Číslo I.

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATHEMATIKY A FYSIKY.

REDIGUJÍ

V ČÁSTI MATHEMATICKÉ
dr. K. PETR, professor české university,

V ČÁSTI FYSIKÁLNÍ
dr. BOH. KUČERA, professor české university,

ÚLOHY POŘÁDÁ
dr. K. RYCHLÍK, s. docent české university a techniky,

A VYDÁVÁ

JEDNOTA ČESKÝCH MATHEMATIKŮ A FYSIKŮ.

46 + 47 ROČNÍK XLVI.

V PRAZE.

Tiskem B. Stýbla. — Nákladem Jednoty českých mathematiků a fysiků.
1916.

OBSAH.

Příspěvky literární, jakož i zprávy týkající se *obsahu* »Časopisu« vůbec, přijímají **redaktoři** prof. dr. **Karel Petr**, Kr. Vinohrady, Chodská 5. (*články mathematické*), prof. dr. **Bohumil Kučera**, Praha II., »U Karlova«, Fysik. ústav (*články a úlohy fysikální*) a docent dr. **Karel Rychlík**, Praha II., Mikulandská 3. (*úlohy mathematické a řešení všech úloh*).

Přesahují-li příspěvky *dva* tiskové archy, jest třeba schválení výboru k jejich otištění. Recense knih cizojazyčných buďtež stručné. Themata úloh se přijímají k otištění jen, jsou-li opatřena řešením.

Rukopis budiž náležitě upraven k tisku a obrazce schopné reprodukce buďtež ve *dvojnásobném* zvětšení, jinak se na náklad autorův zhotoví neb opraví. Rukopisy nepřijaté se nevracejí. Korrektury buďtež vráceny co nejdříve.

Za obsah článku odpovídá jeho autor.

Pp. autoři, kteří si přejí **zvláštních otisků** svých článků v »Časopise« uveřejněných, račte se o počtu jich, ceně a placení dorozuměti a vyrovnati **přímo s tiskárnou**.

Redakční závěrka příštího čísla 15. prosince 1916.

Křivky rovinné stupně 2n-ho s třemi body n-násobnými.

Píše B. Bydžovský.

O křivce čtvrtého stupně s třemi body dvojnásobnými platí věta, často dokázaná,[1]) že tečné v bodech dvojnásobných (počtem šest) dotýkají se téže kuželosečky, takže pěti z nich šestá je určena. Nalezl jsem obecnou větu, jež platí pro křivky stupně $2n$-ho s třemi body n-násobnými a jejímž zvláštním případem je věta právě vyslovená. Odvození této věty a důsledkům z ní plynoucím věnovány jsou tyto řádky.

I.

1. Vlastnímu důkazu budiž předeslána přípravná úvaha: protněme rovinnou křivku K_n stupně n-ho přímkami a, b, c trojstranu, jehož žádný vrchol neleží na křivce. Tak vzniknou tři skupiny po n průsečících na každé přímce. Takové tři skupiny bodů nejsou zcela libovolné: zvolíme-li totiž na třech přímkách po n bodech, netvoří tyto tři skupiny obecně úplnou soustavu průsečíků křivky stupně n-ho s těmito třemi přímkami. To plyne — vzhledem k tomu, že tyto tři přímky tvoří čáru třetího stupně — ze známých vět o průsečících křivek, lze však tuto věc ihned nahlédnouti takto: vezměme dané tři přímky za osy souřadné. Rovnici

[1]) V. na př. K. Petr: „O racionálních křivkách čtvrtého stupně“ str. 19. Tento časopis roč. XXXII. (1903).

křivky stupně n-ho lze psáti ve tvaru

$$a_n x_1^n + b_n x_2^n + c_n x_3^n + \sum_h \sum_k a_{hk} x_h x_k + x_1 x_2 x_3 f. (x_i) = 0$$

kde f_i je výraz stupně (n-3)ho v souřadnicích. Skupiny bodové, v nichž křivka protíná jednotlivé osy, jsou dány rovnicemi:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{na ose } x_1 = 0 & & b_n x_2^n + c_n x_3^n + \ldots = 0 \\ \quad „ \quad „ \quad x_2 = 0 & & a_n x_1^n + c_n x_3^n + \ldots = 0 \\ \quad „ \quad „ \quad x_3 = 0 & & a_n x_1^n + b_n x_2^n + \ldots = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

kde členy naznačené vytečkováním jsou v každé rovnici jiné. Pozorujeme však, že členy nejvyšších stupňů mají ve všech rovnicích tytéž koefficienty.

Jsou-li tedy dány tři skupiny po n bodech na jednotlivých osách rovnicemi:

$$\begin{array}{ll} \text{na ose } x_1 = 0 & b_{2,3}^n \equiv b_0 x_2^n + b_1 x_2^{n-1} x_3 + \ldots + b_n x_3^n = 0 \\ \quad „ \quad „ \quad x_2 = 0 & c_{3,1}^n \equiv c_0 x_3^n + c_1 x_3^{n-1} x_1 + \ldots + c_n x_1^n = 0 \\ \quad „ \quad „ \quad x_3 = 0 & a_{1,2}^n \equiv a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n = 0 \end{array}$$

a mají-li tyto tři skupiny tvořiti úplnou soustavu průsečíků s křivkou stupně n-ho, musí býti možno uvésti je na tvar hořejších tří rovnic, totiž učiniti koefficienty při n-tých mocninách téže proměnné stejné. Aby v $b_{2,3}^n$, $c_{3,1}^n$ byly stejné koefficienty při x_3^n, k tomu stačí násobiti první c_0, druhou b_n, takže společný koefficient je pak $b_n c_0$; ježto x_2^n v prvé rovnici má pak koefficient $b_0 c_0$, x_1^n ve druhé koefficient $b_n c_n$, musí ve třetí rovnici

$$a_0 : a_n = b_n c_n : b_0 c_0.$$

Tato podmínka pak stačí, ježto rovnice

$$b_n c_n x_1^n + b_n c_0 x_3^n + \ldots = 0$$

udává potom křivku n-ho stupně protínající trojstran v daných třech skupinách bodů. Nalezená podmínka ukazuje, že ve třetí rovnici poměr dvou koefficientů je ostatními určen; to znamená, že z n bodů skupiny touto rovnicí vyjádřené jen (n-1) je libovolných; bod n-tý je určen požadavkem výše vysloveným. Z důkazu zároveň vysvítá, že — je-li žádaná podmínka splněna — každá křivka st. n-ho obsahující $3n - 1$ z daných $3n$ obsahuje také zbývající.

2. Vyslovíme větu duální: Tři skupiny po n paprscích procházející vrcholy trojstranu netvoří obecně úplnou soustavu

tečen vedených z těchto vrcholů ke křivce n-té třídy. Aby tomu tak bylo, musí býti vyplněna jedna podmínka; pak $(3n - 1)$ paprsků je libovolných, ale $3n$-tý je jimi určen. Každá křivka n-té třídy, která se dotýká $3n - 1$ z nich, dotýká se také zbývajícího.

3. Promítneme každou ze tří skupin z protějšího vrcholu trojstranu n paprsky. Tyto tři svazky paprsků jsou dány ovšem také rovnicemi I. Budiž na př.

$$\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

rovnice jednoho tohoto paprsku jdoucího vrcholem (1, 0, 0); zavedeme-li přímkové souřadnice ξ_i obvyklým způsobem, totiž tak, aby rovnice incidence zněla

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

pak pro souřadnice onoho paprsku platí

$$\xi_2 : \xi_3 = \alpha_2 : \alpha_3 \text{ t. j.}$$
$$\xi_2 : \xi_3 = - x_3 : x_2$$

A tak ovšem pro každý paprsek vrcholem (1, 0, 0). Podobně platí pro každý paprsek svazku o vrcholu (0, 1, 0):

$$\xi_1 : \xi_3 = - x_3 : x_1$$

a vrcholu (0, 0, 1):

$$\xi_1 : \xi_2 = - x_2 : x_1.$$

Obdržíme tedy z rovnic (I) ihned rovnice, jimž vyhovují souřadnice paprsků, jež promítají tři skupiny bodů, když do nich dosadíme dle napsaných úměr; obdržíme rovnice

$$\left.\begin{aligned} b_n \xi_3^n + (-1)^n c_n \xi_2^n + \ldots &= 0 \\ a_n \xi_3^n + (-1)^n c_n \xi_1^n + \ldots &= 0 \\ a_n \xi_2^n + (-1)^n b_n \xi_1^n + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Rozeznávejme dva případy:

a) n je sudé. Pak rovnice (II) nabudou tvaru:

$$\begin{aligned} b_n \xi_3^n + c_n \xi_2^n + \ldots &= 0 \\ a_n \xi_3^n + c_n \xi_1^n + \ldots &= 0 \\ a_n \xi_2^n + b_n \xi_1^n + \ldots &= 0 \end{aligned}$$

Násobíme-li první rovnici a_n, druhou b_n, třetí c_n, obdržíme:

$$a_n b_n \xi_3^n + a_n c_n \xi_2^n + \ldots . = 0$$
$$a_n b_n \xi_3^n + b_n c_n \xi_1^n + \ldots . = 0$$
$$a_n c_n \xi_2^n + b_n c_n \xi_1^n + \ldots . = 0$$

t. j., u n-tých mocnin téže proměnné tytéž koefficienty. Uvažujme křivku, jejíž rovnice v souřadnicích přímkových je

$$b_n c_n \xi_1^n + a_n c_n \xi_2^n + c_n b_n \xi_3^n + \ldots . + \xi_1 \xi_2 \xi_3 f(\xi_i) = 0,$$

kde $f(\xi_i)$ je výraz stupně $(n-3)$-ho a tečkami je vyznačen součet členů, jež rovněž tečkami jsou naznačeny v rovnicích (II). Souřadnice tečen vedených k této křivce z vrcholů trojstranu se obdrží, když do její rovnice se dosadí postupně $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$; ale pak se obdrží právě rovnice (II). Máme větu:

Průsečíky křivky stupně n-ho s trojstranem mají pro n sudé tuto vlastnost: promítneme-li vždy ty, jež leží na téže straně, z protějšího rohu, obdržíme 3n paprsků, jež se dotýkají téže křivky třídy n-té.

b) n liché. Rovnice (II) pak mají tvar

$$b_n \xi_3^n - c_n \xi_2^n + \ldots . = 0$$
$$a_n \xi_3^n - c_n \xi_1^n + \ldots . = 0$$
$$a_n \xi_2^n - b_n \xi_1^n + \ldots . = 0.$$

Násobíme-li tyto tři rovnice opět po řadě a_n, b_n, c_n, obdržíme při n-tých mocninách sice opět koefficienty téže absolutní hodnoty, ale jen při ξ_1^n, ξ_3^n jsou téhož znaménka, kdežto při ξ_2^n znamének opačných. Nedocházíme zde tedy k témuž výsledku jako pro n sudé. Nahraďme však kteroukoliv skupinu paprsků z daných tří skupinou paprsků s nimi harmonických dle těch dvou stran trojstranu, jichž průsečíkem procházejí paprsky zvolené skupiny. Této transformaci odpovídá změna znaménka jedné souřadnice, na př. v poslední rovnici souřadnice ξ_2. Obdržíme pak

$$- a_n \xi_2^n - b_n \xi_1^n + \ldots . = 0.$$

Je-li třetí rovnice takto změněna, lze učiniti týž důsledek jako pro n sudé. Platí tedy věta:

Průsečíky křivky stupně n-ho s trojstranem mají pro n liché tuto vlastnost: nahradíme-li všechny průsečíky s jednou stranou body, jež s nimi jsou harmonicky sdruženy dle obou *rohů trojstranu, a pak tyto body jakož i ostatní průsečíky promítneme z protějších vrcholů trojstranu, obdržíme 3n paprsků, jež se dotýkají téže křivky třídy n-té.*

Bylo by snadno vysloviti věty duální; speciálně věta a) se dualisuje pouhým obrácením.

II.

4. Křivka stupně $2n$-ho může míti nejvýše tři body n-násobné, nemá-li se rozpadnouti. Bod n-násobný platí za $\frac{1}{2} n\,(n-1)$ bodů dvojnásobných; má-li tedy křivka k bodů n-násobných, je její rod

$$p = \tfrac{1}{2}(2n-1)(2n-2) - \tfrac{1}{2} k\, n\,(n-1) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(n-1)\,[(4-k)\,n-2].$$

Toto číslo je kladné jen pro $k < 4$; je tedy skutečně $k = 3$ největší přípustná hodnota. Budiž K_{2n} křivka stupně $2n$-ho s třemi body n-násobnými. Její rod je dle posledního vzorce

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

t. j. takový, jako rod obecné křivky st. n-ho. To je následek toho, že křivka K_{2n} vhodnou kvadratickou transformací přejde v obecnou křivku st. n-ho. Neboť zvolíme-li tři body n-násobné — jež ovšem neleží v téže přímce — za hlavní body takové transformace, přejde křivka skutečně v křivku stupně

$$2 \times 2n - 3n = n;$$

tato křivka pak již nemá vícenásobných bodů.

Zvolíme body n-násobné za vrcholy souřadného trojstranu; ježto tedy na př. bod (0, 0, 1) je n-násobný, musí členy nejnižšího stupně v x_1, x_2 býti stupně n-ho, čili člen v x_3 stupně nejvyššího rovněž n-ho. Koefficient při x_3^n je pak ovšem výraz stupně n-ho v x_1, x_2. Totéž platí s příslušnými změnami o bodech (0, 1, 0,), (1, 0, 0). Píšeme-li stručně

$$a_{1,2}^n = a_0\, x_1^n + a_1\, x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n\, x_2^n$$
$$b_{2,3}^n = b_0\, x_2^n + b_1\, x_2^{n-1} x_3 + \ldots + b_n\, x_3^n$$
$$c_{3,1}^n = c_0\, x_3^n + c_1\, x_3^{n-1} x_1 + \ldots + c_n\, x_1^n$$

má rovnice křivky tvar

$$a_{1,2}^n x_3^n + b_{2,3}^n x_1^n + c_{3,1}^n x_2^n + \ldots = 0,$$

kde členy naznačené tečkováním mají tvar

$$x_1^{h_1} x_2^{h_2} x_3^{h_3}$$

kde každé h_i je rovno nejméně dvěma. Neboť všechny členy stupně jen n-ho v některých dvou proměnných jsou už vyčerpány třemi výrazy výše napsanými a ve členech ostatních mohou se vyskytovati jen součiny stupně vyššího. Je tedy

$$h_1 + h_2 \gtreqq n + 1, \quad h_1 + h_3 \gtreqq n + 1, \quad h_2 + h_3 \gtreqq n + 1.$$

Sečtením prvých dvou nerovností obdrží se

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_1 \gtreqq 2n + 2$$

Ježto však

$$h_1 + h_2 + h_3 = 2n,$$

plyne odtud

$$h_1 \gtreqq 2$$

a právě tak

$$h_2 \gtreqq 2, \quad h_3 \gtreqq 2.$$

Lze tedy ze všech členů tvaru výše uvedeného vytknouti alespoň $x_1^2 x_2^2 x_3^2$ a rovnice má tvar

$$a_{1,2}^n x_3^n + b_{2,3}^n x_1^n + c_{3,1}^n x_2^n + x_1^2 x_2^2 x_3^2 f_{2n-6}(x_i) = 0,$$

kde $f_{2n-6}(x_i)$ je mnohočlen v x_i stupně označeného indexem. Tento mnohočlen není ovšem obecný svého stupně, neboť výraz $x_1^2 x_2^2 x_3^2 f_{2n-6}(x_i)$ může obsahovati jednotlivé proměnné nejvýše ve stupni $(n - 1)$, $f_{2n-6}(x_i)$ tedy nejvýše ve stupni $(n - 3)$. Z toho plyne ostatně snadným výpočtem, že všech členů v $f_{2n-6}(x_i)$ je právě tolik jako v rovnici křivky st. $(n - 3)$, t. j. $\frac{1}{2} n (n - 3) + 1$. Také je viděti, že křivka

$$f_{2n-6}(x_i) = 0$$

má vrcholy souřadné za body $(n - 3)$ násobné.

5. Mimochodem budiž upozorněno na jeden důsledek, který plyne z vyjádření (1). Budiž dána jiná křivka st. $2n$-ho mající tytéž body n-násobné s týmiž tečnami. Její rovnice pak zní

$$a_{1,2}^n x_3^n + b_{2,3}^n x_1^n + c_{3,1}^n x_2^n + x_1^2 x_2^2 x_3^2 g_{2n-6}(x_i) = 0,$$

kde $g_{2n-6}(x_i)$ je funkce téhož druhu jako $f_{2n-6}(x_i)$. Obě křivky protnou se mimo v bodech n-násobných, jež platí, jak se snadno zjistí, za $3n^2 + 3n$ průsečíky, ještě v dalších bodech v počtu $n^2 - 3n$, jež leží na křivce o rovnici

$$f_{2n-6}(x_i) - g_{2n-6}(x_i) = 0,$$

což je ovšem opět křivka týchž vlastností jako $f_{2n-6}(x_i)$. Odtud věta: Dvě křivky stupně $2n$-ho s týmiž třemi body n-násobnými a se společnými tečnami v nich protínají se mimo ně ještě v $n(n-3)$ bodech, jež leží na křivce stupně st. $(2n-6)$ mající tytéž tři body za $(n-3)$ násobné. Na př. dvě křivky st. osmého s týmiž třemi body čtyřnásobnými, v nichž mají společné tečny, protínají se mimo ně ještě ve čtyrech bodech; tyto čtyři body leží na kuželosečce, jež obsahuje také tři body čtyřnásobné.

6. Tečny v n-násobném bodě (0, 0, 1) křivky (1) se obdrží, když se položí roven 0 souhrn členů n-ho st. v x_1, x_2, t. j. rovnicí

$$a^n_{1,2} + b_n x^n_1 + c_0 x^n_2 = 0.$$

Podobně jsou dány tečny v bodě (1, 0, 0) rovnicí

$$b^n_{2,3} + a_0 x^n_2 + c_n x^n_3 = 0$$

a tečny v bodě (0, 1, 0) rovnicí

$$c^n_{3,1} + a_n x^n_3 + b_0 x^n_1 = 0.$$

Vyznačíme v těchto rovnicích jen n-té mocniny proměnných a ostatní naznačíme tečkami:

$$(a_0 + b_n)\, x^n_1 + (a_n + c_0)\, x^n_2 + \ldots = 0$$
$$(b_0 + c_n)\, x^n_2 + (a_0 + b_n)\, x^n_3 + \ldots = 0$$
$$(b_0 + c_n)\, x^n_1 + (a_n + c_0)\, x^n_3 + \ldots = 0$$

Násobíme-li tyto rovnice po řadě výrazy $(b_0 + c_n)$, $(a_n + c_0)$, $(a_0 + b_n)$, stanou se koefficienty při n-tých mocninách stejnými; skupiny bodové vyznačené těmito třemi rovnicemi na osách vyhovují tedy podmínce vyslovené v odst. 1.

Tím je dokázána věta:

Tečné ve třech n-násobných bodech křivky stupně 2n-ho protínají spojnice těchto bodů ve 3n bodech, jež leží na křivce stupně n-ho: je tedy jedna z těchto tečen ostatními určena.

Zvláštní případy: pro $n = 1$ dostáváme větu, že průsečíky tečen ve třech bodech kuželosečky se spojnicemi těchto tří bodů leží na přímce, což je známý případ Pascalovy věty.

Pro $n = 2$: tečny ve třech dvojnásobných bodech křivky stupně čtvrtého protínají protější spojnice těchto bodů v šesti bodech, které leží na téže kuželosečce. Tato kuželosečka je ovšem jediná.

Pro $n = 3$ dostáváme obdobnou větu pro křivku stupně šestého s třemi body trojnásobnými; na jejich třech spojnicích obdrží se devět bodů, jimiž prochází křivka stupně třetího. Takových křivek je pak ovšem celý svazek, ježto tři spojnice samy tvoří rovněž jednu křivku stupně třetího obsahující těchto devět bodů.

7. Mezi větami platícími pro $n = 1$ a $n = 2$ a větami týkajícími se vyšších hodnot n je důležitý rozdíl, ne sice ve znění, ale za to ve významu příslušných vět. V případě kuželosečky resp. křivky stupně čtvrtého očekáváme předem, že tečny ve třech daných bodech jednoduchých resp. dvojnásobných jsou navzájem závislé; neboť třemi body a tečnami v nich křivka byla by přeurčena. Tak je kuželosečka určena již třemi body a tečnami ve dvou z nich; tečna ve třetím musí nutně býti nějak určena těmito elementy, což naše věta právě vyslovuje. Rovněž je křivka stupně čtvrtého s třemi dvojnásobnými body určena: těmito body dvojnásobnými (což je devět podmínek) a pěti tečnami v nich (dalších pět podmínek, celkem čtrnáct, což je počet podmínek nutný k určení křivky stupně čtvrtého); poloha šesté tečny musí plynouti z polohy ostatních pěti. Ale tato okolnost se již neprojevuje pro $n > 2$. Na př. pro $n = 3$, t. j. křivku stupně šestého s třemi body trojnásobnými, příslušná úvaha zní takto: tři body trojnásobné značí osmnáct, podmínek pro stanovení křivky. Ježto křivka stupně šestého je určena dvacetisedmi podmínkami a každá tečna platí za jednu, zdálo by se, že je možno voliti všech devět tečen v těchto trojnásobných bodech. Tomu tak ovšem není, jak nás poučuje naše věta: osmi tečnami v trojnásobných bodech je devátá tečna určena, přes to, že třemi body trojnásobnými a osmi tečnami v nich křivka šestého stupně určena není.[2])

[2]) Tento zjev není ovšem u křivek vyšších stupňů vzácný; připomínám na př. větu, že z devíti dvojnásobných bodů nerozpadající se křivky šestého stupně lze jen osm voliti zcela libovolně, přes to, že devět dvojnásobných bodů platí za dvacetsedm podmínek. Existuje ovšem vždy křivka

A tak obecně: tři n-násobné body platí za

$$\tfrac{3}{2}\, n\,(n+1)$$

podmínek pro určení křivky; ježto křivka stupně $2n$-ho je určena

$$\tfrac{2}{2}\, n\,(2n+3)$$

podmínkami, zbývá

$$\tfrac{2}{2}\, n\,(2n+3) - \tfrac{3}{2}\, n\,(n+1) = \tfrac{1}{2}\, n\,(n+3)$$

podmínek.

Je pak pro $n \gtreqless 3$ vždy

$$\tfrac{1}{2}\, n\,(n+3) \geqq 3n$$

t. j. než počet tečen v n-násobných bodech. Neboť řešením této nerovnosti se obdrží

$$n^2 - 3n \geqq 0 \quad \text{t. j.} \quad n\,(n-3) \geqq 0.$$

Přes to tedy, že křivka st. $2n$-ho pro $n \geqq 3$ není přeurčena, po případě není ani určena počtem podmínek, nelze tyto tečny voliti libovolně.

Zvolíme-li tedy libovolně tři body n-násobné s tečnami v nich a další body v počtu

$$\tfrac{1}{2}\, n\,(n+3) - 3n = \tfrac{1}{2}\, n\,(n-3)$$

obdržíme zajímavý případ, že je dán dostatečný a nikoliv přespočetný počet podmínek, jimž přesně nevyhovuje žádná křivka žádaného stupně.

V širším smyslu vyhovuje těmto podmínkám křivka, jež se skládá z dvojnásob počítaného trojstranu, jehož vrcholy jsou body n-násobné, a z libovolné křivky stupně $(2n-6)$-ho s body $(n-3)$-násobnými v těchto vrcholech; ta ovšem má v těchto vrcholech body $(n+1)$-násobné a následkem toho každá přímka tímto bodem vedená může býti pokládána — v širším smyslu — za tečnu v bodě n-násobném.

8. Bylo již upozorněno (v. odst. 4.) na to, jak křivka K_{2n} s třemi body n-násobnými souvisí s obecnou křivkou K_n. Sestrojme kvadratickou transformaci mající n-násobné body A, B, C

Šestého stupně s devíti libovolně danými body dvojnásobnými: je to dvojnásob počítaná křivka stupně třetího určená těmito body. Něco takového nelze říci o případu, o němž je jednáno v textu; v. dále.

křivky K_{2n} za hlavní; buďtež A', B', C' hlavní body druhé soustavy. Touto transformací přejde K_{2n} v křivku stupně n-ho, jak již víme. Tato křivka K_n neprochází body A', B', C', ježto křivka K_{2n} neprotíná spojnic AB, BC, CA mimo body hlavní. Tečné v n-násobných bodech přejdou při tom v přímky, jež promítají z bodů A', B', C' průsečíky křivky K_n s paprsky $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Body některé přímky hlavní, na př. BC, přecházejí ovšem v paprsky svazku A', ale odpovídají jim zároveň body přímky $B'C'$, totiž ty, v nichž tuto přímku protínají paprsky svazku A' právě zmíněné. I je pak zřejmo, vzhledem k vlastnosti bodů, v nichž tečné v n-násobných bodech protínají spojnice AB, DC, CA, že je dokázána věta:

Úplná soustava průsečíků tří přímek s křivkou stupně n-ho přejde kvadratickou transformací, jíž tyto přímky přejdou opět v přímky, opět v takovou.[3])

9. Vzájemná závislost tečen v n-násobných bodech křivky K_{2n} vynikne ještě názorněji, když spojíme větu odst. 6. s větami *a*), *b*) odst. 3. Průměty bodů, o nichž tyto dvě věty mluví, jsou totiž právě tečny v n-násobných bodech. I obdržíme tyto věty:

a) *Tečny ve třech n-násobných bodech křivky stupně 2n-ho pro n sudé dotýkají se téže křivky třídy n-té.*

b) *Tečny ve třech n-násobných bodech křivky stupně 2n-ho mají pro n liché tuto vlastnost: tečny ve dvou těchto bodech a přímky, jež jsou harmonicky sdruženy s tečnami ve třetím vzhledem k jeho spojnicím s ostatními dvěma, dotýkají se téže křivky třídy n-té.*

Tak dostáváme pro $n = 2$ větu o křivce stupně čtvrtého hned s počátku uvedenou: šesti tečen ve třech dvojnásobných bodech této křivky dotýká se kuželosečka, ovšem jediná. Pro $n = 4$, t. j. křivku stupně osmého, dostáváme dvanáct tečen ve třech bodech čtyrnásobných, jež se dotýkají křivky třídy čtvrté. Těmito dvanácti tečnami není ovšem tato křivka určena (křivka

---

[3]) Tuto větu bylo lze očekávati, ježto tři přímky tvoří složenou křivku stupně třetího. Parametry $3n$ průsečíků této křivky s křivkou stupně n-ho vyhovují jedné relaci, jež se nemění kvadratickou transformací, jíž křivka stupně třetího přejde opět v křivku téhož stupně.

