O cornoidě.

Napsal Dr. *Josef Klima.*

V I. dílu II. vyd. Loriova spisu: „Spec. alg. und transc. ebene Kurven" je na str. 287 zmínka o spec. křivce 6^0, jíž A. Sanchez[1]) nazval, a to, jak Gino Loria podotýká, nevhodně, rohovkou nebo cornoidou. Křivka ta nebyla dle zmínky téhož autora dosud mnoho vyšetřována i chci v dalším odvoditi její tečnu v libov. bodě a sice jednoduchou prostorovou interpretací, jakož i odvoditi poloměry křivosti ve vrcholech a jiné vlastnosti.

Dle zmíněného spisu je výtvarný zákon křivky té tento: (obr. 1.). Budiž dána kružnice k_1 a v ní dva kolmé průměry $\overline{A_1 B_1}$ a $\overline{C_1 D_1}$. Zvolme k průměru $\overline{A_1 B_1}$ kolmou libov. tětivu $\overline{Q_1 \, {}^1Q_1}$. Tu tečna t_1 ke kružnici k_1 v bodě Q_1 sestrojená, je proťata kolmicí $\overline{{}^1Q_1 M_1}$ k této tečně spuštěnou s bodu ${}^1Q_1$ v bodě M_1 křivky. Souřadnice x a y bodu M_1 k osám $x_1 \equiv \overline{A_1 B_1}$ a $y_1 \equiv \overline{C_1 D_1}$ možno pak určiti co rac. funkce veličiny $t = \mathrm{tg}\, \frac{1}{2}\, \varphi$, kde $\varphi = \sphericalangle C_1 S_{1,2} Q_1$ a sice stupně šestého. Křivka ta je tedy 6^0 a racionální. Je symetrická k osám $\overline{A_1 B_1}$ a $\overline{C_1 D_1}$ a má na ose $\overline{A_1 B_1}$ dva dvojné body oskulační.

Abychom této konstrukci mohli dáti prostor. význam, uvažme, že bod M_1 křivky možno též dostati v průsečíku tečny t_1 kružnice k_1 s kružnicí l_1, opsanou nad tětivou $\overline{Q_1 \, {}^1Q_1}$ co průměrem. Zvolme pak si v ose $\overline{A_1 B_1}$ osu souřadnou $x_{1,2}$ a kružnice k_1 nechť je půdorysem elipsy k, jež je v rovině jdoucí osou $y_1 \equiv \overline{C_1 D_1}$ kolmo k nárysně a svírající s půdorysnou úhel 45^0. Je tedy elipsa k na rotační ploše válcové V kolmé k půdorysně, jejímž půdorysem je kružnice k_1.

