustavě na Z^2 jsou obecně dvě přímky ^1L, ^2L, náležející komplexu a podobně v pravé soustavě jsou přímky ^1P, ^2P komplexu. Bodu x^l levého pole odpovídá kuželosečka X_p^2 v pravém poli, jež dotýká se kuželosečky O^2 v průsečících s ^1P, ^2P. Zvolíme-li na X_p^2 bod x^p libovolně, bude mu odpovídati kuželosečka X_l^2, jež jde bodem x' a dotýká se O^2 v průsečících s ^1L, ^2L. Bodům kuželosečky X_l^2 odpovídá táž kuželosečka X_p^2 a naopak. Mezi svazky dvojnásob se dotýkajících kuželoseček X_l^2 a X_p^2 je projektivita, při níž odpovídá sama sobě kuželosečka O^2. Průsečíky odpovídajících si kuželoseček jsou splývajícími obrazy paprsků komplexu, jdoucích jednak bodem o a jednak ležících v rovině ω. Průsečíky ty jsou tudíž na dvou přímkách, z nichž jedna je stopou nulové roviny bodu o na rovině ω a druhá je polárou nulového bodu roviny ω vzhledem k O^2. Zvolíme-li tudíž dotyčné body svazků těchto na

O^2 a pár odpovídajících kuželoseček, je tím projektivita obou svazků určena, což odpovídá mohutnosti ∞^5 lineárních komplexů. Pro speciální lineární komplex, skládající se z přímek různoběžných s danou přímkou, dostali jsme stejný výsledek v odst. 5.

Další zajímavý *komplex paprskový* je ten, jehož přímky mají *za obrazy body stejného rozpětí*, t. j. konstantní vzdálenosti vzhledem k absolutní kuželosečce O^2. Je-li X přímka tohoto komplexu, tu jsou-li její obrazy x^l, x^p a protíná-li $S \equiv \overline{x^l x^p}$ kuželosečku O^2 v bodech ξ, η, má se

$$(\xi \eta x^l x^p) = \text{konst.} = k.$$

Je-li y^l, y^p jiný pár na S, vyhovující též této podmínce $(\xi \eta y^l y^p) = k$, tu dostáváme na S dvě promětné řady

$$\xi \eta x^l y^l \dots \pi \xi \eta x^p y^p \dots \text{ a}$$

ježto jejich průsečíky s O^2 si odpovídají, jsou shodné vzhledem k O^2.

Jsou tudíž $x^l x^p$, $y^l y^p$, ... obrazy dvou polárních svazků paprskových vzhledem k Z^2, rovina jednoho jde přímkou S a vrchol jeho a je na poláře S' sdružené k S vzhledem k Z^2, jež jde bodem o. Bod a má za obraz O^2-kolineaci, jež má dvojné body v ξ, η a a^c a podle odst. 6 je $(\xi \eta x^l x^p) = ({}^1z\, {}^2z\, o a)$, jsou-li ${}^1z, {}^2z$ průsečíky přímky S' s plochou Z^2. Ježto dvojpoměr $(\xi \eta x^l x^p)$ pro všechny paprsky hledaného komplexu je týž, budou vrcholy a svazků paprskových, vyhovujících podmínce té na téže ploše P^2 dotýkající se Z^2 podél O^2. Zvolíme-li vrchol svazku a na ploše P^2, jde jeho rovina polárou, spojnice $\overline{oa}$ vzhledem k Z^2. Ježto přímky S a S' jsou sdruženými polárami též vzhledem k P^2, jest svazek paprsk. o vrcholu a, jehož paprsky sečou S, svazkem tečen k P^2 sestrojených v bodě a. Dostáváme tudíž:

Přímky, jichž rozpětí v obrazech je konstantní, tvoří komplex tečen dvou polárních ploch druhého stupně P^2 *a* P'^2 *vzhledem k* Z^2, *jež dotýkají se plochy této podél* O^2.«

Tečny kuželové plochy (oO^2), mezi něž třeba počítati též všechny přímky jdoucí bodem o, jakož i polárně k Z^2 přímky protínající kuželosečku O^2 mají za obrazy dvojiny o rozpětí O.

Tečny plochy Z^2 vyhovují podmínce, kdy rozpětí má býti ∞.

Jak z odvozených vět dostaneme věty kinematické projekce je patrno z odstavce 1.

*

Une généralisation de la représentation cinématique.

(Extrait de l'article précédent.)

La quadrique composée de la représentation cinématique de Blaschke est remplacée, dans le présent travail, par une quadrique gauche générale Z^2, dont les deux systèmes de droites sont désignées respectivement comme système »droit« P et système »gauche« L. Un point arbitraire o, n'appartenant pas à Z^2, est choisi comme centre et son plan polaire ω par rapport à Z^2 comme plan de projection. L'image »droite« (»gauche«) a^p (a^l) d'une droite A est le point d'intersection de ω avec la transversale, menée de o aux deux droites du système »droit« (»gauche«) coupant la droite A. A une paire d'images a^p, a^l correspondent, dans l'espace, deux droites A, A', conjuguées par rapport à Z^2. L'auteur étudie en détail les propriétés de cette projection de l'espace réglé; les résultats sont analogues à ceux qu'on trouve dans la projection cinématique pour une cinématique non-euclidéenne dans ω, la conique absolue étant $O^2 \equiv (\omega Z^2)$. Les points et les plans se représentent comme les collinéations du groupe reproduisant la conique O^2, un point et son plan polaire par rapport à Z^2 ayant la même image. On arrive ainsi à la représentation des points de l'espace par les homographies sur O^2, trouvée par Stéphanos. L'auteur étudie les images des différentes figures de l'espace réglé: des surfaces réglées, des congruences et des complexes. Ainsi, p. ex., le complexe linéaire est représenté par deux faisceaux homographiques de coniques ayant un contact double avec O^2.

O jisté transformaci determinantu a jejím užití na úkol Pothenotův i v mechanice.

Dr. *Jan Schuster.*

I.

1. Buďte dány souřadnice tří bodů roviny $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, a tři parametry u, v, w, vázané vztahem

$$vw + wu + uv = 1, \tag{1}$$

a uvažujme determinant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & n_1 \\ 1 & m_2 & n_2 \\ 1 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

kde

$$\left\{\begin{aligned} m_1 &= x_2 + x_3 + (y_2 - y_3)\,u \\ m_2 &= x_3 + x_1 + (y_3 - y_1)\,v \\ m_3 &= x_1 + x_2 + (y_1 - y_2)\,w \\ n_1 &= y_2 + y_3 + (x_3 - x_2)\,u \\ n_2 &= y_3 + y_1 + (x_1 - x_3)\,v \\ n_3 &= y_1 + y_2 + (x_2 - x_1)\,w. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Označíme-li strany trojúhelníka

$$a = BC, \quad b = CA, \quad a = AB, \quad \text{plochu } P,$$

platí

$$-D = a^2u + b^2v + c^2w - 4P. \tag{4}$$

2. Mezi veličinami (3) platí četné vztahy, jež pro další výpočty dávají značná usnadnění.

Především

$$\left\{\begin{aligned} m_2 - m_1 + (n_3 - n_1)\,v &= u\,(n_2 - n_3) \\ -(n_2 - n_1) + (m_3 - m_1)\,v &= u\,(m_2 - m_3) \end{aligned}\right. \tag{5}$$

s formulemi vzniklými cyklickou substitucí indexů i parametrů.

Když tedy utvoříme determinant

$$\begin{vmatrix} m_2 - m_1\,, & -(n_2 - n_1) \\ n_3 - n_1\,, & m_3 - m_1 \end{vmatrix},$$

a když v něm k prvnímu řádku přičteme druhý, znásobený parametrem v, vznikne

$$u\begin{vmatrix} n_2-n_3, & m_2-m_3 \\ n_3-n_1, & m_3-m_1 \end{vmatrix},$$

což není než $-uD$, takže máme soustavu relací:

$$6)\quad \begin{cases} (m_2-m_1)(m_3-m_1)+(n_2-n_1)(n_3-n_1)=-uD \\ (m_3-m_2)(m_1-m_2)+(n_3-n_2)(n_1-n_2)=-vD \\ (m_1-m_3)(m_2-m_3)+(n_1-n_3)(n_2-n_3)=-wD \end{cases}$$

3. Jiná soustava relací plyne z

$$(m_2-m_3)\,u=(x_3-x_2)\,u+(y_3-y_1)\,vu-(y_1-y_2)\,wu$$
$$=n_1-(y_2+y_3)+(y_3-y_1)\,vu+(y_2-y_1)\,wu.$$

Když nyní užijeme rovnice (1), a převedeme n_1 nalevo, zbude napravo výraz nezávislý na parametrech, a můžeme hned položit:

$$7)\quad \begin{cases} (m_2-m_3)\;u-n_1=(m_3-m_1)\,v-n_2=(m_1-m_2)\,w-n_3= \\ \qquad =y_1(vw-1)+y_2(wu-1)+y_3(uv-1)=S. \end{cases}$$

Stejně by se pak obdrželo:

$$8)\quad \begin{cases} (n_2-n_3)\,u+m_1=(n_3-n_1)\,v+m_2=(n_1-n_2)\,w+m_3= \\ \qquad =x_1(1-vw)+x_2(1-wu)+x_3(1-uv)=T. \end{cases}$$

4. Tyto vztahy jsou užitečné k úpravě výrazu:

$$F_1=\begin{vmatrix}(m_1-m_2)\,x_3+(n_1-n_2)\,y_3, & v \\ (m_1-m_3)\,x_2+(n_1-n_3)\,y_2, & -w\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} n_2-n_1, & -x_3-y_3v \\ n_3-n_1, & -x_2+y_2w\end{vmatrix}.$$

V prvním determinantu proveďme rozklad ve dva, podle členů prvního sloupce, a přepišme oba na tvar:

$$a)\qquad \begin{vmatrix}(m_1-m_2)\,w, & x_2 \\ (m_1-m_3)\,v, & -x_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} n_1-n_2, & y_2\,v \\ n_1-n_3, & -y_3\,w\end{vmatrix}.$$

V prvním z těchto pak nahraďme členy prvního sloupce hodnotami plynoucími ze (7), jež jsou n_3+S, $-n_2-S$ resp. Když pak ve druhém členu v F_1 podobně rozložíme druhý sloupec, a přičteme-li vzniklé členy v souhlasném pořadí ke členům (a), obdržíme

$$\begin{vmatrix} S+n_1, & x_2 \\ -S-n_1, & -x_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(n_1-n_2)\,w, & y_2+y_3 \\ (n_1-n_3)\,v, & -(y_2+y_3)\end{vmatrix}.$$

Když sem zase dosadíme $S+n_1$ ze (7) a hodnoty prvků prvního sloupce ve druhém determinantu z (8), vznikne:

$$(m_2-m_3)\,u\,(x_2-x_3)-(y_2-y_3)\,(m_2-m_3),$$

z čehož se zřetelem ke čtvrté rovnici soustavy (3):

9) $$F_1 = (m_3 - m_2)\, n_1.$$

Podobně se transformuje výraz:

$$G_1 = \begin{vmatrix} (m_1 - m_2)\, x_3 + (n_1 - n_2)\, y_3, & v \\ (m_1 - m_3)\, x_2 + (n_1 - n_3)\, y_2, & -w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_3 - m_1, & -y_2 - x_2 w \\ m_2 - m_1, & -y_3 + x_3 v \end{vmatrix}$$

který hned převedeme na

$$\begin{vmatrix} m_1 - m_2, & v x_2 \\ m_1 - m_3, & -w x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T - m_3, & +y_2 \\ m_2 - T, & -y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_3 - m_1, & -y_2 \\ m_2 - m_1, & -y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_3 - m_1, & -x_2 w \\ m_2 - m_1, & x_3 v \end{vmatrix}.$$

Zde slučme oba vnitřní a oba krajní členy, takže

$$\begin{vmatrix} T - m_1, & y_2 \\ m_1 - T, & -y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 - m_2, & v\,(x_2 + x_3) \\ m_1 - m_3, & -w\,(x_2 + x_3) \end{vmatrix}.$$

Dosazením hodnoty $T - m_1$ z (8) a $(m_1 - m_2)\, w$, $(m_1 - m_3)\, v$ ze (7), vznikne podle první rovnice ze (3):

10) $$G_1 = (n_2 - n_3)\, m_1.$$

Cyklicky ovšem patří do 9) a 10) další dvě formule.

Další obdobné funkce jsou:

$$H_1 = \begin{vmatrix} (m_1 - m_2)\, x_3 + (n_1 - n_2)\, y_3, & 1 \\ (m_1 - m_3)\, x_2 + (n_1 - n_3)\, y_2, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_2 - n_1, & -y_3 + x_3 v \\ n_3 - n_1, & -y_2 - x_2 w \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} m_1 - m_2, & x_2 \\ m_1 - m_3, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_1 - n_2, & y_2 \\ n_1 - n_3, & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_2 - n_1, & -y_3 \\ n_3 - n_1, & -y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (n_2 - n_1)\, w, & x_3 \\ (n_3 - n_1)\, v, & -x_2 \end{vmatrix}.$$

Obě střední sloučíme, v poslední je podle (8) první sloupec roven $m_3 - T$, $T - m_2$ resp., takže

$$\begin{vmatrix} m_1 - T, & x_2 \\ m_1 - T, & x_3 \end{vmatrix} + (y_2 + y_3)\,(n_3 - n_2)$$

po opětném užití hodnoty $(m_1 - T)$ z (8) a hodnoty n_1 ze (3) vznikne

11) $$H_1 = (n_3 - n_2)\, n_1.$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} (m_1 - m_2)\, x_3 + (n_1 - n_2)\, y_3, & 1 \\ (m_1 - m_3)\, x_2 + (n_1 - n_3)\, y_2, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_2 - m_1, & -x_3 - y_3 v \\ m_3 - m_1, & -x_2 + y_2 w \end{vmatrix}.$$

Rozviňme jako v H_1, v posledním náhradou ze (7) bude první sloupec $-S - n_3$ resp. $S + n_2$, slučme první a třetí a druhý a čtvrtý, což dá:

$$\begin{vmatrix} m_1 - m_2, & x_2 + x_3 \\ m_1 - m_3, & x_3 + x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S + n_1, & y_2 \\ S + n_1, & y_3 \end{vmatrix}$$

12) a

$$J_1 = (m_3 - m_2)\, m_1.$$

II.

5. Nyní se obratíme k užití provedených výkonů v úkolu Pothenotově.

V tomto úkolu jde jednak o určení polohy bodu Q, stanoviště pozorovatelova, který měří zorné úhly

$$\varphi = \sphericalangle BQC, \qquad \psi = \sphericalangle CQA, \qquad \omega = \sphericalangle AQB,$$

a nadto jest určiti změny v poloze Q, způsobené známými posuny bodů základních (A, B, C) nebo změnami zorných úhlů, pokud vzniklé změny polohy jsou tak malé, že dovolují užití metody superposice. K určení polohy bodu Q slouží výrazy pro úhly:

$$\left(\frac{y-y_3}{x-x_3} - \frac{y-y_2}{x-x_2}\right)\operatorname{cotg}\varphi = 1 + \frac{(y-y_3)(y-y_2)}{(x-x_3)(x-x_2)}$$

$$\left(\frac{y-y_1}{x-x_1} - \frac{y-y_3}{x-x_3}\right)\operatorname{cotg}\psi = 1 + \frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(x-x_1)(x-x_3)}$$

$$\left(\frac{y-y_2}{x-x_2} - \frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\operatorname{cotg}\omega = 1 + \frac{(y-y_2)(y-y_1)}{(x-x_2)(x-x_1)}\,.$$

Zde platí

13) $$\varphi + \psi + \omega = 0,\ 360^\circ,$$

kterážto rovnice jest ekvivalentní s (1), když

14) $$u = \operatorname{cotg}\varphi, \qquad v = \operatorname{cotg}\psi, \qquad w = \operatorname{cotg}\omega.$$

Ale potom soustava posledních rovnic pro kružnice se přepíše v rovnice s koefficienty (3):

15) $$\begin{cases} x^2 + y^2 - m_1 x - n_1 y = L_1 \equiv K_1 \\ x^2 + y^2 - m_2 x - n_2 y = L_2 \equiv K_2 \\ x^2 + y^2 - m_3 x - n_3 y = L_3 \equiv K_3 \end{cases}$$

kde

16) $$\begin{cases} L_1 = -(x_2x_3 + y_2y_3) + (x_2y_3 - x_3y_2)\,u \\ L_2 = -(x_3x_1 + y_3y_1) + (x_3y_1 - x_1y_3)\,v \\ L_3 = -(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)\,w. \end{cases}$$

Určení souřadnic x, y bodu Q z rovnic (15) je teď bezprostřední:

$$-xD = \begin{vmatrix} 1, & L_1, & n_1 \\ 1, & L_2, & n_2 \\ 1, & L_3, & n_3 \end{vmatrix}, \qquad -yD = \begin{vmatrix} 1, & m_1, & L_1 \\ 1, & m_2, & L_2 \\ 1, & m_3, & L_3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka: Nejde-li o další důsledky, nýbrž jen o polohu bodu Q, netřeba počítat determinantů právě uvedených. Zvolíme-li totiž bod A za základní, takže $x_1 = y_1 = 0$, jest $L_2 = L_3 = 0$, kdežto

$$L_1 = -bc\cos\alpha + bc\sin\alpha\cot g\,\varphi = bc\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}$$

a pak máme jednodušeji:

$$18)\qquad \begin{cases} -(x-x_1)\,D = \dfrac{bc\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}(n_2-n_3) \\ -(y-y_1)\,D = \dfrac{bc\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}(m_3-m_2). \end{cases}$$

Při tom značí α úhel BAC v trojúhelníku základním.