čtvrté třídy je určena čtrnácti tečnami), je tedy nekonečně mnoho křivek, jichž se oněch dvanáct tečen dotýká. To pak platí tím spíše pro n větší.

Nejjednodušší případ věty b), totiž $n = 1$, vede k této vlastnosti kuželosečky: tečny ve dvou bodech kuželosečky a přímka harmonicky sdružená s tečnou v bodě třetím dle spojnic tohoto bodu s prvými dvěma procházejí týmž bodem. Tato věta ovšem ihned plyne z polárních vlastností kuželosečky. Další případ $n = 3$: tečny ve dvou trojnásobných bodech křivky stupně šestého a přímky sdružené harmonicky s tečnami ve třetím udaným způsobem dotýkají se křivky třídy třetí. Takových křivek je nekonečně mnoho, ježto čára složená ze tří bodů trojnásobných také je třídy třetí a má také oněch devět tečen. Tím spíše je tomu tak pro větší hodnoty n.

III.

10. Věty dokázané v předchozích odstavcích zůstávají ovšem v platnosti, když jednotlivé tečny v témže n-násobném bodu splývají; ony věty jen nabudou tvaru speciálnějšího. V případě $n = 2$ je příslušná speciální věta známa: jestliže tečny ve třech dvojnásobných bodech křivky stupně čtvrtého splynou, takže křivka má pak body úvratu, tři tečny v těchto bodech protínají se v jediném bodu.

To souhlasí s větou a) odst. 9., neboť tento bod je křivka prvé třídy, kterou nutno počítati dvojnásob, ježto také tečné v bodech úvratu jsou dvojnásobné. Je otázka, jak dalece se specialisují nalezené věty v případě obecném.

11. Budiž tedy K_{2n} křivka stupně $2n$-ho s třemi body n-násobnými s tečnami vesměs splývajícími. [4]) Tyto body vezmeme opět za vrcholy souřadného trojstranu; průsečík tečen v bodech (0, 0, 1), (1, 0, 0) vezmeme za bod jednotkový, takže rovnice těchto tečen jsou

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0.$$

[4]) Mimochodem budiž upozorněno, že bod n-násobný se splývajícími tečnami pro n sudé má vzhled bodu úvratu, pro n liché se vzhledem neliší od obyčejného bodu křivky.

Rovnice n-násobné tečny v bodu (0, 1, 0) má tvar

$$x_3 - \lambda x_1 = 0.$$

Rovnice křivky musí obsahovati x_1, x_2 ve stupni nejméně n-tém a koefficient při $x_3{}^n$ musí býti $(x_1 - x_2)^n$; podobně při $x_1{}^n$ je koefficient $(x_2 - x_3)^n$, při $x_2{}^n$ kofficient $(x_3 - \lambda x_1)^n$. I lze psáti rovnici této křivky

$$(x_1 - x_2)^n x_3{}^n + a(x_2 - x_3)^n x_1{}^n + b(x_3 - \lambda x_1)^n x_2{}^n + \ldots = 0,$$

kde mezi členy naznačenými vytečkováním se vyskytnou členy, jimiž se koefficienty při $x_1{}^n$, $x_2{}^n$, $x_3{}^n$ upraví dle požadavku právě vysloveného. Vzhledem k tomu nutno lišiti případ n sudého od případu n lichého.

a) n sudé. Členy n-ho stupně v x_1, x_2, pokud jsou v hořejší rovnici vypsány, jsou

$$(x_1 - x_2)^n x_3{}^n + a\, x_1{}^n x_3{}^n + b\, x_2{}^n x_3{}^n;$$

i musí v rovnici se vyskytovati ještě členy

$$- a\, x_1{}^n x_3{}^n - b\, x_2{}^n x_3{}^n,$$

aby koefficient při $x_3{}^n$ byl právě jen $(x_1 - x_2)^n$. Nyní jsou již vypsány tyto členy stupně n-ho v x_2, x_3:

$$a(x_2 - x_3)^n x_1{}^n + x_1{}^n x_3{}^n + b\lambda^n x_1{}^n x_2{}^n - a x_1{}^n x_3{}^n;$$

aby koefficient při $x_1{}^n$ byl právě jen $(x_2 - x_3)^n$, musí jednak $a = 1$, jednak se v rovnici musí ještě vyskytovati člen $- b\lambda^n x_1{}^n x_2{}^n$. Jsou tedy členy n-ho stupně v x_3, x_1 tyto — dosazujeme hned $a = 1$ —:

$$b(x_3 - \lambda x_1)^n x_2{}^n + x_2{}^n x_3{}^n + x_1{}^n x_2{}^n - b x_2{}^n x_3{}^n - b\lambda^n x_1{}^n x_2{}^n;$$

aby koefficient při $x_2{}^n$ opět byl $(x_3 - \lambda x_1)^n$, musí

$$b = 1, \quad b\lambda^n = 1; \text{ odtud } \lambda^n = 1$$

a rovnice křivky konečně zní

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^n x_3{}^n + (x_2 - x_3)^n x_1{}^n + (x_3 - \lambda x_1)^n x_2{}^n - x_1{}^n x_3{}^n \\ - x_2{}^n x_3{}^n - x_1{}^n x_2{}^n + x_1^2 x_2^2 x_3^2 f_{2n-6}(x_i) = 0\end{aligned} \tag{2}$$

s podmínkou

$$\lambda^n = 1.$$

Poslední člen v této rovnici je téhož druhu jako v rovnici (1) a obdrží se touž úvahou, jako se stalo tam. Ježto n je sudé a λ nutně reálné, má λ dvě možné hodnoty:

$$\lambda = \pm 1.$$

α) V případě $\lambda = 1$ rovnice zní

$$(x_1 - x_2)^n x_3^n + (x_2 - x_3)^n x_1^n + (x_3 - x_1)^n x_2^n - x_1^n x_3^n \\ - x_2^n x_3^n - x_1^n x_2^n + \ldots = 0$$

a n-násobné tečné v n-násobných bodech jsou

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 - x_1 = 0.$$

Tyto tři tečné protínají se v jednom bodě.

β) V případě $\lambda = -1$ rovnice zní

$$(x_1 - x_2)^n x_3^n + (x_2 - x_3)^n x_1^n + (x_3 + x_1)^n x_2^n - x_1^n x_3^n \\ - x_2^n x_3^n - x_1^n x_2^n + \ldots = 0$$

a n-násobné tečné v n-násobných bodech jsou

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 + x_1 = 0;$$

tyto tři přímky protnou osy souřadné ve třech bodech přímky

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Nabyli jsme výsledku: *Křivka stupně 2n-ho s třemi n-násobnými body se splynulými tečnami má pro n sudé tu vlastnost, že tyto tři tečny buď*

α) procházejí týmž bodem, nebo

β) protínají spojnice tří n-násobných bodů ve třech bodech přímky.

Větu β) lze vysvětliti ještě jinak. Je totiž na základě zvláštního případu Pascalovy věty, připomenutého v odst. 6., zřejmo, že v tomto případě *tři tečny n-násobné dotýkají se kuželosečky obsahující tři n-násobné body.* V tomto znění pak větu α) lze pokládati jen za zvláštní případ věty β); kuželosečka pokládaná za křivku druhé třídy přejde v případě α) ve dvojnásobnou čáru prvé třídy, t. j. bod.

b) n liché. Touž úvahou jako pro n sudé shledá se, že musí

$$\lambda^n = -1$$

a tedy

$$\lambda = -1$$

a že rovnice křivky má tvar

$$(x_1 - x_2)^n x_3^n - (x_2 - x_3)^n x_1^n - (x_3 + x_1)^n x_2^n - x_1^n x_3^n \\ + x_2^n x_3^n + x_1^n x_2^n + x_1^2 x_2^2 x_3^2 f_{2n-6}(x_i) = 0. \tag{3}$$

Tečny v bodech n-násobných jsou

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 + x_1 = 0;$$

tyto přímky protnou osy ve třech bodech přímky

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Odtud věta: *Křivka stupně 2n-ho s třemi n-násobnými body se splynulými tečnami má pro n liché tu vlastnost, že tyto tři tečny protínají spojnice tří n-násobných bodů ve třech bodech přímky, čili že se dotýkají kuželosečky obsahující tyto tři body.*

Oba případy, n sudého i n lichého, lze shrnouti v jedinou větu:

Křivka stupně 2n-ho s třemi n-násobnými body se splynulými tečnami má tu vlastnost, že tyto tři tečny dotýkají se křivky druhé třídy obsahující tyto tři body; pro n sudé může tato křivka přejíti ve dvojnásob počítanou čáru třídy první, t. j. bod.

12. Všimněme si blíže případu n sudého. Pro toto n křivky K_{2n} se rozpadají ve dva typy projektivně různé, jež jsou charakterisovány větami α), β) a jež nelze kollineací převésti jeden ve druhý. Sledujme to na jednotlivých příkladech. Pro $n = 2$ dostáváme křivku stupně čtvrtého; dle obecného vzorce je její rovnice v případě α):

$$(x_1 - x_2)^2 x_3^2 + (x_2 - x_3)^2 x_1^2 + (x_3 - x_1)^2 x_2^2 - x_1^2 x_3^2 - x_2^2 x_3^2 \\ - x_1^2 x_2^2 = 0$$

čili

$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 - 2x_1x_2x_3^2 - 2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2^2x_3 = 0$$

a tečné v bodech úvratu se ovšem protínají v jednom bodě, což je vlastnost známá a již dříve připomenutá.

V případě β) je rovnice křivky:

$$(x_1 - x_2)^2 x_3^2 + (x_2 - x_3)^2 x_1^2 + (x_3 + x_1)^2 x_2^2 - x_1^2 x_3^2 \; x_2^2 x_3^2 - \\ - x_1^2 x_2^2 = 0$$

čili

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 - 2x_1x_2x_3^2 - 2x_1^2x_2x_3 + 2x_1x_2^2x_3 = 0.$$

Avšak to je

$$(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3)^2 = 0.$$

V tomto případě tedy se křivka rozpadne ve dvě kuželosečky, jež ovšem vyhovují hořejší větě

Pro $n = 4$ dostáváme pro typ α) a β) rovnice

$$(x_1 - x_2)^4 x_3^4 + (x_2 - x_3)^4 x_1^4 + (x_1 \pm x_3)^4 x_2^4 - x_1^4 x_2^4 - x_1^4 x_3^4 - x_2^4 x_3^4 + x_1^2 x_2^2 x_3^2 (ax_1x_2 + bx_1x_3 + cx_2x_3) = 0$$

a zde tedy existují oba typy nerozpadající se. Neboť typ α) by se mohl rozpadnouti jen ve dvojnásobnou křivku stupně čtvrtého tvaru výše udaného a typ β) jen ve čtyřnásobnou kuželosečku, ale tomu brání arbitrární konstanty a, b, c.

Je tedy zřejmo, že pro $n > 2$ existují oba typy nerozpadajících se křivek, α) i β).

13. Srovnáváme-li věty nalezené v této kapitole s větami platícími v případě obecném, shledáváme: věta a) α) je specialisovaná věta o existenci křivky n-té třídy, jež se dotýká všech tečen; tato křivka zde se rozpadla na n-násobnou čáru třídy první.

Věta a) β) je specialisovaná věta o existenci křivky n-ho stupně, jež obsahuje průsečíky tečen v n-násobných bodech s jejich spojnicemi; tato křivka zde se rozpadla v n-násobnou přímku. Totéž platí o větě b). Avšak to jsou specialisace nejkrajnější; zmíněné věty lze specialisovati jinak, bezprostředněji.

Především věta odst. 6.: když splynou všechny tečny, splynou navzájem průsečíky těchto tečen se spojnicemi bodů n-násobných; křivka n-ho stupně, o níž je v oné větě řeč, měla by pak s každou touto spojnicí n splývajících bodů společných, t. j. tyto spojnice měly by s křivkou styk (n-1)ho řádu. Body, v nichž nastává takový styk, nazývají se hyperoskulačními. Lze pak skutečně sestrojiti rovnici křivky n-ho stupně, jež má hyperoskulační body na osách, kde je protínají přímky

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 \pm x_1 = 0.$$

Tato rovnice zní pro

a) n sudé:

$$(x_1 - x_2)^n + (x_2 - x_3)^n + (x_3 \pm x_1)^n - x_1^n - x_2^n - x_3^n + x_1x_2x_3 f_{n-3}(x_i) = 0,$$

b) n liché:

$$(x_1 - x_2)^n - (x_2 - x_3)^n + (x_3 + x_1)^n - x_1^n + x_2^n - x_3^n + x_1x_2x_3 f_{n-3}(x_i) = 0.$$

Je tedy těchto křivek pro $n \geqq 3$ nekonečně mnoho; přímka, o níž mluví věty $a)$ $\beta)$, $b)$ odst. 11. počítaná n-kráte, tvoří sama také jednu z těchto křivek.

Právě tak se nahlédne, že existují křivky n-té třídy obecně se nerozpadající, jež vzniknou specialisací křivek n-té třídy, o nichž mluví věty $a)$, $b)$ odst. 9. Pro ty jsou tečny v n-násobných bodech hyperoskulační, t. j. tečna z tohoto bodu ke křivce vedená vznikla splynutím n tečen. Rovnice těchto křivek zní v souřadnicích tečnových pro n sudé

$$(\xi_1 + \xi_2)^n + (\xi_2 + \xi_3)^n + (\xi_3 \mp \xi_1)^n - \xi_1^n - \xi_2^n - \xi_3^n \\ + \xi_1 \xi_2 \xi_3 f_{n-3}(\xi_i) = 0$$

a pro n liché:

$$(\xi_1 + \xi_2)^n + (\xi_2 + \xi_3)^n + (\xi_3 + \xi_1)^n - \xi_1^n - \xi_2^n - \xi_3^n \\ + \xi_1 \xi_2 \xi_3 f_{n-3}(\xi_i) = 0.$$

Těchto křivek je pro $n \geqq 3$ nekonečně mnoho; kuželosečka, po případě bod, o nichž mluví věty $\alpha)$, $\beta)$, lze pokládati, počítáme-li je v příslušné násobnosti, pro n sudé za jednu z těchto křivek.

Některé konstrukce ploch stupně druhého.

(Další serie [1]).

Podává dvor. rada prof. Dr. **Vinc. Jarolímek.**

1. *Sborcená plocha 2. stupně buď dána dvěma mimoběžkami A, B a třemi rovinami tečnými ϱ, σ, τ.*

Budiž společný průsečík daných rovin $(\varrho\,\sigma\,\tau) \equiv v$. Každá rovina položená površkou je tečnou rovinou plochy sborcené, tedy i roviny $(vA) \equiv \alpha$, $(vB) \equiv \beta$. K rovinám α, β, ϱ, σ, τ sestrojme tečný kužel 2. stupně $\varkappa$. Obecně určují řídící přímky A, B a kužel $\varkappa$, jehož přímka tvořící stále se dotýká, sborcenou plochu stupně čtvrtého, která však v našem případě, ježto přímky A, B jsou tečnami kužele $\varkappa$, se rozpadá v plochu stupně dru-

[1]) Viz Čas. mathem. roč. XLI, str. 371; XLII, 145; XLIV, 24; Jarolímek, Základové geometrie polohy, svazek II, str. 66—75; III, 102—105; IV, 35—44; Rozpravy II. třídy České Akademie věd, 1916.

hého φ^2 a ve dva svazky paprskové, které ležíce v rovinách α, β, mají středy své v průsečících $(\beta A) \equiv a$, $(\alpha B) \equiv b$. Každá tečná rovina kužele $\varkappa$ seče přímky A, B ve dvou bodech, jichž spojnice dá površku plochy φ^2.

Jsou-li však dvě dané roviny na př. ϱ, σ *imaginárné*, určené samodružnými rovinami elliptické involuce rovinové dané na ose M, bude průsečík rovin $(\varrho\sigma\tau) \equiv (M\tau) \equiv v$ a kužel $\varkappa$ o vrcholu v stanoven tečnými rovinami α, β, ϱ, σ, τ, kdež zase $(vA) \equiv \alpha$, $(vB) \equiv \beta$, avšak roviny ϱ, σ jsou imaginárně sdružené. V tomto případě protneme libovolnou rovinou μ, která vrcholu v neobsahuje, involuci rovinovou M v involuci paprskové $m \equiv (M\mu)$, jejíž samodružné paprsky $R \equiv \overline{\varrho\mu}$, $S \equiv \overline{\sigma\mu}$ jsou imaginárné, stanovíme průsečnice $\overline{\alpha\mu} \equiv A'$, $\overline{\beta\mu} \equiv B'$, $\overline{\tau\mu} \equiv T$, a sestrojíme v rovině μ kuželosečku K určenou tečnami A', B', T, R, S (z nichž R, S jsou sdruž. imag.) způsobem známým [1]). Kužel $\varkappa$ je nyní stanoven vrcholem v a křivkou K, a určuje s přímkami A, B plochu φ^2 jako nahoře.

Reciprokým způsobem řešíme úlohu duální: sestrojiti sborcenou plochu 2. stupně ze dvou přímek a tří bodů, z nichž dva mohou býti také pomyslné.

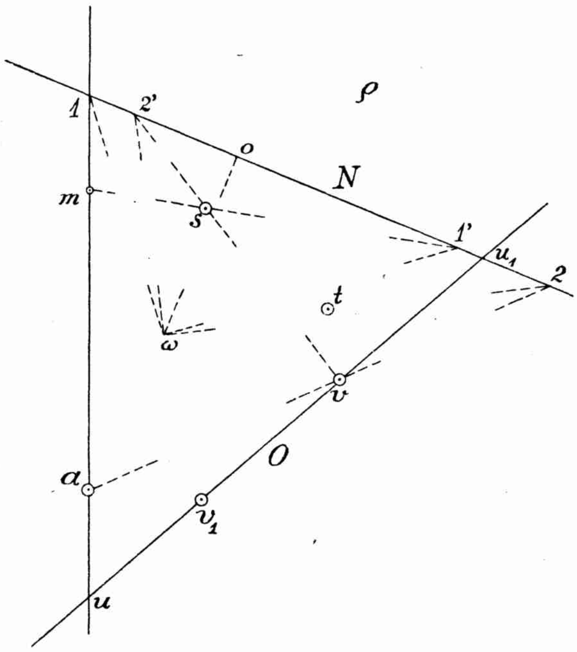
2. *Sborcená plocha 2. stupně daná jednou přímkou P, dvěma reálnými body (a, b) a čtyřmi imaginárnými body,* z nichž dva, c, d, spolu sdružené, dány jsou elliptickou involucí bodovou na přímce N, a dva sdružené e, f elliptickou involucí na přímce S. Přímky P, $\overline{ab}$, N, S buďtež mimoběžny.

Položme rovinu ϱ přímkou N a bodem a. Rovina ϱ protne žádanou plochu φ^2 v reálné kuželosečce K, která prochází bodem a, průsečíkem $(\varrho P) \equiv m$, a imaginárnými body c, d. Body a, m, c, d určují svazek kuželoseček Σ, v němž křivka K jest obsažena. Obdobně rovina $\sigma \equiv (bS)$ protne plochu φ^2 v reálné kuželosečce L, která prochází bodem b, průsečíkem $(\sigma P) \equiv n$, a imaginárnými body e, f. Body b, n, e, f určují svazek kuželoseček Σ'. Roviny ϱ, σ protínají se v přímce O, z níž svazky Σ, Σ' vytínají involuce bodové I, I' jichž společná družina x, y dá společné průsečíky křivek K, L. Jsou-li tyto sestrojeny, lze kuželosečku K konstruovati v rovině ϱ z bodů a, m, c, d, x, a

[1]) Jarolímek, Geometrie polohy II, str. 11., odst. 112. na pravo.

kuželosečku L v rovině σ z bodů b, n, e, f, x (K, L procházejí pak nutně i bodem y), načež řídícími útvary K, L, P je sborcená plocha φ^2 stanovena, ježto křivky K, L protínají se v bodech x, y, přímka pak P seče K, L v bodech m, resp. n.

Družinu xy sestrojíme takto: Budiž rovina ϱ nákresnou (obr. 1.), v ní body a, m, elliptická involuce bodová na přímce N daná středem svým o a potencí $= -\overline{o\omega}^2$ ($\overline{o\omega} \perp N$), a



Obr. 1.

přímka $O \equiv \overline{\varrho\sigma}$. Úlohou jest stanoviti involuci I, kterou z přímky O vytíná svazek kuželoseček Σ, určený reálnými body a, m a imaginárnými body samodružnými c, d involuce dané na přímce N. Přímky $\overline{am}$, $\overline{cd} \equiv N$, skládajíce jednu zvrhlou kuželosečku svazku Σ, vytínají z přímky O jednu družinu uu_1 involuce I. Abychom stanovili ještě druhou vv_1, zvolme kdekoli bod, na př. v na O, proložme body a, m, c, d, v kuželosečku R a stanovme její druhý průsečík v_1 s přímkou O. Kuželosečky R netřeba rýsovati.

Spojnice $\overline{am}$, $\overline{av}$ sekou přímku N v bodech 1, 2; ustanovme body s nimi (v involuci N) sdružené

$$1', 2' \; (\overline{\omega 1'} \perp \overline{1\omega}, \; \overline{\omega 2'} \perp \overline{\omega 2})$$

a spojme $\overline{1'm}$, $\overline{2'v}$; průsečík těchto spojnic s dá další bod kuželosečky R [1]); bod s je průmětem bodu a na křivku R z pólu poláry N. Opatřme si obdobně ještě jeden bod t křivky R, která je nyní určena pěti body reálnými a, m, s, t, v, tak že větou Paskalovou můžeme snadno určiti bod šestý v_1 na paprsku O procházejícím bodem v. Involuce I je stanovena družinami uu_1 vv_1. Týmž způsobem sestrojíme dvě družiny involuce I', kterou na téže přímce O vytvořuje kuželosečka L, dále pak společnou družinu x, y obou involucí I, I' konstrukcí známou [2]). Posléze sestrojíme v rovině ϱ kuželosečku K z reálných bodů a, m, x a sdružených imaginárných c, d [3]), dále kuželosečku L z reálných bodů b, n, x a sdružených imaginárných e, f. Jsou-li však body x, y imaginárné, sestrojíme K z reálného bodu a, a z imaginárných bodů c, d, x, y podvojně sdružených [4]) a obdobně L.

Křivkami K, L, jež protínají se v bodech x, y (reáln. č. imag.) a přímkou P, která křivky seče v bodech m, resp. n, je žádaná sborcená plocha φ^2 určena. Z každého bodu g. na přímce P zvoleného, jde (mimo P, $\overline{gx}$, $\overline{gy}$) jedna přímka, která protínajíc kuželosečky K, L, ploše φ^2 jako površka náleží.

3. *Sborcená plocha 2. stupně daná jednou přímkou P, dvěma reálnými α, β a čtyřmi imaginárnými tečnými rovinami,* z nichž dvě γ, δ, spolu sdružené, dány jsou elliptickou involucí

---

1) Známá to konstrukce kuželosečky ze tří bodů reálných a, m, v a dvou imaginárně sdružených c, d (Jarolímek, Geom. polohy II, str. 11).

2) Jar., Geom. polohy II, 14. Promítneme involuce I, I' na libovolnou kružnici U z kterékoli bodu jejího τ, stanovíme středy ε, φ involucí vzniklých na U a průsečíky ξ, η spojnice $\overline{\varepsilon\varphi}$ na U, a promítneme body ξ, η z bodu τ na přímku O do bodů x, y. Jsou-li však body ξ, η, tudíž také x, y imaginárné, určíme pól δ kružnice U k poláře $\overline{\varepsilon\varphi}$, vedeme jím dvě sečny ke kružnici U a průsečíky promítneme z bodu τ na přímku O; tím zjednány jsou dvě družiny elliptické involuce na přímce O, která určuje s dostatek body x, y jakožto imaginárné své body samodružné. Je to táž involuce harmonických pólů, kterou obě křivky K, L na O vytvořují.

3) G. P. II, 11. na levo.

4) G. P. II, 13.

rovinovou na ose N, a dvě sdružené ε, φ, elliptickou involucí rovinovou na ose S. Tato úloha duální řeší se celkem konstrukcí reciprokou, ale s jistou odchylkou, protože konstrukce, která v úloze 2. byla provedena *v rovině* ϱ, nelze vykonati v reciprokém *bodě* r.

Stanovme průsečík r roviny α s přímkou N. Z bodu r promítá se žádaná plocha φ^2 reálným kuželem $\varkappa$, který se dotýká roviny α, roviny $(rP) \equiv \mu$, a imaginárných rovin γ, δ. Roviny α, μ, γ, δ, jdoucí bodem r (jakožto tečné), určují osnovu kuželů Ω [1]). Obdobně z bodu $s \equiv (\beta S)$ promítá se plocha φ^2 reálným kuželem λ, který se dotýká roviny β, roviny $(sP) \equiv \nu$, a imaginárných rovin ε, φ. Roviny β, ν, ε, φ určují osnovu kuželů Ω'.