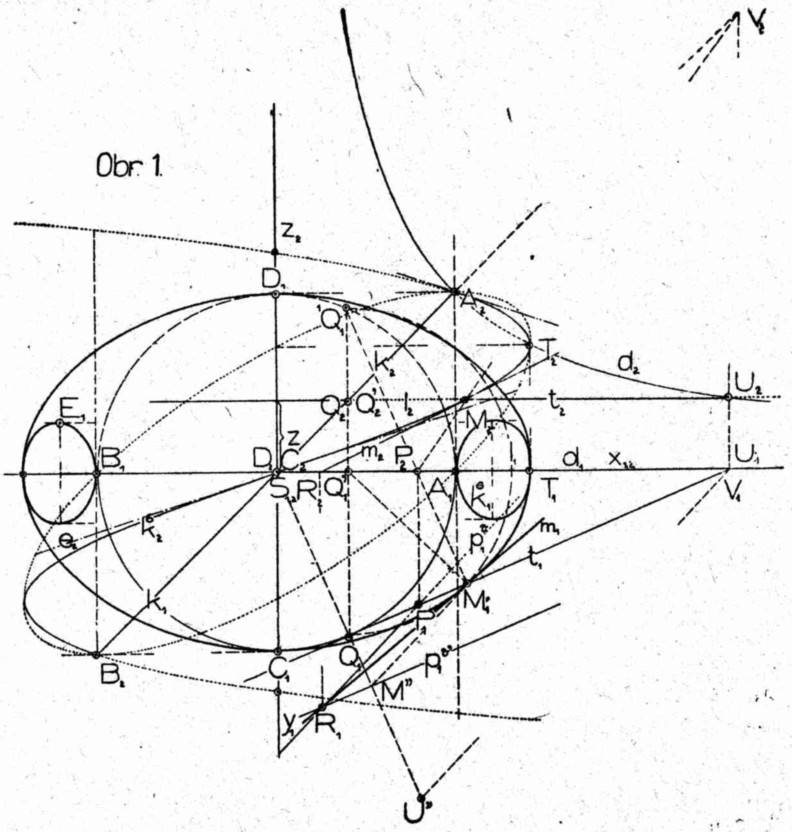
Všechny tečny plochy válcové V, jež jsou horizontální a dotýkají se jí v bodech elipsy k, vytvářejí zborcenou plochu P, jež má v nárysně dvojnou křivku, která je rovnoosou hyperbolou d, mající osy x a z ($z \perp \pi$ v bodě S, jež je středem k_1 a k) za asymptoty a vrchol v bodě A_2, jež je též vrcholem elipsy k. Je-li totiž nárys bodu Q, jehož půdorys Q_1 zvolen libov. na k_1 v bodě Q_2 na k_2 a jeho vzdálenost od půdorysny označena z, pak patrně též vzdálenost $\overline{S_{1,2} Q'_1} = z$ (Q'_1 je průsečík tětivy $\overline{Q_1 \, {}^1Q_1}$ s osou $x_{1,2}$). Označíme-li průsečík površky t plochy sborcené P s nárysnou U, tu je patrně z pravoúhlého $\triangle S_{1,2} Q_1 U_1$

$$\overline{S_{1,2} Q'_1} \, . \, \overline{S_{1,2} U_1} = r^2 \text{ a tedy } z \, . \, x = r^2$$

---

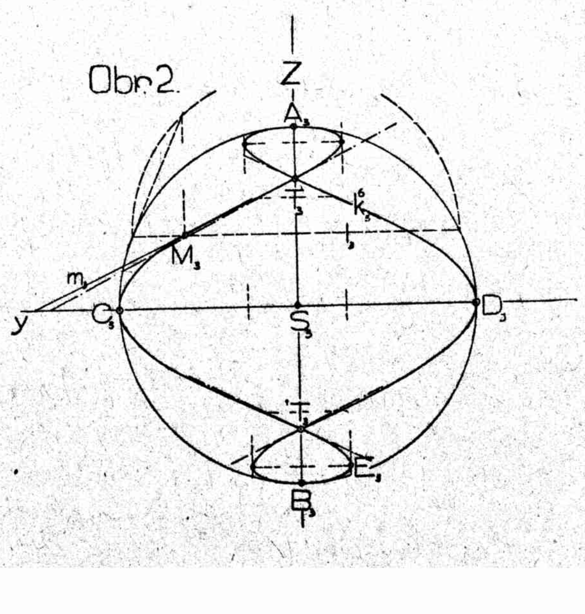
[1]) Ve spisku: „La cornoide" (San Salvador, Central-America, 1895).

Obr. 1.



z_2
D_1
A_2
Q_1
T_2
k_2
d_2
U_2
Q_2
Q_2'
l_2
t_2
E_1
B_1
D
C_2
z
m_2
P_2
d_1
$x_{1,2}$
U_1
$S_{1,2}$
R_2
Q
A_1
T_1
V_1
e_2
k_2
p_1
m_1
t_1
k_1
M_1
P_1
B_2
C_1
Q_1
M''
R_1
y_1
U
V_2

Obr. 2.