6. Posuny bodu Q buďte takové, že lze účinky od jednotlivých základních bodů počítat jakožto veličiny navzájem nezávislé, takže platí:

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial x}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial x}{\partial y_2}\Delta y_2 + \frac{\partial x}{\partial x_3}\Delta x_3 + \frac{\partial x}{\partial y_3}\Delta y_3$$

a podobná rovnice pro Δy.

Jednoduchá pravidla o derivacích vedou k výrazu:

$$-\frac{\partial x}{\partial x_1}D^2 = \begin{vmatrix} 1, & L_1, & 0 \\ 1, & L_2, & v \\ 1, & L_3, & -w \end{vmatrix} D + \begin{vmatrix} 1, & 0, & n_1 \\ 1, & -x_3-y_3 v, & n_2 \\ 1, & -x_2+y_2 w, & n_3 \end{vmatrix} D +$$

$$+\begin{vmatrix} 1, & L_1 & n_1 \\ 1, & L_2 & n_2 \\ 1, & L_3 & n_3 \end{vmatrix} 2\{(x_1-x_3)v+(x_1-x_2)w-(y_2-y_3)\}.$$

Koeficient posledního členu je $2(n_2-n_3)$.

Všechny determinanty převeďme odečítáním na druhý řád. Pak zde vystoupí členy:

$$19)\qquad \begin{cases} L_2-L_1 = (m_1-m_2)\,x_3 + (n_1-n_2)\,y_3 \\ L_3-L_2 = (m_2-m_3)\,x_1 + (n_2-n_3)\,y_1 \\ L_1-L_3 = (m_3-m_1)\,x_2 + (n_3-n_1)\,y_2 \end{cases}$$

a třetí determinant

$$-2(L_2-L_1)(n_1-n_3)(n_2-n_3) - 2(L_3-L_1)(n_2-n_1)(n_2-n_3)$$

přepíšeme podle (6) na

$$2D\begin{vmatrix} L_2-L_1, & -v \\ L_3-L_1, & w \end{vmatrix} + 2(m_2-m_3)\begin{vmatrix} L_2-L_1, & m_1-m_2 \\ L_3-L_1, & m_1-m_3 \end{vmatrix}.$$

Poslední determinant jest podle (17) yD, a sloučíme-li všecky ostatní členy v $\frac{\partial x}{\partial x_1}$, vznikne

$$D\left\{\begin{vmatrix} L_2-L_1, & -v \\ L_3-L_1, & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_3-y_3 v, & n_2-n_1 \\ -x_2+y_2 w, & n_3-n_1 \end{vmatrix} - 2y(m_2-m_3)\right\}.$$

Ale podle (19) jsou první dva členy v závorce $-F_1$, takže po zkrácení vznikne jednoduše

20) $$-\frac{\partial x}{\partial x_1} D = (m_3 - m_2)(2y - n_1).$$

Další požadavek jest určiti

$$-\frac{dx}{dy_1} D^2 = D \begin{vmatrix} 1, & L_1, & 0 \\ 1, & L_2, & 1 \\ 1, & L_3, & 1 \end{vmatrix} + D \begin{vmatrix} 1, & 0 & n_1 \\ 1, & -y_3 + x_3\ v, & n_2 \\ 1, & -y_2 - x_2\, w, & n_3 \end{vmatrix} +$$
$$+ 2 \begin{vmatrix} 1, & L_1, & n_1 \\ 1, & L_2, & n_2 \\ 1, & L_3, & n_3 \end{vmatrix} (m_3 - m_2).$$

Zde zase přetvoříme třetí determinant podle (2)....

$$2(L_2 - L_1)(n_3 - n_1)(m_3 - m_2) - 2(L_3 - L_1)(n_2 - n_1)(m_3 - m_2) =$$
$$- 2D \begin{vmatrix} L_2 - L_1, & 1 \\ L_3 - L_1, & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} L_2 - L_1, & m_1 - m_2 \\ L_3 - L_1, & m_1 - m_3 \end{vmatrix} (n_2 - n_3),$$

kde druhý člen je podle (17) $-2\,yD(n_2 - n_3)$, a dosazením vznikne

$$-\frac{\partial x}{\partial y_1} D = - \begin{vmatrix} L_2 - L_1, & 1 \\ L_3 - L_1, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - y_3 + x_3 v, & n_2 - n_1 \\ - y_2 - x_2 w, & n_3 - n_1 \end{vmatrix} - 2y(n_2 - n_3).$$

Zde jsou první dva členy rovny $-H_1$, takže

21) $$-\frac{\partial x}{\partial y_1} D = (n_2 - n_3)(n_1 - 2y).$$

Dále jest, obdobně s právě odvozeným výrazem:

$$-\frac{\partial y}{\partial x_1} D^2 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & L_1 \\ 1, & 1, & L_2 \\ 1, & 1, & L_3 \end{vmatrix} D + \begin{vmatrix} 1, & m_1, & 0 \\ 1, & m_2, & -x_3 + y_3\ v \\ 1, & m_3, & -x_2 + y_2\ w \end{vmatrix} D +$$
$$+ \begin{vmatrix} 1, & m_1, & L_1 \\ 1, & m_2, & L_2 \\ 1, & m_3, & L_3 \end{vmatrix} 2(n_2 - n_3).$$

Přetvoření posledního determinantu se děje zase užitím (2).

$$-\frac{\partial y}{\partial x_1} D = \begin{vmatrix} L_2 - L_1, & 1 \\ L_3 - L_1, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_2 - m_1, & -x_3 - y_3\ v \\ m_3 - m_1, & -x_2 + y_2\ w \end{vmatrix} + 2x(m_2 - m_3).$$

První dva členy napravo jsou J_1, a proto

22) $$-\frac{\partial y}{\partial x_1} D = (m_3 - m_2)(m_1 - 2x).$$

Posléze pro $\frac{\partial y}{\partial y_1}$ platí:

$$-\frac{\partial y}{\partial y_1}D^2 = D\begin{vmatrix} 1, & 0, & L_1 \\ 1, & -v, & L_2 \\ 1, & w, & L_3 \end{vmatrix} + D\begin{vmatrix} 1, & m_1, & 0 \\ 1, & m_2, & -y_3+x_3 v \\ 1, & m_3, & -y_2-x_2 w \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} 1, & m_1, & L_1 \\ 1, & m_2, & L_2 \\ 1, & m_3, & L_3 \end{vmatrix} 2(m_2-m_3)$$

nebo

$$-\frac{\partial y}{\partial y_1}D = \begin{vmatrix} L_2-L_1, & -v \\ L_3-L_1, & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_2-m_1, & -y_3+x_3 v \\ m_3-m_1, & -y_2-x_2 w \end{vmatrix} + 2x(n_2-n_3).$$

První dva členy napravo nejsou než $-G_1$, a proto

$$-\frac{\partial y}{\partial y_1}D = (n_2-n_3)(2x-m_1). \tag{23}$$

7. Dosavadní výsledky třeba nyní ověřit. To se stane především, uvažujeme-li posuny bodu Q, způsobené jen posuny bodu A, tedy $(dx)_1$, $(dy)_1$ dány formulemi:

$$\left\{\begin{aligned} (dy)_1 &= -\frac{1}{D}(m_1-2x)\,[(m_3-m_2)\,dx_1+(n_3-n_2)\,dy_1] \\ (dx)_1 &= -\frac{1}{D}(2y-n_1)\,[(m_3-m_2)\,dx_1+(n_3-n_2)\,dx_1]. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Dáme-li tyto veličiny do poměru a srovnáme-li s hodnotou diferenciálního poměru, jež plyne z rovnice (15) pro kruh K_1, totiž

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m_1-2x}{2y-n_1},$$

shledáváme, že skutečně nezávisí směr posunu bodu Q na směru posunu bodu A, neboť kruh K_1 určený body B, C, Q, zůstává pevný, ať A vykonává kterékoli pohyby.

8. Abychom lépe přehlédli závislost posunů bodu Q na posunech bodu A, vyšetřme posuny stejné absolutní hodnoty r_1. Položíme-li tedy

$$\Delta x_1 = r_1\cos\lambda_1, \qquad \Delta y_1 = r_1\sin\lambda_1,$$

a označíme-li R_1 amplitudu kmitů bodu Q, způsobených oběhem bodu A po malé kružnici poloměru r_1 kol středu (x_1, y_1), obdržíme

$$R_1^2 = \left\{(m_1-2x)^2+(2y-n_1)^2\right\}\left\{(m_3-m_2)^2+(n_3-n_2)^2\right\}\frac{r_1^2}{D^2}, \tag{25}$$

při čemž položeno

$$(m_2 - m_3) = \sqrt{(m_2 - m_3)^2 + (n_3 - n_3)^2} \sin \delta_1$$

$$n_2 - n_3 = -\sqrt{(m_2 - m_1)^2 + (n_2 - n_3)^2} \cos \delta_1,$$

takže posun bodu Q má hodnotu

$$\sqrt{(\Delta x)_1{}^2 + (\Delta y)_1{}^2} = R_1 \sin(\delta_1 - \lambda_1).$$

Projde tedy bod Q dvakrát polohou (x, y), když A opíše kruh, a to, když $\lambda_1 = \delta_1$, nebo $\lambda_1 = 180 + \delta_1$, což odpovídá průchodu bodu A přímkou spojující polohy (x_1, y_1) a (x, y). Tato přímka má směrnici

$$-\frac{m_2 - m_3}{n_2 - n_3} = tg\,\delta_1.$$

Maxima odchylek odpovídají polohám λ_1 o 90^0 různým od předchozích, neboť při předpokladu malého r_1 se k malým veličinám řádu vyššího nehledí.

Pro lepší jasnost v posuzování posunů vyjádřeme poměr $\frac{R_1}{r_1}$ prvky trojúhelníka ABC.

První činitel ve (25) se rozvine na

$$m_1{}^2 + n_1{}^2 + 4(x^2 + y^2 - xm_1 - yn_1) = m_1{}^2 + n_1{}^2 + 4L_1$$

podle (15). Když pak zase vztahujeme prvky na A jako bod základní a užijeme rovnic (3) obdržíme

$$b^2 + c^2 + 2(x_2x_3 + y_2y_3) + [b^2 + c^2 - 2(x_2x_3 + y_2y_3)] \cot g^2 \varphi +$$
$$+ 2[(x_2 + x_3)(y_2 - y_3) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2)] \cot g\,\varphi - 4(x_2x_3 +$$
$$+ y_2y_3) + 8P \cot g\,\varphi = (b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha)\operatorname{cosec}^2\varphi + 4P\cot g\,\varphi =$$
$$= a^2 \operatorname{cosec}^2 \varphi + 4P \cot g\,\varphi.$$

Druhý činitel jest

$$[x_3 - x_2 + y_3 \cot g\,\varphi + y_2 \cot g\,\omega]^2 + [y_3 - y_2 - x_3 \cot g\,\varphi - x_2 \cot g\,\omega]^2 =$$
$$= a^2 + b^2 \cot g^2 \psi + c^2 \cot g^2 \omega - 4P([\cot g\,\psi + \cot g\,\omega] -$$
$$- 2(y_2y_3 + x_2x_3) \cot g\,\omega \cot g\,\psi = a^2 + b^2 \cot g^2 \psi + c^2 \cot g^2 \omega -$$
$$- 2bc \cot g\,\psi \cot g\,\omega \cos\alpha - 4P(\cot g\,\psi + \cot g\,\omega).$$

Zde značí druhý až čtvrtý člen čtverec strany stejnolehlé s a v trojúhelníku, jehož ramena, svírající týž úhel α, jsou proti b a c větší v poměru $\cot\psi$ resp. $\cot\omega$. Značíme li ji $\bar{a}$, bude

$$26) \quad \frac{R_1{}^2}{r_1{}^2} = \frac{[a^2 \operatorname{cosec}^2 \varphi + 4P \cot g\,\varphi]\,[a^2 + \bar{a}^2 - 4P(\cot g\,\psi + \cot g\,\omega)]}{[a^2 \cot g\,\varphi + b^2 \cot g\,\psi + c^2 \cot g\,\omega - 4P]^2}.$$

9. Na základě zákona nezávislosti malých veličin, pokud se hledí jen k jejich prvním mocninám, můžeme hned napsat posuny

bodu Q jako funkce posunů všech bodů A, B, C, užijeme-li cyklické substituce indexů:

$$
27)\quad \left\{ \begin{aligned}
-D\Delta x &= (n_1 - 2y)\,[(m_2 - m_3)\,\Delta x_1 + (n_2 - n_3)\,\Delta y_1] \\
&\quad + (n_2 - 2y)\,[(m_3 - m_1)\,\Delta x_2 + (n_3 - n_1)\,\Delta y_2] \\
&\quad + (n_3 - 2y)\,[(m_1 - m_2)\,\Delta x_3 + (n_1 - n_2)\,\Delta y_3] \\
-D\Delta y &= (2x - m_1)\,[(m_2 - m_3)\,\Delta x_1 + (n_2 - n_3)\,\Delta y_1] \\
&\quad + (2x - m_2)\,[(m_3 - m_1)\,\Delta x_2 + (n_3 - n_1)\,\Delta y_2] \\
&\quad + (2x - m_3)\,[(m_1 - m_2)\,\Delta x_3 + (n_1 - n_2)\,\Delta y_3].
\end{aligned} \right.
$$

Tato formule dovoluje druhé ověření nalezených výsledků. Kdyby se všecky body A, B, C pošinuly stejně, takže

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \xi, \qquad \Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3 = \eta,$$

musí se celý uvažovaný systém chovati jako tuhý útvar, a bod Q se pošine o touž veličinu. Vskutku sečítáme-li ve formuli předposlední po sloupcích, obdržíme

$$\xi\,\Sigma n_1\,(m_2 - m_3) - 2y\xi\,\Sigma\,(m_2 - m_3) + \eta\,\Sigma n_1\,(n_2 - n_3) - 2y\eta\,\Sigma\,(n_2 - n_3)$$

kde Σ se vztahuje na cyklické permutace tří indexů.

Koeficient při ξ je $-D$, ostatní koeficienty totožně mizejí. Když týž postup provedeme i v poslední rovnici, máme, jak žádáno

$$\Delta x = \xi, \qquad \Delta y = \eta.$$

10. Pro posouzení, jak voliti základní body, rozhodují hlavně úhly φ, ψ, ω. Protože se uplatňují cotangentami, nutno dbáti, aby úhly nebyly malé, neboť pak se malé posuny základních bodů objeví ve velkých násobcích na bodě Q. Dále ukazují rovnice (27), že posuny budou menší, je-li absolutní hodnota D velká.

Podle (4) vidíme, že bude výhodné, aby byly u, v, w vesměs záporné, tedy úhly φ, ψ, ω tupé, t. j. bude dobře, platí-li $\varphi + \psi + \omega = 360^\circ$, t. j. bod Q lež uvnitř základního trojúhelníka, a body A, B, C buďte rozděleny v obzoru pozorovatelově co možná stejnoměrně (asi v úhlech 120°). Ostatně extremum D nastane obecně v Brocardových bodech trojúhelníka ABC.

Že rovnice $\varphi + \psi + \omega = 0$ je méně výhodná, plyne z toho, že se koeficient při jedné straně ve (4) změní v opačný, čímž se absolutní hodnota D vždy velmi zmenší.

11. Vliv změn zorných úhlů φ, ψ, ω na polohu bodu Q se vyjádří bezprostředně, a nevyžaduje zvláštních úkonů, jako tomu bylo výše.

Z rovnice (13) plyne

$$28)\qquad \Delta\varphi + \Delta\psi + \Delta\omega = 0.$$

Derivací formulí (17) obdržíme:

$$-\frac{\partial x}{\partial \varphi} D = \operatorname{cosec}^2 \varphi \, [p_1 (n_3 - n_2) + (x_2 - x_3)(L_3 - L_2) + a^2 x],$$

kde

29) $$p_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad p_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad p_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Když spojíme člen prostý parametrů (cotangent) v prvním členu v hranaté závorce s posledním členem, bude roven

$$(y_2 - y_3)\, 2P + a^2 (x - x_1).$$

Koeficient při v [$= \operatorname{cotg} \psi$] činí

$$(x_3 - x_1)\, p_1 - (x_2 - x_3)\, p_2 = x_3 - 2P,$$

a podobně při w [$= \operatorname{cotg} \omega$] stojí

$$(x_2 - x_1)\, p_1 + (x_2 - x_3)\, p_3 = x_2 - 2P,$$

neboť

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0.$$

Je tedy možno psáti výsledek ve tvaru

$$-\frac{\partial x}{\partial \varphi} D = \operatorname{cosec}^2 \varphi \, [a^2 (x - x_1) + 2P (y_2 - y_3 + x_3 \operatorname{cotg} \psi + x_2 \operatorname{cotg} \omega)].$$

Koeficient při $2P$ možná všude psáti

$$n_3 - n_2 + x_1 (\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \omega).$$

Ale $\quad \operatorname{cosec}^2 \varphi \, (\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \omega) = \dfrac{-1}{\sin \varphi \sin \psi \sin \omega} = \Phi, \quad$ takže

30) $$\left\{ \begin{aligned}
-\frac{\partial x}{\partial \varphi} D &= \operatorname{cosec}^2 \varphi \, [a^2 (x - x_1) + 2P (n_3 - n_2)] + x_1 \Phi \\
-\frac{\partial x}{\partial \psi} D &= \operatorname{cosec}^2 \psi \, [b^2 (x - x_2) + 2P (n_1 - n_3)] + x_2 \Phi \\
-\frac{\partial x}{\partial \omega} D &= \operatorname{cosec}^2 \omega \, [c^2 (x - x_3) + 2P (n_2 - n_1)] + x_3 \Phi \\
-\frac{\partial y}{\partial \varphi} D &= \operatorname{cosec}^2 \varphi \, [a^2 (y - y_1) + 2P (m_2 - m_3)] + y_1 \Phi \\
-\frac{\partial y}{\partial \psi} D &= \operatorname{cosec}^2 \psi \, [b^2 (y - y_2) + 2P (m_3 - m_1)] + y_2 \Phi \\
-\frac{\partial y}{\partial \omega} D &= \operatorname{cosec}^2 \omega \, [c^2 (y - y_3) + 2P (m_1 - m_2)] + y_3 \Phi
\end{aligned} \right.$$

Na první pohled překvapuje závislost derivací na absolutní hodnotě souřadnic, ale uvážíme-li rovnici (28), vidíme hned, že jejím dosazením vystoupí ve výsledku rozdíly členů obsahujících Φ, jinými slovy, každá změna úhlová jednoho paprsku postihuje dva úhly smyslem protivným, tedy se uplatní členy s Φ jen diferenčně.