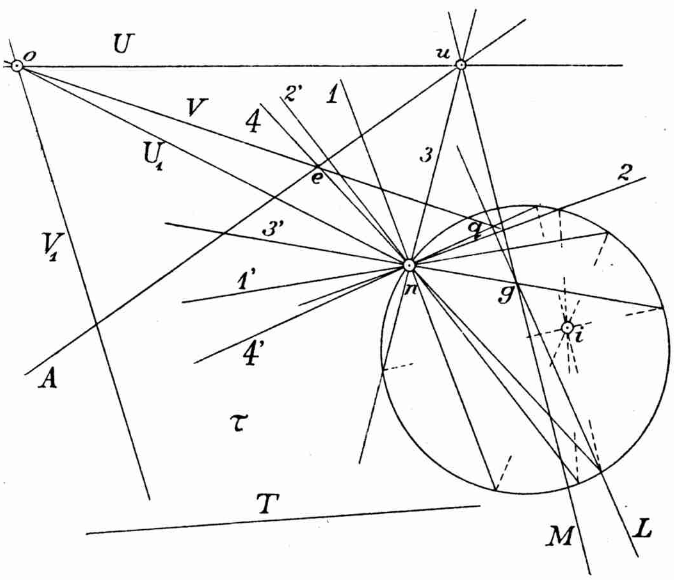
Spojnice bodů $\overline{rs} \equiv O$ promítá osnovy kuželů Ω, Ω' dvěma involucemi rovinovými I, I', jichž společná družina ξ, η dá společné tečné roviny kuželů $\varkappa$, λ. Jsou-li tyto roviny sestrojeny, lze kužel $\varkappa$ konstruovati z vrcholu r tak, aby se dotýkal rovin α, μ, γ, δ, ξ, a kužel λ z vrcholu s tak, aby se dotýkal rovin β, ν, ε, φ, ξ, načež řídícími útvary $\varkappa$, λ, P je sborcená plocha φ^2 stanovena, ježto $\varkappa$, λ dotýkají se rovin ξ, η (tedy i ve dvou bodech navzájem), přímka pak P dotýká se kuželů $\varkappa$, λ, ležíc v rovinách μ, ν.

Družinu ξ, η sestrojíme takto: Protněme roviny α, μ, γ, δ, určující osnovu kuželů Ω, libovolnou rovinou τ, která neobsahuje vrcholu r, v přímkách A, M a imag. C, D. Involuce $(\gamma\delta)$ buď dána dvěma družinami rovinovými na ose N, jichž průsečnice s rovinou τ (obr. 2., kdež rovina λ zvolena nákresnou) buďtež $11'$, $22'$; tyto procházejí průsečíkem $(N\tau) \equiv n$. Imaginárné samodružné paprsky involuce $11'$. $22'$ jsou přímky C, D. Protněme tuto involuci kružnicí jdoucí bodem n a stanovme střed i involuce vzniklé na kružnici. Rovina τ seče dále přímku O v bodě o a osnovu kuželů Ω v osnově kuželoseček Γ, určené základnicemi (tečnami) A, M, C, D. Involuci rovinovou I, kterou se osnova Γ promítá z přímky O, stanovíme involucí paprskovou J, ve které τ seče I; J promítá osnovu kuželoseček Γ z bodu o.

---

[1]) Osnovou kuželů jmenujeme soustavu kuželů 2. stupně dotýkajících se čtyř rovin, jež procházejí jedním bodem.

Průsečíky $(AM) \equiv u$, $(CD) \equiv n$ tvoří spolu jednu zvrhlou kuželosečku v osnově Γ; spojnice $\overline{ou} \equiv U$, $\overline{on} \equiv U_1$ dají tedy jednu družinu involuce J. Abychom stanovili ještě jednu VV_1, zvolme kdekoli přímku, na př. V vedenou bodem o, sestrojme ku přímkám A, M, C, D, V tečnou kuželosečku R a stanovme její druhou tečnu V_1 z bodu o. Avšak křivky R netřeba rýsovati. Průsečíky $(AM) \equiv u$, $(AV) \equiv e$ promítají se z bodu n paprsky 3, 4; ustanovme k nim paprsky sdružené (v involuci n)



Obr. 2.

3', 4' (pomocí středu i a kružnice), a průsečíky $(3'M) \equiv g$, $(4'V) \equiv q$; spojnice bodů $\overline{gq} \equiv L$ dá další tečnu kuželosečky R [1]). Opatřme si obdobně ještě jednu tečnu T křivky R, která je nyní určena pěti tečnami reálnými A, M, L, T, V, tak že větou Brianchonovou lze snadno sestrojiti šestou tečnu V_1 jdoucí bodem o, jenž leží na tečně V. Paprsková involuce J je stano-

---

[1]) Známá to konstrukce kuželosečky ze tří tečen reálných A, M, V a dvou imaginárně sdružených C, D (Jar. Geom. pol. II, 11, na pravo).

vena družinami UU_1, VV_1 a involuce rovinová I družinami (OU), (OU_1); (OV), (OV_1). Týmž způsobem sestrojíme dvě družiny involuce I', kterou na téže přímce O vytvořuje kužel λ, dále pak společnou družinu ξ, η obou involucí I, I' pomocí proniku s libovolnou přímkou Z, která s O je mimoběžna.

Posléze sestrojíme kužel $\varkappa$ z vrcholu r, reálných tečných rovin α, μ, ξ a sdruž. imag. γ, δ, dále kužel λ z vrcholu r, reálných tečných rovin β, ν, ξ a sdruž. imag. ε, φ. Jsou-li však roviny ξ, η imaginárné, sestrojíme $\varkappa$ z reálné tečné roviny α a imag. tečných rovin γ, δ, ξ, η podvojně sdružených (pomocí průseku s libovolnou rovinou), a obdobně kužel λ.

Kuželi $\varkappa$, λ, jež mají dvě společné roviny tečné ξ, η (reálné č. imag.) a přímkou P, která se dotýká obou kuželů, ležíc v rovinách μ a ν, je žádaná plocha φ^2 stanovena. Každým bodem přímky P lze proložiti ještě další dvě tečné roviny ke kuželům $\varkappa$, λ, jichž společná průsečnice, dotýkajíc se obou kuželů, ploše φ^2 jako površka náleží.

4. *Sborcená plocha 2. stupně buď dána třemi mimoběžkami, z nichž dvě jsou imaginárně sdružené.* Reálná buď A, imaginárné B, C buďtež stanoveny takto: na dané sborcené ploše 2. stupně ψ^2 jsou dány dvě dvojiny površek téže soustavy MM_1, NN_1, které se rozdělují; jimi je určena elliptická involuce I površek, jejíž imaginárné přímky samodružné buďtež B, C.

Libovolná rovina σ položená přímkou A protne plochu ψ^2 v kuželosečce K, která prochází průsečíky $(M\sigma) \equiv m$, $(M_1\sigma) \equiv m_1$, $(N\sigma) \equiv n$, $(N_1\sigma) \equiv n_1$. Družiny mm_1, nn_1 určují na K elliptickou involuci bodovou J, ve které rovina σ seče paprskovou involuci sborcenou I. Imaginárné samodružné body b, c involuce J leží na involuční ose O; tuto obdržíme, stanovíme-li průsečíky spojnic $(\overline{mn}, \overline{m_1n_1}) \equiv u$, $(\overline{mn_1}, \overline{m_1n}) \equiv v$ a spojíme $\overline{uv} \equiv O$. Tato reálná přímka O spojuje imaginárné body b, c, a seče přímku A v určitém bodě a. Přímka O tudíž protínajíc přímky A, B, C v bodech a, b, c, je površkou žádané plochy φ^2. Další dvě roviny proložené přímkou A dají obdobným způsobem površky Q, R, načež plocha φ^2 z reálných řídících přímek O, Q, R se sestrojí.

Poznámky o soustavě paraboloidů procházejících dvěma danýma mimoběžkama a o útvarech s nimi souvislých. *)

Podává **M. Lerch** v Brně.

Dvě přímky δ a δ_1, jichž rovnice buďte

$$\delta\,(z = c, \quad y = mx), \quad \text{resp. } \delta_1\,(z = -c, \quad y = -mx),$$

leží na nekonečném počtu ploch druhého stupně; jich rovnice jsou tvaru

$$a_{22}(y^2 - m^2x^2) + a_{33}(z^2 - c^2) + 2a_{13}\left(xz - \frac{c}{m}y\right) + 2a_{23}(yz - mcx) = 0. \tag{1}$$

Ze soustavy těchto ploch chceme uvažovati ony, které nemají středu, t. j. paraboloidy; vyčíslení diskriminantu kvadratické části dává pro ně podmínku

$$a_{22}\left[a_{13}^2 + m^2(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\right] = 0.$$

Tu bychom shledali, že výraz v hranaté závorce vymizí pro plochy válcové a jen hodnota $a_{22} = 0$ podává paraboloidy.

„*Paraboloidy procházející přímkami δ, δ_1 mají rovnici*

$$z^2 - c^2 + 2a\left(xz - \frac{c}{m}y\right) + 2b(yz - mcx) = 0,\text{“} \tag{2}$$

při čemž a, b jsou libovolné parametry.

Pro plochu necentrální

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \ldots + a_{44} = 0$$

lze rovnice osy psáti

$$a_{h1}A_1 + a_{h2}A_2 + a_{h3}A_3 = 0 \quad (h = 1, 2, 3),$$

---

*) A. Rasche, Untersuchung der Flächen zweiten Grades, welche durch zwei windschiefe Geraden gehen. (Diss. Paderborn, 1882.)

J. Klobouček, O komplexu os ploch 2. stupně, které procházejí dvěma reálnými mimoběžkami (Třicátá roční zpráva české vyšší reálky Karlínské, 1903—4).

— Methodické poznámky k theorii komplexu A^2 (Rozpravy české Akademie cís. Františka Josefa, roč. XIV., čís. 7; 1905).

V. Simandl, O určitém konoidu stupně pátého. (Časopis pro pěstov. m. a f., roč. XLII., 1913; str. 155.)

kde položeno

$$A_k = a_{k1}x + a_{k2}y + a_{k3}z + a_{k4}.$$

V případě plochy (2) jest

$$A_1 = az - bcm, \quad A_2 = bz - \frac{ac}{m}, \quad A_3 = z + ax + by,$$

a rovnice osy budou

$$A_3 = 0, \quad aA_1 + bA_2 = 0$$

t. j. po dosazení hodnot

$$z + ax + by = 0, \quad z = \frac{abc(1 + m^2)}{(a^2 + b^2)m}. \tag{3}$$

Elegantnější a zároveň pro vystižení geometrického významu vhodnější jsou rovnice, které vzniknou zavedením parametrů ω a λ

$$a = -\frac{\cos\omega}{2\lambda}, \quad b = -\frac{\sin\omega}{2\lambda},$$

při čemž zároveň zavedeme úhel α na místě konstanty

$$m = \operatorname{tg}\alpha.$$

Pak máme ∞^2 paraboloidů

$$\begin{aligned} \lambda(z^2 - c^2) = z(x\cos\omega + y\sin\omega) \\ - c(y\operatorname{cotg}\alpha\cos\omega + x\operatorname{tg}\alpha\sin\omega) \end{aligned} \tag{2*}$$

a jich osy

$$z = \frac{c\sin 2\omega}{\sin 2\alpha}, \quad x\cos\omega + y\sin\omega = 2\lambda z. \tag{3*}$$

1.

Uvažujme nejprve tyto osy, jež patrně tvoří kongruenci. Zaveďme pro zkrácení veličinu stálou

$$a = \frac{c}{\sin 2\alpha}, \quad c = a\sin 2\alpha,$$

která má jiný význam než měla táž litera předešle, a na místě parametru λ zaveďme

$$h = 2a\lambda\sin 2\omega = 2\lambda\frac{c\sin 2\omega}{\sin 2\alpha}.$$

Rovnice osy paraboloidu pak znějí

$$z = a\sin 2\omega, \quad x\cos\omega + y\sin\omega = h, \tag{4}$$

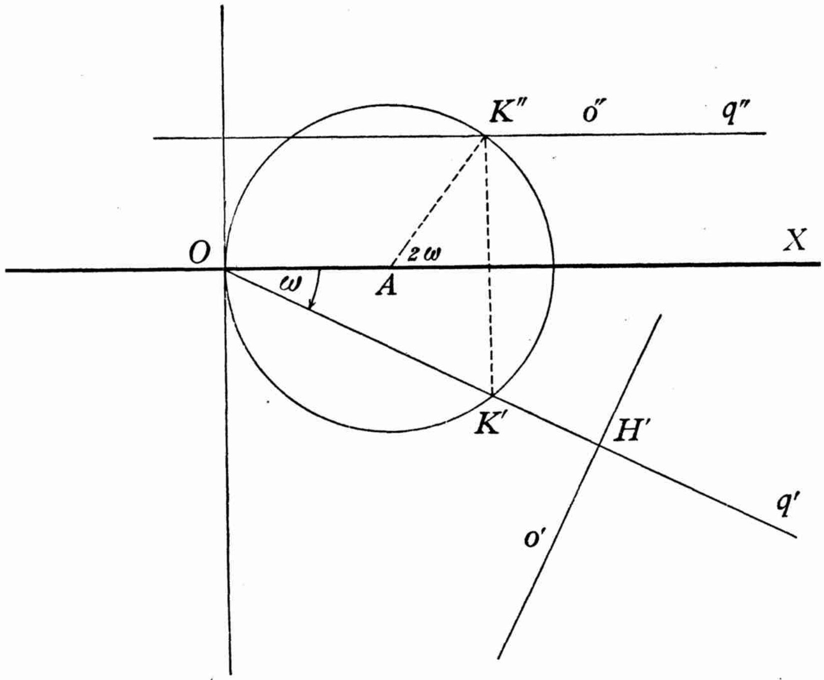
při čemž h, ω jsou parametry vespolek neodvislé.

Přímky (4) jsou charakterisovány podmínkami, že jsou rovnoběžny s rovinou Oxy a že kolmo protínají přímku

$$z = a \sin 2\omega, \quad x = h \cos \omega, \quad y = h \sin \omega \tag{5}$$

při proměnném h, stálém ω. Tyto přímky (5) tvoří konoid Plückerův

$$z(x^2 + y^2) = 2axy, \tag{5*}$$



jehož konstrukce právě na základě rovnic (5) je velmi jednoducha.

Vedeme kruh se středem A, jehož poloměr $OA = a$. Rámě AK'' úhlu $XAK'' = 2\omega$ stanoví na kruhu bod K'', kdežto rámě OK' úhlu $XOK' = \omega$ v půdorysně stanoví bod K', a je právě půdorysem přímky (5), kterou značíme q.

Body K' a K'' jsou průměty určitého bodu K na přímce q, jehož souřadnice jsou

$$x = 2a \cos^2 \omega, \quad y = 2a \cos \omega \sin \omega,$$
$$z = a \sin 2\omega = y.$$

Bod K tedy opisuje ellipsu, průseč roviny $y = z$ s konoidem, jejíž oba průměty splývají s kruhem (A, a).

Osa (4) — kterou značíme o — má průměty $o'' \equiv q''$, $o' \perp q'$ a její průsek H s přímkou konoidu určuje parametr $h = OH'$.

Z konstrukce samé vyplývá, že každým bodem procházejí dvě osy a na každé rovině leží jedna osa kongruence (4).

Rovnice (4) stanoví přímku o jako průseč dvou rovin a snadno z nich odvodíme její souřadnice $p, q, r, \tilde{\omega}, \varkappa, \varrho$; *) roviny mají souřadnice

$$u_1 = -\frac{\cos\omega}{h}, \quad v_1 = -\frac{\sin\omega}{h}, \quad w_1 = 0,$$
$$u_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad w_2 = -\frac{1}{a\sin 2\omega},$$

takže, značí-li σ určitý faktor úměrnostní, bude

$$\sigma p = \frac{1}{2ah\cos\omega}, \quad \sigma q = \frac{-1}{2ah\sin\omega}, \quad r = 0,$$
$$\sigma\tilde{\omega} = \frac{\cos\omega}{h}, \quad \sigma\varkappa = \frac{\sin\omega}{h}, \quad \sigma\varrho = \frac{-1}{a\sin 2\omega}.$$

Eliminací σ, h, ω vycházejí odtud rovnice

$$r = 0, \quad p\tilde{\omega} + q\varkappa = 0 \tag{4a}$$

a

$$\frac{\tilde{\omega}}{p} - \frac{\varkappa}{q} = 2a. \tag{4b}$$

Z těch jest u (4^a) druhá důsledkem první $r = 0$ a vztahu základního platného pro každou přímku $p\tilde{\omega} + q\varkappa + r\varrho = 0$, a rovnice ($4^b$) charakterisuje kvadratický komplex složený z přímek, jež kolmo protínají přímky konoidu Plückerova (5*).

„Orthogonální sečny přímek Plückerova konoidu vedené daným bodem tvoří kužel 2. stupně.

Tytéž sečny ležící v dané rovině obalují kuželosečku.“

Leží-li bod na konoidu, rozpadá se kužel ve dvě roviny, z nichž jedna stojí kolmo na povrchové přímce konoidu obsahu-

---

*) Označení totéž jako v knize Clebsch-Lindemannové (2. díl), s odchylkou, že zde užito litery $\tilde{\omega}$ místo tam zavedeného π.

jící vrchol, a druhá má rovnici

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} - \frac{z}{z_0} = 1, \tag{6}$$

při čemž $x_0\, y_0\, z_0$ značí souřadnice bodu na konoidu, z něhož vedeme kolmé sečny ku přímkám tohoto.

Nazveme tyto roviny singulárními rovinami komplexu (4^b).

Souřadnice roviny (6)

$$u = -\frac{1}{x_0},\quad v = -\frac{1}{y_0},\quad w = \frac{1}{z_0}$$

hoví následkem vztahu (5*) rovnici

$$2\,a\,uvw = u^2 + v^2, \tag{6^a}$$

t. j. obalová plocha singulárních rovin komplexu

$$q\tilde{\omega} - p\varkappa = 2\,a\,pq$$

je třetí třídy.

Dosadíme-li do (6) za $x_0\, y_0\, z_0$ hodnoty (5), obdržíme pro obalovou plochu singulárních rovin vyjádření parametrické

$$x = h \cos 2\,\omega,\quad y = -h \cos 2\,\omega \sin \omega,\quad z = -a \sin 2\,\omega\,;$$

píšeme-li k za $h \cos 2\,\omega$, shledáváme úplnou shodu s rovnicemi (5) pro parametr $-\omega$.

„*Rovina singulární* (6) *příslušná k bodu $x_0 y_0 z_0$ na přímce ω obsahuje přímku $-\omega$ a dotýká se konoidu v bodě, jehož parametry jsou $-\omega$, $h \cos 2\,\omega$.*“

Rovnice (6^a) je skutečně tangenciální rovnice konoidu (5).

Singulární rovina a singulární bod jsou útvary reciproké. Přímky komplexu (4^b) ležící v sing. rovině procházejí příslušným sing. bodem.

Poněvadž každá tečná rovina konoidu splývá se singulární rovinou příslušnou k určitému bodu, nacházíme větu: vedeme-li všemi body některé ellipsy na Plückerově konoidu přímky, které leží v její rovině a stojí kolmo na příslušných přímkách konoidu, tvoří vedené přímky svazek.

Buď S bod v prostoru mimo konoid, S_0 bod na konoidu ležící s předešlým na rovnoběžce s Oz; kolmice SP spuštěná na přímku konoidu p má tutéž patu P jako kolmice na přímku p spuštěná z bodu S_0; paty P naplňují tedy ellipsu (její půdorys je kruh), ve které konoid protíná sing. rovinu příslušnou k bodu S_0. Tato ellipsa jest řídící křivka kužele s vrcholem S, který sestává z přímek komplexu (4^b) tímto bodem vedených.

2.

Obraťme se ke kongruenci (4). Osy o protínající danou přímku rovnoběžnou s osou konoidu $x = x_0$, $y = y_0$ hoví podmínce

$$x_0 \cos \omega + y_0 \sin \omega = h$$

a tedy jsou dány rovnicemi

$$z = a \sin 2\omega, \quad (x - x_0) \cos \omega + (y - y_0) \sin \omega = 0.$$

Vyloučením ω vychází

$$z[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + 2a(x - x_0)(y - y_0) = 0; \quad (7)$$

tedy

„přímky kongruence (4) se řadí v Plückerovy konoidy vespolek shodné a rovnoběžné,"

jak bylo očekávati, ježto přímka zůstává v kongruenci, pošine-li se rovnoběžně v téže rovině horizontální.

Znamenejme S_0 bod ($x_0\, y_0\, z_0$) společný konoidu (5*) a ose konoidu (7), jeho průměty S'_0 a S''_0; hledáme průseč konoidů (5*) a (7). Přímka o konoidu (7) protíná dvě přímky konoidu (5*), které znamenejme p a p_1 a které odpovídají parametrům ω a $\frac{1}{2}\pi - \omega$. Průsek P přímek o, p na sobě kolmých je současně pata kolmice spuštěné z bodu S_0 na přímku p; souhrn bodů P jest ellipsa (P), v níž sing. rovina (6) příslušná k bodu S_0 seče základní konoid (5*). Půdorys této ellipsy je kruh nad průměrem OS'_0.

Oba konoidy mají společné útvary v nekonečnu t. j. tři přímky

$$z(x^2 + y^2) = 0,$$

a ellipsu (P); zbývající část průseče těchto ploch je čára (P_1), geometrické místo průseku P_1 přímek o a p_1. Čára ta je stupně 4. a snadno shledáme z konstrukce na základě promětných svazků, že půdorys její jest rovnostranná hyperbola mající délku OS'_0 za průměr, jejíž asymptoty jsou rovnoběžny s osama souřadnic Ox, Oy.

Určeme ještě osy o, které sekou libovolnou přímku

$$x = \alpha z + p,\quad y = \beta z + q, \tag{g}$$

jež není kolma na Oz.

Spojením rovnic (g) a (4) vychází

$$h = (\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega)\, a \sin 2\omega + p \cos \omega + q \sin \omega,$$

kterážto podmínka charakterisuje hledané přímky; dosazením této hodnoty h do (4) vychází na místě druhé rovnice (4)

$$(x - p) \cos \omega + (y - q) \sin \omega = (\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega)\, z,$$

při čemž jsme užili též první rovnice (4). Máme tak rovnice hledaných přímek ve tvaru

$$(x - p - \alpha z) \cos \omega + (y - q - \beta z) \sin \omega = 0,$$
$$z = a \sin 2\omega;$$

eliminace ω podá rovnici plochy, již tyto přímky tvoří, a sice

$$\begin{aligned} &z[(x - p - \alpha z)^2 + (y - q - \beta z)^2] \\ &+ 2a(x - p - \alpha z)(y - q - \beta z) = 0; \end{aligned} \tag{8}$$

plocha ta je konoid stupně třetího, ovšem kosý.

3.

Vraťme se k paraboloidům (2*), abychom vyšetřili jejich vrcholy, tedy průsečíky jich s osami (3*). K vůli pohodlí znamenejme na okamžik

$$x = \xi \cos \alpha,\quad y = \eta \sin \alpha;$$

pak nám rovnice (2*) a (3*) dají

$$\xi \sin \alpha \sin \omega + \eta \cos \alpha \cos \omega = \frac{c^2 + z^2}{c} \lambda,$$

$$\xi \cos \alpha \cos \omega + \eta \sin \alpha \sin \omega = 2\lambda z,$$

mimo to plyne z první rovnice (3*) — s použitím hodnoty $c = a \sin 2\alpha$ —

$$\frac{z + c}{2a} = \sin(\omega + \alpha) \cos(\omega - \alpha),$$

$$\frac{z - c}{2a} = \cos(\omega + \alpha) \sin(\omega - \alpha).$$

Z posledních čtyř rovnic vychází

$$\eta + \xi = \frac{4a\lambda}{\sin 2\alpha} \sin^2(\omega + \alpha) \cos(\omega - \alpha),$$

$$\eta - \xi = \frac{4a\lambda}{\sin 2\alpha} \sin^2(\omega - \alpha) \cos(\omega + \alpha),$$

a odtud pro souřadnice vrcholu

$$x = \frac{a\lambda}{\sin\alpha} [\sin^2(\omega + \alpha) \cos(\omega - \alpha) - \sin^2(\omega - \alpha) \cos(\omega + \alpha)],$$

$$y = \frac{a\lambda}{\cos\alpha} [\sin^2(\omega + \alpha) \cos(\omega - \alpha) + \sin^2(\omega - \alpha) \cos(\omega + \alpha)],$$

kteréžto výrazy lze též psáti

$$x = 2a\lambda \sin\omega\, [1 + \cos(\omega + \alpha) \cos(\omega - \alpha)],$$
$$y = 2a\lambda \cos\omega\, [1 - \cos(\omega + \alpha) \cos(\omega - \alpha)],$$

aneb s připojením souřadnice třetí

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a\lambda \sin\omega (\cos^2\omega + \cos^2\alpha), \\ y &= 2a\lambda \cos\omega (\sin^2\omega + \sin^2\alpha), \\ z &= a \sin 2\omega. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Tyto rovnice poskytují parametrické vyjádření geometrického místa vrcholů V paraboloidů (2*) procházejících přímkami δ, δ_1; tyto body V tvoří plochu, která očividně je přímková, a sice přímý konoid s řídící přímkou Oz jako dvojnou, který je stupně 5. a má úběžnou přímku řídící roviny Oxy za trojnásobnou přímku, a přímky δ, δ_1 za dvojnásobné. *)

Rovnoběžným osám (3*) naší soustavy paraboloidů přísluší stálé ω, a vrcholy paraboloidů leží tedy na téže povrchové přímce konoidu (V).

4.