z
A_3
k_3
l_3
M_3
m_3
y
C_3
S_3
D_3
E_3
B_3

je rovnicí dvojné hyperboly rovnoosé v nárysně plochy zborcené P. Plocha tato má v půdorysně rovinu řídící a za řídící křivky k a d, jež jsou kuželosečkami o společných bodech A a B. Ježto též hyperbola rovnoosá d protíná úběžnou přímku půdorysny v úběžném bodě osy x, je plocha P zborcenou plochou stupně

$$2.2.2-2.1-1.2=4.$$

Rovnice této plochy vzhledem ke zvoleným osám souř. je

$$(1)\left\{\begin{array}{l} P\equiv xz+y\sqrt{r^2-z^2}-r^2=\emptyset, \text{ nebo} \\ P\equiv y^2(r^2-z^2)-x^2z^2+2xzr^2-r^4=\emptyset. \end{array}\right.$$

Kružnice l_1, opsaná nad $\overline{Q_1\,{}^1Q_1}$ co průměrem, je půdorysem shodné kružnice l v rovině horizontální, jež protíná elipsu k v bodech Q a ${}^1Q$ a která má střed Q' v nárysně. Vzdálenost její roviny od půdorysny je též z. Všechny takové kružnice l, jichž průměry jsou tětivy elipsy k a leží v rovinách horizontálních, vyplňují trojosý elipsoid E, jenž má jednu osu v ose souř. y v $\overline{CD}$ a ostatní dvě osy v nárysně. Jedna soustava kruhových řezů elipsoidu je rovnoběžna s půdorysnou a body A, B jsou kruhovými body elipsoidu. Půdorysným průmětem je elipsa o vedlejší ose v $\overline{C_1D_1}$ a ohniskách A_1, B_1, takže hlavní poloosa

$$\overline{S_{1,2}T_1}=\sqrt{r^2+r^2}=r\sqrt{2}.$$

Nárysem je elipsa o sdruž. průměrech $\overline{A_2B_2}$ a $\overline{A_1B_1}$. Rovnice elipsoidu je

$$(2)\left\{\begin{array}{ll} & E\equiv (x-z)^2+y^2=r^2-z^2, \\ \text{nebo} & E\equiv x^2+y^2+2z^2-2zx-r^2=\emptyset. \end{array}\right.$$

Obě plochy P a E protínají se v křivce stupně 8, jež v našem případě rozpadá se v elipsu k, jež je oběma společná a v křivku k^6 stupně 6, jejímž půdorysem je cornoida k_1^6, a nárysem, ježto obě plochy jsou souměrny k ní křivka stupně třetího k_2^6.

Rovnice nárysu křivky průsečné dostaneme eliminací y z rovnic (1) a (2), vyloučíme-li činitele $(x-z)$, který je rovnicí nárysu k_2 elipsy společ. k, ve tvaru

$$3)\qquad k_2^6\equiv 2z^3-3zr^2+xr^2=\emptyset.$$

Křivka ta je souměrna dle středu $S_{1,2}$ a má v bodě tom bod obratu a tečna v bodě tom má směrnici $\frac{1}{3}$, jak snadno dostaneme z derivací:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{r^2}{3(r^2-2z^2)}\quad\text{a}\quad\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4zr^4}{9(r^2-2z^2)^3}.$$

V bodě A_2, jímž též křivka k_2^6 prochází, je směrnice tečny $=-\frac{1}{3}$. Body, v nichž tečny jsou rovnoběžny s osou z, jsou

$$T\left(r\sqrt{2}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \text{ a } {}^1T\left(-r\sqrt{2}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right).$$

Pro $x = \emptyset$, dostaneme z (3) $z_1 = \emptyset$ a

$$z_{2,3} = \pm \frac{r}{2}\sqrt{6}$$

a směrnice tečny v bodě

$$\left(0, \frac{r}{2}\sqrt{6}\right)$$

a tudíž i v bodě souměrném dle $S_{1,2}$ je $-\frac{1}{6}$. Je-li $x = r$, dostáváme

$$z_1 = r \text{ a } z_{2,3} = -\frac{r}{2} \pm \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

a pro $\quad x = r\sqrt{2}$ je $z_{1,2} = +\frac{r}{\sqrt{2}}$ a $z_3 = -r\sqrt{2}$