Co se praktických výpočtů týče, vidíme na formulích (30), že je výhodnější užívati tři úhlů φ, ψ, ω, než-li dvou a dosazovati φ, ψ, $360-\varphi-\psi$, neboť se sloučením derivací stanou výsledky nepřehlednými a složitějšími.

III.

12. Dosavadních výsledků možná užít k určení virtuálních posunů a sil v případě, kdy bod Q spojen s pevnými body A, B, C pružnými vlákny modulů pružnosti E_1, E_2, E_3, v nichž působí napětí T_1, T_2, T_3, a mají-li vlákna po pošinutí zachovati vzájemné sklony.

Především patrno, že úhly φ, ψ, ω určeny napětími, neboť

$$-2T_2T_3\cos\varphi = T_2^2 + T_3^2 - T_1^2 \text{ atd.},$$

takže k zachování úhlů nutno, aby napětí i po pošinutí zůstala v témž poměru. Z toho plyne požadavek

$$\frac{\varDelta T_1}{T_1} = \frac{\varDelta T_2}{T_2} = \frac{\varDelta T_3}{T_3} = \varepsilon.$$

Změna délky vlákna $AQ = l_1$ dána rovnicí

$$l_1 \varDelta l_1 = (y-y_1)(\varDelta y - \varDelta y_1) + (x-x_1)(\varDelta x - \varDelta x_1),$$

kde $\varDelta x, \varDelta y$ značí hodnoty udané v rovnicích (23).

Ježto dále $E_1 \varDelta l_1 = l_1 \varDelta T_1$, máme pro nová napětí, jež nutno dodat, aby při posunech bodů A, B, C zůstaly úhly zachovány, tyto podmínky:

$$31)\quad \frac{1}{E_i}\varepsilon\, l_i^2\, T_i = (y-y_i)(\varDelta y - \varDelta y_i) + (x-x_i)(\varDelta x - \varDelta x_i)\ (i = 1, 2, 3).$$

Vidíme tedy, že je-li dán malý koeficient úměrnosti ε, platí mezi šesti složkami posunů $\varDelta x_i$, $\varDelta y_i$ tři rovnice, nebo naopak jsou-li dány posuny dvou vrcholů, možno z těchto rovnic určit posuny třetího vrcholu a poměrné zvětšení všech napětí $(l_1 + \varepsilon)$.

Též můžeme užíti dosavadních výsledků k určení změn napětí, způsobených posuny základních bodů. Mění-li se napětí, mění se též úhly φ, ψ, ω podle pravidla

$$32)\quad \begin{cases} -\Theta\varDelta\varphi = T_1(+\varDelta T_1 + \varDelta T_2\cos\omega + \varDelta T_3\cos\psi) \\ -\Theta\varDelta\psi = T_2(\varDelta T_1\cos\omega + \varDelta T_2 + \varDelta T_3\cos\varphi) \\ -\Theta\varDelta\omega = T_3(\varDelta T_1\cos\psi + \varDelta T_2\cos\varphi + \varDelta T_3), \end{cases}$$

kde $\quad \Theta = T_2T_3\sin\varphi = T_3T_1\sin\psi = T_1T_2\sin\omega.$

Pak máme tyto výrazy dosadit do:

$$\varDelta x = \sum_{=1}^{3}\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\varDelta x_i + \frac{\partial x}{\partial y_i}\varDelta y_i\right) + \sum_{\varphi,\psi,\omega}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\varDelta\varphi,$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial y}{\partial y_i} \Delta y_i \right) + \sum_{\varphi, \psi, \omega} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \Delta \varphi.$$

Když pak dosadíme do rovnice tvaru (31), vzniknou tři rovnice, z nichž postačí napsat prvou:

$$33)\quad \frac{l_1^2 \Delta T_1}{E_1} = (y - y_1)\left[-\Delta y_1 + \sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial y}{\partial y_i} \Delta y_i \right) + \sum \frac{\partial y}{\partial \varphi} \Delta \varphi \right] + (x - x_1)\left[-\Delta x_1 + \sum \left(\frac{\partial x}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial x}{\partial y_i} \Delta y_i \right) + \sum \frac{\partial x}{\partial \varphi} \Delta \varphi \right].$$

Z těchto rovnic lze pak vypočítat změny napětí ΔT_1, ΔT_2, ΔT_3, když za $\Delta \varphi$, $\Delta \psi$, $\Delta \omega$ dosadíme jejich hodnoty ze (32).

•

Transformation d'un déterminant et son application au problème de Pothenot et à la statique.

(Extrait de l'article précédent.)

C'est un déterminant spécial du troisième ordre dont les propriétés, étudiées dans la première partie du mémoire, permettent d'exprimer, d'une façon particulièrement simple, le déplacement du point d'observation en fonction des déplacements de trois points de base ou en fonction des variations des angles visuels. Si l'on attache, d'autre part, un point à trois points fixes par des fils extensibles, on voit que la variation de ce point, causée par la variation des tensions des fils ou des positions des points fixes, se réduit au même problème.

Asymetrické křivky frekvencí.

Napsal *V. Láska.*

Geometrické metody nejsou dosud ve statistice náležitě využity, ač jest to právě statistický materiál, jenž svým charakterem volá přímo po aplikaci geometrických metod. V následujících úvahách podávám příklad použití geometrie na případ asymetrické křivky frekvencí, která tvoří přirozené rozšíření známé křivky Gaussovy. Symetrická křivka Gaussova

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

jest křivkou seskupení jevů měřitelných zákony matematické náhody a vyskytuje se podle více než stoleté zkušenosti v kolektivech měřených úhlů a délek podstatně tak, že každé jejich kolektivum, jež vede k nějaké jiné křivce frekvencí, předem se považuje za nesprávné.

Zkušenost potvrzuje dále, že stejně zásadně, jako symetrické křivky v kolektivech měřených délek a úhlů, vyskytují se v kolektivech jiného původu křivky asymetrické, t. j. nesouměrné.

Jejich nejjednodušší tvar obdržíme, položíme-li

$$\psi(x) = \psi(0)\{1 + \mu^2 x\} e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} = \varphi(x) + c\,\varphi'(x).$$

Jde nyní o to, rozhodnouti jednoduchou geometrickou metodou, zda nějaká předložená asymetrická křivka frekvencí jest křivkou vyhovující této rovnici. Platí vztah:

$$\frac{\psi(x)}{\psi(-x)} = \frac{1+\mu^2 x}{1-\mu^2 x},$$

z kterého obdržíme:

$$\mu^2 = \frac{1}{x} \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{\psi(x) + \psi(-x)}.$$

Je-li tudíž křivka analyticky dána funkcí

$$\psi(x) = \psi(0)(1 + \mu^2 x) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2},$$

musí býti výraz

$$\frac{1}{x}\,\frac{\psi(x)-\psi(-x)}{\psi(x)+\psi(-x)}$$

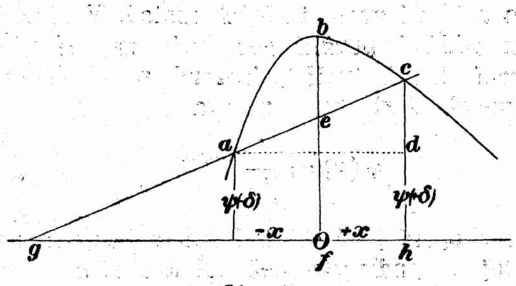
pro všechna x konstantou.

Geometrický význam uvažovaného výrazu vyšetříme snadno. Z obr. 1 plyne úměra

$$\frac{\psi(x)-\psi(-x)}{x'}=\frac{\psi(x)+\psi(-x)}{fg}$$

jest proto

$$fg=x\,\frac{\psi(x)+\psi(-x)}{\psi(x)-\psi(-x)}=\frac{1}{\mu^2},$$



Obr. 1.

co napsáno ve tvaru determinantu dá:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\mu^2} & 1 \\ \psi(-x) & -x & 1 \\ \psi(x) & x & 1 \end{vmatrix}=0$$

a tím i analytický důkaz následující konstrukce:

Proložíme-li koncovými body pořadnic $\psi(x)$ a $\psi(-x)$, t. j. body a a c přímku, pak veškeré tyto přímky procházejí jedním a týmž bodem g. Máme-li tudíž statistickou křivku, ve které spojnice bodů $\psi(x)$ a $\psi(-x)$ procházejí jedním a týmž bodem, jest její rovnice uvažovaného druhu. Příklady podobných křivek viz na př. *G. U. Yule**), *A. L. Bowley***) atd.

Tak můžeme se přesvědčiti, zda nějaký statistický graf jest měřitelný křivkou tvaru

$$\psi(x)=\psi(0)\{1+\mu^2 x\}\,e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}$$

nebo ne.

---

*) Český překlad jeho úvodu do teorie statistiky (Praha 1926). Str. 92, obr. 10 a str. 94, obr. 12.

**) Elements of Statistics, 1920, str. 130.

Pro další eventuální úvahy stačí připomenouti, že funkce

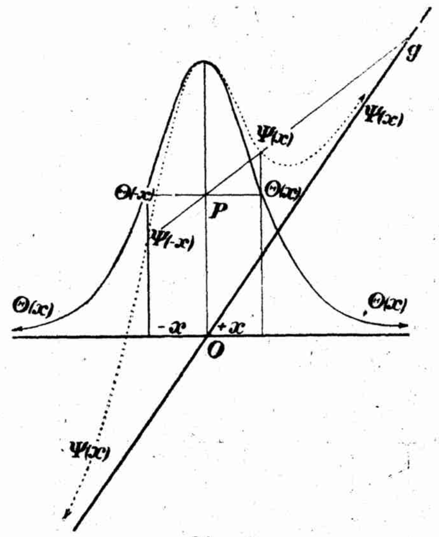
$$\frac{\psi(x)}{1+\mu^2 x} = \theta(x)$$

má tvar Gaussův:

$$\theta(x) = \theta(0)\, e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}.$$

Sestrojení hodnot $\psi(x)$ z daných $\theta(x)$ a naopak jest tudíž snadné. Jest totiž

$$\theta(x) = \tfrac{1}{2}\{\psi(x) + \psi(-x)\}$$



Obr. 2.

a opět

$$\frac{1}{\mu^2} : \theta(x) = \frac{1}{\mu^2} + 1 : \psi(x)$$

co vede ke konstrukci podané na obr. 2.

Sestrojení křivky $\psi(x)$ z $\theta(x)$ provedeme takto: Průsečíkem P spojnice dvou symetricky k ose Y položených bodů

$$+x,\ \theta(x) \text{ a } -x,\ \theta(-x),$$

s osou Y a bodem g proložíme přímku, která protne kolmice úseček $+x$, $-x$, v hledaných bodech $\psi(x)$ a $\psi(-x)$.

Bod g nemusí ležeti na ose X. Jsou-li

$$-\nu \text{ a } \frac{1}{\mu^2}$$

jeho souřadnice v obecné poloze, pak přechází funkce $\psi(x)$ ve funkci:

$$\Psi(x) = \nu + \psi(x) = \nu + \varphi(x) + c\varphi'(x).$$

Tím jest dána geometrie prvých tří členů všeobecného rozvoje *H. Brunnsova*

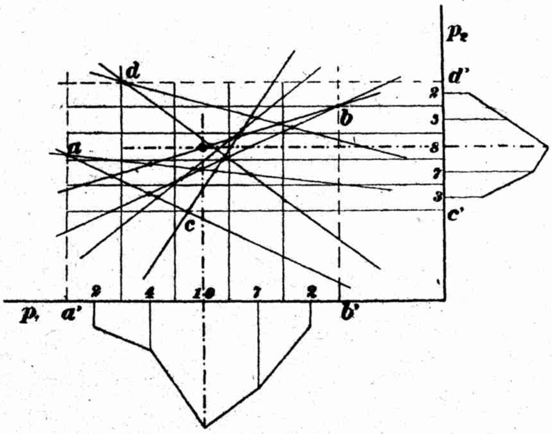
$$\Phi(x) = a_0 + a_1 \varphi(x) + a_2 \varphi'(x) + a_3 \varphi'''(x) + \ldots$$

Hodnota μ jest patrně geometrickou charakteristikou asymetrické křivky uvažovaného tvaru a proto nejpřirozenější mírou její nesouměrnosti (skewness).

Dosud užívalo se míry, kterou zavedl *K. Pearson,*

$$\frac{\text{aritm. průměr} - \text{hodnota } x\ (max)}{\sqrt{\frac{[\triangle^2]}{n}}},$$

což jest konvencionelní, avšak teoreticky sotva vyhovující míra.



Obr. 3.

Význam asymetrických křivek spočívá v tom, že jejich maximální pořadnice jest zároveň hodnotou nejčastěji v daném souboru se vyskytující a proto hodnotou nejpravděpodobnější, neboť o faktické pravděpodobnosti stejně přesných pozorování rozhoduje jedině maximum statistické pravděpodobnosti. Jak naše úvahy dokazují, jest použití asymetrických křivek právě tak jednoduché jako použití křivky Gaussovy. V praktických případech budou ovšem uvažované spojnice dvou bodů, jejichž x jsou k ose Y symetrické, protínati se v jednom bodu jen nedokonale. K vyhledání nejpravděpodobnější polohy průsečíku existují sice geometrické metody, avšak velmi složité a prakticky sotva upotřebitelné.

Doporučuje se proto stanoviti polohu hledaného průsečíku jednoduše takto:

Promítneme (viz obr. 2) nejkrajnější průsečíky *a, b, c, d* na dvě kolmice p_1, p_2, čímž obdržíme body a', b', c', d'. Vzdálenosti $a'b'$ a $c'd'$ rozdělíme na pět stejných dílů, vytyčíme v dělicích bodech kolmice a stanovíme v jednotlivých sloupcích obsažený počet bodů.

Sestrojíme nyní, nanášejíce na kolmice ve středu jednotlivých sloupců umístěné délky úměrné počtu bodů v dotyčném sloupci obsažených, křivky jejich frekvencí, pak snadno stanovíme polohu stop jejich maximálních pořadnic na přímkách p_1 a p_2. Jimi vedené kolmice protínají se v hledaném bodu *g*.

Je-li stanoveno vyrovnané místo průsečíků, t. j. bod *g*, přistupujeme k rýsování v y r o v n a n é k ř i v k y $\psi(x)$. Bodem *g* a průsečíkem spojnice daných bodů $\psi(x)$ a $\psi(-x)$ s osou *Y* vedeme přímku, která protne kolmice vytyčené v bodech x, $-x$, ve vyrovnaných bodech $\psi(x)$ a $\psi(-x)$. Uvažovaný způsob grafického vyrovnávání jest patrně nejen nejjednodušší, nýbrž i nejpřirozenější.

•

Sur les courbes de fréquences asymétriques.

(E x t r a i t d e l'a r t i c l e p r é c é d e n t.)

L'auteur généralise dans cet article la courbe de fréquences de Gauss $\varphi(x)$ par une courbe asymétrique de la forme

$$\psi(x) = \psi(o)\{1 + \mu^2 x\} e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} = \varphi(x) + c\varphi'(x)$$

et donne une construction géométrique simple permettant de décider de l'existence de la forme considérée et donnant en même temps graphiquement la valeur μ, qui caractérise la courbe asymétrique considérée.

Poznámky k Schrödingerově vlnové mechanice.

V. Trkal.

1. Kvantová a vlnová mechanika. — Zkušenost učí, že při fysikálních pochodech, odehrávajících se ve velmi malých prostorech, hraje rozhodující úlohu typická diskontinuita, element obyčejné fysice velmi cizí. A tak naproti obvyklé představě, kterou si v prostorově časovém nazírání činíme, že totiž prostor a hmota jsou spojité a že se dají libovolně děliti, vznikla představa o složení hmoty z nepatrných částic, korpuskulí. Snaha popsati jejich mechanism pomocí obyčejné, t. zv. klasické mechaniky, nevedla k cíli — bylo nutno zavésti dodatečné podmínky, t. zv. podmínky kvantové, aby se docílilo souhlasu teorie se zkušeností. Značné vady, ba nepřípustnost tohoto postupu, pociťovaly se od samého začátku teorie; tyto potíže daly vznik t. zv. kvantové mechanice, která tvoří jisté analogon klasické mechaniky (jež platí pro pochody makroskopické), a netrpí vadami této mechaniky, když jí má býti použito pro pochody mikroskopické. Avšak zato ukázalo se nemožností oněm korpuskulím přisouditi v prostoru nějakou polohu vůbec, jakožto funkci času; na místo takového popisu prostorově časového nastupují matematické vztahy mezi skutečně pozorovatelnými veličinami. Tato kvantová mechanika,[1]) jejímž tvůrcem jest Heisenberg, jest po formální stránce identická s t. zv. vlnovou mechanikou Schrödingerovou,[2]) jejíž fysikální základy spočívají na »vlnové teorii« de Broglieově. Vlnová mechanika Schrödingerova dovoluje však učiniti si přec jen trochu názornější představy fysikálního dění ve velmi malých prostorech než teorie Heisenbergova, třebaže dosud fysice chybí pro názornou interpretaci onoho diskontinuitního elementu ještě nějaký, dosud neznámý, avšak podstatný tah v obrazu, který si o struktuře hmoty vykreslila.