Buď s libovolná sečna přímek δ, δ_1; přímka q na Plückerově konoidu (5), která má půdorys q' rovnoběžný s půdorysem s' přímky s, je tímto (viz hoř. konstrukci) určena, a její nárys poskytuje současně nárys všech os o naší kongruence ($o'' \equiv q''$),

*) V. Simandl, l. c.

které kolmo sekou přímku q. Jedna z těchto přímek o seče též přímku s, a sice jest určena nárysem průsečného bodu V, jenž je průsečíkem přímek známých o'', s''; uvažovaná přímka o je kolmá na promítající rovině přímky s a je tedy její kolmou sečnou. Přímka s protíná kolmo osu paraboloidu a seče dvě jeho přímky δ, δ_1; ukážeme, že přímka ta (s) leží na paraboloidu naší soustavy určeném osou o; tím bude zjištěno, že s je vrcholovou přímkou paraboloidu, vrchol jeho V je průsek přímek o, s. Druhá vrcholová přímka s_1 téhož paraboloidu leží v rovině kolmé na Oz a má s přímkou s společný půdorys, jsouc kolma na o ($s''_1 \equiv o''$, $s'_1 \equiv s' \perp o'$).

Uvažujme nejprve přímky s_1; jich souhrn tvoří kongruenci

$$z = a \sin 2\omega, \quad x \sin \omega - y \cos \omega = h', \tag{10}$$

jež vznikne z kongruence (4) substitucí $\omega - \frac{1}{2}\pi$ za ω a změnou znamení při a.

Vyjádří-li se, že tato přímka leží na paraboloidu (2*), obdrží se

$$h' = 2\lambda a \sin(\omega + \alpha) \sin(\omega - \alpha). \tag{10a}$$

Pro přímku s máme stejný půdorys, pro její průseky s přímkama δ, δ_1 obdržíme souřadnice z rovnic

$$x_0 \sin(\omega - \alpha) = h' \cos\alpha, \quad x_1 \sin(\omega + \alpha) = h' \cos\alpha,$$

jež vyjdou z rovnice půdorysu

$$x \sin\omega - y \cos\omega = h'$$

dosazením hodnot $y = \pm x \operatorname{tg}\alpha$; hledané souřadnice jsou tedy po dosazení hodnoty (10a)

$$z_0 = c, \quad x_0 = 2\lambda a \cos\alpha \sin(\omega + \alpha),$$
$$z_1 = -c, \quad x_1 = 2\lambda a \cos\alpha \sin(\omega - \alpha);$$

rovnice vrcholové přímky s tedy jsou

$$\left.\begin{aligned} x \sin\omega - y \cos\omega &= 2\lambda a \sin(\omega + \alpha) \sin(\omega - \alpha), \\ x &= \lambda z \cos\omega + 2a\lambda \cos^2\alpha \sin\omega, \\ y &= \lambda z \sin\omega + 2a\lambda \sin^2\alpha \cos\omega. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Přímým dosazením do rovnice (2*) shledáváme, že tato přímka leží na našem paraboloidu (ω, λ), čímž důkaz proveden.

Přímky vrcholové s našich paraboloidů sekou základní přímky δ, δ_1, a tvoří tedy lineární kongruenci.

Z (11) plyne dále geometrický význam parametru λ

$$\lambda = \operatorname{tg}(s, z),$$

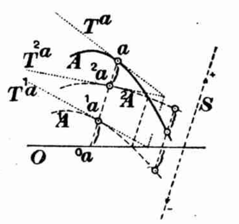
jako tangenty úhlu, jejž přímka s svírá s osou Oz; „*veličina* λ *rovná se kotangentě úhlu vrcholových přímek* s, s_1“.

(Pokračování.)

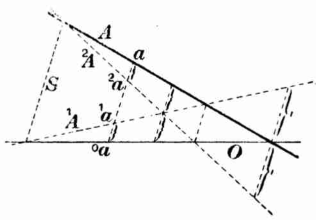
O kuželosečkových plochách translačních.

Napsal Dr. **Frant. Kadeřávek.**

Účelem tohoto článku jest podání jednoduchých důkazů geometrických a vysvětlení známých povětšině vět o translačních plochách kuželosečkových. K cíli tomu odvozeny úvodem některé jednoduché věty pomocné.



Obr. 1.



Obr. 2.

Buďtež dány dvě křivky (obr. 1.) ^1A, ^2A, přímka O a směr S. Sestrojme z křivek ^1A, ^2A novou křivku A způsobem následním: Veďme libovolnou přímku rovnoběžnou s S, vyhledejme její průsečíky ^0a, ^1a, ^2a, s přímkou O a s křivkami ^1A, ^2A a učiňme $\overline{^0aa} = \overline{^0a\,^1a} + \overline{^0a\,^2a}$. Bod a náleží křivce A, již nazývejme krátce *součet* křivek ^1A, ^2A směrem S při základně O; $A \equiv (^1A + {}^2A)_{S,\,O}$. Z obr. 2. patrno, že

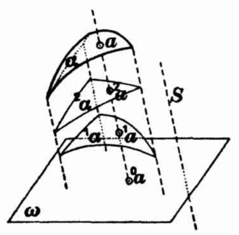
1. *součet dvou přímek* $^1A\,^2A$ *směrem* S *a při základně* O *jest opět přímka* A; $(^1A + {}^2A)_{S,\,O} \equiv A$.

Vytkneme-li v obr. 1. k paprsku $\overline{^0aa}$ nekonečně blízký a rovnoběžný s S a označíme-li jeho průsečíky s O, ^1A, ^2A, A

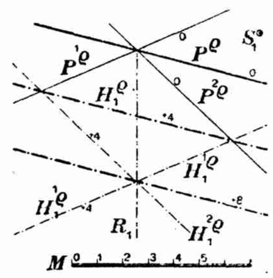
písmenami ${}^0a'$, ${}^1a'$, ${}^2a'$, a', tu bude předně $\overline{{}^0a'a'} = \overline{{}^0a'{}^1a'} + \overline{{}^0a'{}^2a'}$, dále $\overline{{}^1a{}^1a'} \equiv T^{1a}$ tečna křivky ${}^1A$ v bodě ${}^1a$, $\overline{{}^2a{}^2a'} \equiv T^{2a}$

2. tečna křivky ${}^2A$ v bodě ${}^2a$ a *součet* $T^a \equiv (T^{1a} + T^{2a})_{S,\,O} \equiv \overline{aa'}$ *tečna součtu* $A \equiv ({}^1A + {}^2A)_{S,\,O}$.

Rozšíříme-li pojem uvedený sečítání na prostor, nazveme plochu α (obr. 3.) *součtem* ploch ${}^1\alpha$ ${}^2\alpha$ směrem S a při základní rovině ω, — $\alpha \equiv ({}^1\alpha + {}^2\alpha)_{S,\,\omega}$ —, je-li plocha α geom místem bodů a, jež stanovíme, když provedeme libovolný paprsek rovnoběžný k S, vyhledáme jeho průsečíky ${}^0a$, ${}^1a$, ${}^2a$ s ω, ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ a učiníme $\overline{{}^0aa} = \overline{{}^0a{}^1a} + \overline{{}^0a{}^2a}$. Ježto součet dvou přímek jest vždy přímka,



Obr. 3.



Obr. 4

3. musí *součet dvou rovin* obsahovati ve všech se směrem sčítání S rovnoběžných rovinách přímky, tedy *musí býti rovinou.* V obr. 4. zvolena základní rovina ω za průmětnu při promítání rovnoběžném se směrem S sčítání a určeny dvě roviny ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ stopami $P^{1\varrho}$, $P^{2\varrho}$ a hlavními přímkami $H^{1\varrho}$, $H^{2\varrho}$ výměry rovné 4. jednotkám měřítka M. Spojnice průsečíků $(P^{1\varrho}, H^{2\varrho})$ a $(P^{2\varrho}, H^{1\varrho})$ je průmět hlavní přímky H^ϱ součtu $\varrho \equiv ({}^1\varrho + {}^2\varrho)_{S,\,\omega}$ výměry 4; stopa P^ϱ roviny ϱ jde průsečíkem stop rovnoběžně k H^ϱ a tvoří s těmito a průmětem R_1 průsečnice rovin ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ čtveřinu harmonickou.

Určeme v sečítání, daném základní rovinou ω a směrem S součet ϱ rovin ${}^1\varrho$ a ${}^2\varrho$ a vytkněme válec $\varkappa$ druhého stupně, rovnoběžný se směrem S. Označme průsečnice válce $\varkappa$ s ω, ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ a ϱ písmenami ${}^0A$, ${}^1A$, ${}^2A$., A. Jest patrno, že $A \equiv ({}^1A + {}^2A)_{S\omega}$. Promítneme-li celek do roviny kolmé k ω a ${}^1\varrho$

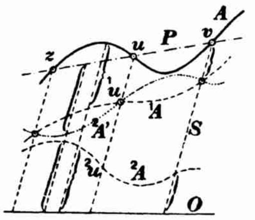
orthogonálně, promítnou se křivky ${}^0A$, ${}^1A$ do přímek O_1, ${}^1A_1$ křivky ${}^2A$, A do kuželoseček ${}^2A_1$, A_1; $A_1 \equiv ({}^1A_1 + {}^2A_1)_{S_1, O_1}$.

4. *Součet přímky s kuželosečkou směrem S a při základně O dá kuželosečku.*

Zvolíme-li místo válce stupně druhého válec n-tého stupně, přesvědčíme se, že

5. *součet přímky s křivkou n-tého stupně jest opět křivka n-tého stupně.*

Zavedeme-li v uvedené úvaze průmětnu kolmou pouze k rovině ω, tu jedině křivka ${}^0A$ promítne se orthogonálně do přímky O_1, křivky ${}^1A$, ${}^2A$, A dají průměty ${}^1A_1$, ${}^2A_1$, A_1, mající společné tečny, rovnoběžné s S_1. Z toho patrno, že



Obr. 5.

6. *součet dvou kuželoseček téhož druhu, majících společné tečny rovnoběžné k směru sčítání, jest opět kuželosečka téhož druhu a týchž tečen se dotýkající.*

Na základě této věty možno tvrditi, že

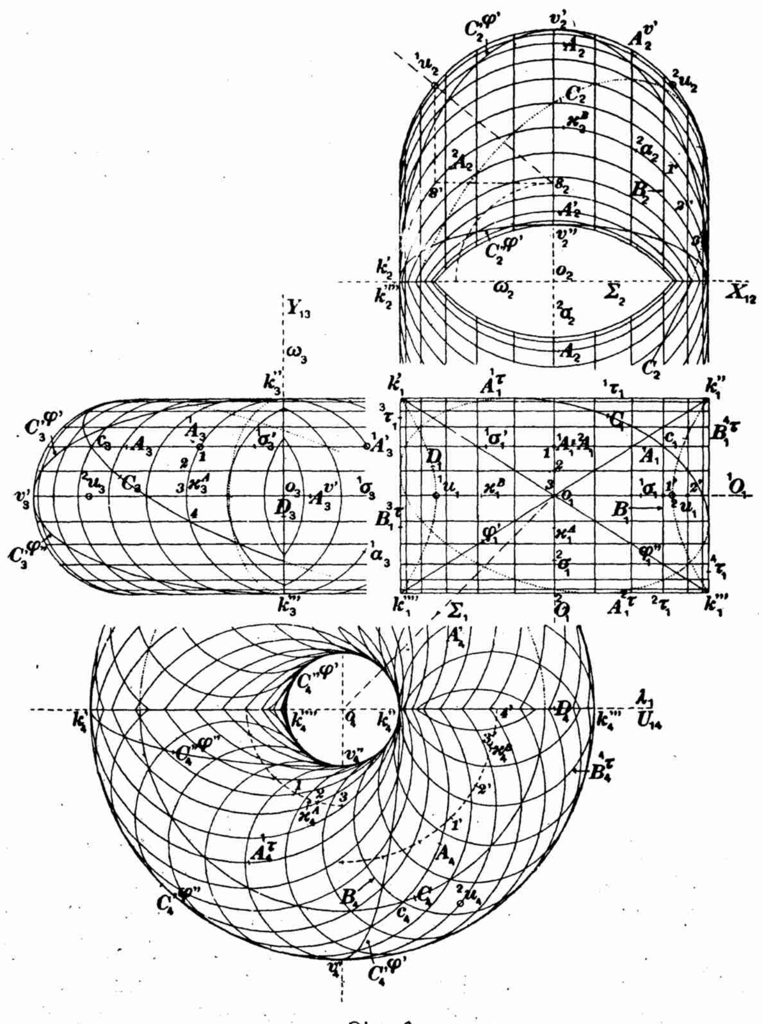
7. *součet směrem S a při základní rovině ω roviny a plochy stupně druhého jest plocha druhého stupně;*

8. *součet dvou ploch 2^0, majících společný tečný válec rovnoběžný se směrem sčítání, jest opět plocha stupně druhého* téhož válce se dotýkající.

Vraťme se k obr. 3. Plochy ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$, α v soumezí bodů ${}^1a$, ${}^2a$, a lze nahraditi tečnými rovinami τ^{1a}, τ^{2a}, τ^{a}.

9. Snadno bychom dovodili, že $\tau^a \equiv (\tau^{1a} + \tau^{2a})_{S, \omega}$.

Jsou-li dány dvě křivky ${}^1A$, ${}^2A$ stupně n a m-tého, tu stupeň součtu $A \equiv ({}^1A + {}^2A)_{O, S}$ (obr. 5) určíme takto: Vytkněme libovolnou přímku P, stanovme ${}^2A' \equiv (P - {}^2A)_{S, O}$. ${}^2A$ jest křivka stupně m-tého a protíná křivku ${}^1A$ n-tého stupně v $n\,m$ bodech; každý tento průsečík vede však k bodu součtu A položenému v přímce P. Protíná tedy přímka P křivku A v $n\,m$ bodech.



Obr. 6.

10. *Součet dvou křivek stupňů n a m jest obecně křivka stupně $n\,m$-tého.*

11. *Součet dvou ploch stupně n a m-tého jest obecně plocha n m-tého stupně.*

Jest proto součet dvou libovolně k směru sčítání umístěných ploch 2^0 *plocha stupně čtvrtého*; z těchto ploch součtových povšimněme si v prvé řadě oné, která vznikne sečtením dvou rotačních válců ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$, jejichž osy ${}^1O \perp {}^2O$ se protínají v bodě o. Směr sčítání S buď kolmý k základní rovině $\omega \equiv ({}^1O{}^2O)$, již zároveň zvolme za prvou průmětnu (obr. 6.).

1*a*. Plocha $\alpha \equiv ({}^1\alpha + {}^2\alpha)_{S,\omega}$ jest *souměrna k rovinám* ω, ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ *a středově souměrna dle bodu* o, poněvadž plochy ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ jsou vzhledem k týmž rovinám orthogonálně souměrny (obr. 6.).

Rovinou ${}^1\sigma' \parallel {}^1\sigma$ protat jest válec ${}^1\alpha$ ve dvou přímkách ${}^1A \parallel {}^1A' \parallel \omega$; válec ${}^2\alpha$ v kružnici ${}^2A$, součet těchto útvarů jsou dvě kružnice A, A' $\overline{\overline{\frown}}$ ${}^2A$ plochy α. Podél přímky ${}^1A$ dotýká se válce ${}^1\alpha$ rovina; její součet s válcem ${}^2\alpha$ dává válec, který se plochy α podél kružnice A dotýká. Podobně v rovinách rovnoběžných s ${}^2\sigma$ najdeme kružnice B plochy α. Z toho patrno:

2*a*. Na ploše α jsou dvě soustavy kružnic shodných; položených v rovinách rovnoběžných s ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$; v každé z těchto rovin leží dvě kružnice téže soustavy, podél nich dotýkají se plochy α válce, jejichž povrchové přímky jsou tečnami kružnic druhé soustavy.

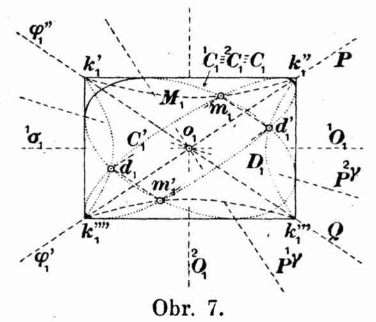
3*a*. V rovinách ${}^1\tau$, ${}^2\tau$, ${}^3\tau$, ${}^4\tau$ ležící dvojiny kružnic spadají v kružnici jedinou; $A^{1\tau}$, $A^{2\tau}$, $B^{3\tau}$, $B^{4\tau}$. Podél celých těchto kružnic dotýkají se roviny ${}^1\tau$, ${}^2\tau$, ${}^3\tau$, ${}^4\tau$ plochy α.

4*a*. Plochu α možno vytvořiti též *translací*, poněvadž obsahuje dva systemy křivek shodných v rovinách rovnoběžných.

Ellipsu, vepsanou do obdélníkového obrysu $k_1'k_1''k_1'''k_1''''$ plochy α (obr. 7.) lze pokládati za průmět ${}^1C_1$ křivky ${}^1C$ válce ${}^1\alpha$ (o ose ${}^1O$), položené v rovině ${}^1\gamma$ o stopě $P^1\gamma$; touž křivku lze však pokládati za průmět ${}^2C_1$ povrchové křivky ${}^2C$ válce ${}^2\alpha$ (o ose ${}^2O$), položené v rovině ${}^2\gamma$, jejíž stopa je $P^2\gamma$. Křivky ${}^1C$, ${}^2C$ leží na témž válci ve směru sčítaní $S \perp \omega \equiv ({}^1O, {}^2O)$, jest proto součet jejich ellipsa C plochy α, položená v rovině, jejíž stopa jde průsečíkem stop $P^1\gamma$, $P^2\gamma$, to jest bodem o.

5*a*. Na ploše α jsou položeny ellipsy C, a to v určitých rovinách, jdoucích středem o.

6*a*. Vytkneme-li libovolnou kružnici A plochy α (obr. 6.) a udělíme-li jí rovnoměrný pohyb po ploše, bude se její střed $s^A \equiv 1$ kol osy ${}^1O$ rovnoměrně otáčeti; půdorys A_1 pak bude kývati okolo přímky ${}^1O_1$. Pohybuje-li se též křivka B rovnoměrně po ploše α, a to tak, aby současně s křivkou A celou plochu α prošla, tu její střed $s^B \equiv 1'$ otáčí se rovnoměrně kol osy ${}^2O$ — stejnou úhlovou rychlostí jako bod s^A okolo osy ${}^1O$ — a půdorys B_1 kýve kol přímky ${}^2O_1$. Označíme-li průsečík přímek $A_1 B_1$ písmenou c_1, tu vytvoří bod c_1 ellipsu, vepsanou do obdélníka, určeného krajními polohami $A_1^{1\tau}$ $A_1^{2\tau}$, $B_1^{3\tau}$, $B_1^{4\tau}$ kmitajících přímek A_1, B_1*); *lze proto křivku C na ploše α vytvořiti průsečíkem v ploše α se rovnoměrně pohybujících kružnic A, B různých soustav.*



Obr. 7.

7*a*. Rozdělíme-li kružnice $\varkappa^A$, $\varkappa^B$, vyplněné středy kružnic A, B body $1, 2, 3 \ldots 1', 2', 3' \ldots$ na stejný počet stejných dílů (v obr. 6. na 24 díly), vytkneme tím na ploše systém čtyřúhelníků; *jimiž procházejí křivky C diagonálně.*

8*a*. Směrem Σ, položeným v rovině os ${}^1O$, ${}^2O$ a s těmito stejné úhly (45°) svírajícím, promítají se veškery kružnice plochy α do čtvrté průmětny $\lambda \parallel \nu$ do křivek kruhových s původními shodných. Soustředné kružnice $\varkappa^A$, $\varkappa^B$ dávají opět soustředné

*) Označíme-li poloměry kružnic A, B písmenami a, b, a je-li ${}^2O_1 \equiv X$, ${}^1O_1 \equiv Y$, pak jednotlivé polohy přímek A_1, B_1 jsou dány výrazy $x = b \cos \varphi$, $y = a \cos (\varphi + \varepsilon)$, z nichž vyloučením φ dostaneme rovnici křivky bodu c_1:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{xy}{ba} \cos \varepsilon = \sin^2 \varepsilon.$$

průměty a i rozdělení jejich body $1, 2, 3 \ldots 1', 2', 3' \ldots$ na díly stejné zůstává nedotčeno promítnutím. Z toho patrno, že *obrys 4 průmětu plochy α jsou dvě soustředné kružnice $C'_4{}^{\varphi''}$, $C''_4{}^{\varphi'}$*, průměty to dvou křivek systému (C) položených v rovinách $\varphi' \perp \pi$, $\varphi'' \perp \pi$ (obr. 6.).

9*a*. Z obr. 6. též patrno, že i *část křivek soustavy* (C) *promítne se* do 4 průmětny *do kružnic soustředných* o společném středu O_4, *druhá část* pak *do ellips soustředných a shodných* $(C''_4{}^{\varphi''} \cong C'_4{}^{\varphi'})$.

10*a*. Z toho patrno, že i *křivky systému* (C) *je vhodno rozděliti na dvě podsoustavy*; jedny procházejí jedním, druhé druhým směrem diagonálně v čtyřúhelnících v ploše α vytknutých; *křivky téže podsoustavy se neprotínají a dávají ve 4 průmětu shodné průměty.*

11*a*. Válce ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ (obr. 6. i 7.) protínají se v prostorové křivce stupně 4 : ${}^{12}D$; její průmět do roviny $\omega \equiv ({}^1O, {}^2O)$ jest rovnoosá hyperbola D_1. Sčítáme-li válce ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$, tu body křivky ${}^{12}D$ ležící na větvi nad rovinou ω a čítané jednou k ${}^1\alpha$, podruhé ku ${}^2\alpha$, dávají body křivky $D' \equiv ({}^{12}D + {}^{12}D)$ stupně 4, affinní k ${}^{12}D$ dle ω v poměru $2:1$. Body křivky ${}^{12}D$ souměrné k ω dávají alg. součet souřadnic rovný 0, jest proto alg. součet $D \equiv ({}^{12}D - {}^{12}D)$ *hyperbola rovnoosá* $D \equiv D_1$ jedinou v rovině ω položenou kuželosečkou plochy α a proto její *křivkou dvojnou.*

Jsou-li válce ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ shodné, rozpadne se hyperbola D ve dvě přímky; plocha α má pak dvě přímky dvojné.

Pronik plochy α s libovolnou rovinou φ stanovíme následně: Plocha α je součtem dvou válců ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$; vyhledejme válec ${}^2\alpha' \equiv (\varphi - {}^2\alpha)$ a jeho průsečnou křivku ${}^{12}K'$ s válcem ${}^1\alpha$ jakož i průsečnou křivku ${}^2K$ promítajícího válce křivky ${}^{12}K'$ s plochou ${}^2\alpha$; součet $K \equiv ({}^{12}K' + {}^2K)_{S,\omega}$ křivek ${}^{12}K'$ a ${}^2K$ dá křivku čtvrtého stupně v rovině φ náležející ploše α. Z toho patrno:

12*a*. Plocha α je 4 stupně; průmět průsečné křivky plochy α s libovolnou rovinou φ do roviny ω stotožňuje se s průmětem průsečné křivky plochy ${}^1\alpha$ s plochou $(\varphi - {}^2\alpha)$ [nebo válce ${}^2\alpha$ s válcem $(\varphi - {}^1\alpha)$]. (Dokončení.)

Důsledky akusticko-dynamického principu.

Napsal školní rada **František Kaňka.**

II. *Sklad některých obrazců pod kmitajícími čtvercovými obrazotvornými deskami.*

A. Odvození geometrických útvarů v sebe působících částí polí. — V roč. 44. tohoto Časopisu str. 439 jsem užil dvou případů pod obdélníkovými skleněnými deskami (obr. 7. a 14.) na rozklad a sklad některých i původních obrazců pod znějícími deskami

Tím jsem dosáhl určitého stupně jistoty v postupu o správnosti napodobení obrazců, tak že mohu pokusiti se — maje opět dotvrzenu platnost akusticko-dynamického principu a zákonů akusticko-dynamických ve vírných obrazcových polích pod kmitajícími deskami — předem odvoditi akusticko-dynamické vztahy polí pod čtvercovou deskou, seskupených buďto *a*) dle symmetrál stran nebo *b*) dle symmetrál úhlů, a stanoviti geometrický tvar přímo v sebe působících akustických vírů.

K *a*) — Mám li na mysli případ první pod čtvercovou deskou, uprostřed upevněnou, s Chladniho obrazcem, kryjícím se se symmetrálami stran čtverce, bude jisto, že je deska rozdělena na čtyři rozkmitny, které konají výchvěje v dílech sousedních o fasích protivných a v dílech protilehlých o fasích souhlasných.

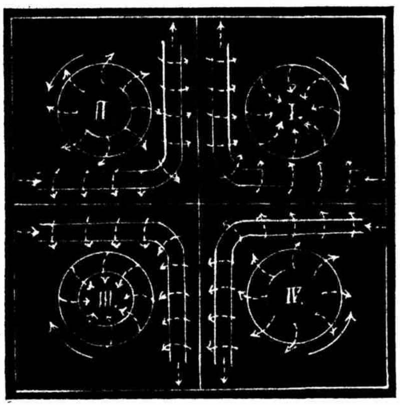
K těmto čtyřem rozkmitnám bude náležeti pod deskou obrazec složený ze čtyř skupin vírných polí, z nichž sousední jsou protisměrná a protější stejnosměrná. Názorem budiž obr. 1.

Jednotlivá pole, jednotlivé vírné skupiny, skládají se ze stejnoběžných prstencových vírů, které na tomto obrazci jsou zastoupeny pouze jediným prstencem v každé čtvrti. V prvé a v třetí čtvrti vzduchové částečky, vířice, směřují prostředkem prstenců za rovinu nákresnou; v druhé a čtvrté čtvrti vystupují prostředkem prstenců před rovinu nákresnou.

Dle toho míří v prvém případě vírné osy prstenců ve smyslu pohybu ručiček hodinových, v druhém případě proti nim, jak je šipkami na obrazci naznačeno.

Dle akusticko-dynamického principu možno si mysliti každou čtvrt obrazce pod každou rozkmitnou rozdělenu na samé elementárné vírné prstence. V našem případě jest jejich směrový smysl v téže čtvrti nebo v protilehlých čtvrtích souhlasný, v sousedních čtvrtích protivný.