a směrnice tečny v bodě $(r\sqrt{2}, -r\sqrt{2})$ je $-\frac{1}{9}$. Body tyto a tečny v nich dají se velice snadno sestrojiti. K vyrýsování křivky k_2^6 možno ještě určiti si poloměr křivosti v bodě T_2 resp. ${}^1T_2$. Je totiž

obecně $\quad \varrho = \dfrac{[9(r^2 - 2z^2)^2 + r^4]^{\frac{3}{2}}}{12\,z\,r^4}$

a tedy v T_2, jehož $z = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$, dostaneme $\varrho = \dfrac{r\sqrt{2}}{12}$, což je $\dfrac{1}{12}$ vzdálenosti bodu T_2 od osy z. k_2^6 je tedy snadno sestrojitelná křivka racionální 3°. Dvojný bod její je v úběžném bodě osy x, ježto libov. přímka, rovnoběžná s osou x, protíná ji v jediném bodě. Určujeme-li průsečíky křivky té s úběžnou přímkou, dostáváme, že všechny tři průsečíky jsou v úběžném bodě osy x a snadno též počtem stanovíme, že tento úběžný bod je bodem vratu a tečna v něm splývá s úběžnou přímkou roviny. Vzhledem k tomu má křivka též jediný bod obratu reálný, a to v počátku $S_{1,2}$.

Přistupme nyní k půdorysu k_1^6 průsečné křivky k_1^6, kterýžto je dle vytvoření *cornoidou.*

Rovnici její k osám x a y obdržíme eliminací z z rovnice elipsoidu (2) a rovnice (3) nárysu k_2^6. Dostáváme rovnici cornoidy ve tvaru

(4) $\quad (x^2 + y^2)^3 - 5x^4r^2 - 6x^2y^2r^2 + 3y^4r^2 + 8r^4x^2 - 4r^6 = \emptyset.$

Křivka tato má v imag. bodech kruhových body vratu, v nichž tečny splývají s úběžnou přímkou. Tento výsledek vyplývá též z naší prostorové interpretace. Řídící přímka zborcené plochy P, jež je úběžnou přímkou půdorysny, je totiž dvojnou přímkou této plochy a protíná válcovou plochu V v imag. kruh. bodech, jež jsou kuspidálními body zborcené plochy. Těmito body jde též plocha elipsoidu E, a proto jich pronik má v bodech těch body vratu. Torsální přímky plochy P, jež jdou těmito kusp. body, jsou úběžnými přímkami minimálních rovin, jdoucích osou z plochy válcové V. Tečny v oněch bodech vratu jsou tudíž v úběžné rovině a promítají se tedy do půdorysny v úběžnou přímku.

Na ose x jsou další dva reálné oskulační body dvojné a sice ve vzdálenosti $\pm r\sqrt{2}$ od středu. Tyto vznikly splynutím tří dvojných bodů. Stejně na ose $y \equiv \overline{C_1 D_1}$ jsou dva imag. dvojné body a sice ve vzdálenosti $\pm r i \sqrt{2}$ od středu, čímž dostáváme celkem 10 dvojných bodů rac. sextiky k_1^6.

Ježto cornoida jeví se nám co půdorys průsečné křivky elipsoidu E a zborc. plochy P, sestrojíme tečnu m_1 v libovolném bodě jejím M_1, co půdorys průsečnice rovin tečných, sestrojených k oběma plochám v příslušném bodě M. Určeme nejdříve půdorysnou stopu p^τ roviny tečné τ v bodě M k elipsoidu E. Podél kružnice l jdoucí bodem M, dotýká se elipsoidu kužel. plocha o vrcholu V na průměru $\overline{AB}$ elipsoidu ($V_1 \equiv t_1 x_{1,2}$). Půdorysná stopa p^τ_1 roviny tečné prochází půdorys. stopníkem P povrchové přímky $\overline{VM}$ kužele a je kolma k poloměru $\overline{Q'_1 M_1}$ kružnice l. Přímku p^τ_1 možno též obdržeti bez nárysu, uvážíme-li, že