2. Vlnová rovnice Schrödingerova.[3]) — Poněvadž v české literatuře dosud nebylo o Schrödingerově teorii psáno

---

[1]) W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 33, 879, 1925; viz přehledy literatury pod názvem »*Nová epocha v teorii kvant*« v »Časopise pro pěst. mat. a fys.« 55, 207, 423—424, 1926; 56, 53—56, 1927, a přehled pod týmž názvem v prvém čísle tohoto ročníku Časopisu.

[2]) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 79, 361—376, 1926.

[3]) E. Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig 1927, (J. A. Barth), pp. 1, 2, 16.

vůbec, vyložím nejdříve stručně prvé její začátky, ovšem jen po formální její stránce.

Problémy starší atomové dynamiky řeší se tak, že za východisko slouží H a m i l t o n o v a funkce

$$H(q, p) = E,$$

kde q značí zobecněné souřadnice a p příslušné jim impulsy, kdežto E znamená konstantu úhrnné energie. Po zavedení účinnostní funkce S přejde H a m i l t o n o v a funkce v parciální rovnici diferenciální

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E.$$

Obvyklý postup byl ten, že se hledalo řešení této rovnice ve tvaru s o u č t u funkcí, z nichž každá závisí na jedné, jediné proměnné q. Avšak S c h r ö d i n g e r zavádí místo účinnostní funkce S novou neznámou ψ, která má býti s o u č i n e m funkcí, z nichž každá závisí jen na jedné proměnné, t. j.

$$S = K \log \psi,$$

kde konstanta K musí býti zavedena z důvodů dimensionálních a má rozměr účinnosti. Z důvodů numerického souhlasu se zkušeností volí se

$$K = \frac{h}{2\pi},$$

kde h jest P l a n c k o v a konstanta. Tak obdrží S c h r ö d i n g e r rovnici

$$H\left(q, \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = E.$$

Nyní však nehledá řešení této rovnice, nýbrž tomuto problému přiřadí úlohu jinou, která v případě problému jednoho elektronu spočívá v tomto:

Dejme tomu, že užíváme pravoúhlých souřadnic Descartesových; pak

$$H\left(q, \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2m\psi^2} \left\{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right\} +$$
$$+ V(x, y, z) = E,$$

kde m jest hmota elektronu a $V(x, y, z)$ jeho potenciální energie. Problém, který přiřadíme této rovnici, zní pak ve tvaru variačního principu takto:

$$\delta \int [H - E] \psi^2 d\tau = \delta \int \int \int dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 +\right.$$
$$\left. + (V - E) \cdot \frac{8m\pi^2}{h^2} \cdot \psi^2 \right] = 0.$$

Provedeme-li naznačenou variaci, obdržíme vlnovou rovnici Schrödingerovu

$$\boxed{\Delta\psi + \frac{8m\pi^2}{h^2}(E-V)\psi = 0,}$$

kde Δ značí Laplaceův symbol. To jest diferenciální parciální rovnice pro šíření vln, kterou jest řešiti za daných krajových podmínek, které zpravidla jsou vyjádřeny požadavkem spojitosti a jednoznačnosti nalezeného řešení v celém oboru proměnnosti souřadnic. Takové řešení není však možno nalézti pro jakoukoli hodnotu konstanty energie E, nýbrž jen pro zcela určité, význačné hodnoty její, t. zv. charakteristické hodnoty (Eigenwerte); řešení rovnice těmto charakteristickým hodnotám příslušná slují charakteristické funkce (Eigenfunktionen). A tím sám sebou vystoupí tolik žádaný diskontinuitní element!

Místo toho, abychom vycházeli vysloveně z Hamiltonovy funkce, lze variační problém svrchu uvedený formulovati elegantněji takto:

Budiž $T(q, p)$ kinetická energie jakožto funkce souřadnic a impulsů, V potenciální energie, $d\tau$ objemový element konfiguračního prostoru »měřený racionálně«, t. j. ne jen jednoduše součinem $dq_1 dq_2 \ldots dq$, nýbrž dělený ještě odmocninou z diskriminantu kvadratické formy $T(q, p)$. Pak ψ má činiti »Hamiltonův integrál«

$$\int d\tau \left\{ \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 T\left(q, \frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \psi^2 V \right\}$$

stacionárním za normující vedlejší podmínky

$$\int \psi^2 d\tau = 1.$$

Charakteristické hodnoty tohoto variačního problému jsou stacionární hodnoty Hamiltonova integrálu právě uvedeného; jsou to zároveň též kvantová niveaux energie.

Tolik po formální stránce; věcné stránky teorie, totiž té okolnosti, že klasická mechanika (ve tvaru Hamilton-Jacobiho) odpovídá geometrické optice, kdežto Schrödingerova vlnová mechanika vlnové optice, nemíním se zde dotýkati.

3. Rotátor s osou v prostoru pevnou.[4]) Je to nejjednodušší příklad k Schrödingerově teorii. Potenciální energie jest v tomto případě rovna nule a kinetická energie jest $\frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2$, kde A jest moment setrvačnosti a φ úhel otočení. Hamiltonova funkce zní

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2A} = E.$$

[4]) E. Schrödinger, Ann. d. Phys., 79, 519, 1926 anebo »Abhandlungen zur Wellenmechanik«, p. 47.

Variační problém bude v našem případě míti tvar

$$\delta\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2A}\cdot\frac{h^2}{4\pi^2}\psi'^2 - E\psi^2\right\}d\varphi = 0$$

a vlnová rovnice

$$\frac{1}{A}\psi'' + \frac{8\pi^2 E}{h^2}\psi = 0;$$

její řešení jest

$$\psi = \frac{\sin}{\cos}\left[\sqrt{\frac{8\pi^2 EA}{h^2}}\varphi\right].$$

V původním problému $\varphi + 2\pi$ znamená totéž jako φ; aby řešení právě uvedené bylo jednoznačné a spojité v oboru proměnné φ, musí býti

$$\sqrt{\frac{8\pi^2 EA}{h^2}}(\varphi + 2\pi) = \sqrt{\frac{8\pi^2 EA}{h^2}}\varphi + 2n\pi,$$

t. j.

$$\sqrt{\frac{8\pi^2 EA}{h^2}} = n,$$

kde n jest celé číslo. Odtud plynou charakteristické hodnoty, jež jsou kvantovými niveaux energie tohoto rotátoru, ve tvaru

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 A}.$$

4. Rotátor s volnou osou.[5]) V polárních souřadnicích má kinetická energie jako funkce impulsů tvar

$$T = \frac{1}{2A}\left(p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}\right)$$

a vlnová rovnice Schrödingerova v tomto případě zní

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{8\pi^2 AE}{h^2}\psi = 0.$$

Požadavek, aby φ bylo na kulové ploše jednoznačné a spojité, vede k podmínce

$$\frac{8\pi^2 A}{h^2}E = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Niveaux energie jsou tedy

$$E_n = \frac{n(n+1)h^2}{8\pi^2 A}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

---

[5]) E. Schrödinger, Ann. d. Phys., *79*, 520, 1926 anebo »Abhandlungen...«, p. 48.

Kvantový výsledek, který dává rotátor s volnou osou, jest tedy odlišný od případu, že se jedná o rotátor s osou pevnou; třebaže rotátor s osou pevnou jest zvláštním případem rotátoru s osou volnou, nelze nijakou specialisací přejíti od kvantových hodnot energie rotátoru druhého ke kvantovým hodnotám energie rotátoru prvého.

Při této příležitosti Schrödinger praví: »Není dovoleno při užívání undulační mechaniky snížiti si pro zjednodušení počtu stupeň volnosti pohybu systému proti skutečnému stupni volnosti a to i v tom případě, když na základě integrálů mechanických rovnic víme, že systém při jednotlivých pohybech nepoužívá určitých volností. Pro mikromechaniku jest právě systém mechanických základních rovnic zcela nekompetentní; jednotlivé dráhy systému, o nichž jest řeč v klasické mechanice, nemají v mikromechanice právo na existenci.«

5. Atom vodíku. Variační problém v tomto případě zní:

$$\delta \int\int\int dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi^2\right] = 0$$

a vlnová rovnice jest

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0.$$

Řešení její dá se provésti na př. v prostorových polárních souřadnicích a vede,[6]) jak nebudu obšírně odvozovati, ke známému výsledku pro kvantová niveaux energie

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ve starší teorii kvantové výsledek prostorového problému jednoho elektronu se kryje úplně s výsledkem v případě kruhových drah elektronu.

Jak tomu bude ve vlnové mechanice?

Kinetická energie elektronu obíhajícího v kruhové dráze kolem jádra jest $\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$ a potenciální $-\frac{e^2}{r}$, kde r jest konstantní (poloměr kruhu). Tedy

$$\tfrac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} = E$$

a Hamiltonova funkce bude zníti:

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} = E.$$

---

[6]) Viz na př. pojednání citované v pozn. [3]) (na str. 371) anebo »Abhandlungen...«, pp. 2—11.

Pohybové rovnice jsou

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = 0, \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{e^2}{r^2} = 0.$$

Z poslední rovnice plyne známá vlastnost, že kinetická energie jest až na znamení rovna polovině potenciální energie. Poloměr r jest tudíž

$$r = \frac{p_\varphi^2}{me^2}.$$

Dosazením do Hamiltonovy funkce, což jest v tomto případě dovoleno, získáme novou funkci Hamiltonovu

$$H^* = -\frac{me^4}{2p_\varphi^2} = E,$$

z níž plynou tyto pohybové rovnice:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H^*}{\partial p_\varphi}, \qquad p_\varphi = -\frac{\partial H^*}{\partial \varphi}.$$

Abychom převedli tento případ na případ rotátoru s osou v prostoru pevnou,[4]) položme

$$H^* = \frac{1}{K};$$

pak pohybové rovnice znějí

$$\dot{\varphi} = -E^2 \frac{\partial K}{\partial p_\varphi}, \qquad \dot{p}_\varphi = E^2 \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0.$$

Zvolme nyní $H^{**} = -E^2 K$ za novou Hamiltonovu funkci; obdržíme pohybové rovnice

$$\dot{\varphi} = +\frac{\partial H^{**}}{\partial p_\varphi}, \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H^{**}}{\partial \varphi} = 0,$$

při čemž

$$H^{**} = E^2 . \frac{2p_\varphi^2}{me^4} = -E.$$

To jest však problém úplně stejný jako u rotátoru s pevnou osou,[4]) jenom jest nutno nahraditi moment setrvačnosti A výrazem

$$\frac{me^4}{2E^2}$$

a konstantu energie E výrazem $-E$. Podmínky pro charakteristické hodnoty jsou, jak patrno, tytéž, a tak nacházíme vztah

$$\sqrt{\frac{8\pi^2}{h^2}(-E)\cdot\frac{me^4}{4E^2}}=n,$$

čili

$$E_n=-\frac{2\pi^2 me^4}{h^2 n^2},$$

jako v případě obecném.

Téhož postupu lze však užíti i v obecném případě, jak vidno z této okolnosti. V pravoúhlých souřadnicích zní Hamiltonova funkce uvažovaného problému takto:

$$H_1=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)-e^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=E.$$

Pomocí kanonické transformace[7])

$$x=\frac{\partial V_1}{\partial p_x},\qquad y=\frac{\partial V_1}{\partial p_y},\qquad z=\frac{\partial V_1}{\partial p_z},$$

$$p_i=\frac{\partial V_1}{\partial q_i},\quad (i=1,2,3),$$

$$V_1=(p_y\sin q_3+p_x\cos q_3)\,q_1\cos q_2+$$
$$+\sqrt{p_z^2+(p_y\cos q_3-p_x\sin q_3)^2}\,.\,q_1\sin q_2,$$

přejde Hamiltonova funkce v novou

$$H_2=\frac{1}{2m}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{q_1^2}\right)-\frac{e^2}{q_1}=E.$$

Pomocí další kanonické transformace[7])

$$Q_i=\frac{\partial V_2}{\partial P_i},\qquad p_i=\frac{\partial V_2}{\partial q_i},\quad (i=1,2,3),$$

$$V_2=\int_{\xi}^{q_1}dq_1\sqrt{-\frac{m^2e^4}{P_1^2}+\frac{2me^2}{q_1}-\frac{P_2^2}{q_1^2}}+P_2q_2+P_3q_3$$

(ξ jest minimální hmota souřadnice q_1, jest to vzdálenost perihelia elektronu od jádra) přejde poslední Hamiltonova funkce v novou

$$H_3=-\frac{me^4}{2P_1^2}=E,$$

jejíž tvar jest však (až na označení) úplně týž jako v případě degenerovaném (kruhové dráhy elektronu); další postup jest úplně stejný, neboť Q_1 (kanonicky sdružené k P_1) jest střední anomalie

---

[7]) J. M. Burgers, Het atoommodel van Rutherford-Bohr, Haarlem 1918, pp. 80—81. — Viz též: E. T. Whittaker: Analytische Dynamik der Punkte und starrer Körper. Berlin 1924, p. 377. (J. Springer).

elektronu v jeho dráze a mění se od 0 do 2π právě jako úhel otočení φ u rotátoru s pevnou osou.

6. Résumé. — Z předešlého jest patrno, že obecně sice nelze ve vlnové mechanice Schrödingerově pro zjednodušení počtu (jak ukazuje příklad rotátorů) pracovati se systémem degenerovaným a míti zato, že obdržíme v nejnepříznivějším případě výsledek, jenž bude speciálním případem výsledku příslušejícího systému nedegenerovanému, avšak že existují výjimky. Jedna taková významná výjimka jest u atomu vodíku (problém jednoho elektronu). Mimo to v hořejších řádcích jest podán nový postup sloužící k nalezení kvantových niveaux energie podle zásad Schrödingerových pro atom vodíku (i v obecném, nedegenerovaném případě), jehož výhoda záleží v tom, že se vyhneme dosti složitému řešení vlnové rovnice Schrödingerovy, původnímu problému příslušející, převedením matematické formulace celého problému na řešení zcela jednoduchého příkladu, t. zv. rotátoru s pevnou osou v prostoru.

Ústav pro teoretickou fysiku Karlovy university
v Praze 29. září 1927.

*

Note sur la mécanique ondulatoire de Schrödinger.

(Extrait de l'article précédent.)

E. Schrödinger a fait voir, par l'exemple du rotateur autour d'un axe fixe et du rotateur autour d'un axe libre, qu'on ne peut pas considérer — pour simplifier le calcul — un système mécanique dégénéré et s'attendre à ce qu'on obtienne, dans le cas le moins favorable, un résultat qui soit un cas particulier du résultat, valable pour le système dégénéré. Dans le présent travail, l'auteur fait voir que pour l'atome d'hydrogène il y a une exception, à savoir que le problème d'un seul électron, parcourant un orbite circulaire autour du noyau, donne le même résultat que le cas général où l'électron parcourt une ellipse de Képler. On peut, en effet, prendre pour point de départ la fonction de Hamilton

$$H^{**} = E^2 \frac{2p^2_\varphi}{me^4} = -E$$

où E désigne l'énergie totale de l'électron, m sa masse, e sa charge et p_φ le moment de quantité de mouvement, correspondant à l'angle de rotation; par-là, ce problème est réduit à celui, d'un rotateur autour d'un axe fixe, dont le moment d'inertie est égal à $me^4/4E^2$ et l'énergie totale à $-E$.

De plus, l'auteur fait voir qu'on peut réduire le problème de l'atome d'hydrogène, même dans le cas général, au problème du rotateur autour d'un axe fixe, car on peut, par deux transformations

canoniques successives, donner à la fonction de Hamilton du cas général la forme

$$H_3 = -\frac{me^4}{2P^2_1} = E,$$

où P_1 est le moment de quantité de mouvement correspondant à l'angle Q_1 qui désigne »l'anomalie moyenne« et varie de 0 à 2π. On peut introduire, au lieu de cette fonction H_3, une autre fonction de Hamilton

$$H = E^2 \frac{2P_1^2}{me^4} = -E$$

et le reste du calcul se fait de la même manière que dans le cas spécial des orbites circulaires. Cette manière a l'avantage d'éviter la résolution, assez compliquée, de l'équation ondulatoire de Schrödinger, appartenant au problème primitif.

Elektrický oblouk nízkého napětí ve směsi rtuťových par a argonu.

Napsal *Miloslav A. Valouch.**)

Elektrickým obloukem nízkého napětí rozumíme elektrický výboj v plynech neb v kovových parách, při němž jest katoda uměle žhavena a stává se tak zdrojem elektronů. Při této formě výboje jsou pak všechny závislosti jednodušší a průzračnější, neboť zde chybějí všechny děje podmiňující uvolnění elektronů z kovu katody, na př. nárazy kladných iontů při výboji doutnavém nebo vlastní rozžhavení katody při obyčejném výboji obloukovém, a tím se tedy podstatně zjednoduší teoretická diskuse zjevů při této formě elektrického výboje.