Jsouce poučeni dle dřívějších pokusů (I. část „Důsledků akust.-dyn. principu," poznatek (5.))[1], že se tvoří na rozhraní dílů, jež mají vírné prstence směrů opačných, pole solenoidová z vírů rovnoběžných, zřiďme ono dělení tak, aby středy elementárných prstenců tvořily se symmetrálami stran rovnoběžné řady.



Obr. 1.

Tyto řady prstenců vytvoří v téže čtvrti pole spojitá, skládající se z vírů přímočarých, jdoucích též rovnoběžně se symmetrálami stran. Tím vzniknou mezi sousedními čtvrtmi čtyři pole solenoidová.

Jde ještě o to, jakému geometrickému tvaru se celkem přizpůsobí tyto přímočaré víry pod touž rozkmitnou, tedy v téže čtvrti?

Užijme názoru v obr. 1. Pokládejme symmetrály stran za osy soustavy souřadnic pravoúhlých. Pak lze označiti polohu přímočarých vírných vláken, která v jednotlivých čtvrtích v sebe působí,

---

[1]) Tento Časopis, roč. 44., str. 245 a 246.

Dr v. Jarolimek

rovnicemi přímek:

v I. . . . . $P_1 \equiv y = b$, $P_2 \equiv x = a$;
v II. . . . . $P_3 \equiv x = -a$, $P_1 \equiv y = b$;
v III. . . . $P_4 \equiv y = -b$, $P_3 \equiv x = -a$;
v IV. . . . . $P_2 \equiv x = a$, $P_4 \equiv y = -b$.

Poněvadž jsou v jednotlivých čtvrtích elementárné víry stejnosměrné, bude dán výslední geometrický útvar součinem rovnic, znamenajících polohu v sebe působících lineárných vírů.[2]) Tím vznikají útvary pro jednotlivé čtvrti:

$$Q_1 \equiv xy = ab,\ Q_2 \equiv xy = -ab,\ Q_3 \equiv xy = ab,\ Q_4 \equiv xy = -ab.$$

Poněvadž se vyskytly totožné rovnice Q_1 a Q_3, pak Q_2 a Q_4 jsou hledané útvary dány pouze dvěma rovnicemi:

$$xy = ab \text{ a } xy = -ab.$$

Pozorované případy týkají se čtvercové desky; možno tedy klásti $a = b$, čímž dostáváme dvoje rovnoosé hyperboly;

$$H_1 \equiv xy = a^2, \ldots\ldots (1)$$
$$H_2 \equiv xy = -a^2 \ldots\ldots (2)$$

Poněvadž však a zastupuje libovolnou proměnnou hodnotu, značí obě rovnice dvoje skupiny hyperbolických čar, jejichž společnými asymptotami jsou symmetrály stran.

Všecky čtyři čtvrti obrazce obsahují větve dvou skupin hyperbol, jejichž vrcholy leží na symmetrálách úhlů.

K b) — Podobně můžeme postupovati pro případ, že se kmitající čtvercová deska dělí na čtyři části dle symmetrál úhlů. Názorem budiž obr. 2.

Naznačené prstence buďtež opět zástupci nesčetných elementárných vírů v jednotlivých čtvrtích. Jejich směrový smysl víření jest v sousedních dílech protivný a v protilehlých dílech souhlasný. Z toho jde, že se vyvinou čtyři solenoidová pole podél úhlopříčen.

Užijeme-li i zde akust.-dyn. principu a sestavíme-li řady elementárných vírů stejnolehle s úhlopříčnami, obdržíme v každé čtvrti podél úhlopříčen dvě pole spojitá, složená z rovnoběžných vírných vláken téhož vírného směrového smyslu.

---

[2]) Srov. v tomto Časopise „O akust.-dyn. principu“, roč. 42., str. 434.

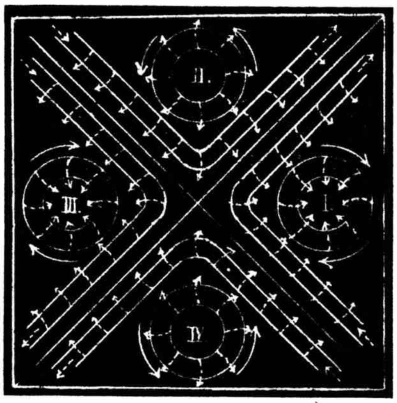
Obě stejnosměrná pásma každé čtvrti působí v sebe akusticko-dynamicky a spojují se v útvary, jež lze geometricky vystihnouti. Pokládejme opět symmetrály stran za osy soustavy pravoúhlé; i budou platiti rovnice polohy přímých vírných vláken v jednotlivých dílech obrazce:

v *I.* . . . . . $P_1 \equiv y - x = -b, \quad P_2 \equiv y + x = b;$

v *II.* . . . . . $P_3 \equiv y - x = b, \quad P_2 \equiv y + x = b;$

v *III.* . . . . . $P_4 \equiv y + x = -b, \quad P_3 \equiv y - x = b;$

v *IV.* . . . . . $P_1 \equiv y - x = -b, \quad P_4 \equiv y + x = -b.$



Obr. 2.

Vznikající útvar stejnosměrných vírných vláken bude určen opět součinem jich rovnic polohy v jednotlivých dílech po sobě:

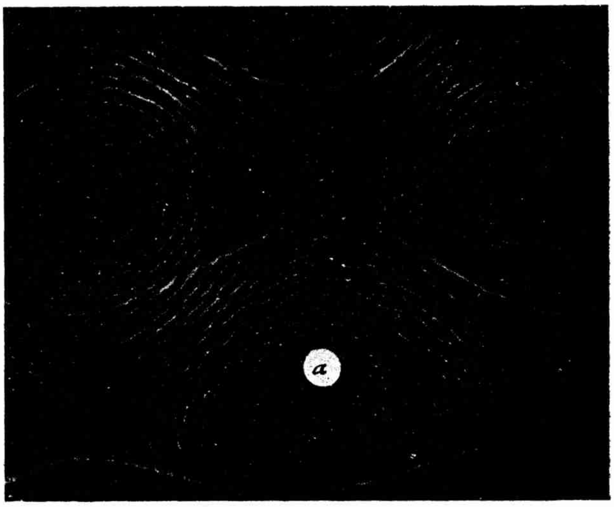
$$Q_1 \equiv y^2 - x^2 = -b^2; \quad Q_2 \equiv y^2 - x^2 = b^2;$$
$$Q_3 \equiv y^2 - x^2 = -b^2; \quad Q_4 \equiv y^2 - x^2 = b^2.$$

Tyto případy značí rovnoosé hyperboly, obsažené v následujících dvou rovnicích:

$$H_1 \equiv y^2 - x^2 = b^2, \ldots\ldots (3)$$
$$H_2 \equiv y^2 - x^2 = -b^2. \ldots\ldots (4)$$

Protože značí b proměnnou hodnotu, jsou těmito rovnicemi dány soustavy hyperbol, jejichž společnými asymptotami jsou symmetrály úhlů a jejichž vrcholy leží na symmetrálách stran.

B. Ověřující pokusy. — K ověření dedukce nejsnáze by bylo zříditi ke kmitací čtvercové desce ($a = 8{\cdot}5\ cm$), jíž byly vyrobeny obrazce 21. a 22. v roč. 41., str. 191 a 192 tohoto Časopisu, přiměřené desky rozborné, které by se současně s podložkou a kmitací deskou sevřely do svěráku. Deska by se rozkmitala smyčcem.



Obr. 3.

Mohu však ukázati následujícím případem, že se k podobným pokusům hodí i jiná čtvercová deska, v určitých bodech podepřená a rozkmitávaná tyčí, vydávající vhodný ton, objeví-li se jen Chladniho obrazcem čtyři díly, chvějící v žádoucích fasích, byť by i Chladniho obrazec byl složitý.

Pokus 1. Skleněná čtvercová deska o straně 14 *cm* a tloušťce 2 *mm* jest podepřena na všech čtyřech rozích opěrami rozměrů: $2r = 7\ mm$, $v = 3\ mm$. Jiná deska, s touto shodná, poslouží za podložku.

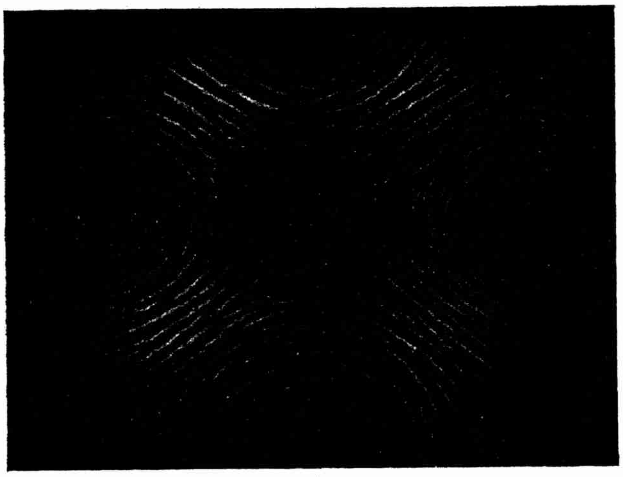
Když jsme byli podložku posypali korkovým prachem a desku svrchní jemným pískem, nasaďme rozkmitávací tyč ($l = 89\ cm$) na nízký korkový kotouček ve vhodné poloze *a* (obr. 3.).

Rozezvučíme-li tyč, držíce ji uprostřed, vyvine se Chladniho obrazec na desce a vírný, čtyřdílný, pod deskou kmitací.

Obrazec 3. podává je oba současně, třeba že jen větší část celku.

Chladniho obrazec se skládá ze čtyř uzlin: z tří vlnovek, jež jsou na obrazci patrny, a z čáry o dvou obloucích na horní části obrazce, která fotograficky zachycena nebyla.

Na obrazci spodním jeví se čtyři osová vírná pole, která ovládla veškeré dění pod deskou a vytvořila výslední tvar dle vzájemného akusticko-dynamického působení. Tento složitý tvar je podán též o sobě obrazcem 4.



Obr. 4.

Všecka čtyři jeho částečná pole jsou v rozpojitosti; byla tedy pod vlivem opačných fasí kmitajících sousedních dílů desky.

Pozoruhodno jest, že obě svrchní vlnové uzliny (obr. 3.) objímají dvě protilehlá osová pole, a že oba protilehlé, v souhlasných fasích rozkmitané díly desky, které ona protilehlá pole vytvořily, spojily se ve společnou rozkmitnu.

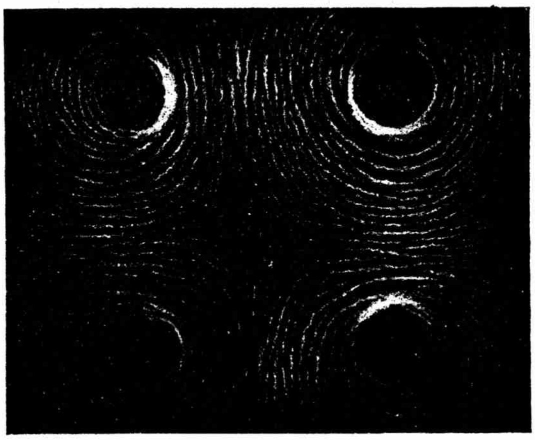
To se neděje u čtvercových desk, uprostřed upevněných — pro případ téhož obrazce pod deskou — nýbrž nastoupí místo obou objímacích vlnovek uzliny v poloze úhlopříček čtverce.

Těchto čtyř vírných polí možno užíti na sklad obrazců příslušnými deskami rozbornými (propouštěcími) dle uvedeného odvození.

Výhodno je zříditi si je z jediné korkové desky. Volil jsem k tomu desku rozměrů $10 \times 10 \times 1\ cm^3$. Na ní sestrojil jsem symmetrály stran i úhlů; kolem společného průsečíku vedl jsem kružnici ($r = 35\ mm$) a kolem bodů, v nichž se protala se symmetrálami, vykrojil jsem osm otvorů ($2\ r = 14\ mm$) po čtyřech na symmetrálách stran i úhlů. Vykrojené špalíčky poslouží pak jako zátky, chci-li ponechati otvory pouze na symmetrálách stran nebo úhlů.

Pokus 2. — K případu *a*):

Potřebné desky: 1. Skleněná deska ($14 \times 14\ cm^2$, $v = 2\ mm$), sloužící za podložku. 2. Deska rozborná s otvory na symmetrálách úhlů. 3. Deska obrazotvorná z pokusu prvního.

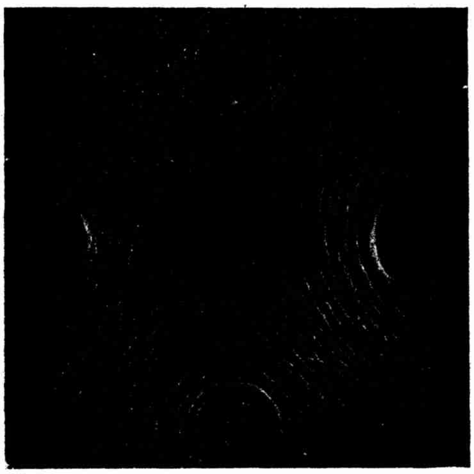


Obr. 5.

Úprava pokusu: Na středy stran podložky položí se nízké opěry ($2\ r = 7\ mm$, $v = 3\ mm$), podložka se popráší jemnými korkovými pilinami, rozborná deska se položí rohy na nízké opěry, na rohy podložky se postaví jiné opěry, 15 *mm* vysoké ($2r = 14\ mm$) pro desku obrazotvornou, která se na ně klade stejnolehle s podložkou.

Dáme-li pak působiti skleněné tyči ($l = 89\ cm$) dle pokusu 1. v místě *a*, objeví se na podložce po jednom mírném zaznění obrazec žádaného tvaru (obr. 5.), přiléhající k názoru obr. 1.

Každým otvorem rozborné desky proniklo vírné dění od desky obrazotvorné, pod každým otvorem utvořila se vírná skupina, nadaná vzhledem ke skupinám sousedním vírnou protisměrností a ke skupině protilehlé vírnou stejnosměrností. Tím vznikla čtyři pole solenoidová a na místech, která v sebe působila, vyvinuly se čtveré větve dvou rovnoosých hyperbolických skupin s asymptotami, jež splývají se symmetrálami stran, a s vrcholy, jež leží na symmetrálách úhlů čtverce, vše to v souhlase s výsledkem nahoře odvozeným.



Obr. 6.

Pokus 3. — K případu *b*):

Potřebné desky: Podložka a obrazotvorná deska jako v pokuse druhém. Deska rozborná má otvory na symmetrálách stran.

Úprava pokusu bude se shodovati s úpravou k pokusu druhému, až na polohu desky rozborné. Desku tuto položíme na nízké opěry do stejnolehlosti s deskou, za podložku sloužící, neboť jde o to, aby vírné dění, jež bylo příčinou vzniku osových polí pod obrazotvornou deskou, se otvory rozborné desky přenášelo na podložku.

Rozkmitáme-li opět tyč ($l = 89\ cm$), opřenou o kotouček *a*, podélně, utvoří se obrazec 6., odpovídající názoru v obr. 2.

a skládající se ze čtyř osových vírných skupin, po dvou v sousedství protisměrných, které vytvořily čtyři pole solenoidová, přecházející ve čtveré větve dvou soustav hyperbolických, zvláště na místech, kde elementárná pole mohla v sebe působiti. Hyperboly jsou rovnoosé. Asymptoty splývají se symmetrálami úhlů a vrcholy hyperbol leží na symmetrálách stran.

Obrazcem tímto jest též nápodoben obr. 4., jenž se obdržel přímo pod obrazotvornou deskou.

Přirovnáme-li mimo to obrazce 5. a 6., jež jsme tuto obdrželi pomocí rozborných desk, k obrazcům 21. a 22. v roč. 41., str. 191 a 192 tohoto Časopisu, které vznikly přímo pod znějící deskou, uprostřed upevněnou, poznáme, že i tam hyperbolické tvary, mezi solenoidovými poli se vyskytující, se jimi objasňují.

Výroba elektrických oscillací dynamoelektrickými stroji.

Napsal **B. Macků.**

(Přednáška v Jednotě Č. M. a F. v Praze, v lednu 1916.)

Praktická telegrafie bez drátu dožívá se letos svého dvacátého roku Za dobu tu přešla, jakožto jistý obor vědeckého výzkumu, skoro úplně již z fysiky do elektrotechniky. Kdežto dříve obsahovala řadu otázek řešitelných racionálně početními neb pokusnými methodami fysikální, jedná se v ní nyní v prvé řadě o otázky, týkající se zdokonalení s hlediska čistě praktického. O jedné z nich chci pojednati: o výrobě elektrických oscillací strojem dynamoelektrickým.

Fysikovi je známa řada principielních možností pro výrobu netlumených oscillací. Jedná-li se mu o realisaci, postačí mu stroj, jehož výkonnost je, řekněme 10.000 ergů za sekundu, t. j. jedna miliontina kilowattu, neboť oscillacemi této energie bude moci pomocí svých přístrojů pohodlně experimentovati. Také konečně nebude velkou váhu klásti na to, je-li kmitočet oscillací těch 10.000 nebo 30.000.

Značně jinak zní však *požadavky v praktické telegrafii bez drátu*. Tam se žádají stroje o výkonu aspoň kilowatt, ba desítek i set kilowatt, a kmitočet ne mnoho pod 50.000. Mimo to má býti kmitočet značně lépe konstantní než při obvyklých střídavých proudech.

S čím souvisí tyto podmínky? *Předpis o výkonu* dán je požadavkem telegrafovati na sta i tisíce *km* daleko. O *velikosti kmitočtu* rozhoduje především konstrukce a rozměry anteny. Má-li býti možno antenou, jakékoliv dnes známé konstrukce, vyzářiti takové množství energie, aby pro dnešní přijímací přístroje dostatečné množství z ní dalo se zachytiti ve vzdálenosti několika tisíc *km*, musí antena býti provedena v rozměrech jen pouze nejvýše několikráte menších než je délka vyzařované čtvrt vlny. Pro velké stanice, užívající vln 6kilometrových, jsou to již sta metrů a při zvětšovaní délky vlny (či zmenšování kmitočtu) rostly by s ní i rozměry anteny přibližně přímo úměrně. Jsou tedy: velikost kmitočtu a rozměry anteny při předepsaném jí výkonu dvě stránky téhož problému. Za snadnější cestu pokládá se dnes konstrukce strojů o potřebném kmitočtu pro dnešní konstrukce anten stametrových, nežli konstrukce anten těchže asi rozměrů a výkonu pro kmitočet podstatně menší.

V prvých letech telegrafie bez drátu, kdy obvyklou byla délka vlny sta metrů, byly poměry pro strojovou výrobu oscillací mnohem těžší, neboť žádán byl kmitočet asi desetkráte větší. A týž požadavek musil by býti i dnes splněn, kdyby se jednalo o užití strojových oscillací pro stanice malé, jež právě s ohledem na možnost užití menších anten užívají i menší délky vlny.

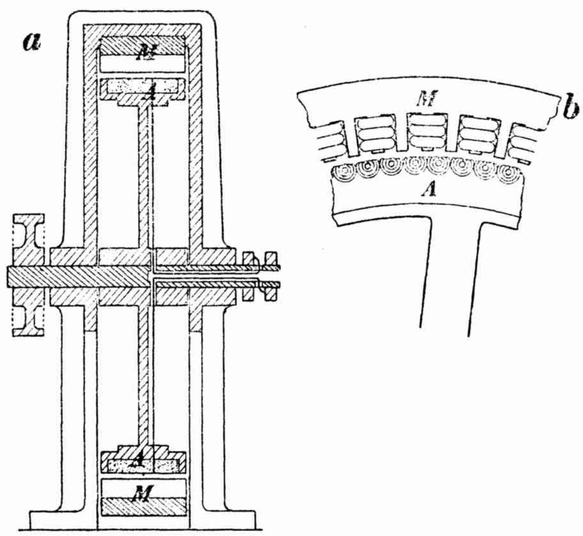
Požadavek *konstantnosti kmitočtu* souvisí se sladěním stanice přijímací. Proudový effekt na stanici přijímací jest totiž přímo úměrný výrazu:

$$\frac{1}{\left(\frac{n_0 - n}{n_0}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta_0}{2\pi}\right)^2}$$

kde značí ϑ_0 lg dekrement útlumu přijímací stanice, n_0 její kmitočet, n kmitočet dopadající netlumené vlny. Při málo tlumených antenách má ϑ_0 hodnotu asi 0·03 (béřeme-li v úvahu jen útlum anteny). Nemá-li tedy změnou kmitočtu klesnouti proudový effekt více než o 10%, musí býti $\left(\frac{n_0 - n}{n_0}\right)^2 \leqq \frac{1}{10}\left(\frac{0{\cdot}03}{2\pi}\right)^2$, tedy $\left|\frac{n_0 - n}{n_0}\right| < 0{\cdot}0015$, t. j. rozladění nemá přesahovati $\pm 0{\cdot}15\%$.

Přikročme nyní k vlastnímu thematu. Při tom počneme konstrukcemi dynamoelektrických strojů o kmitočtu kol 10.000 a více. Kmitočet proudu ze stroje dá se totiž přístroji, o nichž bude řeč v oddílu dalším ještě několikráte zvýšiti.

Prvý, kdož zhotovil dynamoelektrické stroje o velkém kmitočtu, byl *Nikola Tesla* [1]) v letech 90tých. Jemu ovšem nejednalo se o oscillaci pro tehdy neznámou telegrafii bez drátu, nýbrž o střídavý proud tak velkého kmitočtu, aby ton obloukových lamp byl nad mezí slyšitelnosti.



Obr. 1. *a*, *b*.

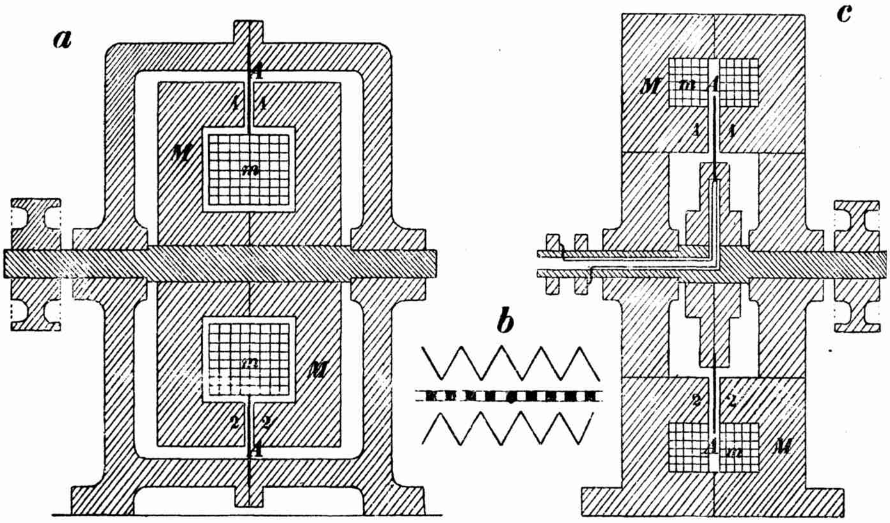
Prvou jeho konstrukci z r. 1889 ukazuje obr. 1. Magnety *M* jsou pevné a armatura *A* se točí. Polů magnetů jest však, proti obvyklým alternatorům, veliký počet, ku př. 384 při vnitřním průměru 75 *cm*, tak že na jeden pol a mezeru připadá asi 6 *mm*. Proto ovinutí magnetů provedeno ne cívkami, nýbrž vodičem sem tam vedeným. Způsob vinutí armatury patrn je z výkresu. Železným jádrem armatury byla cívka tenkého ožehlého, železného

---

[1]) *J. C. Martin*: Nikola Tesla's Untersuchungen über Mehrphasenströme. 1895.

drátu. Při 3000 obrátkách za minutu docílilo se kmitočtu 9600 za sek. O výkonu těchto, jakož i dalších Teslových strojů, chybí bližší údaje; byl však asi 1 kilowatt.

Další Teslovu konstrukci ukazuje obr. 2*a*. Magnetisující cívka *m* jakož i vinutí kotvové *A* (v němž žádaný proud vzniká) jsou nepohyblivy. Otáčí se však železné jádro elektromagnetů *M*. Jeho poly v místech proti kotvovému vinutí (1, 1; 2, 2) zakončeny jsou ostrými zuby, dle obr. 2*b*. Kotvové vinutí provedeno je



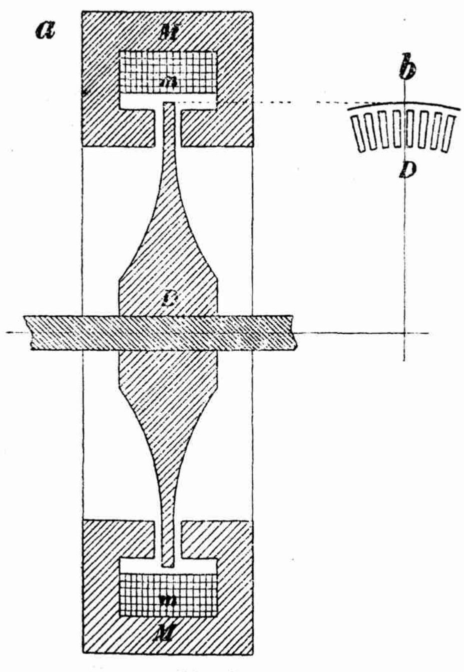
Obr. 2. *a*, *b*, *c*.

jediným vodičem sem tam vedeným (obr. 2*b*). Magnetické pole mezi poly je nehomogenní, proti hrotům je magnetická indukce největší, proti mezerám nejmenší. Při rovnoměrném pohybu jádra *M* převládá tedy vždy elektromotorická síla indukovaná v částech vodiče bližších hrotům a vzniká tedy ve vinutí tom střídavý proud. Perioda jeho dána je dobou, kdy táž část vinutí urazí dráhu rovnou vzdálenosti dvou hrotů, jež volena byla asi 3 *mm*.