$$\overline{S_2 P_2} : \overline{P_2 V_1} = \overline{Q_2 M_2} : \overline{M_2 U_2} = \overline{Q_1 M_1} : \overline{M_1 V_1}$$

a proto $\overline{P_2 M_1} \parallel \overline{S_1 Q_1}$. Abychom tedy určili stopník P_1, třeba jen v M_1 vztýčiti kolmici $\overline{M_1 P_2} \perp t_1$ a v průsečíku P_2 této s osou x vztýčiti kolmici k ose x až protne tečnu t_1 v bodě P_1, jímž prochází $p^\tau_1 \perp \overline{Q'_1 M_1}$.

Dále určeme půdorysnou stopu $p^{\tau'}_1$ roviny tečné τ' ke zborc. ploše P v bodě M površky t. V bodech Q, U a v úběžném bodě površky t dotýkají se plochy roviny, jichž půdorysné stopy jsou t_1, přímka, jež je rovnoběžná s t_1 ve vzdálenosti $2r$ od středu $S_{1,2}$ (ježto tečna k rovnoosé hyperbole d v bodě U protíná osu x v bodě vzdáleném od U_1 o tutéž délku jako je U_1 od $S_{1,2}$), a úběžná přímka půdorysny. Ježto řada bodů na površce t je projektivná se svazkem rovin tečných, sestrojených ku ploše zborc. v těchto bodech, je též osnova rovnoběžných půdorysných stop rovin tečných projektivná s řadou půdorysů bodů dotyčných. Protneme-li tedy půdorysné stopy tečných rovin přímkou $\overline{S_{1,2} Q_1}$, dostaneme řadu

$$Q'' \equiv Q_1,\ U''\ (\overline{Q_1 U''} = \overline{S_{1,2} Q_1}),\ M'', \ldots,$$

jež je podobná s řadou $Q_1, U_1, M_1, \ldots$, ježto jich úběžné body si odpovídají, a proto $\overline{M_1 M''} \parallel \overline{U_1 U''}$. Bodem M'' jde $p^{\tau'}_1$ rovnoběžně s t_1. Průsečík R_1 obou stop $p_1{}^{\tau}$ a $p_1{}^{\tau'}$ je bodem hledané tečny m_1 v bodě M_1 sestrojené ke cornoidě k_1^6. Spojnice nárysu P_2 bodu R s M_2 je tečnou k nárysu k_2^6.

Toho, že nárysem průsečné křivky je rac. kubika snadno sestrojitelná, ovšem že z ní pro reálné body cornoidy platí jen část od bodu A_2 přes M_2, $S_{1,2}$ k bodu B_2, možno užíti k snadnému odvození poloměrů křivosti ve vrcholech C_1 a A_1. Inflexní tečna v bodě C_2 křivky k_2^6 má směrnici $\frac{1}{3}$ a tedy rovnici $z = \frac{1}{3}x$. Tečna ta je nárysem roviny, jež protíná elipsoid E, na němž křivka ta je, v elipse e, jež křivku k^6 v bodě C oskuluje a tedy její půdorys e_1 oskuluje cornoidu v bodě C_1. Vedlejší poloosa půdorysu e_1 je poloměr $\overline{S_{12}C_1} = r$ a hlavní poloosa je souř. x-ová průsečíku nárysu e_2 s nárysným obrysem elipsoidu E.

Z rovnice nárysného obrysu elipsoidu:

$$x^2 + 2z^2 - 2zx - r^2 = 0,$$

a tečny inflex.