Novější badání o oblouku nízkého napětí[1]) přinesla řadu zajímavých výsledků; mezi nimi ukázaly se však též některé zjevy na první pohled nesrozumitelné. Ježto, jak jsme již řekli, všechny vlastnosti oblouku nízkého napětí jsou podmíněny pouze chováním plynů a par, bude tomu tak též u charakteristických veličin oblouku nízkého napětí, totiž u nejmenšího napětí, při němž se oblouk rozžhne — u rozžíhacího napětí — a u minimálního napětí, při kterém jest oblouk právě ještě schopen hořeti — u zhasínacího napětí. Hoření oblouku jest podmíněno ionisací dotyčných plynů neb par a dalo by se tedy v důsledku toho souditi, že oblouk bude hořeti a tedy tím spíše se rozžíhati při napětí nejméně rovném ionisačnímu napětí plynu. Ukázalo se však, že oblouk v některých jednoatomových plynech a kovových parách se rozžíhá a hoří při nižších napětích. Tento fakt je však ještě ve shodě s atomovou teorií, pokud tato napětí jsou větší než nejmenší budicí napětí. Zjev tento byl totiž pozorován při větších proudových hustotách v oblouku a lze tedy za jeho příčinu pokládati kumulativní ionisaci plynu. Atomy plynu jsou při první elementární srážce s elektrony sice jen vzbuzeny do některého kvantového stavu, ale při dostatečné hustotě proudu narážejí na tyto vzbuzené atomy opětně nové elektrony, které dodají při srážce energii potřebnou k odtržení elektronu od vzbuzeného atomu. Ionisace se tedy takto děje několika elementárními akty následujícími rychle za sebou, pokud se atom vyzářením nevrátí do normálního stavu. Atomová teorie dává tím dolní mez

*) Výtah z disertační práce.

[1]) G. Mierdel, Phys. Ztschr. 28, 344, 1927.

pro rozžíhací a zhasínací napětí rovnou nejmenšímu budicímu napětí, které převádí atom při srážce z normálního stavu do prvního stavu kvantového.

Experimentální badání ukázala však, že oblouky mohou hořeti i při napětí mnohem nižším. Tento zjev byl zkoumán zvláště v heliu, neonu, argonu a ve rtuťových parách. Nedal se vyložiti ani počáteční rychlostí elektronů vysílaných žhoucí katodou a zůstal delší dobu nevysvětlen, až Bär, von Laue a Meyer[2]) a současně a na nich nezávisle Eckart a Compton[3]) objevili, že nízký potenciál, při němž oblouk hoří, jest zdánlivý, ježto v oblouku vznikají při vysokých proudových hustotách oscilace, jichž maximální amplituda napětí jest vyšší než nejmenší budicí napětí. Byl to však opět Bär,[4]) který brzy na to zjistil, že oblouk může hořeti ve rtuťových parách i bez oscilací při abnormálně nízkém napětí. Jako hlavní podmínku uvádí velkou žhavicí intensitu vlákna, tedy abnormálně vysokou emisi elektronů. Opět téměř současně dokázali Eckart a Compton[5]) existenci tohoto abnormálního oblouku v heliu a argonu. Podali též ve své práci vysvětlení tohoto zjevu, opírající se o experimentální vyšetření rozdělení potenciálu mezi katodou a anodou. Zjistili totiž Langmuirovou metodou sondy, že potenciál probíhá asi způsobem naznačeným na obr. 1, takže mezi místem *a* a anodou *A* jest větší potenciální rozdíl, než mezi katodou a anodou, tedy než měřený potenciální rozdíl. Příčina toho jest v silném prostorovém náboji, který se vytvoří kolem žhoucí katody v důsledku abnormálně vysoké emise elektronů. Tím lze veškeré zjevy v oblouku nízkého napětí pokládati za vysvětleny, pokud oblouk hoří v jednoatomových plynech neb kovových parách prostých cizích přimíšenin.

Jest nyní na snadě myšlenka rozšířiti zkoumání oblouku nízkého napětí též na směsi plynů. V posledních letech takováto zkoumání provedena na některých směsích plynů, avšak za jiným účelem než sleduje tato práce. Byli to hlavně Duffendack a Compton,[6]) kteří vyšetřovali disociaci vodíku přimíšeného k oblouku rtuťovému, a Kwei,[7]) který mimo opakování těchto pokusů vyšetřoval tvoření se amonia při oblouku ve směsi vodíku a dusíku. Vidíme tedy, že se zde jednalo hlavně o chemické chování se molekul.

Mým cílem bylo zjistiti charakter oblouku ve směsi chemicky nereagujících plynů a vyšetřiti vliv koncentrace na jeho charakteristické veličiny a konečně srovnáním s poměry v plynech čistých získati přehled o chování se atomů a molekul plynů při srážkách a o potvrzení zkušeností získaných jinými metodami.

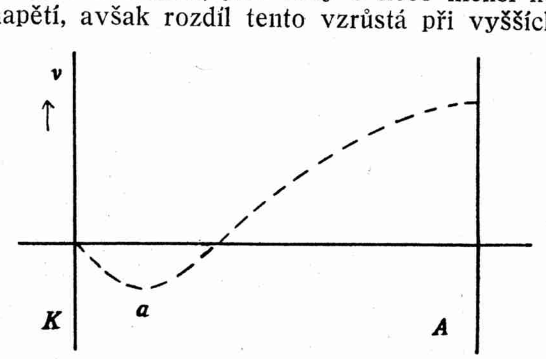
---

[2]) R. Bär, M. v. Laue a E. Meyer, Zeitschr. f. Phys. *20*, 83, 1923.
[3]) C. Eckart a K. T. Compton, Phys. Rev. *23*, 550, 1924.
[4]) R. Bär, Zeitschr. f. Phys. *31*, 430, 1925.
[5]) C. Eckart a K. T. Compton, Phys. Rev. *24*, 97, 1924.
[6]) O. S. Duffendack a K. T. Compton, Phys. Rev. *23*, 583, 1924.
[7]) C. T. Kwei, Phys. Rev. *26*, 537, 1925.

Abychom mohli výsledky této práce správně interpretovati, vytkneme nejprve hlavní poznatky o oblouku v čistých plynech, pokud budou míti aspoň význam pro výsledky docílené v této práci.

Rozžíhací napětí oblouku jest vždy vyšší než nejmenší budicí napětí dotyčného plynu. Se stoupajícím tlakem plynu klesá k minimální hodnotě, která jest o něco málo vyšší než nejmenší budicí napětí, s klesajícím tlakem neustále vzrůstá daleko přes ionisační napětí. Při témž tlaku jest nižší při vyšší teplotě katody, avšak vliv ten jest celkem nepatrný vzhledem k vlivu tlaku.

Zhasínací napětí klesá rovněž se stoupajícím tlakem plynu jako napětí rozžíhací, jest vždy o něco menší než příslušné rozžíhací napětí, avšak rozdíl tento vzrůstá při vyšších tlacích se



Obr. 1.

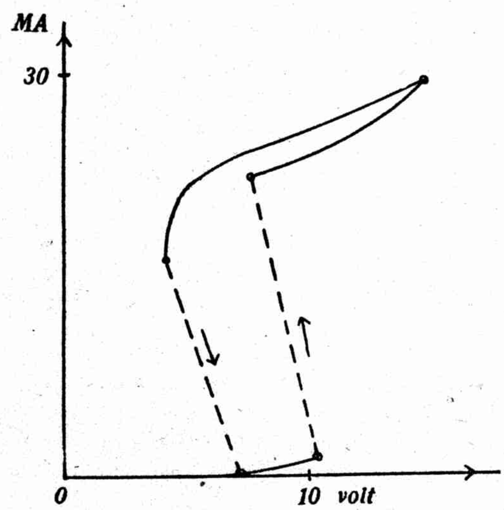
zvyšující se emisí katody, takže, jak jsme již podotkli výše, můžeme udržeti hořící oblouk při napětí značně nižším než jest nejmenší budicí napětí plynu. Avšak další důležitou podmínkou k dosažení tohoto abnormálního oblouku jest absolutní čistota použitého plynu, čímž rozumí se nepřítomnost aktivních plynů neb par.

Charakteristiky oblouku nízkého napětí mají pak tvar znázorněný na obr. 2.

Charakteristika tato jest typická pro oblouk nízkého napětí a vidíme na ní, že rozžhnutí oblouku projeví se velmi nápadně prudkým skokem intensity, který má současně za následek klesnutí napětí na oblouku. Toto klesnutí napětí jest způsobeno změnou spádu napětí v měrném kruhu, jak bude v popisu měření blíže vysvětleno. Při dalším zvyšování napětí intensita stále stoupá a zmenšujeme-li nyní opět napětí na oblouku, klesá intensita pomaleji a až při napětí nižším napětí rozžíhacího oblouk opět zhasne. Charakteristický jest rovněž zjev hysterese, který na charakteristice pozorujeme.

Aparatura použitá k experimentální práci jest u všech autorů v podstatě stejná, liší se hlavně jen uspořádáním výbojové trubice. Trubice v této práci byla sestavena po několika pokusech ve tvaru znázorněném na obr. 3.

Jako žhoucí katody používáno bylo wolframového drátku 0·1 *mm* v průměru a asi 10 *mm* dlouhého, jenž byl upevněn na platinových drátcích 0·6 *mm* silných, zatavených přímo do stěn trubice. Anodu tvořil rovněž platinový drát ve vzdálenosti 5—10 *mm* od žhoucího vlákna a s ním rovnoběžný. Na dně trubice nalézala se rtuť dvakráte ve vakuu destilovaná po předchozím chemickém vyčištění. Aby bylo zabráněno všem případným rušivým vlivům, které by mohly míti původ v tom, že by se tato rtuť nalézala na jiném potenciálu vůči katodě než anoda, byla zataveným platinovým drátkem udržována na témž potenciálu jako anoda. Pro dokonalý dotek a dobrou tepelnou vodivost bylo jako připojení elektrod k měřicím aparátům použito rtuťových kontaktů v připravených trubičkách, jak je též na

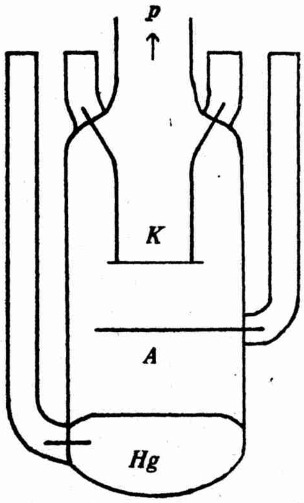


Obr. 2.

obrázku naznačeno. Těsně nad výbojovou trubicí byl na rouře vedoucí k čerpacímu zařízení umístěn vodní chladič, aby bylo zabráněno předestilování rtuti do ostatní části aparatury při zahřívání na 300—350° C, jehož bylo zapotřebí, aby z výbojové trubice byly vypuzeny adsorbované plyny a páry.

Čerpací zařízení se skládalo z Volmerova agregátu skleněných difusních pump rtuťových a z Pfeiferovy rotační olejové pumpy používané jako předčerpací pumpy. Tlak plynů měřen byl zkráceným vakuometrem podle Mac Leoda, který dovoloval přesné měření tlaku až do $1 \cdot 10^{-6}$ *mm* Hg. Tam, kde bylo v aparatuře odděliti od sebe prostory o malém rozdílu tlakovém, použito bylo rtuťových uzávěrek ve tvaru U-trubice, aby byl co možná snížen počet skleněných kohoutů, které jest nutno mazati. Pouze připojení výbojové trubice k ostatní aparatuře bylo provedeno skleněným zábrusem, poněvadž trubice byla zhotovena z jenského skla, které nelze přímo přitaviti na obyčejné sklo ostatní aparatury. Dalším důvodem k tomuto způsobu připojení byla ta okolnost, že po každém přepálení žhoucího vlákna bylo nutno celou výbojovou trubici předělati, ježto elektrody byly do ní pevně zatáveny. Původní pokusy s vyměňovatelnou katodou na zábrus totiž ukázaly, že při vyšších teplotách jednak zábrus již dokonale netěsní a páry použitého mazu znečišťují trubici. Kromě toho bylo použito dvou skleněných kohoutů k vpouštění argonu. Všechny tyto části mazány byly vakuovým mazem podle Ramsaye o velmi nepatrném napětí par.

K zahřívání trubice výbojové používáno bylo elektrických kamínek a teplota určována rtuťovým teploměrem. Použitý argon byl



Obr. 3.

dodán firmou Lindes Eismaschinen Gesellschaft a obsahoval podle udání továrny 99·5% argonu a 0·5% dusíku. Dodán byl ve skleněné nádobě, uzavřené skleněným hrotem.

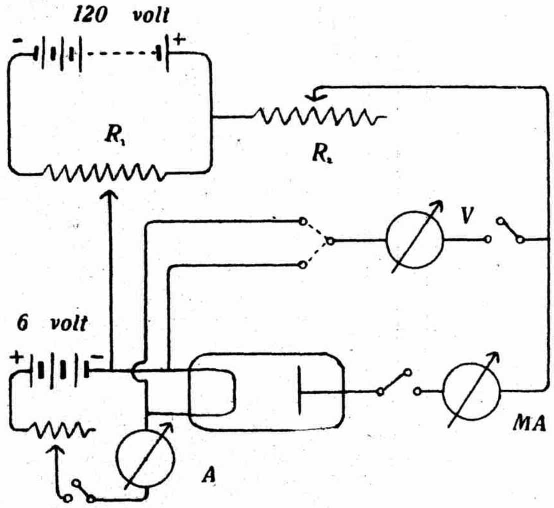
Elektrický měrný kruh byl v podstatě sestaven stejným způsobem, jak jej používal při své práci Bär, v. Laue a Meyer.[8])

Obr. 4 podává jeho schema. Odpor W_1 použitý jako potenciometr měl 125 Ω a předražený odpor W_2 byl proměnný s maximální hodnotou 2000 Ω. Napětí na koncích výbojové trubice měřeno bylo voltmetrem připojeným buďto k negativnímu konci nebo positivnímu konci žhoucí katody. Intensita proudu v oblouku měřena byla miliampermetrem *MA*. Intensita topného proudu měřena byla ampermetrem *A* a kromě toho měřen byl též potenciální spád na žhoucím vlákně voltmetrem, jenž není v schematu k vůli zjednodušení zakreslen.

[8]) loco cit.

P o s t u p p r a c í byl následující:

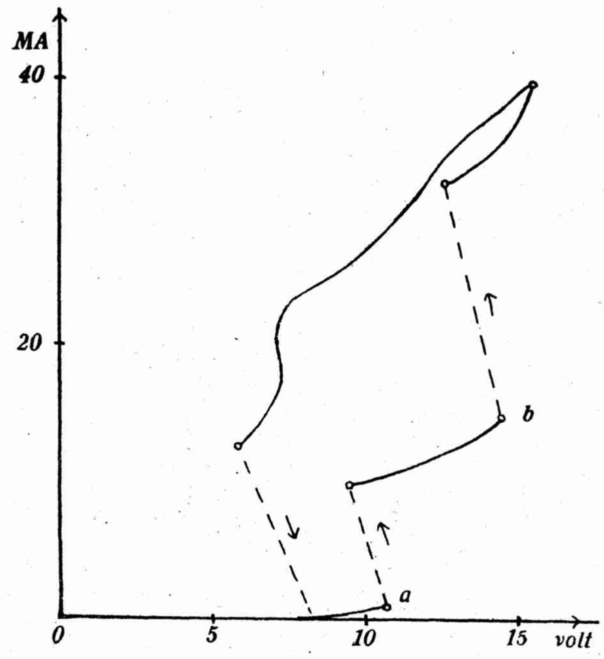
Nejprve byla opakována publikovaná měření ve rtuťových parách za účelem vyzkoušení aparatury. Podle získaných tím zkušeností byla aparatura několikráte změněna a hlavně vyzkoušeno několik typů výbojových trubic, až posléze bylo použito k vlastnímu měření popsané již aparatury, která se ukázala k účelu práce nejvhodnější ze všech vyzkoušených a na níž byla opakovaná měření ve rtuťových parách nalezena v principielním souhlase s výsledky publikovanými dříve jmenovanými autory. Tyto přípravné práce zabraly největší část času. Posléze když aparataru byla dokonale vy-



Obr. 4.

čerpána a zjištěna byla dokonalost všech těsnění, přikročeno bylo k vlastnímu měření ve směsi argonu se rtuťovými parami, kteréžto měření bylo pak dík dokonalému stavu aparatury provedeno v několika dnech z toho důvodu, aby použitý argon nebyl snad během delší doby znečištěn, ježto bylo k jeho vpouštění nutno použíti skleněných kohoutů, které skýtají nebezpečí, že po delší době již bezvadně netěsní.

Před každou řadou měření byla aparatura po několik hodin vyčerpávána tak, že vakuometr neukazoval již žádného tlaku. Tlak tedy byl zaručeně menší než $1 . 10^{-6}$ *mm* Hg. Při tom byla výbojová trubice udržována po dobu dvou až tří hodin na teplotě 300° až 350° C, aby byla zbavena všech absorbovaných plynů a par. Při tom byla též žhavena ponenáhlu katoda za účelem vypuzení plynů v ní absorbovaných. K měření a vpuštění argonu přikročeno bylo teprve tehdy, když se teplota výbojové trubice ustálila na žádané hodnotě a konstatována byla neproměnnost rozžíhacího a zhasínacího napětí v čisté rtuti, ovšem již po odpojení čerpacího zařízení. Pak byla vpuštěna malá část argonu nalézající se mezi dvěma blízko u sebe přitavenými kohouty. Tlak argonu byl měněn buď tím, že bylo připouštěno stále více ze zásobní nádoby, nebo opačně částečným odčerpáváním. Tlak měřen byl vakuometrem. Měření byla prováděna tak, že jednak byly určovány jen hodnoty rozžíhacího a zhasínacího



Obr. 5.

napětí při různých poměrech tlakových a jednak měřeny byly celé charakteristiky. Typický tvar charakteristiky ve směsi přináší obr. 5.