Konstrukci poněkud pozměněnou ukazuje obr. 2*c*. Zde je v klidu elektromagnet *M* i se svou magnetisační cívkou *m* a otáčí se kotvové vinutí *A*, jež opět provedeno je jediným vodičem sem tam vedeným. Poly elektromagnetu zakončeny jsou zase zuby jako v případu předešlém (obr. 2*b*).

Stroji této konstrukce docílil Tesla kmitočtu až 30.000. Výkon jich byl větší než u konstrukce prvé a i výkonnost lepší.

Z doby o málo pozdější (1891) pochází stroj sira *D. Salomonse*, zhotovený *Pykem* a *Harrisem*. Při něm elektromagnety i kotva jsou shodně konstruovány ve formě kotoučů se zuby, poly, k sobě obrácenými. Kotouče otáčejí se proti sobě, každý 1500 kráte za minutu. Na každém bylo 174 polů. Měl tedy proud kmitočet 8700. Výkon udán není.



Obr. 3. *a*, *b*.

Žádná z udaných konstrukcí, ani *Teslova* ani *Salamonsova*, nedošly užití při telegrafii bez drátu, neboť proudu z nich přímo nedá se užiti, poněvadž kmitočet jeho je ještě malý. A v době, kdy přišlo se na zvyšování kmitočtu, známy byly pro kmitočet asi 10.000 konstrukce výhodnější, o větším výkonu i lepší výkonnosti. —

Největšího kmitočtu, při výkonu upotřebitelném pro praktickou telegrafii bez drátu, dosaženo dosud stroji konstruovanými z podmětu *Fessendenova Alexandersonem* (1907).

Stroje ty jsou typu induktorového, při němž vinutí magnetů i kotvové má společné jádro železné. Indukce ve vinutí kotvovém docílí se pak tím, že jiné pohybující se železné těleso mění magnetickou indukci ve vinutí kotvovém. Při racionelní konstrukci je však nutno, aby celková magnetická indukce (příslušející vinutí magnetisujícímu) zůstávala i při pohybu stále konstantní. Podrobnosti vysvitnou z dalšího.

Jednu konstrukci Alexandersonovu znázorňuje výkres 3*a*. *M* jest železné jádro elektromagnetu, *m* magnetisující cívka. Poly magnetu (dovnitř obrácené) opatřeny jsou zuby, mezi nimiž je navinuto kotvové vinutí, jediným vodičem sem tam probíhajícím. Mezi zuby pohybuje se železný kotouč *D*, otáčející se kol osy *O*. Kotouč na okraji opatřen je štěrbinami (obr. 3*b*) tak, že zbylá žebra železná mají stejnou šířku, rovnou šířce zubu a mezery na polech (obr. 3*c*). Jest tedy počet žeber kotouče poloviční počtu zubů pólu. Štěrbiny kotouče vyplněny jsou fosforovou bronzí, aby kotouč byl úplně hladký. (Dokončení.)

Věstník literární.

Recense knih.

Základy vyšší mathematiky. Napsal Dr. techn. *Fr. Čuřík*. Díl I. Počet differenciální. Praha 1915. Nákl. Čes. matice technické.

Maje posouditi tuto knihu zřejmě určenou pro začátečníky, oddělím výklad od příkladů a budu přihlížeti hlavně k onomu. Připomínám předem, že k napsání dobré knihy o tak elementární látce dnes není třeba zvláštních kvalit ducha; je tu hojnost vzorů a třeba jen si opatřiti tolik vzdělání, aby se jim rozumělo, a urovnati si látku methodicky a v přirozené souvislosti, a na konec ještě dbáti trochu střízlivosti slohu.

Kniha začíná racionálním číslem, a zavádí Dedekindův řez. Autor jej definuje plně pouze v případě racionální hodnoty. Pro jiné případy mluví pouze o $\sqrt{3}$, uvádí dvě řady (zakončených zlomků) desetinných sblížných hodnot, a praví bezprostředně na to: »Čísla, která dělí soustavu racionálných čísel ve *dva řezy* tak, že . . ., slují iracionálná«. Samá nedopatření! Předně čtenář dosud nezná obecný pojem čísla (neboť pak bylo by zbytečno mu je předváděti pomocí řezů), za druhé přísluší ke každému číslu *jeden* Dedekindův řez a nikoli dva. Čtenář z výkladu vůbec nevidí, jakou roli tu hrají řezy a co má od nich očekávati, zvlášť když na polovici stránky dohrály svoji roli a nikde později v knize nevystupují.

A hned po té autor v knize věnované po výtce funkcím reálné proměnné spěchá zmíniti se o číslech komplexních $a + bi$, která bylo by didakticky účelnější zavésti teprve, když se má jednati o jejich funkcích, aby výklad tvořil přehledný celek. To však je věc vkusu; žalostnější je, že autor vážně bere konfusní výklad geometrického*) znázornění i jako střední geometr. úměrné ze dvou délek, jimž připisuje hodnoty $+1$ a -1.

Že tu připomenuty také kvaterniony — které v dalších kapitolách se neobjeví — spadá na vrub povídavosti. Originální a podivna je definice veličiny (str. 7.): »Kvantitativní a kvalitativní vlastnosti předmětů, zjevů nebo pochodů nazveme veličinami« (!).

Název »libovolně malé číslo« přísluší v obvyklé mluvě mathematické číslům od nully málo se lišícím, a nikoli záporným velikým hodnotám (str. 7., konec).

Při svém spěchu nemůže si autor odepříti již zde, na samém začátku, zmíniti se o prostoru čtyřrozměrném; myslí zcela vážně, že vznikne pohybem prostoru obyčejného. Pojem funkce (str. 8.—10.) mohl lépe býti podán s velkou úsporou výmluvnosti. Bylo opomenuto vzíti podmínku jednoznačnosti do definice; v oboru reálné proměnné — a jen o té se zde jedná — je funkce vždycky jednoznačná; dvojznačná (jako na př. $y^2 = x$, tedy $y_1 = \sqrt{x} > 0$, $y_2 = -\sqrt{x} < 0$) by zastupovala funkce dvě. O víceznačných funkcích lze jednati pouze v oboru komplexní proměnné (což autor na přísl. místě však pomíjí).

Podivno je, že tu autor (str. 10.) zavádí rovnici

$$\psi(x, y) = 0,$$

aniž dosud jednal o funkcích dvou proměnných, a ještě divnější je, že funkcí implicitní je mu výraz ψ a nikoli y. Také o funkci obrácené se tu jedná předčasně, a ovšem není při tom řeči o principiální stránce věci, o podmínkách existence (ne každou funkci lze obrátit).

V druhé části má býti podán přehled funkcí elementárních; lineární celistvá funkce svedla autora k výkladu kartesianské rovnice přímky (kterou již čtenáři znají a což ostatně ruší myšlenkový postup svojí nesystematičností), při čemž ruší tisková chyba v rovnici (1) str. 12. ($y + mx = b$, m směrnice!). Následují dlouhé výklady o převádění stupňové míry úhlů v obloukovou (str. 14—16.), které přec jsou obsaženy v definici

$$1^0 = \frac{\pi}{180}, \quad 1 = \frac{180^0}{\pi},$$

načež se okamžik pokračuje v geometrii přímky.

Autor jedná o funkci racionální celistvé a lomené a o algebraické funkci irracionální explicitní; vedle ní, jako by to byl jiný typus, uvádí funkci x^n, kde mocnitel n je racionální; při tom do-

*) Všechny vážné spisy se mu vyhýbají, je to sofisma; u nás šířil jej F. J. Studnička a zastává jej B. Bydžovský (Mathematika pro nejvyšší třídu reálek, str. 7—8).

dává, že jest »$x^{\frac{1}{n}}$ opět funkcí mocninovou, ovšem iracionální«. Pro $n = \frac{1}{3}$ tomu tak ale není.

Po tomto rozvrhu praví kniha na str. 20.: »Všecky funkce, jež nelze zařaditi do některé z uvedených kategorií funkcí algebraických, slují transcendentní«. Podle p. Čuříka by tedy pořadnice u algebraické čáry byla obecně transcendentní; neboť rovnice algebraické počínaje stupněm 5. jsou obecně neřešitelny (výrazy explicitními).

Divně znějí poznámky o funkci a^x; »aby byla i pro lomené x ($x < 1$) jednoznačnou, bereme ji jen kladně«. Názvem lomené veličiny rozumí autor čísla ryze lomená. Je klamné, že by výraz a^x co do jednoznačnosti měl jinou povahu pro $x < 1$ a pro $x > 1$. Autor by měl vědět, že funkce tato jest jednoznačna (vůči proměnné x, neb a jest konstanta) při každé přípustné definici výrazu a^x; neboť je to hodnota řady stále konvergentní

$$\sum_0^\infty \frac{(la)^\nu}{\nu\,!} x^\nu .$$

Čtenář tu cítí nedostatek řádné definice výrazu a^x s iracionálním exponentem (podobně při x^m); k tomu by byly prokázaly dobré služby řezy Dedekindovy, kdyby to autor s nimi bral vážně. Stejně povrchně probrán logarithmus.

Opět jsme přerušeni logarithmickým pravítkem (odbyto velmi macešsky) a logarithmickým papírem; tyto pomůcky mají velikou cenu praktickou a zaslouží, aby se o nich jednalo na místě k tomu vhodném, kdy čtenář je tak dospělý, aby pochopil praktický dosah věci; příležitost by k tomu byla při číselném řešení rovnic, o němž podivnou náhodou kniha nejedná.

V článku o funkcích trigonometrických (str. 28.) zarážejí rovnice

$$f\,[(2\,k + 1)\frac{\pi}{2} \pm x] = \text{cof}\,(x), \qquad f\,(k\,\pi \pm x) = f\,(x).$$

Jako applikace zavádí se tu Hesseův tvar rovnice přímky a výraz pro vzdálenost této od daného bodu. Harmonický pohyb tu vykládán jistě předčasně, když nemůže býti užito derivace!

Na stránce 44. zaráží rovnice

$$\frac{n}{\infty} = 0;$$

číslo té vlastnosti jako zde symbol ∞ neexistuje; absolutní nekonečno není veličina a také s ním jako takovou nepočítáme. »Transfinitní« neznamená nekonečně veliké v obvyklém smyslu (název ten zavedl G. Cantor do theorie množin, kde má svůj význam a účel).

K rovnici $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1$ podotýkám, že obstojí toliko pro $\varepsilon_2 = 0$ a nikdy pro veličiny ε_2 nekonečně malé druhého (neb vyššího) řádu od nully různé. Podivné fantasie, jež se u autora pojí k základním pojmům limity a nekonečně malých, vyskytují se tu (str. 44.) ponejprv ve tvaru, jenž nepřipouští vytáček.

Na str. 45. »vyjadřuje symbol $\lim x = 0$ nikoliv nulu ve smyslu algebraickém, nýbrž číslo nekonečně malé«. Při uvolněnosti slohu autorova těžko vyčísti obsah tohoto temnosloví; v každém případě je pravá strana skutečná, obyčejná nulla a x je proměnná, která se spojitě neb přetržitě blíží nulle.

Také není pravda, že »funkce

$$\sum_0^\infty \sin^2 x (\cos^2 x)^n = 1$$

pro všecky hodnoty x, tedy i pro $x = 0$«. Právě naopak, pro $x = 0$ má řada hodnotu 0 (funkce je tu přetržitou).

Povrchní je také výklad úplného differenciálu (str. 78.). Zde již mluví autor o *rovině tečné*, jakož vůbec předpokládá znalost základů analyt. geometrie v prostoru. Pro geometrii rovinnou ji nepředpokládal! Charakteristický příklad ledabylosti je následující místo (str. 78.):

»Podmínkou pro existenci parciálních derivací a totálního differenciálu je, aby funkce v místě (x, y) byla spojitá«. Víme však, že dostatečné podmínky pro existenci derivací u funkcí neznáme; existenci derivace v obecných úvahách obyčejně předpokládáme; mluviti o spojitosti jako podmínce nutné je naivní; je to samozřejmo a bylo již dříve vytčeno. Konečně k existenci differenciálu je nutna spojitost jedné z obou částečných derivací. Úplně nezdařeným dlužno nazvati důkaz základní věty $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ podaný na str. 81. Derivování funkcí složených (str. 85.) vůbec není v knize dokázáno, ačkoli je to jeden z předních úkolů diff. počtu.

Stejně nemožno výklady čl. 35. (str. 83., 84) o differencování funkcí nerozvinutých považovati za nějaký důkaz.

Větu Rolleovu a s ní ekvivalentní Lagrangeovu o střední hodnotě kniha uvádí jen bez důkazu, jakkoli tvoří základ nejdůležitějších partií diff. počtu.

V theorii řad působí komický dojem věta (str. 94. dole): »Aby řada konvergovala, musí její zbytek ubývati k nulle« (autor má pro to obraz!). Na vysvětlenou pro čtenáře začátečníky vysvětluje: Buď řada s, zbytek r_n, v označení autorově

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots, \quad r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

Máme-li o zbytku jako veličině mluviti (jej vyšetřovati), musí řada r_n konvergovati; řada s se od ní liší jen konečným počtem členů.

Základní věta o řadách s kladnými členy (str. 95.; § 41., 1) by měla býti dokázána.

U kriteria Cauchyova (str. 96.) autor tvrdí nesprávně: »Je-li $\lim \sqrt[n]{u_n} \geqq 1$, řada diverguje«. Na př. pro $u_n = \frac{1}{n^2}$ je tato $\lim u_n = 1$ a řada konverguje přec.

Důkaz kriteria Dalembertova podán trochu neúplně. Případ divergence není vyšetřen, pouze stylisován a s tiskovou chybou v hlavní části.

Výklad Raabeova kriteria velmi pěkně osvětluje povrchnost myšlení autorova. Z Raabeovy podmínky (str. 97.)

$$\lim n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1$$

autor vyvozuje $$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 - \frac{1}{n}, \qquad (*)$$

a pokračuje (str. 98.). »Trvá-li tento vztah až do $\lim n = \infty$, pak

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lim\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{čili} \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \ldots$$

A přece hned po té autor uvádí příklad

$$u_n = \frac{1}{n^k}, \quad k > 1,$$

v němž platí podmínka (*), a jak sám konstatuje, je zde

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Podaný důkaz autorův je venkoncem konfusní.

Přímo úžasnou neznalost svého předmětu osvědčuje p. dr. Čuřík svými výrody na str. 99.—100. Jde o řadu $\Sigma a_n u_n$, jejíž prvky hoví podmínkám

$$a_\nu \geqq a_{\nu+1}, \quad \lim a_n = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

a veličiny $$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

jsou ve stálých mezích, tedy $| s_n | < G$. Za těchto podmínek řada je konvergentní.

Autor četl tuto větu v nějaké lepší knize, ale podal její důkaz ve formě znetvořené.

Důkaz bude proveden, když se zjistí existence $\lim S_n$ pro

$$S_n = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n;$$

známá identita Abelova podá

$$S_n = (a_1 - a_2) s_1 + (a_2 - a_3) s_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n) s_{n-1} + a_n s_n.$$

Zde jest $\lim a_n s_n = 0$, a řada (**)

$$\sum_1^\infty \left(a_\nu - a_{\nu+1}\right) s_\nu$$

jest absolutně konvergentní, majíc členy abs. menší než konvergentní řada kladných členů $$\Sigma (a_\nu - a_{\nu+1}) G.$$

Tím je konvergence dokázána.

Ale p. Čuřík důkaz upravil takto (str. 100.): Dospěv k identitě (**) pokračuje: »Rozdíly v závorkách jsou kladné a absolutní hodnoty částečných součtů $| s_n |$ blíží se konečné mezi s, (!) . . .

V. Jerábek

bude v platnosti rovnice

$$S_n < s[(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n+1})].$$

»Poněvadž $\lim a_n = 0$, je součet v závorce roven a_1 a

$$\lim S_n < a_1 s.«$$

»Součet S_n zůstává pod určitou konečnou mezí, tedy řada $\Sigma a_n u_n$ konverguje.«

Co slovo, to blamáž.

Stále přesvědčen o správnosti svého nesmyslu (že z omezenosti součtů

$$\sum_1^n u_\nu$$

vychází konvergence $\sum_1^\infty u_\nu$) »dokazuje« p. Čuřík konvergenci řad (str. 100.–101.)

$$\Sigma \sin nx, \quad \Sigma \cos nx.$$

O nic lépe nejedná autor o řadách mocninných; fakt, že mocninná řada $\Sigma a_\nu x^\nu$ konverguje uvnitř jistého intervallu $(-\varrho \ldots \varrho)$ (případ $\varrho = 0$ neb $\varrho = \infty$ není vyloučen), domnívá se dokázati pomocí kriteria podílového; nachází (str. 101)

$$\varrho = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Jak by se dal *tento* důkaz provésti u řad

$$x + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + \ldots, \quad \Sigma \cos n\varrho \,.\, x^n\,?$$

Autor u žádné z funkcí v knize uvažovaných nezjistil spojitost, také se o to nepokusil u řad mocninných. Derivování jejich (str. 102.) provádí takto:

Pro řadu s určitým oborem konvergenčním $f(x) = \Sigma a_\nu x^\nu$ utvoří řadu derivací členů $f'(x) = \Sigma \nu a_\nu x^{\nu-1}$ a vyvíjí (konfusní) důkaz její konvergence; domnívá se, že to pro důkaz napsané derivační rovnice stačí! Také velmi důležitá methoda neurčitých součinitelů (str. 103.) zůstává bez důkazu.

Při šetření funkce e^x dle Maclaurinovy řady (str. 110.) spletl si autor zbytek R_n obecného vzorce se zbytkem řady. To znamená, že podstatná podmínka $\lim R_n = 0$ zůstala nedokázána (ovšem, že si věc doplní i nejslabší začátečník sám).

Stejný defekt při řadě logarithmické. U řady binomické (str. 117.) již si uvědomuje, že třeba uvažovati zbytek R_n, tvrdí, že konverguje k nulle, ale důkazu nepodává.

Pomíjím ledabylé výklady o funkcích cyklometrických a zastavím se na okamžik u funkcí s komplexní proměnnou (130). Autor dí: »V theorii funkcí komplexní proměnné se dokazuje, že řady pro funkci exponenciální a logarithmickou platí i pro komplexní argument.« K tomu podotýkám: Funkce e^{x+iy} dosud (v knize) definici nemá; za její definici se béře řada

$$\Sigma \frac{(x+iy)^\nu}{\nu!},$$

stále konvergentní. Dobrá kniha by také podala základní věty o řadách dvojnásobných a z nich vychází snadno $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, tedy zde potřebný rozklad $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$; identita Eulerova

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

pak vychází známým způsobem. Podobně snadno se vyšetří řady pro logarithmus, bez odkazu na th. funkcí kompl. proměnné, kterou čtenář v tom stadiu znáti nemůže.

Je úžasné, že tu autor mohl potlačiti výklad základních pojmů o jednoznačnosti a mnohoznačnosti funkcí kompleční proměnné, věcí to tak důležitých.

U příležitosti theorie extrémů utvořil si autor pro jisté případy zvláštní (ale zbytečné) pravidlo; neumí ho však sám užívati; tak na příklad pro funkci (str. 145.—6.)

$$y = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$$

nachází nemožnou věc $y'' = y$ (při $y' = 0$).

V knize jsou ovšem celé řady stran, jimž neučiněno výtek; ale jsou v differenciálním počtu také stati, v nichž je těžko udělati chybu. —

Pokud se týče výběru *příkladů*, jsou tam mnohé úkoly předpokládající znalost jiných nauk, fysikálních neb technických, které čtenáři v době, kdy mu jest osvojiti si differenciální počet, najisto nejsou ještě známy; aby si jejich znalost opatřil, k tomu by potřeboval znalost základů analyse, v každém případě dokonalejší, než jakou mu může poskytnouti kniha p. Čuříkova. Ostatně příklady ty bývají po stránce mathematické často banální (lomená kvadratická funkce k vůli maximu a minimu, neb pod.), a chudý zisk, jejž mohou studentovi poskytnouti, nestojí za námahu spojenou se sháněním pomůcek. —

Zvláštností spisu je také 17 tabulek se 160 obrazci, pro text velmi postrádatelnými, které studium jen komplikují; jejich přímo hýřivé přeplnění (zvláštní to vášeň kreslířská) snad nezasvěcenému simulují důkladnost spisu.

O knize p. Čuříka bylo referováno v 21. čís. roč. XXIV. Technického obzoru; referent p. inž. J. Vancl praví, že v posledních dobách za hranicemi se množily učebnice věnované otázkám theoreticko-fysikálním a zvláště otázkám technicko-vědeckým a inženýrským, a dodává, že učebnice p. Fr. Čuříka »sleduje zřejmě tento cíl«. Kdo si dá práci, aby srovnal četná místa, výše uvedená, s příslušnými místy v dobrých dílech (psaných učenci a nikoli poseury), a zároveň porovnal celkový program knihy s jinými, musí dospěti k poznání, že kniha p. Čuříka se od dobrých známých knih literatury francouzské, německé a italské liší jen svými chybami a nedostatky. Kniha neobsahuje nic speciálně technického mimo snad příklady, o nichž jsme právě mluvili. Štědrá chvála, kterou p. Vancl zahrnul právě ta místa knihy, jež jsou její nejslabší stránkou, velebení přesnosti, po které v ní není stopy, osvětluje dostatečně, jak lehkomyslně se odbývají kulturní otázky v naší zemi, i v kruzích, od nichž by to nikdo nečekal.

Pánové z prakse by měli méně podléhati hypnose, jež se jim pod rouškou stavovských zájmů vnucuje z míst ne vždy kompetentních. Již od více než deseti let hlásí se ve spolcích a v tisku k životu hnutí, které má za účel redukovati technické studium v několika theoretických oborech. Pokud jde o mathematiku, tu se sice neomaleně hlásá, že její program nedostačuje; ve skutečnosti se však chce docíliti jejího okleštění a hlavně sploštění math. výchovy. Mládeži má se dostati učitelů, jejichž obzor nevybočuje příliš z mezí daných látkou, nyní v dvouletých kursech probíranou, a jejichž působení na mládež má zameziti, aby tato nenabyla hlubšího vzdělání, jež by usnadnilo prohlédnutí slabin jistých augurů.

Je pozorovati dva typy volajících. Jedni jsou tiší geniové, svůj obor ani technicky ani literárně nijak neobohativší (leč že psali pohledničky); ti co do vehemence a vlivu o nic nejsou za svými gramotnějšími přáteli, kteří svižně vládnouce pérem stávají se apoštoly hnutí; takto vzdělávají hlavně hokynářskou stránku svého předmětu. Z jejich gest a způsobu vystupování, jakož i z nesmyslného obsahu jejich řečí snadno bylo seznati vzdělaným kruhům, oč běží augurům: chtějí se v tlačenici, způsobené denní vřavou týdenníků objeviti oděni v řízu proroků.

Mathematický svět nereagoval; je vážnému muži nechutno příti se s dryáčníky. Zůstali jsme klidni, obráceni zády k poseurům, očekávajíce velké věci, jež měly se zroditi v bouřích. Objevila se kniha p. Čuříka . . .

»Podle ovoce jejich poznáte je!«

Živý aplaus, kterým byla vítána (nemyslím tu na T. O.), budí zvědavost, která z četných perel v této knize uložených bude as zdobiti korouhev »reformy«. Snad $\Sigma \sin nx$, $\Sigma \cos nx$! *M. Lerch.*

Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität gehalten in Göttingen auf Einladung der Kommission der Wolfskehlstiftung von M. Planck, P. Debye, W. Nernst, M. v. Smoluchowski, A. Sommerfeld und H. A. Lorentz. Mit Beiträgen von H. Kamerlingh-Onnes und W. H. Keesom, einem Vorwort von D. Hilbert und 7 in den Text gedruckten Figuren. Lipsko-Berlín, B. G. Teubner 1914; str. IV + 196, cena 7 M.

Šťastná myšlenka, aplikovati kinetickou theorii plynů na hmotu vůbec a též na její elektronovou theorii, vedla k výsledkům velmi úspěšným a pro moderní fysiku důležitým. Aby svým členům i jiným interesentům poskytla odborného poučení o tomto novém způsobu výkladu fysikálních dějů ve hmotách, uspořádala král. společnost věd v Gotinkách řadu přednášek vynikajících pracovníků v tomto oboru z různých národů v dubnu r. 1913. Učiniti tyto přednášky přístupnými i širším kruhům odborným jest účelem tohoto spisu, jehož vydání uspořádal prof. Hilbert jakožto 6. svazek sbírky: „Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen . Jednotliví přednášející učenci přihlíželi při zpracování svých přednášek k tisku též k myšlenkám, jež se naskytly za diskusí konaných po přednáškách, jak děje se to pravidelně ve fysikální obci v Gotinkách.

Spis zahajuje přednáška tvůrce theorie kvant Maxe Plancka o nynějším významu hypothesy kvant pro kinetickou theorii ideálních plynů jednoatomových. K ní připojuje se přednáška P. Debyea, v níž odvozuje stavojevnou rovnici těles tuhých na základě theorie kvant, věnuje zvláštní pozornost stavu tělesa při teplotě absolutního bodu nullového, a vypočítává alespoň v prvním přiblížení tepelnou vodivost těles tuhých. V přednášce třetí uvádí nás prof. W. Nernst do kinetické theorie těles tuhých, přihlížeje hlavně k hmotám jednoatomovým krystalickým a rozšiřuje theorii svou i pro hmoty víceatomové. Ježto mezi výsledky kinetické theorie hmoty a druhou základní větou thermodynamickou v některých případech objevily se rozpory, poukazuje k těmto případům M. v. Smoluchowski v další přednášce, v níž hlavní váhu klade na správné porozumění zvratnosti a nezvratnosti dějů molekulových a zastává se jak oprávněnosti kinetické theorie, tak i druhé věty thermodynamické.