$$z = \frac{1}{3}x,$$

dostaneme

$$x^2 = \frac{9}{5}r^2,$$

a tudíž poloměr křivosti elipsy e_1 v bodě C_1 a současně poloměr křivosti cornoidy ve vrcholu C_1 a D_1 je

$$\varrho_1 = \frac{x^2}{r} = \frac{9}{5}r.$$

Podobně možno odvoditi poloměr křivosti ve vrcholu A_1 cornoidy. Tečna v bodě A_2 ke křivce k_2^6 má směrnici $-\frac{1}{3}$ a tedy

rovnici:

$$z - r = -\frac{1}{3}(x - r)$$

a rovina, jdoucí jí kolmo k nárysně protíná elipsoid E v elipse, jež dotýká se křivky k^6 ve čtyřech nekonečně blízkých bodech a proto její půdorys oskuluje cornoidu ve vrcholu A_1. Provedeme-li počet jako dříve, dostaneme poloosu půdorysu elipsy, jdoucí vrcholem $A_1 = \frac{3}{17}r$

a dvojmoc druhé poloosy $\frac{r^2}{17}$, proto poloměr křivosti ve vrcholu A_1 a tedy též B_1 je $\varrho_2 = \frac{r}{3}$.

Bod T_1, jenž je půdorysem průsečného bodu T nárysného obrysu elipsoidu s dvojnou rovnoosou hyperbolou plochy zborcené P, je oskulačním dvojným bodem cornoidy. Druhý je symetrický dle S.

Zajímavou sextikou je též stranorys k_3^6 průsečné křivky k^6 (obr. 2). Eliminací x z rovnice (2) elipsoidu E a z rovnice (3) nárysu k_2^6 dostaneme rovnici stranorysu, ve tvaru

$$(5)\begin{cases} k_3^6 \equiv 4z^6 - 8r^2z^4 + 5r^4z^2 + r^4y^2 - r^6 = \emptyset, \text{ nebo} \\ k_3^6 \equiv y = \pm \dfrac{2}{r^2}\left(z^2 - \dfrac{r^2}{2}\right)\sqrt{r^2 - z^2}. \end{cases}$$

Křivka tato je souměrná dle osy y a z a je obsažena svými reálnými body uvnitř kružnice o poloměru r, která je stranorysným obrysem elipsoidu E. Vrcholy této křivky jsou v bodech A_3, B_3 a C_3, D_3. V bodech $T_3\left(0, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ a ${}^1T_3\left(0, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ má dvojné body, v nichž tečny vytínají na ose y úseky $\pm r\sqrt{2}$. Tyto dostaneme totiž co průsečnice roviny tečné k elipsoidu E v bodě T (obr. 1), jež je rovnoběžná se stranorysnou s rovinami tečnými, sestrojenými v bodě T k zborc. ploše P, jež jsou dvě a procházejí příslušnými povrchovými přímkami, které svírají s nárysnou 45^0 a tečnou, sestrojenou k dvojné hyperbole d v bodě T a jež vytíná na ose x úsek $2r\sqrt{2}$.

Pro cornoidu zajímají nás body na k_3^6, v nichž tečny jsou rovnoběžny s osou z, a jichž půdorysy jsou body na cornoidě, v nichž tečny jsou rovnoběžny s osou x. V obr. 1. a 2. vyznačen ze čtyř těchto bodů, bod E. Z rovnice (5) jde

$$\frac{dy}{dz} = \pm \frac{z(5r^2 - 6z^2)}{r^2\sqrt{r^2 - z^2}} \text{ a } \frac{d^2y}{dz^2} = \pm \frac{5r^4 - 18z^2r^2 + 12z^4}{r^2(r^2 - z^2)^{3/2}}.$$

Pro bod E musí tedy

$$6z^2 = 5r^2 \text{ a tedy } z = \pm r\sqrt{\frac{5}{6}} \text{ a } y = \pm \frac{r}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

a z rovnice nárysu k_2^6 dostaneme

$$x = \pm \frac{4}{3}r\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Křivka k_3^6 má čtyři reálné body inflexe, pro něž

$$z = \pm \frac{r}{2}\sqrt{\frac{9 - \sqrt{21}}{3}}.$$

Ve vrcholech křivky té možno též určiti z naší prostorové interpretace poloměry křivosti. Tak ve vrcholech C_3 a D_3 oskuluje křivku k_3^6 elipsa e_3, stranorys elipsy e, které jsme užili při určení poloměru křivosti ve vrcholech C_1 a D_1 cornoidy. Její polo-