Z charakteristiky je zřejmo, že charakter oblouku se mění tak, že nyní existují dvě nespojitosti ve stoupání intensity spojené se současným poklesem napětí. Analogicky podle charakteristik v plynech čistých je nutno pokládati je obě za rozžhnutí se oblouku. A sice lze připsati první skok označený písmenem *a* ionisaci rtuti a skok druhý, označený *b*, argonu. Vyplývá to též z toho, že ionisační napětí argonu je značně vyšší než rtuti, obnáší totiž 15·5 volt naproti 10·4 volt u rtuti. Vidíme tedy, že každý z plynů směsi se projevuje svým samostatným rozžíhacím napětím, což je u těchto plynů bez elektronové afinity přirozeno. Naproti tomu nepodařilo se v charakteristikách nikde stanoviti s určitostí též dvojí zhasínací napětí, třebaže tvar charakteristiky se poněkud ve zpětné části liší od charakteristiky v čisté rtuti. Snad by se dalo nalézti za určitě volených podmínek při podrobnějším studiu tohoto zjevu.

Pokud se týče závislosti obou charakteristických napětí na tlaku přimíšeného argonu, jest možno říci na základě získaného materiálu, že první rozžíhací napětí s tlakem s počátku klesá, aby později při větších tlacích přimíšeného argonu opět stoupalo. Druhé rozžíhací napětí zůstává téměř konstantní v mezích pozorovacích chyb, jeví však též tendenci ke klesání s rostoucím tlakem. Naproti tomu zhasínací napětí s rostoucím tlakem argonu stále klesá, později sice jen velmi zvolna, avšak nápadný je rozdíl proti prvnímu rozžíhacímu napětí, které brzy začíná stoupati, zatím co zhasínací napětí ještě dosti značně klesá. Toto zajímavé chování se zhasínacího napětí rtuti za přítomnosti argonu mohlo by nasvědčovati tomu, že působí zde argon srážkami druhého druhu. Donat[9]) dokázal totiž ve své práci o sensibilisované fluorescenci, že srazí-li se rtuť vzbuzená do prvního kvantového stavu optického, totiž stavu v spektroskopii označeného $2p_2$, s argonem v neutrálním stavu, odejme jí tento rozdíl kvantových energií mezi stavy $2p_2$ a $2p_3$ a rtuť nalézá se po srážce ve stavu $2p_3$, který jest metastabilní, t. j. z něho nemůže přejíti rtuť do stavu normálního vyzářením, nýbrž pouze opět srážkou druhého druhu. Donat však rovněž dokázal, že rtuť v tomto stavu je necitlivá vůči srážkám s argonem. Mohli bychom tedy na základě Donátovy práce vysloviti domněnku, že toto abnormální snižování zhasínacího napětí je způsobeno zvýšením kumulativní ionisace. Kumulativní ionisace, jak jsme ji v úvodě vylíčili, jest zřejmě tím větší, čím delší dobu se rtuť nalézá ve vzbuzeném stavu. Převedením do stavu metastabilního se tato doba velmi značně prodlouží a ježto ostatní okolnosti zůstávají nezměněny, stoupne tím patrně kumulativní ionisace a tím sníží se napětí zhasínací stejně jako bylo uvedeno v úvodě. Kromě tohoto zjevu působí zde jistě též již samo zvýšení tlaku přidáním argonu, ježto se tím též zvyšuje počet srážek elektronů se rtutí. Tento vliv bude též hlavně způsobovati počáteční klesání rozžíhacího napětí rtuti. Co se týče druhého rozžíhacího napětí, příslušného argonu, nelze o něm nic určitého tvrditi, ježto žádná práce, zabývající se měřením oblouku v čistém argonu, neobsahuje numerických dat, nýbrž jen charakter povšechného chování, takže nelze posouditi, zda se argon chová poněkud jinak za přítomnosti rtuti, či nikoliv.

Můžeme tedy shrnouti výsledky této práce asi následujícím způsobem:

1. Ve směsi rtuťových par a argonu má oblouk nízkého napětí v normálním oboru dvě rozžíhací napětí, z nichž jedno lze připsati rtuti a druhé argonu.

2. Jediné konstatovatelné zhasínací napětí lze přisouditi rtuti.

---

[9]) K. Donat, Zeitschr. f. Phys. 29, 345, 1924.

3. Rozžíhací napětí rtuti s rostoucím tlakem argonu s počátku klesá a později stoupá.

4. Zhasínací napětí rtuti s vzrůstajícím tlakem argonu abnormálně klesá, což poukazuje na působení srážek druhého druhu.

Na konec jest mi milou povinností poděkovati všem, kdož mi usnadnili práci, ať četnými radami nebo poskytnutím prostředků, zvláště pp. prof. Dru A. Žáčkovi, Dru V. Posejpalovi, Dru F. Záviškovi a Dru V. Trkalovi a p. doc. Dru V. Dolejškovi.

II. oddělení fysikálního ústavu university Karlovy v Praze.

*

Arc électrique de faible voltage dans un mélange de vapeur mercurielle et d'argon.

(Extrait de l'article précédent.)

On a étudié l'arc électrique en question et on a obtenu, en utilisant un tube spécial (fig. 3), des caractéristiques dont le type général est donné par la figure 5. On voit deux tensions d'allumage, l'une pour le mercure, l'autre pour l'argon, mais seulement une tension d'extinction, qui correspond à celle du mercure. La tension d'allumage s'abaisse d'abord avec la pression croissante de l'argon et puis elle reprend une marche ascendante. La tension d'extinction du mercure diminue anormalement avec la croissance de la pression de l'argon, ce qu'on peut attribuer à l'action des collisions de second ordre.

VĚSTNÍK LITERÁRNÍ.

RECENSE KNIH.

R. Schneider: **Hodiny a hodinky.** Knihovna přátel oblohy, svazek II. V Praze 1926. 57 str. Cena Kč 9·—.

V nevelké této knížce je stručně a výstižně vyloženo vše, co potřebuje věděti každý, kdo se chce seznámiti s moderními metodami měření času. Po krátkém historickém úvodu vysvětluje autor různé druhy času dnes zavedené a popisuje stručně hlavní přístroje astronomické, jimiž se čas měří. Pak přichází k vlastnímu úkolu knihy; k výkladu, jak se čas udržuje a rozšiřuje. Čas udržujeme dnes kolečkovými hodinami; v knize je vylíčen jejich vývoj, jsou popsány jejich hlavní typy a podrobně je vyloženo zařízení přesných hodin kyvadlových, chronometrů a kapesních hodinek, i způsob, jak s nimi zacházeti a jak posuzovati jejich chod. V poslední kapitole zabývá se autor radiotelegrafickými signály časovými, kterými se čas rozšiřuje; jsou v ní popsány signály hlavních stanic, je vyložen jednoduchý způsob, jak se tyto signály přijímají a jak se hodiny s nimi srovnávají.

Kniha svědčí o velikých znalostech a praktických zkušenostech autorových v oboru měření času. Velikou její předností je kritické stanovisko autorovo, jenž neodbývá čtenáře povšechnými výroky o tom, jak ty které hodiny jsou dobré, nýbrž číselně uvádí, co se od nich dá čekati. V té příčině je hlavně kapitola o chodu hodin zvlášť poučná a cenná a není pochybnosti, že každý, kdo se zajímá o dnešní metody měření času, najde v autorově dílku mnoho nového. *Záviška.*

*

Ing. Karel Brunhofer: **Technická mechanika.** Díl I: Statika (102 str. 192 obr.; cena 14 Kč). Díl II: Tření a jednoduché stroje (104 str. 132 obr.; cena 24 Kč). Díl III: Nauka o pružnosti a pevnosti (204 str. 191 obr.; cena 35 Kč). Díl IV: Dynamika (138 str. 151 obr.; cena 27 Kč). Díl V: Mechanika plynů a par (136 str. 76 obr.; cena 28 Kč).

Toto dílo tvoří pět učebnic mechaniky schválených ministerstvem pro vyšší průmyslovou školu strojnickou. V posudku zde následujícím pojednává se o tomto díle výhradně jako o učebnici a jsou při tom uplatněny zkušenosti, nabyté přímo z používání těchto knih při vyučování. Jak jest z titulů patrno, obsahují tyto knihy celou technickou mechaniku mimo hydromechaniku. Matematická řešení jsou důsledně prováděna počtem diferenciálním a integrálním. Obsah knihy přináší mnohem více látky nežli vyžaduje školní osnova, avšak zůstává přitom v rámci učebnice. Obrazce jsou vesměs velmi pěkné a zřetelné. Text jest stručný, ale přitom náležitě rozvinutý a podává potřebné vysvětlení; doplňují jej četné příklady, které jsou z větší části dobré praktické, ale zčásti též jen teoretické.

Stručný obsah díla jest následující:

Díl I: Skládání, rozkládání a rovnováha sil v rovině i v prostoru (řešení početní i grafická). Těžiště čar, ploch a těles. Rovnováha těles podepřených a jejich reakce. Tyčové soustavy kloubové a příhradové. Stabilita. Díl II: Tření klouzavé, čepové, vláknové a valivé. Ložiska kuličková. Tuhost lan a řetězů. Rovina nakloněná. Klíny. Šrouby. Páky. Kolo na hřídeli. Kladky a kladkostroje. Brzdy. Tření zubů. Kola třecí. Spojky třecí. Pohon řemenový a lanový. Brzdění výkonnosti. Díl III: Úvod do pružnosti a pevnosti. Pevnost v tahu, tlaku a smyku. Pevnost v ohybu; případy nosníků s volným koncem a na obou koncích podepřených; deformace nosníků. Nosníky se šikmým zatížením a s pohyblivým břemenem. Nosníky stejné pevnosti, staticky neurčité a spojité. Pevnost v kroucení průřezu kruhového, eliptického a obdélníkového. Smyk v kolmých rovinách a nestejné rozložení napětí smykového. Namáhání normální a smykové při pevnosti složené. Napětí redukované. Složená pevnost v smyku a ohybu, kroucení a ohybu, tahu neb tlaku a ohybu, tahu neb tlaku a kroucení. Výpočet hřídelů klikových a zalomených. Namáhání drátěného lana. Pevnost vzpěrná. Zpruhy. Pevnost nádob. Díl IV: Pohyb bodu. Skládání a rozkládání rychlostí. Pohyb točivý a ve šroubovici. Pohyb harmonický. Síla, hmota a setrvačnost. Pohyb hmotného bodu. Práce a výkonnost. Virtuální práce. Energie pohybová. Volný pád a vrh v hmotném prostředí. Vázaný pohyb hmotného bodu. Relativní pohyb. Pohyb útvarů. Skládání pohybu postupného a točivého. Mechanismus troj- a čtyřčlenný. Práce sil na útvarech. Rovnováha na stroji. Pohyb hmotných těles. Momenty setrvačnosti. Energie pohybová těles. Deformační práce sil. D'Alembertův princip. Kyvadlo. Ráz. Pohyb těžiště tělesa. Ostředivá síla tělesa. Odstředivá síla při setrvačníku. Kritická rychlost hřídelů parních turbin. Jednotky soustavy technické a absolutní. Díl V: Úvod do mechaniky plynů. Zákony pro stav plynu a směsi plynů. Teplo a jeho přeměna v práci. Energie vnitřní a vnější; práce vnější, expansní a indikovaná. Základní rovnice thermodynamická a přeměny stavu plynů. Ideální kompresor. Tepelný obsah. Ideální motor pro tlakový plyn. Vratné a nevratné přeměny. Oběh a jeho aplikace na ideální stroje. Oběh Carnotův. Oběhy ideálních motorů spalovacích. Entropie a její diagramy. Vodní pára. Teplo páry suché, vlhké a přehřáté. Rovnice stavu přehřáté páry. Entropie páry a její diagramy. Přeměny stavu páry. Ideální parní stroj. Škrcení páry. Chlazení. Ideální a skutečný výtok plynu a páry. Práce parní turbiny. Ztráty v parním potrubí. Sálání a vodivost tepla; výpočet výhřevných ploch. Teorie spalování a její aplikace na parní kotle. Z tohoto stručného výtahu jest již patrno, že obsah díla jest velmi široký. Pro žáky průmyslových škol jest tam až příliš mnoho látky, když se uváží jejich stáří, průprava, velké zatížení mnoha předměty a velkým počtem hodin.

Ve vypracování knihy jest viděti píli a snahu; mnohá řešení jsou krátká a průzračná. Tak na př. velmi dobře jest vypracována stať o nosnících staticky neurčitých a spojitých, která bývá jinde rozvláčná a těžká. Doporučovalo by se zdokonaliti knihu ještě v následujícím: Díl I: Při těžišti jest použito integrálního počtu; autor učinil tak zřejmě k vůli jednotnému rázu díla; ale učitel zde naráží na obtíž, neboť k těžišti dospěje dříve, nežli byl integrální počet v matematice vyložen. Lze si ovšem pomoci stručným výkladem o integrálním počtu v mechanice, ale jest to jednak zdržování a jednak to není didakticky správné; žáky svádí to k učení zpaměti, aniž by věci rozuměli. V části o skládání sil mělo by se připojiti početní skládání rovinné soustavy několika rovnoběžných sil. Řešení příhradových soustav mělo by se zkrátiti (jmenovitě dlouhé výpočty k obr. 161 a 163); zato by se mohlo dáti grafické řešení jeřábů asi na způsob, jak jest v knize Beetmannově, neboť jest žákům dobře přístupný a přehledný. Také při stabilitě byly by příklady z jeřábů vhodné. Díl II: Teorie tření čepového mohla by býti zkrácena; čepy na obr. 24, 25 a 26 nemají praktického významu. Také výklad o kladkostroji diferenciálním, který jest dnes podřízeného významu, mohl by se zkrátiti a za to přidati Beckerův kladkostroj se šroubovým kolem. Archimedův kladkostroj může se úplně vynechati. Díl III: Příliš rozvláčný úvod o silách na obr. 1, 2 a 3 mohl by se zkrátiti; stačilo by uvésti charakteristické případy namáhání jen jedinou silou. Výpočet tělesa o stejné pevnosti v tahu měl by se nahraditi při tlaku pro praxi významnějším výpočtem sloupu se zřetelem na vlastní váhu zdiva. Doporučovalo by se při tahu připojiti výpočet řemene. Výpočet průměru podle vzorce $d=\sqrt{\frac{4P}{\pi k}}$ jest sice správný, ale doporučovalo by se vésti žáky k praktičtějšímu postupu: vypočítati plochu $\frac{\pi d^2}{4}=\frac{P}{k}$ a podle této vyhledati průměr v tabulce. Nosník s pohyblivým břemenem (obr. 68) by byl dobrým příkladem pro rozvedení analytického řešení početního (při stejném zatížení obou os). Pevnost tyčí zakřivených měla by býti zkrácena. Díl IV: Pohyb ve hmotném prostředí může býti vynechán. Při odstředivé síle na str. 56 doporučovalo by se výklad rozšířiti o jejím praktickém významu a případech z praxe. Odstavec o druhém tvaru věty d'Alembertovy jest pro žáky příliš těžký a měl by se vypustiti. Věta o impulsu síly a o hybnosti může se odvoditi jen pro hmotný bod, což úplně stačí. Dodatek na konci knihy měl by se dáti k příslušným odstavcům dopředu. Díl V: Vzorec 50″ měl by býti eliminací teplot uveden na obvyklý tvar

$$\eta=1-\frac{1}{\varepsilon^{k-1}}\,\frac{\varepsilon_1^k-1}{k(\varepsilon_1-1)}.$$

Místo »teplo kapalinné« (str. 63) znělo by lépe »teplo kapaliny«. U vzorců jako jsou 64 a 68 měl by býti jmenován jejich autor. Při potrubí měly by býti ještě uvedeny vzorce pro tlakovou ztrátu podle Gutermutha a Eberle. Vzorce 99, 99′ a 99″ jsou pro výpočet výhřevné plochy kotle nespolehlivé a jest třeba v textu to zdůrazniti. Na str. 116 nejsou udány hodnoty paliva spáleného na 1 m^2 roštové plochy. V příkladu 51 byl výpočet roštové plochy opomenut. Příklad 52 jest těžký a komplikovaný a patří spíše do nauky o technickém měření nežli do thermodynamiky. Bylo by lépe podrobné ztráty při topeništi nechati stranou a počítati tepelnou účinnost u kotle jen ze spotřebovaného paliva a odpařené vody a počítati dále ze spotřeby páry ještě účinnost stroje; dále může se ještě jednoduchým způsobem stanoviti účinnost přehřívače páry, ekonomiseru, ztráta % v potrubí atd. Tento způsob jest pro žáky snadnější a přehlednější a také v praxi často užívaný. Doporučovalo by se velmi knihu v tom směru doplniti; mohlo by to býti v podobném způsobu, ovšem zkráceném a účelně upraveném, jako ve spisu Zvoníček: »O hospodářství tepelném«. Jmenovitě by bylo dobře přidati propočítané obdobné příklady tepelné účinnosti pro parní stroj výfukový obyčejný a pro stroj s použitím výfukové páry k topení. Na některých místech jest látka zpracována způsobem těžkým a neprůzračným, k čemuž přispívá též snaha po stručnosti; doporučovalo by se při příštím vydání zpracovati tyto partie způsobem přístupnějším; jsou to zejména: v dílu I. str. 94 až 96, v dílu III. str. 110 až 113 a v dílu IV. str. 105 a 106. Tiskové chyby jsou celkem rázu podřadného; poněkud rušivě působí v dílu III. obr. 9, 10 a 11; dále v dílu III. na str. 115 zaměněná algebr. znaménka při dosazování podle vzorce 77′; a konečně součinitel ψ ve vzorci 57 v dílu V.