Pátá přednáška Sommerfeldova skládá se ze dvou částí. V první provádí přirovnání mezi kinetickou theorií těles tuhých a plynů; vycházeje z úvahy o vlastních kmitech jednotlivých částic, ukazuje, že z kinetické theorie těles tuhých lze jako důsledek vyvoditi některé správné výsledky známé již z theorie plynů, že však dle dosavadních předpokladů úplné shody docíliti se posud nepodařilo. V části druhé poukazuje na význam veličiny zvané „volná dráha molekuly“ („freie Weglänge“) pro kinetickou theorii plynů a odvozuje na základě ní vzorec pro koefficient tření a tepelnou vodivost plynů.

V přednášce poslední podává prof. H. A. Lorentz výklad vedení tepla a elektřiny v kovech aplikací kinetické theorie plynů na pohyby elektronové. Ku konci připojeny jsou dvě poznámky Kamerlingha-Onnesa a W. H. Keesoma.

Představuje tedy náš spis soubor monografií témuž předmětu věnovaných, ale s různých hledisek a zároveň s různými intencemi sestavených, tvořících, ač pocházejí od různých spisovatelů, harmonický celek. Každý ze súčastněných autorů podává tu výtěžek svých vlastních prací a úvah, jež v obor kinetické theorie hmot spadají, přihlížeje ovšem svědomitě též k pracím jiných badatelů, jež správně oceňuje a při tom poukazuje na leckteré nedokonalosti práce vlastní i cizí v těchto tak obtížných otázkách jak po stránce mathematického řešení, tak i verifikace experimentální.

Ježto zahrnuty jsou v díle tomto myšlenky badatelů nejzvučnějších jmen v oboru moderní kinetické theorie, doporučuji podrobné studium těchto přednášek všem, kteří hledají důkladného a spolehlivého poučení o těchto nových směrech atomistického výkladu hmoty.

Arthur Llewelyn Hughes: ***Die Lichtelektrizität.*** Deutsch von Max Iklé. Mit 40 Figuren. Joh. Ambr. Barth, Lipsko 1915. Str. VI + 192, cena váz. 6·40 M.

Výklad důležitého objevu Hallwachsova ionisací způsobenou světlem vedl k rozvoji nového odvětví fysiky, jež vyšetřuje ve zjevech fotoelektrických souvislost světla a elektřiny. Podati přehled výsledků bádání četných pracovníků v tomto oboru jest cílem anglického spisu amerického fysika A. L. Hughesa, který čtenářům na pevnině evropské přístupnějším učinil Max Iklé, přeloživ jej do němčiny.

Obsah spisu uložen jest v desíti kapitolách. Vyloživ v úvodní kapitole podstatu zjevů fotoelektrických, probírá spisovatel ve druhé kapitole ionisaci plynů a par světlem ultrafialovým hodně malých délek vln, poukazuje při tom na veliké potíže experimentální, jež působí, že mnoho otázek zůstává posud v tomto oboru nezodpověděno. Rozsáhlá kapitola třetí věnována jest závislostem rychlosti elektronů světlem vybavených z těles tuhých na intensitě světla, na kmitočtu a teplotě V druhé její části podává pak spisovatel výklad zjevů fotoelektrických dle theorie kvant, statistické theorie Richardsonovy a theorie resonanční.

Kapitola čtvrtá pojednává o tom, jaký vliv má na fotoelektrický efekt okolní plyn, intensita ozařujícího světla, změna teploty a elektrický výboj, a vykládá o fotoelektrické únavě v prostoru vzduchoprázdném i plynem naplněném jakož i o fotoelektrických zjevech na slitinách. Že efekt fotoelektrický závisí na kmitočtu a polarisaci dopadajícího světla, jest předmětem kapitoly páté, v níž spisovatel vysvětluje též pojem normálního a selektivního efektu. U tenkých vrstev kovových liší se zjevy fotoelektrické jak počtem vybavených elektronů, tak jejich rychlostí dle toho, zdali pozoruje se na straně, kde světlo dopadá, či kde z vrstvy vystupuje. O těchto různostech a jejich výkladu jedná kapitola šestá. Též na nekovech, různých anorganických sloučeninách, ba i na isolátorech lze fotoelektrický efekt pozorovati, výsledky těchto pozorování sděluje spisovatel v kapitole sedmé.

Jaké jsou vztahy mezi efektem fotoelektrickým, fluorescencí a fosforescencí, vyšetřuje kapitola osmá. Zmíniv se v krátké kapitole deváté o oboru posud málo probadaném, že totiž světlo dovede vybavovati též kladně elektrické ionty na povrchu ozářených kovů, končí spisovatel dílo své v kapitole desáté popisem zdrojů záření malých délek vln a propouštějících je prostředí, jichž se při pokusech fotoelektrických s výhodou používá. Ke konci připojen jest seznam osobní i věcný.

Jak z tohoto stručného nástinu obsahu díla Hughesova viděti, dosahuje úplně účelu, který mu spisovatel vytkl, a řadí se tak po bok spisu: „Dr. R. Pohl - Dr. P. Pringsheim: Die lichtelektrischen Erscheinungen", jenž vyšel jako I. svazek sbírky „Sammlung Vieweg" *) a sleduje týž cíl. Spisovatel, jenž sám hojnými pracemi v tomto oboru fysiky se zasloužil, zasvěcuje tu spolehlivě čtenáře do všech podrobností zjevů fotoelektrických, upozorňuje na výsledky bádání zaručeně jisté i na závěry, jež nejsou posud zcela oprávněny, uvádí hojně materiálu číselného v tabulkách i v grafických znázorněních, jakož i schematické nákresy úpravy pokusů, nezapomínaje poukázati, kde jest třeba ještě dalších měření a zkoumání, aby se určité otázky sem spadající mohly zodpověděti bezpečně. Každému, kdo se chce řádně poučiti o těchto nových zjevech, jež slibují osvětliti dosud ne zcela probadáné pole elektronové theorie hmoty, budiž spis Hughesův vřele doporučen. Dr. *Jos. Štěpánek.*

Dr. Friedrich Poske: ***Didaktik des physikalischen Unterrichts.*** Mit 33 Figuren im Text. Leipzig und Berlin. Druck und Verlag von B. G. Teubner 1915. Str. X + 428, cena váz. 12 M.

Lipské známé nakladatelství Teubnerovo obralo si úkolem, vydati didaktické spisy všech tak zvaných realistických předmětů na vyšších školách, jichž redakci přejali známí a osvědčení odborníci: Dr. A. Höfler, profesor university vídeňské, a Dr. F. Poske, profesor askanského gymnasia v Berlíně, vydavatel výborného časopisu: „Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht." Cílem spisů těchto jest, aby byly pomůckami a skutečnými příručkami učitelům realistických oborů na středních školách a aby, poukazujíce na vzájemný vztah jednotlivých reálních předmětů, usnadňovaly součinnost různých učitelů k harmonickému vyučování a vzdělávání svěřené mládeže. Direktivou těchto spisů jsou známé návrhy učebných osnov meránské komise lékařů a přírodozpytců pro reformu přírodovědeckého a mathematického vyučování z r. 1905. Z desíti projektovaných svazků vydal již před válkou prof. Höfler dva, a to didaktiku mathematiky (1910) a didaktiku astronomie (1913), a královecký profesor Landsberg didaktiku botaniky (1910). Jakožto čtvrtý svazek těchto spisů, zvaných „Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen", jehož vydání r. 1915 válka značně opozdila, vyšla Poskeova didaktika fysiky, jíž chceme věnovati svou pozornost.

Spisovatel zasvětil ji památce svého bývalého učitele Bernarda Schwalbea, prvního navrhovatele praktických cvičení fysikálních v Německu. V úvodě připomíná, že jest si toho vědom, že nelze podati

*) Referát o něm viz v „Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky" roč. XLV., str. 66. až 68.

takového návodu vyučovacího, který by samojediný k cíli vedl, ale že nicméně chce prospěti svou didaktikou učiteli, aby, slyše názory jiných učitelů a přirovnávaje je se svými, propracoval se tak k dokonalosti v umění vyučovatelském.

Spis kromě úvodu rozvržen jest ve čtyři díly. V prvém všeobecném díle pojednává spisovatel o předmětě, úloze a cíli fysiky, všímá si methody fysikálního badání a vyvozuje z toho, jaké jsou úkoly a cíle vyučování fysikálního, totiž: 1. zdokonaliti schopnost pozorovací, 2. sdíleti positivní vědomosti, jež má si mládež trvale osvojiti pro život, 3. uváděti v poznání příčinné souvislosti a v systém fysiky a 4. naváděti k vědeckému myšlení. Z toho vyplývá pak, že vyučovací methoda má býti z části heuristická, z části dogmatická, rozhodně však staví se spisovatel proti požadavku vyslovovanému od některých reformátorů, aby jen některé partie fysiky byly důkladně probírány, jiné pak dle okolnosti i zcela vynechávány. V příčině rozvržení učiva na jednotlivé třídy, jest prof. Poske horlivým přívržencem dvojstupňovitosti, jak již v organisačním statutu rakouských gymnasií z r. 1849 byla nařízena. I na nižším stupni navrhuje v čelo fysiky základy mechaniky, ježto operuje nejvíce s pojmy danými přímo smyslovým poznáváním. Vřele se přimlouvá za to, aby po vzoru rakouských osnov z r. 1908/9 byly též základy astronomie zařazeny do osnov fysiky středních škol v Německu. Vysvětliv své názory o ceně a vhodném provádění praktických cvičení fysikálních, probírá některé jednotlivosti z vyučování fysiky, z nichž zvláště budiž upozorněno na požadavek, že jest třeba osnovy mathematického vyučování tak upraviti, aby bylo možno ve fysice poznatků mathematických včas upotřebiti, tak jmenovitě poměrů a úměr již na nižším stupni a základních pojmů počtu infinitesimálního na stupni vyšším. I v tom jest se spisovatelem souhlasiti, že plně oceňuje učebnici jako pomůcku žákova domácího studia, nikoli však jako normu látky, která by musila býti probrána, jakož i že váží si historických doplňků a technických aplikací při vyučování fysice.

V díle druhém a třetím podává spisovatel podrobný návod, jak jednotlivým partiím fysiky jest vyučovati, a to ve stručnějším díle druhém na stupni nižším a na stupni vyšším v obšírném díle třetím. Nelze v tomto stručném referátě sledovati všech myšlenek spisovatelových a jest nutno laskavé čtenáře stran podrobností odkázati ke studiu díla samého. Jen tolik budiž tu uvedeno, že se spisovatel vyslovuje pro stejný pořad učiva na stupni nižším i vyšším, totiž mechanika, thermika, akustika, optika, elektřina a magnetismus. Vyučování chce míti založeno na methodě problémové; učitel má vzbuditi v žácích zájem a zvědavost pro určitý problém fysikální a užívaje dřívějších poznatků i vlastních zkušeností žákových, má spolučinností žactva řešení, po případě vysvětlení toho problému provésti jak po stránce experimentální, tak i theoretické a ukojiti tak zvědavost žákův. Rozhodně vyslovuje se Poske proti úzkostlivému lpění na systematické úpravě látky vyučovací a dává přednost přirozenému uspořádání se stálým zřetelem k historickému vývoji. Ku konci třetího dílu vykládá své názory o zařadění astronomie jakožto završení fysiky na konec celé látky, proti čemuž polemisuje v dodatku k tomuto třetímu dílu prof. Höfler, poukazuje na osvědčený způsob v rakouských osnovách z r. 1909 zavedený, kde připojuje se nauka o pohybech nebeských těles hned k nauce o křivočarém pohybu.

Stručný díl čtvrtý věnován jest kritice učebných osnov středních škol německých se zřetelem k fysice, chemii, přírodopisu a mathematice. Spisovatel přál by si, aby fysika a chemie byly v rukou jednoho učitele jak na nižším, tak i na vyšším stupni. Jako příklady osnov uvádí tu již zmíněnou meránskou osnovu z r. 1905 a pak osnovu bavorských vyšších reálních škol z r. 1907, v níž zavedena jsou již praktická cvičení žákovská jako povinná součást vyučování.

V následujícím prvním doplňku uvedeny jsou úplné tituly zkratkami citované literatury, druhý doplněk obsahuje přehled značek a vět, na nichž se do roku 1914 usnesl výbor pro označování veličin fysikálních a technických a stanovení důležitých konstant fysikálních. Závěrem spisu jest věcný seznam.

Neobyčejná cena díla Poskeova spočívá v tom, že dovedl jakožto dlouholetý, vynikající praktik středoškolský ve spise svém shrnouti bohaté své zkušenosti v oboru didaktiky fysikální, neuzavíraje se při tom cenným návrhům a zkušenostem jiných znamenitých učitelů fysiky, a naznačiti tak jiným učitelům správnou cestu, po které jest se jim při vyučování bráti. Hlavně oceňuje veliké zásluhy, jichž o didaktiku fysiky většinou po stránce experimentální si dobyl Arnošt Grimsehl, jenž na počátku světové války padl v boji o Langenmarck. Další světlou stránkou didaktiky Poskeovy jest důraz, který klade při fysikálním vyučování na experiment, ovšem vždy pečlivě připravený a zdařile provedený; aby usnadnil učiteli vhodný způsob experimentu si vybrati a sestaviti, uvádí podrobné odkazy na hlavní díla o technice experimentální. Neméně dlužno vážiti si, že hojně jest přihlíženo k aplikacím fysikálním v technice, a že při tom spisovatel stále dotvrzuje, jak veliká jest cena správného vyučování fysikálního i po stránce vzdělání humanistického.

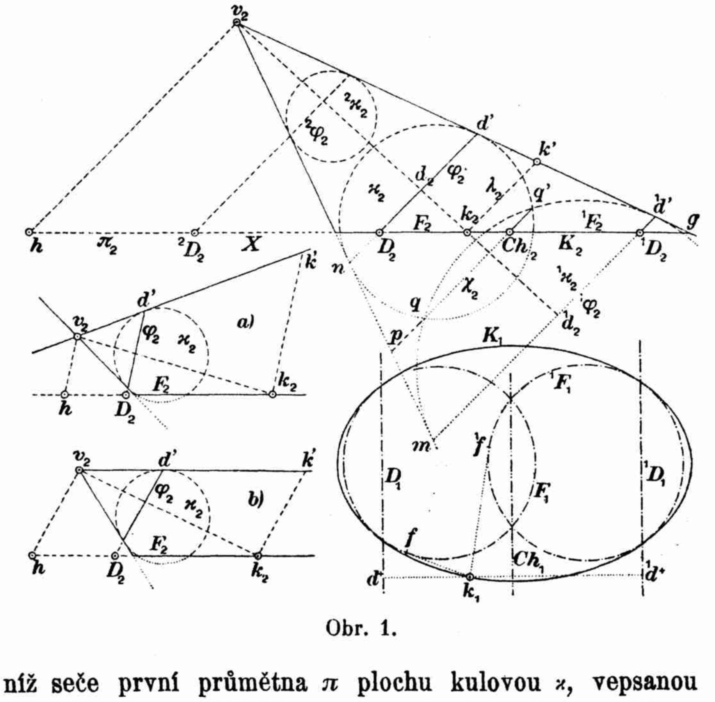
I když nelze každému ve všech jednotlivostech se spisovatelovými názory se srovnávati, tolik jest uznati, že pečlivé studium didaktiky Poskeovy přinese každému učiteli fysiky na středních školách prospěch nemalý, ježto z různých methodicko-didaktických pokynů, jichž tu přehojná zásoba se mu podává, může si vybrati pro své vyučování ty, jež nejlépe se mu zamlouvají. Doporučuji proto spis tento, jenž vyniká i svou zevní výpravou knižní i mírnou cenou, do knihoven všech našich odborníků a hlavně též do knihoven učitelských všech středních škol.

V Praze v září 1916. Dr. *Josef Štěpánek.*

O fokálních kružnicích kuželoseček.

Napsal Dr. **Fr. Kadeřávek.**

Dán buď rotační kužel, jehož vrchol buď bod v a osa buď rovnoběžna s nárysnou, nakloněna však k půdorysně (obr. 1.). Vyhledejme stopu K kužele na půdorysně jakož i kružnici F,



Obr. 1.

v níž seče první průmětna π plochu kulovou $\varkappa$, vepsanou do daného kužele a dotýkající se ho podél kružnice φ. Dále narýsujme půdorysnou stopu D roviny křivky φ. Po té vytkněme obecný bod k křivky K a veďme jím k ploše kulové $\varkappa$ tečny

$\overline{kf}$ — jest to přímka položená v půdorysně a tečna kružnice F a $\overline{kd}$ — totožnou s povrchovou přímkou $\overline{kdv}$; nárys $\overline{k_2d_2}$, pravá velikost $\overline{k'd'}$ vyhledána pomocí bodem k proložené kružnice λ na daném kuželi. Délky těchto tečen jsou si rovny; $\overline{d'k'} = \overline{fk}$. Spustíme-li s bodu k kolmici $\overline{kd^+}$ k přímce D, jest

$$\overline{d^+k_1} = \overline{D_2k_2},$$

proto poměr

$$\overline{d^+k_1} : \overline{k_1f} = \overline{D_2k_2} : \overline{d'k'} = \overline{hg} : \overline{gv_2} = c$$

veličinou stálou. Z toho jest patrno, že, nazveme-li „vzdáleností" bodu k_1 od kružnice F délku tečny $\overline{kf_1}$, platí věta:

1. Geom. místo bodů, pro něž poměr vzdáleností od dané přímky D a dané kružnice F jest stálý, jest kuželosečka K.

Kružnice F nazývá se fokální kružnicí křivky K a přímka D jest příslušnou přímkou řídící. Ježto koule $\varkappa$ se podél kružnice φ daného kužele dotýká, patrno, že

2. Kuželosečka K dotýká se fokální kružnice v průsečných bodech jejích s přímkou řídící.

Sestrojme další plochu kulovou ${}^1\varkappa$, která se plochy kuželové dané dotýká podél kružnice ${}^1\varphi$, jejíž rovina mějž prvou stopu v přímce ${}^1D$; půdorysný řez plochy kulové ${}^1\varkappa$ buď kružnice ${}^1F$. Poměr vzdáleností libovolného bodu k_1 křivky K od útvarů ${}^1D$, ${}^1F$ jest

$$\overline{k_1{}^1d} : \overline{k_1{}^1f} = \overline{k_2{}^1D_2} : \overline{k'{}^1d'} = \overline{hg} : \overline{gv_2} = c,$$

tedy opět stálý a týž jako prvé. Kuželosečka K se dotýká též kružnice ${}^1F$ v průsečících jejích s přímkou ${}^1D$. Patrno z toho, že

3. Každá kružnice, která se dotýká dvakráte kuželosečky K, jest její fokální kružnice; spojnice dotyčníků jest příslušná řídící přímka.

Mezi fokální kružnice přináleží též ohnisko, které tvoří přechod od reálných k imaginárným kružnicím fokálným. Tak na př. plocha kulová ${}^2\varkappa$ protíná půdorysnu v imaginárné kružnici fokální, k níž však náleží reálná přímka řídící ${}^2D$ (nárys ${}^2D_2$).

4. Pro veškery dvojiny fokálních kružnic a příslušných řídících přímek má při téže kuželosečce (neb kuželosečkách po-

dobných) stálá hodnota c touž velikost a to při ellipse jest $c < 1$ (viz obr. 1.); při hyperbole jest $c > 1$ (obr. 1. a); při parabole jest $c = 1$ (obr. 1. b).

Na základě uvedených vět snadno lze sestrojiti kuželosečku, dána-li fokální kružnice, přímka řídící a buď bod neb hodnota stálého poměru c, neb dána-li osa kuželosečky, fokální kružnice a dva body.

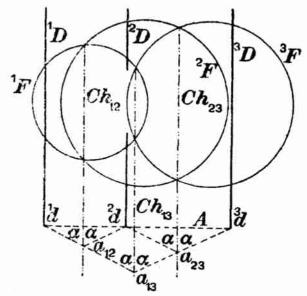
Koule $\varkappa$ a ${}^1\varkappa$ protínají se v kružnici χ, půdorysná stopa Ch roviny této křivky jest chordálou kružnic F a ${}^1F$. Ježto jest

$$\overline{np} = \overline{mp} = \sqrt{pq \cdot pq'},$$

jest i

$$\overline{D_2 Ch_2} = \overline{Ch_2 {}^1D_2}$$

a proto i vzdálenost přímek D, ${}^1D$ od chordály Ch stejná.



Obr. 2.

5. Přímky řídící D, ${}^1D$ příslušící k fokálním kružnicím F, ${}^1F$ jsou stejně vzdáleny od jejich chordály.

Na základě této věty snadno určíme přímku řídící ${}^1D$, dána-li kružnice fokální F, přímka řídící D a další kružnice fokální ${}^1F$ kuželosečky. (Centrála křivek F, ${}^1F \perp D$.) Též možno uvedenou větou provésti řešení kuželosečky dané 3 kružnicemi ${}^1F$, ${}^2F$, ${}^3F$ fokálními (středy samozřejmě v jedné přímce), obr. 2. Vyhledejme chordály $Ch_{1,2}$, $Ch_{1,3}$, $Ch_{2,3}$ a na jedné z nich na př. $Ch_{1,3}$ vytkněme bod $a_{1,3}$. Jím veďme obě od přímky $Ch_{1,3}$ o libovolný úhel α odchýlené přímky, jejichž průsečíky $a_{1,2}$, $a_{2,3}$ s chordálami $Ch_{1,2}$, $Ch_{2,3}$ opět přímky pod týmž úhlem α. Průsečíkem ${}^2d$ posledně sestrojených přímek veďme paprsek $A \perp Ch_{1,3}$ a vyšetřme průsečíky jeho ${}^1d$, ${}^3d$ s přímkami bodem $a_{1,3}$ vedenými. Body ${}^1d$, ${}^2d$, ${}^3d$ vedené kolmice ${}^1D$, ${}^2D$, ${}^3D$ k paprsku A jsou řídící přímky příslušné k daným fokálním kružnicím, neboť jsou vždy po dvou stejně vzdáleny od příslušných chordál.

Konstrukce této lze použíti k vyšetření obrysu plochy 2. stupně, známy-li 3 kruhové průměty tří kuželoseček povrchových neb jsou-li dány orthog. obrysy tří ploch kulových dané rotační plochy 2° se dotýkajících.

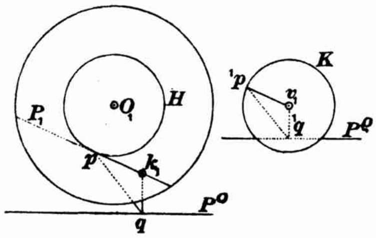
Z obr. 1. dále patrno, že vzhledem k rovnostem

$$\overline{k_1 f} = d'k'; \ \overline{k_1 {}^1f} = k'{}^1d'$$

algeb. součet

$$fk_1 + k_1{}^1f = d'k' + k'{}^1d' = d'{}^1d' = C$$

jest pro křivku K konstantní. I jest



Obr. 3.

6. geom. místo bodů, pro něž alg. součet vzdáleností (měřených délkami tečen) od dvou pevných kružnic F, ${}^1F$ jest konstantní, kuželosečka, dané kružnice jsou její kružnice fokální.

V obr. 3. buď O_1 orth. průmět osy sborceného hyperboloidu rotačního, jehož hrdlo H buď v průmětně. P_1 buď průmět obecné povrchové přímky P; $\overline{{}^1pv_1}$ průmět s přímkou P rovnoběžné přímky řídícího kužele (Kv) daného hyperboloidu, který protněme rovinou σ. Stopa její buď P^σ, P^ϱ buď stopa roviny $\varrho \parallel \sigma$ a jdoucí vrcholem v řídícího kužele. Průsečík k přímky P s rovinou σ stanovíme následovně: Bodem v veďme přímku největšího spádu $\overline{v{}^1q}$ v rovině ϱ, dále stopou p přímky P rovnoběžku $\overline{pq}$ k $\overline{{}^1p{}^1q}$ a průsečíkem q oné se stopou P^σ přímku největšího spádu $\overline{qk}$ v rovině σ, t. j. $\overline{qk} \parallel \overline{{}^1qv}$. I jest pak

$$\triangle pqk_1 \sim \triangle {}^1p{}^1qv_1,$$

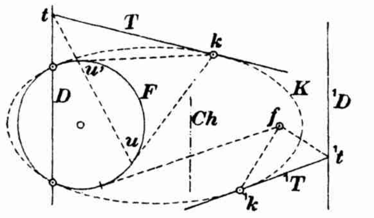
tudíž poměr $\overline{k_1q} : \overline{k_1p} = \overline{v_1{}^1q} : \overline{v_1{}^1p}$ = poměru vzdálenosti bodu v_1 od přímky P^ϱ k poloměru kružnice K, tedy hodnotě stálé. Proto:

7. Řez rovinný rotač. hyperboloidu sborceného promítá se kolmo na rovinu hrdla do kuželosečky, pro niž hrdlo plochy jest fokální kružnice a stopa roviny sečné příslušnou přímkou řídící.*)

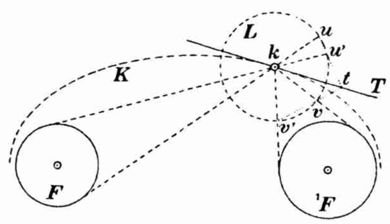
Z věty uvedené snadno odvodíme známou větu o

7*a* rotačním kuželi: Vrchol rot. kužele promítá se do roviny kolmé k ose do ohniska průmětu rovinného řezu.

Věty 7. a 7*a* můžeme použíti ke konstrukci tečny T kuželosečky K v bodě k (obr. 4.), známe-li kružnici fokální F a příslušnou přímku řídící D. Předpokládejme, že K je průmět



Obr. 4.