Autor pracoval na díle s velkou pílí a vydal je v poměrně krátké době úplné; pořídil učebnice pro velmi obsáhlý a těžký předmět, kde se dříve muselo rychle vykládati, protože se ztrácelo mnoho času diktováním přednášek; špatné následky této nutnosti se u žáků nezbytně objevovaly. Jelikož jsou všecky učebnice nyní kompletní, jest úspora času veliká a výklad může jíti tempem mnohem volnějším.

Ing. *Max Klotz.*

*

Edmund Landau: **Vorlesungen über Zahlentheorie.** Sv. I, XII + 360 str.; Sv. II, VII + 308 str.; Sv. III, VII + 341 str. Cena jednoho svazku 20 Mk, vázaného 22 Mk. Nákladem S. Hirzela, Lipsko, 1927.

Od vydání známé Landauovy knihy »Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen« (1909) učinila analytická teorie čísel mohutné pokroky; tyto jeví se ve spoustě pojednání, roztroušených po matematických časopisech — obsah jejich však až na některé výjimky [1]) nebyl dosud knižně zpracován. Vzhledem k množství vděčných problémů, jež se zde naskytují a vzhledem k obtížnosti látky přichází kniha Landauova, obsahující systematické zpracování právě těchto moderních otázek, jako na zavolanou.

Kniha je rozdělena na třináct dílů. První díl obsahuje na 64 stránkách stručný a výrazný výklad základů číselné teorie, od prvních počátků až ke kvadratickým zbytkům a Pellově rovnici včetně. Díl druhý až čtvrtý jest věnován dalším klasickým částem teorie čísel (Dirichletova věta o prvočíslech v aritmetické posloupnosti, rozklad čísel na dva, tři a čtyři čtverce, počet tříd binárních kvadratických forem); z moderních otázek obsahuje Brunovu větu o dvojicích prvočísel.

Dílem pátým ocitáme se však uprostřed moderní analytické číselné teorie, a to právě v jejích nejtěžších částech: díl pátý pojednává o problému Goldbachovu, díl šestý o problému Waringovu, hlavně na základě metod Hardy-Littlewoodových. Četba šestého dílu je značně obtížná — ale nebylo možno věci tak obtížné vyložiti jednodušeji.

Druhý svazek, obsahující díl sedmý (teorie prvočísel a funkce ζ) a osmý (mřížové body) tvoří — aspoň podle recensentova vkusu — nejkrásnější část knihy. Autor, který tento obor obohatil mnohými důležitými výsledky, vykládá v sedmém dílu nejdůležitější moderní poznatky o teorii prvočísel: nejostřejší odhady Littlewoodovy, věty, týkající se kořenů funkce ζ (Hardy, Littlewood, Bohr, Landau, Franel a j.) atd. V osmém dílu probrána je teorie mřížových bodů v kruhu až k nejnovějším výsledkům; z obecné teorie hlavně věta van der Corputova z r. 1919 a co s ní souvisí.

Svazek třetí pojednává o teorii algebraických čísel a o t. zv. velké Fermatově větě. Do dílu devátého, věnovaného základům teorie ideálů, vsunut je důkaz věty Thue-Siegelovy o aproximaci čísel algebraických čísly racionálními. Díl desátý obsahuje věty o rozkladu diskriminantu těles, teorii jednotek a pod.; díl jedenáctý věnován je tělesům kvadratickým. Díl dvanáctý obsahuje Kummerův důkaz Fermatovy věty pro t. zv. regulární prvočísla, díl třináctý další výsledky v oboru Fermatovy věty od Furtwänglera, Wiefericha, Mirimanova a Vandivera.

Podání vyniká naprostou přesností: vše, co se tvrdí, se dokáže a čtenář má možnost slovo za slovem správnost výkladů verifikovati; podle mínění recensentova je to jediná cesta, kterou je možno vyhnouti se nedorozumění při látce tak obtížné. Někdy ovšem nelze se vyhnouti při tomto způsobu výkladu tomu, že utrpí jednotná linie důkazu; tomu odpomáhá autor vhodnými úvody, v nichž na začátku každé kapitoly naznačuje její obsah i postup.

Jak z obsahu je patrno, je spis svrchovaně aktuelní: dobré dvě třetiny jeho rozsahu tvoří věci, dosud v žádné knize soustavně nezpracované a otevřené dalšímu badání. Autor dbal velmi pečlivě toho, aby pojal do svého díla i výsledky nejnovější: všechny tři svazky vyšly najednou v březnu 1927 a literatura časopisecká je v nich zpracována až do r. 1926! Typografická úprava je vzorná.

Vysoce záslužné dílo Landauovo jistě vykoná se zdarem své poslání: šířiti znalost moderních metod číselné teorie mezi širší kruhy matematické a býti spolehlivým rádcem a průvodcem těm, kteří hodlají v tomto oboru samostatně pracovati. *V. Jarník.*

*

B. Gutenberg: **Grundlagen der Erdbebekunde.** (Sammlung Borntraeger, Band 12.) Berlín, Gebr. Borntraeger, 1927, 189 str. Cena Mk 6·60.

Podstatné zdokonalení seismografů v posledních desítiletích, o něž se zasloužili hlavně Wiechert, Galitzin, Mainka a j., znamená novou éru

---

[1]) Na př. Landauova knížka o teorii algebr. čísel a ideálů z r. 1918 a kapitoly o funkci ζ v některých nových učebnicích teorie funkcí.

v nauce o zemětřesení. Dosavadní přístroje, které bylo možno zváti pouze seismoskopy, byly nahrazeny skutečnými seismometry, přístroji propracovanými fysikálně tak, že dovolují měřiti pohyby půdy způsobené příčinami přirozenými nebo umělými. Tím přešla nauka o zemětřesení, která byla před tím hlavně jen předmětem badání geologických, také na pole úvah geofysikálních, které prohloubily netušenou měrou názory na složení nitra Země.

Kniha Gutenbergova podává pěkný přehled moderní seismologie. V prvních třech kapitolách popisuje účinky zemětřesení, jejich vznik a rozšíření. Kapitoly čtvrtá a pátá obsahují často postrádané a většinou jen v monografiích dostupné výklady o moderních seismografech, jejich teorii a popisy i s návody ke stanovení konstant přístrojů a k analyse i vyčíslení seismogramů. Při tom jsou zmíněny i speciální přístroje k registrování umělých otřesů půdy. Vše ovšem ve stručné, pro informaci však postačitelné formě. Šestý oddíl jedná o určování polohy a hloubky ohniska otřesu a okamžiku vzniku. Ke konci knihy je pojednáno krátce o jemných, t. zv. mikroseismických pohybech půdy, jakož i o pokusech předpovídati zemětřesení a chrániti se proti němu.

Doporučení hodná knížka, jejíž autor je profesorem geofysiky na universitě ve Frankfurtě n. M., je vypravena 84 většinou velmi názornými obrázky.

R. Schneider.

*

J e a n B o c c a r d i: **Les variations dans la rotation de la Terre. Revue générale des Sciences. 1927.** Str. 76—82.

I. Č a s o v é h v ě z d y n e b e s k é. Po dobách bájí o rotaci hvězd nastupuje definice r o k u e k v i n o k c i á l n é h o či t r o p i c k é h o. Č a s s l u n e č n í značený na hodinách žádá znalost č a s o j e v n é r o v n i c e pro převod času pravého na střední sluneční a dále na č a s l e g á l n ý pásmový. Pro přesné určení času jest znáti vlastní pohyb časové hvězdy.

III. N e d o k o n a l o s t i z e m s k ý c h h o d i n. K znalosti přesného času jest třeba znáti dobře změnu polohy hvězdy za předpokladu, že hodiny zemské jdou správně, to je, že rotační pohyb země jest a b s o l u t n ě s t e j n o m ě r n ý a k o n s t a n t n í během věků. Před 140 roky L a p l a c e tušil malé opoždění rotace země a r. 1860 D e l a u n a y ocenil členem 4·3″ zpoždění rotace země ze studie o měsíci.

Zjev studoval dále N e w c o m b a dále pak nalezeny byly malé oscilace ± 4″, co zatím celkové oscilace obnášejí ± 16″ v délce. Od té doby řada učenců studovala konstantní odchylku v délce slunce, jež jest nyní fotograficky sledována na Harvard College.

S druhé strany jedná se o doplnění teorie zkouškou hypotesy zpoždění zemské rotace. H. P o i n c a r é (Bulletin astronomique, 1903) poukazoval na zpoždění rotace vlivem slapů, jež dále sledovali T a y l o r a J e f f r e y s.

B r o w n uvádí, přijme-li se 0·″9 T^2 pro předejití délky slunce celkovým vlivem slapů měsíce i slunce, tož jest vzíti jen 0″4 T^2 pro týž zjev jako vliv slapů slunce.

III. P r á c e B r o w n o v y o t e o r i i m ě s í c e. E r n e s t B r o w n z university Yalské uveřejnil nyní nejdokonalejší teorii gravitace měsíce a vypočetl příslušné tabulky s přijmutím empirickým koeficientu 13·60″ s periodou as 253 roky, k jehož vysvětlení Brown provedl výpočet planetárních perturbací na měsíci cestou přímou i nepřímou a za použití hypotésy, jež by odstranila nesrovnalosti.

IV. V y s v ě t l e n í z j e v u. B r o w n hodlaje vysvětliti fluktuace měsíce atd. variacemi trvání rotace země, hledal příčiny těchto variací. Studoval vliv slapů, hodnoty oscilace v délce měsíce a slunce, variaci v otáčení odvislou od klouzání kůry zemské na jádře, jako vnitřní vlivy. Variace úhlové rychlosti by se projevila změnou rozložení mas ve smyslu radiálním. Při úvaze kulového tvaru země nalézá B r o w n pro změny deklinací měsíčních ± 4″ a ± 16″, změny radiální mezi 12·5 *cm* a 3·75 *m*.

Isostatická vyrovnání přesunu mas erosí by se vysvětlovala změnami mas do hloubky nejméně 80 *km*, ale i více, až 300 *km*.

V r. 1925 Jolly hleděl vysvětliti fluktuace měsíční vertikálnými oscilacemi kůry zemské z basaltu, jež by k vysvětlení astronomického zjevu dosahovaly hloubky 80—90 *km*.

Brown studoval, zda jest souvislost mezi zemětřeseními v době 1750—1910 v Britanii a fluktuacemi měsíce v oboru ± 4″ a shledal celkem souhlas. Za to oscilace oprav kyvadel (Mezinárodní služba časová) nepodaly positivních souvislostí s fluktuacemi měsíce.

Důsledky hypotesy Brownovy.

1. a 2. V důsledku Brownovy hypotesy autor dovozuje, že vlivem přesunů hmoty uvnitř země ve velkém rozsahu do hloubky na 300 *km* osa setrvačnosti utrpí malé přesuny uvnitř země a dále, že okamžitá osa rotační by se přemístila uvnitř země a snad i v prostoru. To by mělo v zápětí variace zeměpisných šířek na zemi, snad i prostorových souřadnic hvězd. Variace šířek v souhlase s fluktuacemi délky slunce a měsíce by byly částečně dlouhé periody hodnot velkých as ± 2″ a variace krátké periody slabé as ± 0·2″—0·3″.

Brown provedl výpočet variace, z velké deviace ± 16″ pro rotaci země a z toho autor dovozuje pro variaci roční v trvání rotace hodnotu 0·003 499.

3. Zpoždění v rotaci vlivem slapů jest během století konstantní. Připomenouti jest, že chod zemských hodin není konstantní. Trvání dnešního středního dne jest delší. Rok tropický podle známého členu precese ekvinokcí se zmenšuje.

Brownova hodnota akcelerace měsíce obnášející as 6·08″ není konstantní. Zbývající část zdánlivá zrychlení měsíce, kterou autor přijímá 4·5″, bude stálého znaménka, ježto vliv tření slapů bude zvětšující, ovšem proměnlivě během věků.

Autor uvažuje, za jakých okolností by rotace země se rovnala nule a za kterých by rovina rovníku ztotožnila se s rovinou ekliptiky.

Počítá zpoždění rotace země: 0·000 004 476 sek.

Rotace by se anulovala za dobu větší 19 miliard roků

Dr. *A. Semerád.*

*

Dr. H. Haalck: **Die magnetischen Verfahren der angewandten Geophysik.** (Spisů geofysikálních, vydaných prof. Dr. K. Mainkou, č. 7. Berlín, G. Bornträger, 1927.) Cena Mk 12·—.

Moderní geofysikální metody vyspěly tou měrou, že lze jich dnes — ovšem jen tam, kde jsou dány předpoklady — použíti k racionálnímu probadání ložisk a vůbec k řešení problémů, jež geologie řešiti nedovede. V nadepsané knize podává autor přehled aplikace magnetických měření na problémy praktické geologie, jemuž předesílá všeobecné úvahy o pracovních metodách geofysiky. Následuje pěkný a při tom stručný přehled podstaty zemského magnetismu.

Druhá část knihy jest věnována místním anomáliím, jejichž teorie a obrazy jsou vzhledem k vlastnímu účelu spisu probrány s náležitou obšírností. V třetí části nacházíme popis pozorovacích strojů, kde kromě běžných typů popsán jest i nový, H. Haalckem sestrojený universál, jenž dovoluje poměrně snadno stanoviti variace deklinace a horizontální, jakož i vertikální intensity. Na konec svých teoretických úvah promlouvá autor o magnetismu hornin a jeho pokusném stanovení.

Knihu uzavírají praktické příklady, vzaté ze skutečnosti. Celek jest podán velice jasně a s ohledem na geology přístupně, aniž by bylo při tom něco zadáno vědecké přesnosti, nezbytné při pracích geofysikálních. Literatura jest citována s potřebnou obšírností.

Dílo budiž vřele doporučeno všem, kterým geofysika jest potřebnou vědou, tudíž především geologickým a hornickým odborníkům. *V. Láska.*

*

C. L. Dassen: **Las Matemáticas en la Argentina** (Evolución de las Ciencias en la República Argentina, IV). Sociedad Científica Argentina, Buenos Aires, 1924, 140 str.

Jest vždy zajímavo srovnávati produkci vlastního národa s produkcí jiných národů a států. Pro nás nemohou ovšem přijíti v úvahu bohatí národové velmocí, stojící při prameni starých kulturních tradic, nýbrž spíše vědecká tvorba národů menších a států vzdálenějších od středisek horečného vědeckého života. Proto, myslím, jest zvláště zajímava pro nás kniha Dassenova o vývoji matematických věd v Argentině. S prvními kolonisatory přicházeli do země i muži znalí astronomie a matematických aplikací. V jesuitských klášterech pěstována teorie matematických věd. S jejich vypuzením r. 1764 to však přestalo. Pokusy o zavedení matematických věd do vysokých škol setkávaly se s nezdarem a nepřízní zpátečnické vlády španělské. Teprve po založení Nautické akademie r. 1799 a zvláště po osvobození Argentiny r. 1816 staly se matematické vědy stálými disciplinami vysokého školství. Jejich vzrůst byl také úzce spojen s rozvojem tohoto školství. Proto jest první část Dassenova spisu věnována obšírným jeho dějinám a zvláště matematickému vyučování. Literární činnost profesorů i jejich žáků jest na prvém místě popularisační a didaktická. Knižní produkci tvoří zejména učebnice a vysokoškolské přednášky. Při tom opírají se autoři hlavně o vynikající díla francouzská. Druhou důležitou složkou tvorby argentinské jsou periodické publikace, jimž jest věnována druhá část knihy. Autor tu uvádí dějiny jednotlivých časopisů a uvádí všecky význačnější práce aspoň nadpisem, nezmiňuje-li se i několika slovy o jejich obsahu. Dassen snesl ve své knize bohatý literárně historický materiál, takže jeho práce bude vždy východiskem pro každého, kdo by se zajímal o matematické vědy v Argentině.

Q. Vetter.

*

Simon Stevin: **La »Thiende« de S. S.**, Facsimilé de l'édition originale Plantienne de 1585 avec une introduction par H. Bosmans, S. J., Société des Bibliophiles Anversois, Antverpy, 1924, 42 + 37 str.

Hrůzná zář plamenů lovaňské knihovny vrhá těžké stíny i do kulturního života. Mnohý unikát, který dokazoval často zapomínanou prioritu vědeckého objevu, padl jim v oběť, na př. »Appendice algébraique« Simona Stevina, kde 6 let před Vietou modernějším způsobem podán přibližný výpočet kořenů rovnice. Ze tří existujících exemplářů slavné »Thiende« Stevinovy šťastnou náhodou byl před požárem zachráněn exemplář lovaňský. Vzácnou tuto památku vydal učený belgický historik matematiky v pietní úpravě s obsažným a instruktivním úvodem. V úvodě tom obšírně rozebral 37stránkovou knížečku Stevinovu tak dokonale, že i čtenář, nemohoucí čísti vlámské faksimile, jest s ním dokonale obeznámen. Zásluha Stevinovy »Thiende« jest v tom, že tu po prvé ukázáno, že lze desetinných zlomků užíti systematicky ve všech aritmetických operacích bez všech jiných zlomků. Jest to nejstarší učebnice s úplným, rigorosním výkladem čtyř základních výkonů početních s desetinnými zlomky, ba i stručným nástinem odmocňování jich. Druhou ženiální myšlenkou Stevinovou, zde vyslovenou, jest návrh na důsledné provedení dekadické soustavy měr, vah a peněz. Úvod Bosmansův, jako obvykle u tohoto autora, jest provázen přečetnými literárními poznámkami, svědčícími o jeho ohromné sčetlosti. Každý, kdo se zajímá o dějiny matematiky, s radostí uvítá podobná faksimile, jimiž se před zapomenutím uchraňují staré památky a při nešťastné někdy ztrátě originálů unikátů uchovají aspoň jejich věrné kopie.

Q. Vetter.

ZPRÁVY.

Prof. Dr. Frant. Nušl, ředitel státní hvězdárny, t. č. předseda Jednoty čsl. mat. a fys., dožívá se 3. prosince t. r. šedesátin, jistě k velkému překvapení všech svých přátel, kteří soudíce podle svěžího vzezření a projevů ducha mladého a neúnavného, odhadují jeho věk o mnoho procent níže. Redakce tohoto časopisu, vyslovujíc vynikajícímu členu naší Jednoty a naší celé vědecké obce upřímné a kolegiální blahopřání, oznamuje zároveň svým čtenářům, že v 2. čísle tohoto ročníku bude otištěno z pera povolaného odborníka vylíčení jeho životní a vědecké dráhy. *Red.*

Návštěva francouzského matematika v Praze. Prof. štrasburské university Maurice Fréchet, vynikající francouzský matematik, přednášel ve dnech 7. a 8. listopadu na přírodovědecké fakultě Karlovy university, vyhovuje tak pozvání, které mu učinilo na návrh této fakulty ministerstvo školství. Host, osobně známý s několika našimi matematiky, přednášel první den o matematické formulaci přírodních zákonů, druhý den o počtu funkcionálním, zvláště o pojmu diferenciálu ve funkcionální analysi, jím zavedeném. Prof. Fréchet navštívil řadu našich kulturních institucí, m. j. čítárnu a knihovnu J. Č. M. F. Při návštěvě kanceláře J. Č. M. F. seznámil se s jejím zařízením a činností. Na večírku pořádaném předsedou J. Č. M. F. seznámil se s řadou našich matematiků a fysiků a byl účastníky ještě podrobněji informován o naší kulturní a veřejné činnosti. *B.*

Nadace Rockfellerova, určená k tomu, aby umožnila vynikajícím mladým učencům studium v cizině, byla udělena pro rok 1927—28 také dvěma našim matematikům, s. docentům Karlovy university, Dru V. Jarníkovi a Dru V. Hlavatému. *Red.*

Nová epocha v teorii kvant. — V těchto řádcích podávám pokračování přehledu časopisecké literatury o nové kvantové teorii.*)

Základní pojednání Schrödingerova, o nichž byla zmínka v minulém a předminulém ročníku Časopisu, vyšla souborně jako zvláštní otisk ve formě monografie:

E. Schrödinger (Zürich) »Abhandlungen zur Wellenmechanik«, Leipzig 1927. J. A. Barth. — Obsahuje autorovy práce, které vyšly v Ann. d. Phys. *79*, 1926, Die Naturwissenschaften *14*, 664—666, 1926, Ann. d. Phys. *80*, 1926, *81*, 1926.

Podle kvantové mechaniky vypočítané intensity Zeemanových komponent u parciálního zjevu Paschen-Backova souhlasí s měřeními Backovými, jak dokazuje práce:

Lucy Mensing (Hamburg) »Die Intensitäten der Zeemankomponenten beim partiellen Paschen-Back-Effekt« (27. 7. 1926). ZS. f. Phys. *39*, 24—28, 1926.

---

*) Viz Časopis pro pěst. mat. a fys. *56*, 53—56 (1927). Srovn. též předcházející přehledy (Časopis, *55*, 207, 423—424 [1926]).

K fysikální interpretaci metody Schrödingerovy vztahují se poznámky, jež uveřejnil ruský teoretik, jenž před několika lety pracoval vědecky v Praze, v práci:

N. v. Rashevsky (Pittsburgh, Pa.) »Einige Bemerkungen zur Heisenbergschen Quantenmechanik« (21. 7. 1926). ZS. f. Phys. *39*, 153—158, 1926.

Jinou cestou než O. Klein (ZS. f. Phys. *37*, 895, 1926), avšak na něm nezávisle, dospívá V. Fock k výsledku, že vlnová rovnice Schrödingerova dá se psáti jako invariantní Laplaceova rovnice v pětirozměrném prostoru. To jest obsahem práce:

V. Fock (Leningrad) »Über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt« (30. 7. 1926). ZS. f. Phys. *39, 226—232*, 1926.

Práce:

F. London (Stuttgart) »Die Zahl der Dispersionselektronen in der Undulationsmechanik« (19. 8. 1926), ZS. f. Phys. *39, 322—326*, 1926, podává odůvodnění vět o stabilitě, známých z teorie disperse, se stanoviska Schrödingerovy mechaniky.

Velmi podobně propracována jest nová kvantisace symetrického setrvačníku v práci:

F. Reiche (Breslau) »Die Quantelung des symmetrischen Kreisels nach Schrödingers Undulationsmechanik«. — Mit einem mathematischen Anhang von *H. Rademacher* (Breslau) (26. 8. 1926), ZS. f. Phys. *39*, 444—464, 1926.

Na práci O. Kleinovu výše citovanou navazuje krátká poznámka:

P. Ehrenfest u. *G. E. Uhlenbeck* (Leiden) »Graphische Veranschaulichung der De Broglieschen Phasenwellen in der fünfdimensionalen Welt von O. Klein« (16. 9. 1926), ZS. f. Phys. *39*, 495—498, 1926.

Dosavadní pokusy odvoditi ze starší kvantové teorie spektrální formule pro helium ztroskotaly; za to Schrödingerova teorie zdá se vésti k cíli, jak ukazuje:

W. Heisenberg (Kopenhagen) »Über die Spektra von Atomsystemen mit zwei Elektronen« (24. 7. 1926), ZS. f. Phys. 39, 499—518, 1926.

Metodu k přibližnému řešení Schrödingerova problému charakteristických hodnot pro libovolný systém o jednom stupni volnosti vypracoval

H. A. Kramers (Utrecht) »Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung« (9. 9. 1926), ZS. f. Phys. *39*, 828—840, 1926.

Vyzářené frekvence a intensity u Comptonova zjevu*) vypočetl podle Schrödingerovy teorie:

*) Dříve již spočetl Comptonův zjev Dirac podle Heisenbergovy metody, viz Časopis, *56*, 56 (1927).

W. Gordon (Berlin) »Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie (29. 9. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 117—133, 1926.

Odvozením zobecněné rovnice Schrödingerovy z relativistického analoga Hamiltonova problému zabývá se práce:

D. Iwanenko u. *L. Landau* (Leningrad) »Zur Ableitung der Klein-Fockschen Gleichung« (8. 10. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 161—162, 1926.

Analogon Ehrenfestova »adiabatického principu« v kvantové mechanice jest obsahem obšírnější práce:

M. Born (Göttingen) »Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik« (16. 10. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 167—192, 1926.

Přenesením transformační teorie maticové mechaniky na Schrödingerovu teorii charakteristických hodnot a důsledky odtud plynoucími zabývá se pojednání:

F. London (Stuttgart) »Winkelvariable und kanonische Transformationen in der Undulationsmechanik« (19. 9. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 193—219, 1926.

Schrödingerova rovnice příslušná problému jednoho elektronu dá se převésti na tvar hydrodynamických rovnic, jak ukázal:

E. Madelung (Frankfurt a. M.) »Quantentheorie in hydrodynamischer Form« (25. 10. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 322—326, 1926.

Jednoduchý příklad k teorii Bornově, citované v loňském ročníku Časopisu na str. 55 (ZS. f. Phys. *37,* 863, 1926; *38,* 803, 1926), totiž teorii rázu mezi hmotným bodem a rotátorem podává:

E. Fermi (Florencie) »Zur Wellenmechanik des Stossvorganges« (23. 10. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 399—402, 1926.

Podrobným studiem soustavy tří elektronů, pokud se kombinační možnosti mezi jednotlivými »termy« týče, zanáší se práce:

E. Wigner (Charlottenburg) »Über nicht kombinierende Terme in der neuen Quantentheorie« (12. 11. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 492—500, 1926.

V práci:

W. Heisenberg (Kopenhagen) »Schwankungserscheinungen und Quantenmechanik« (6. 11. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 501—506, 1926, autor se pokouší ukázati, že kvantová mechanika jest stále ve shodě se vzorci příslušejícími zjevům »kolísání«.

Spektra vzácných plynů vedou na skládání kvantových vektorů dvou vnějších elektronů; ostatní elektrony tvoří uzavřenou konfiguraci, jež nemá impulsu. Důsledky odtud plynoucí jsou porovnávány se spektroskopickými fakty (a odtud další cenné závěry učiněny) v pojednání:

S. Goudsmit u. *E. Back* (Tübingen) »Die Koppelung der Quantenvektoren bei Neon, Argon und einigen Spektren der Kohlenstoffgruppe« (29. 10. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 530—538, 1926.

Propočítání modelu dvojatomové molekuly jakožto rotátoru s vnitřním impulsem podle nové kvantové mechaniky tvoří obsah článku:

L. Landau (Leningrad) »Zur Theorie der Spektren der zweiatomigen Moleküle« (13. 11. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 621—627, 1926.

Na jednoduchém, avšak typickém příkladě ukazuje Jordan, že představa o nespojitých kvantových skocích jakož i představa o spojité výměně energie v exaktní kvantové mechanice dávají ve všech empiricky zkoušení schopných výrocích tytéž výsledky. Práce jeho má název:

P. Jordan »Über quantenmechanische Darstellung von Quantensprüngen« (25. 11. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 661—666, 1926.

Z relativistického zobecnění Schrödingerovy rovnice vychází kratší úvaha:

V. Bursian (Leningrad) »Notiz zu den Grundlagen der Dispersionstheorie von E. Schrödinger« (19. 11. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 708—713, 1926.

Cílem práce:

F. Hund (Kopenhagen) »Zur Deutung der Molekelspektren I.« (19. 11. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 742—764, 1926, jest ukázati cestu ke kvalitativnímu porozumění oněch charakteristických zjevů v pásových spektrech, jež se zakládají na pohybu elektronů.

Čtyři dosud vypracované tvary kvantové mechaniky: maticová teorie, Born-Wienerova teorie, vlnová mechanika a Diracova teorie jsou obsaženy jako speciální případy v obecnější formální teorii, kterou podává

P. Jordan (Göttingen) »Über eine neue Begründung der Quantenmechanik« (18. 12. 1926), ZS. f. Phys *40,* 809—838, 1926. Formální výsledky této práce byly částečně nalezeny nezávisle též v pracích, které uveřejnili F. London a P. A. M. Dirac.

Výše uvedená první část práce Wignerovy jest doplněna druhou částí pod názvem:

E. Wigner »Über nicht kombinierende Terme in der neueren Quantentheorie«, II. Teil (26. 11. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 883—892, 1926, která se zabývá rozpadem »termů« při problému více elektronů.

Kratičká poznámka

M. S. Vallarta (Cambridge, Mass.) »Bemerkungen zu der Arbeit von Herrn G. von Gleich: Zur Massenveränderlichkeit im Zweikörperproblem« (19. 11. 1926), ZS. f. Phys. *40,* 893—894, 1926, nepatří sice tak zcela do rámce tohoto přehledu, avšak obsahuje stručný a zajímavý přehled sporu o tom, zda experimentální potvrzení Sommerfeldovy teorie detailní struktury jest zároveň potvrzením předpokladu, že speciální teorie relativnosti ovládá pohyby elektronů v atomu čili nic.

(Pokračování.)

V. Trkal.

Sjezd československých matematiků a fysiků v Praze 1928. Pozvánky na sjezd čsl. přírodozpytců, lékařů a inženýrů ve dnech 26.—29. května 1928 byly již rozeslány. Reklamace pozvání přijímá kancelář sjezdová v Praze II., Vladislavova 14, telef. 212-85. Z řádu sjezdového upozorňujeme na tyto důležitější odstavce:

§ 2. Účelem sjezdu jest:

a) Projednávati otázky vědecké, zejména se zřetelem na zvláštnosti a potřeby státu československého.

c) Dávati podnět k řešení otázek vědeckých, které vyžadují ke svému propracování spojených sil a zejména

d) navazovati a utužovati přátelské styky mezi spolupracovníky.

§ 4. Na sjezd mohou se přihlašovati:

a) Odborní zástupcové a pěstitelé věd matematických, přírodních, lékařských a technických, jako členové,

b) členové jejich rodin jako účastníci.

§ 5. Každý člen (§ 4 a) sjezdu má právo:

a) Přednášeti a písemně předložiti vědecké práce,

b) účastniti se rozhovorů a hlasování,

c) účastniti se sjezdových podniků,

d) dostati veškeré publikace pro členy sjezdu určené.

Účastníci (§ 4. b) mají táž práva jako členové, vyjma odstavec a), b), d).

§ 8. Vědecké jednání sjezdu se skládá ze samostatných temat se zvolenými referenty, ze sdělení o původních pracích a z rozhovorů.

Referenti odevzdají referáty k tisku hotové, autoři původních sdělení název a krátký obsah práce — 3 měsíce před zahájením sjezdu předsednictvu své sekce. (Adresa: Dr. M. Kössler, Praha II., u Karlova 3.)

§ 14. Každý, kdo chce sjezdu učiniti vědecké sdělení a učinil zadost § 8, odevzdá dříve než se ujme slova, předsednictvu sekce hodnotný výtah své práce, přihotovený k tisku.

K rozhovoru se hlásí členové o slovo u předsednictva sekce a po svém projevu ihned odevzdají obsah svého sdělení sekretáři k tisku.

Pro referáty jest vymezena doba třiceti minut, pro sdělení dvacet minut a rozhovor pět minut, kteréžto doby nemohou býti překročeny.

V první sekci (matematika, fysika a astronomie) budou projednána zejména tato hlavní témata:

1. Pojem prostoru v moderní diferenciální geometrii (se stanoviska ryzí matematiky). Referuje prof. dr. Eduard Čech.

2. Nejnovější směry v teorii kvant a jich souvislost s teorií atomovou. Referuje prof. dr. Viktor Trkal.

3. Naše terminologie v matematice a vědách spřízněných.

Mimo to doufáme, že účastníci sjezdu v hojném počtu přihlásí se ke sdělení o svých původních pracích podle odst. 8 a 14 sjezdového řádu. Sdělení tato budou rozdělena podle tří oborů a) matematika, b) fysika, c) astronomie a vyšší geodesie, pokud souvisí s astronomií.

Mezinárodní kongres matematiků. Výkonný výbor, jehož předsedou je prof. S. Pincherle, požádal redakci o otištění této předběžné zprávy: »Ve dnech 3.—10. září 1928 bude se konati v Bologni »Mezinárodní kongres matematiků«, ohlášený mezinárodní Unií matematickou, pod auspiciemi král. university v Bologni. Předseda vlády, J. E. Benito Mussolini, přijal předsednictví čestného výboru. Rektor král. university v Bologni, prof. Pasquale Sfameni, přijal předsednictví organisačního výboru. Na sjezdu budou zastoupeny tyto sekce: 1. Aritmetika. Algebra. Analysa. 2. Geometrie. 3. Mechanika. Fysika matematická a teoretická. Astronomie. Geodesie. 4. Statistika. Matematické národohospodářství. Pojistná matematika. 5. Vědy inženýrské, užitá mechanika, elektrotechnika. Lodní stavitelství. Bezdrátová telegrafie a telefonie. Vědy vojenské. Aerodynamika. 6. Didaktika; matematika elementární. 7. Filosofie a historie matematiky.« Dodáváme k tomu, že náš časopis bude přinášeti i další zprávy týkající se kongresu. Kancelář výkonného výboru má adresu: Istituto Matematico della R. Università. Via Zamboni 33, Bologna (Italia).« *Red.*

Přátelům dějin věd exaktních, přírodních, lékařských a technických a starých knih těchto oborů i map. Přátelé minulosti uvedených oborů jsou rozptýleni v různých spolcích jednotlivých oborů, jsou roztroušeni po našem venkově. Jeden neví o druhém. A přece součinnost by mohla tak často podporovati jejich záliby. V cizině jsou již dávno společnosti a skvěle vybavené ústavy pro dějiny těchto věd, vydávají se odborné časopisy a krásné, bohatě vypravené katalogy obchodníků se starými knihami uvedených oborů. Podepsaní domnívají se proto, že našim přátelům dějin a starých knih z věd exaktních, přírodních, lékařských a technických bude milo se poznati a spolupracovati. Sjezd čsl. přírodozpytců, lékařů a inženýrů r. 1928 jest vhodnou příležitostí k přátelské schůzce, kde bychom si pohovořili o svých zájmech a přáních. Abychom zvěděli, kolik nás jest, prosíme všechny, kdož se o dějiny a staré knihy vyjmenovaných oborů zajímají, aby dopsali p. inž. Bedřichu Mansfeldovi, řediteli knihovny Průmyslové Jednoty, Praha I., Rytířská ul., Havelský klášter (vědy technické) nebo univ. lektoru Dr. J. S. Procházkovi, Praha II., Národní Museum. Každý nový podnět bude s radostí uvítán. — Prof. Dr. Boh. Horák, Prof. Dr. Karel Kavina, Ing. B. Mansfeld, ředitel knihovny Průmyslové Jednoty v Praze, Prof. Dr. Jaroslav Pantoflíček, Dr. Jan Svat. Procházka, Prof. MUDr. O. Rybák, Prof. MUDr. Ondřej Schrutz, Prof. PhDr. a MgPh. J. S. Štěrba-Böhm, doc. Ing. Gustav Vejšický, Prof. Dr. Quido Vetter.