Obr. 5.

rovinného řezu hyperboloidu na rovinu hrdla F, D je stopa roviny tečné. Rovině tečné bodu k přísluší na rovině hrdla stopa $\overline{uu'}$ a tudíž $\overline{tk}$, kde t jest průsečík přímky $\overline{uu'}$ s přímkou D, je průmět průsečnice roviny sečné s rovinou tečnou hyperboloidu, tedy tečna k průmětu K křivky sečné. V témž obraze vyznačena známá konstrukce pro ohnisko f a přímku řídící ${}^1D\,(\overline{f{}^1t} \perp \overline{f{}^1k})$.

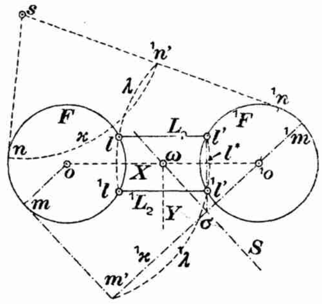
Dva rot. sbor. hyperboloidy o rovnoběžných osách a témž kuželi řídícím mají krom nekonečně vzdálené křivky ještě jednu kuželosečku společnou. Tato promítá se na rovinu kolmou k osám hyperboloidů do kuželosečky K (obr. 5.) a hrdla F, ${}^1F$ do jejích kružnic fokálních. Chceme-li v libovolném bodě k křivky K sestrojiti tečnu, sestrojíme bodem k tečny ke kružnicím F, ${}^1F$;

---

*) Srv. Brisse, Cours de géométrie descriptive, II, 1891, str. 234 a n. a Mannheim, Cours de géométrie descriptive, 1880, str. 403, leçon 28.

jsou to průměty površek obou systémů hyperboloidů uvažovaných. Naneseme-li na tyto tečny stejné úsečky od bodu k do bodů u, u'; v, v' kružnicí L kol k opsanou, tu $\overline{uu'}$, $\overline{vv'}$ jsou hlavní přímky (různoběžné) tečných rovin obou hyperboloidů v bodě k a jest tudíž spojnice průsečíku t přímek $\overline{uu'}$, $\overline{vv'}$ s bodem k průmět průsečnice rovin tečných, tedy tečna ke křivce K. Kdybychom bodem t vedli tečny ke kružnici L a spojili dotyčníky s bodem k, obdrželi bychom dva paprsky, jdoucí ohnisky křivky K.

Mannheim A. užívá kuželosečky určené bodem a dvěma fokálními kružnicemi při sestrojování dvojných bodů vrženého stínu prstence. Buďtež (obr. 6.) F, ${}^1F$ kružnice světelného meridiánu prstence a bod s buď bod svítící. Veďme jím tečny $\overline{sn}$, $\overline{s^1n}$ k F, ${}^1F$, učiňme $\overline{s^1n'} = \overline{sn}$ a opišme kol středu ${}^1o$ bodem



Obr. 6.

${}^1n'$ kružnici λ a její průsečíky s F označme l, ${}^1l$. V těchto bodech dotýká se meridián rot. hyperboloidu sborceného, procházejícího bodem s, a souosého s daným torem křivky F, tedy prstence sama dotýká se použitý hyperboloid podél kružnic L, ${}^1L$ (průměty L_2, ${}^1L_2$) body l, ${}^1l$ popisovaných. Povrchová přímka pomocného hyperboloidu, jdoucí bodem s, náleží jeho mezi stínu vlastního a průsečíky její s kružnicemi L, ${}^1L$ jsou dva body meze stínu vlastního daného prstence, které, spočívajíce na jediném paprsku světelném, vrhají stín oba do téhož bodu, dvojného to bodu meze stínu vrženého.

V obr. 6. vyznačena též konstrukce pro osvětlení paprsky rovnoběžnými se směrem S (v rovině křivek F, ${}^1F$ položeným). Konstrukci lze provésti též velmi jednoduše dle M. Janina takto:

Středem ω prstence veďme paprsek S, středem ${}^1o$ meridiánu světelného ${}^1F$ k němu kolmici $\overline{{}^1o\sigma}$, průsečíkem jejím σ s S kolmici k $\overline{\omega\,{}^1o}$ a průsečíky l', ${}^1l'$ této s ${}^1F$ kružnice L, ${}^1L$, na nichž položené body mezi stínu vlastního mají společný vržený stín, tedy určují dvojný bod meze stínu vrženého. Konstrukci tuto možno snadno odůvodniti počtem; jeť při hyperbole, jejíž asymptota jest S, osy XY, délky poloos a, b a jeden její bod l' o souřadnicích (x, y), subnormála $\overline{l^{*}\,{}^1o}$ budu l' dána výrazem $\frac{b^2}{a^2}x$; v obr. 6. $\overline{l^{+}\,{}^1o} \,.\, x = l^{*}\overline{\sigma}^2$, $\frac{l^{*}\sigma}{x} = \frac{b}{a}$, tedy $\overline{l^{*}\,{}^1o} = \frac{b^2}{a^2}x$. (Mannheim A., Cours de géométrie descriptive, 1880, str. 340. Srv. zejména čl. p. Dra. Q. Vettera: Kuželosečky dvojnásobně se dotýkající dvou kružnic. Tohoto časopisu roč. XLIV. str. 415.).

Vypočítávání obsahu šikmo seříznutého kužele.

Žákům středních škol podává **Fr. Granát**, prof. reálky v Kostelci n. Orl.

Protneme-li rotační kužel rovinou, je známo, že řezem je kuželosečka. Je-li odchylka povrchových přímek od osy kužele β, je odchylka myšlené roviny základny (kolmé k ose kužele) od povrchových přímek $\alpha = R - \beta$, a odchylka roviny řezu od osy kužele ψ, tedy od základny $\omega = R - \psi$, platí, že řez je kruhový pro $\psi = R\,(\omega = 0)$, řez je elliptický pro $\psi > \beta\,(\omega < \alpha)$, parabolický pro $\psi = \beta\,(\omega = \alpha)$ a hyperbolický pro $\psi < \beta\,(\omega > \alpha)$.

Vezmeme-li v úvahu právě odchylku roviny řezu od osy, můžeme mluviti o nekonečné ploše kuželové seříznuté rovinou, vedenou bodem na povrchové přímce v určité vzdálenosti od vrcholu, bez ohledu na velikost poloměru základny kužele. Tím se nám naskýtá úloha vypočísti obsah takto odříznutého kužele a také ovšem kužele komolého, vzniklého oddělením tohoto od úplného kužele, který musíme ovšem omeziti řezem kolmým k ose kužele v určité vzdálenosti od jeho vrcholu.

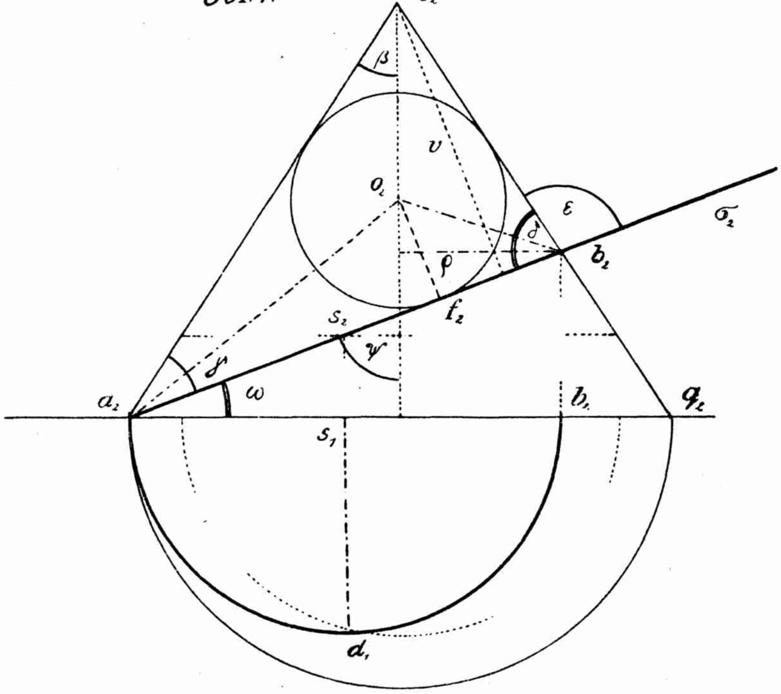
Ku stanovení krychlového obsahu odříznutého kužele musíme znáti rozměry kuželoseček.*) Rozměry tyto lze s výho-

*) Srovnej pojednání: *Václav Hübner* „O plášti rotačního kužele, seříznutého rovinou.“ Výroční zpráva c. k. reálky na Král. Vinohradech, šk. r. 1903—4, a jednotlivé články v Č. Č. M. roč. 33, 38.

dou určiti užitím poučky Quetelet-Daudelinovy, že *ohnisko řezu je v dotyčném bodě koule, dotýkající se obliny kužele i roviny řezu.* —

Budiž (obr. 1.) v rovině listu dán osový řez rotačního kužele za podmínky, že rovina σ kolmá k rovině tohoto osového

Obr. 1.



řezu svírá s osou O úhel $\psi > \beta$; tedy řez touto rovinou je elliptický. Krychlový obsah takto odříznutého kužele je

$$K = \tfrac{1}{3} z \,.\, v,$$

kde z je plocha řezu, v výška takto vzniklého šikmého kužele, t. j. vzdálenost vrcholu od roviny řezu. Z analytické geometrie je známo, že $z \equiv E = \pi a \,.\, b$, při čemž a, b jsou poloosy ellipsy. Určeme tyto jednoduše z $\Delta a_2 b_2 v_2$, kde

$$2a = \frac{m \sin 2\beta}{\sin \gamma},$$

pro $\gamma = \psi - \beta$ tedy

$$2a = \frac{m \sin 2\beta}{\sin(\psi - \beta)};$$

z toho

$$a = \frac{m \sin 2\beta}{2 \sin(\psi - \beta)}, \tag{1}$$

kde $m = \overline{v_2 b_2}$.

Pro ellipsu platí: $b^2 = a^2 - e^2$; jedná se tedy o vypočtení excentricity e.

Z $\Delta\, a_2 f_2 o_2$ plyne, že

$$\varrho = (a + e) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\psi - \beta) \tag{2}$$

a z $\Delta\, b_2 f_2 o_2$ plyne, že

$$\varrho = (a - e) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\delta; \tag{3}$$

$$\delta = 2R - (\gamma + 2\beta)$$

čili

$$\delta = 2R - (\psi + \beta).$$

Porovnáme-li tyto rovnice, určíme z nich jednoduchými početními úkony e.

$$(a + e) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\psi - \beta) = (a - e) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\psi + \beta)$$

$$a[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}[2R - (\psi + \beta)] - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\psi - \beta)]$$

$$= e[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}[\psi - \beta) + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}[2R - (\psi + \beta)]],$$

čili

$$a \frac{\sin(R - \psi)}{\sin \frac{1}{2}(\psi + \beta) \cos \frac{1}{2}(\psi - \beta)} = e \frac{\sin(R - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\psi - \beta) \,.\, \sin \frac{1}{2}(\psi + \beta)}$$

a tedy

$$a \cos \psi = e \cos \beta;$$

z toho

$$e = a \frac{\cos \psi}{\cos \beta} \tag{4}$$

a tedy

$$b^2 = a^2 - a^2 \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \beta}$$

$$b^2 = a^2 \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \psi}{\cos^2 \beta}$$

$$b = \frac{a}{\cos \beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \psi} = \frac{a}{\cos \beta} \sqrt{(\cos \beta - \cos \psi)(\cos \beta + \cos \psi)}$$

a nahradíme-li výrazy schopnými logarithmování, bude

$$b = \frac{a}{\cos \beta} \sqrt{\sin(\beta + \psi) \sin(\psi - \beta)}. \tag{5}$$

Tedy $z = \pi a b$.

$$z = \pi \frac{a^2}{\cos\beta} \sqrt{\sin(\beta + \psi)\sin(\psi - \beta)}$$

a dosadíme-li za a (1), bude

$$z = \frac{\pi}{\cos\beta} \cdot \frac{m^2 \sin^2 2\beta}{4\sin^2(\psi - \beta)} \sqrt{\sin(\beta + \psi)\sin(\psi - \beta)}$$

a tedy

$$K = \tfrac{1}{3} \frac{\pi}{\cos\beta} \frac{m^2 \sin^2 2\beta}{4\sin^2(\psi - \beta)} \sqrt{\sin(\beta + \psi)\sin(\psi - \beta)} \,.\, m \sin\varepsilon,$$

kde $\varepsilon = \psi + \beta$, tedy po úpravě vložením některých činitelů pod odmocnítko

$$K = \tfrac{1}{6}\, \pi m^3 \sin 2\beta \sin\beta \sqrt{\left[\frac{\sin(\psi + \beta)}{\sin(\psi - \beta)}\right]^3},$$

kterýžto výraz je schopný logarithmického počítání.

(Dokončení.)

O některých analogiích mezi hydrodynamikou a naukou o elektřině *).

Žákům středních škol píše prof. Dr. **Bohumil Kučera**.

Hydrodynamikou nazývá se nauka o pohybu kapalin. Některé vlastnosti proudící kapaliny jeví velikou formální podobnost s vlastnostmi elektrického (magnetického) pole nebo s vlastnostmi proudící elektřiny, takže duch lidský, zvyklý objasňovati si neznámé zjevy z denní zkušenosti běžnými a názornými zjevy mechanickými, začasté podléhal pokušení, viděti v těchto podobnostech více než *analogii*, viděti v nich *výklad* zjevů neznámých. V dalších vývodech poznáme, že začasté není toto počínání si oprávněno, ježto oba druhy zjevů jeví vedle podobností také rozpory, jež ovšem stávají se začasté patrnými teprve tehdy, sledujeme-li zjevy podrobně, nejlépe cestou mathematické analyse.

---

*) Tento článek řadí se k dřívějším „O pohybu otáčivém" a „O rázu těles" v ročníku loňském a předloňském a platí o něm totéž, co tam bylo řečeno. Učebnice fysiky pro vyšší třídy středních škol Jeništa-Mašek Nachtikalova, jejíž vývody článek doplňuje, jest citována dílem (I. či II.) a stránkou a to na prvém místě vydání pro gymnasia, na druhém vydání pro reálky. Článek přináší současně materiál pro řešení fysikálních úloh.

K usnadnění úvah hydrodynamických předpokládáme začasté, že kapalina nejeví *vnitřního tření*, že není viskosní, nemá viskosity, to jest že při vzájemném posunutí jejich částic nevzniká odporující síla (I, 114, 123), že kapalina je *ideální*. Od ideální kapaliny požadujeme ještě i jiné vlastnosti, jež se nám ozřejmí teprve průběhem dalších výkladů. Výsledky, k nimž dojdeme, platí pak zcela přesně ovšem pouze pro kapaliny ideální, leč chování se kapalin skutečných se často od nich liší velmi málo, neboť kapaliny jako voda, alkohol, aether a j. jeví vnitřní tření poměrně malé.

1. ***Postupný pohyb kapaliny jakožto celku.*** Máme-li uzavřenou a kapalinou zcela vyplněnou nádobu, podléhá při pohybu postupném týmž zákonům jako těleso tuhé, nenastane v kapalině žádného vzájemného posunutí částic. To lze snadno pokusem dokázati, vytvoříme-li na př. ve vodě kapkou anilinové modře nebo několika úlomky inkoustové tužky zbarvená vlákna.

Je-li kapalina podrobená vlivu zemské tíže v klidu, jest tlak v téže hloubce pod povrchem stejný, každý horizontální řez kapalinou jest *hladinou* (I. 116, 126). Stejně je tomu, pohybuje-li se kapalina rovnoměrně. Při pohybu zrychleném (neb zpozděném, o zrychlení záporném) směrem různým od vertikálního tomu tak není.

Dejme tomu, že se kapalina specifické hmoty s i s nádobou pohybuje horizontálně se zrychlením rovným a. Představme si v ní horizontální váleček délky l a průřezu q, jehož osa souhlasí se směrem zrychlení. Na přední straně sloupečku účinkujž hydrostatický tlak p_1, na zadní pak p_2. Pak je úhrnná síla účinkující směrem pohybu na váleček rovna $f = (p_2 - p_1)\, q$. Ježto je hmota válečku $m = q\, l\, s$, a síla dle základního zákona Newtonova rovna součinu z hmoty a zrychlení (I. 18, 19.), musí

$$(p_2 - p_1)\, q = q\, l\, s\, a \quad \text{čili} \quad \frac{p_2 - p_1}{l} = sa. \qquad (1)$$

Roste tedy tlak v téže horizontální rovině, postupujeme-li proti směru zrychlení a sice vzroste při postupu o jednotku délkovou o veličinu sa. Je-li tlak dán vertikálním sloupcem kapaliny výšky h, máme

$$p_1 = h_1 sg \quad p_2 = h_2 sg \quad \text{a} \quad \frac{h_2 - h_1}{l} = \frac{a}{g}, \qquad (2)$$

kde g je zrychlení zemské tíže. Volný povrch kapaliny jest skloněn k horizontále o úhel ϑ, kde

$$tg\,\vartheta = \frac{h_2 - h_1}{l} = \frac{a}{g}, \tag{3}$$

takže kapalina stojí ve směru (kladného) zrychlení níže. Je-li pohyb rovnoměrný, $a = 0$, je $h_2 = h_1$ volný povrch horizontální. Kdyby nebylo otřesů, udával by volný povrch vody ve sklenici každou změnu rychlosti železničního vozu. Zjev námi studovaný vysvětluje, proč se přeleje voda ve sklenici, pohneme-li jí rychle na stole.

2. ***Rotace kapaliny jakožto celku.*** Otáčíme-li nádobou, v níž jest kapalina opatřena anilinem zbarvenými vlákny kolem vertikální osy, pozorujeme dívajíce se shora, že kapalina zprvu zůstává v klidu, a později, že otáčivý pohyb postupuje od stěn blíže k ose otáčecí, až konečně se dostane celá kapalina v otáčení jako tuhý celek, takže vzájemná poloha její částic se nemění. Při tom nabyl volný povrch kapaliny vydutého tvaru, jehož povahu můžeme počtem zjistiti.

Znenáhlé postupování rotace od stěn k ose rotační vysvětluje se vnitřním třením. Rotující nádoba strhuje s sebou nejprve částice kapaliny, které lpějí na stěnách; tato vrstva strhuje následkem vnitřního tření k rotaci další koncentrickou vrstvu kapaliny od stěn vzdálenější a podobně šíří se pohyb dále. Když nastal svrchu zmíněný stav ustálený (stacionárný), přestává vnitřní tření působiti a bude tedy výsledek naší úvahy od viskosity kapaliny nezávislý.

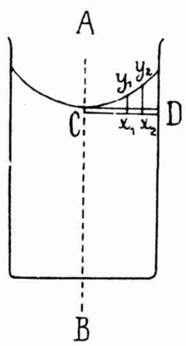
Představme si v kapalině (obr. 1.), která jakožto celek se otáčí se stálou úhlovou rychlostí ω kolem osy AB, horizontální váleček CD průřezu q, který počínaje od nejnižšího bodu C povrchu, charakterisovaného vzdáleností $x_0 = 0$ od osy otáčecí, jde až ku stěně nádoby ve vzdálenosti $x_n = R$, kde R je poloměr nádoby. Výška volného povrchu kapaliny nad válečkem budiž označena písmenou y s příslušným indexem, takže patrně $y_0 = 0$. Uvažujeme-li o elementu válečku mezi x_1 a x_2, jehož hmota jest $m = (x_2 - x_1) . q . s$, tedy vidíme, že na něj musí působiti dostředivá síla $m . r . \omega^2$, kde r jest jeho vzdálenost od osy otáčecí, aby udržoval se v rovnoměrném otáčení (I 59, 63).

Ježto lze klásti $r = \frac{1}{2}(x_2 + x_1)$, jest síla dostředivá dána výrazem

$$(x_2 - x_1)\, q \,.\, s \,.\, \tfrac{1}{2}(x_2 + x_1) \,.\, \omega^2 = \tfrac{1}{2}\, q\, s\, \omega^2 (x_2^2 - x_1^2).$$

Jedinou vnější silou na element působící jest hydrostatický přetlak sloupečku y_2 nad y_1, rovný $(y_2 - y_1)\, q \,.\, s \,.\, g$, takže lze psáti podmínku rovnovážného stacionárného stavu

$$y_2 - y_1 = \frac{\omega^2}{2g}(x_2^2 - x_1^2).$$



Obr. 1.

Myslíme-li si celý váleček rozdělený na n elementů řezy ve vzdálenostech $x_0 = 0$, x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$, $x_n = R$, můžeme pro všechny psáti obdobně

$$y_1 - y_0 = \frac{\omega^2}{2g}(x_1^2 - x_0^2),$$

$$y_2 - y_1 = \frac{\omega^2}{2g}(x_2^2 - x_1^2)$$

$$\vdots$$

$$y_n - y_{n-1} = \frac{\omega^2}{2g}(x_n^2 - x_{n-1}^2).$$

Sečteme-li všech n rovnic, tedy, ježto $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$, zbude

$$y_n = \frac{\omega^2}{2g} x_n^2. \qquad (4)$$

Integrálním počtem*) obdrželi bychom týž výsledek rychleji. Podmínkou rovnováhy, píšeme-li za

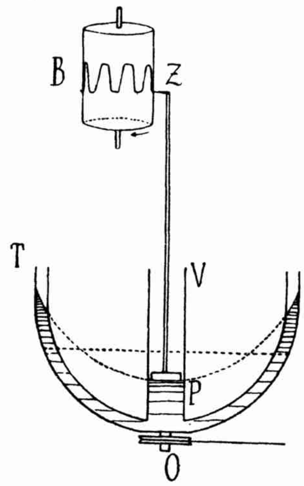
$$x_2 - x_1 = dx \quad y_2 - y_1 = dy \quad \text{a} \quad r = x,$$

jest

$$q \,.\, s \,.\, dx \,.\, x \,.\, \omega^2 = dy \,.\, q \,.\, s \,.\, g$$

čili

$$\int_0^{y_n} dy = y_n = \frac{\omega^2}{g} \int_0^{x_n} x \, dx = \frac{\omega^2}{2g} x_n^2 .$$



Obr. 2.

Vidíme, že každý osový řez volným povrchem jest *parabola*, že tedy má volný povrch tvar *rotačního paraboloidu*, a to u různých kapalin téhož, neboť jediná tuto různost charakterisující konstanta, totiž specifická hmota kapaliny, z počtu vypadla. Na velikosti vnitřního tření závisí pouze doba, za kterou nastane stav ustálený při dané rychlosti rotační a tvaru nádoby.

*) Viz *Bydžovský-Vojtěch*: Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií, str. 55 *n.* nebo *Dr. J. Vojtěch*, Základy mathematiky ke studiu věd přírodních a technických (Praha 1916, nákladem Jednoty českých mathematiků a fysiků), str. 108 *n.* Tuto knihu lze doporučiti k studiu těm, kdož jsouce obeznámeni s mathematikou středoškolskou, chtějí poznati základy vyšší analyse, potřebné k hlubšímu studiu fysiky.

Leží na snadě, jak lze užíti popsaného zjevu v praxi ku měření rychlostí rotačních nebo takových postupných, které se soukolím, hnacím řemenem a pod. na rotační dají převésti. Obr. 2. znázorňuje schematicky zařízení, kterým se na válci B, hodinovým strojem otáčeném, automaticky zaznamenává rychlost, kterou sjíždí klec do šachty resp. rychlost otáčecí bubnu, na kterém se navíjí těžné lano, na němž je zavěšena.*) Sestává ze železného válce V opatřeného dvěma trubicemi T a částečně naplněného rtutí, na níž spočívá pohyblivý plavák P opatřený psacím zařízením Z. Válec uvádí se v otáčení kol osy O, jsa pevně soukolím spřažen s navíjecím bubnem. Z diagrammu napsaného lze zjistiti, kolikrát, kdy a s jakou okamžitou rychlostí klec sjela nebo vyjela. Nečiní zvláštních obtíží podati theorií tohoto zařízení.

3. ***Boční a čelní tlaky u rotujícího válce kapalinového.*** Z předchozího odstavce jest patrno, že postranní (boční) tlak, kterým na rotující válec kapalinový působí stěna nádoby, musí býti větší, než kdyby kapalina byla v klidu. Představme si válcovitou nádobu poloměru R úplně kapalinou vyplněnou a kolem osy válce rotující (obr. 3.). Aby částice u stěny rotovaly, musí na ně působiti dostředivá síla, která, jak jsme nalezli v odst. 2., je dána tlakem sloupce kapalinového výšky y_n, patřícího k vzdálenosti od osy $x_n = R$. Ježto výška sloupce jest

$$y_n = \frac{\omega^2}{2g} R^2,$$

jest příslušný tlak, t. j. síla na jedničku plošnou

$$P = y_n \,.\, s \,.\, g = \frac{1}{2} s\omega^2 R^2. \qquad (5)$$

Tento tlak musí přistupovati k obyčejnému tlaku hydrostatickému, má-li býti rovnováha; stejným tlakem reakčním, pocházícím od reakční síly odstředivé, působí rotující válec kapalinový na stěny nádoby.

Kdyby kapalina nebyla v nádobě uzavřena, nýbrž měla horní povrch volný, tu by se kolem osy povrch snížil, počínaje

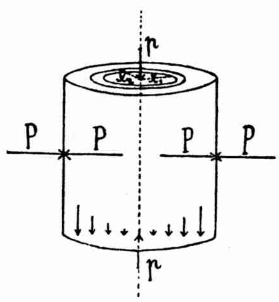
*) Jest to patentované zařízení čes. inž. *Karlíka*, které jsem laskavostí majitele p. Augsteina a techn. ředitele p. ing. Wojciechowskiho měl příležitost pozorovati v chodu na dôlu „Anna“ v Lánech.

jistou vzdáleností pak zvýšil. Z toho usuzujeme, že horní i spodní dno nádoby podléhá jiným tlakům, než za rovnováhy v klidu. Vypočítáme je jednoduchou úvahou. Vedle hydrostatického tlaku působí ve vzdálenosti r od osy od rotace tlak $P = \frac{1}{2} s\omega^2 r^2$, jenž se ovšem v kapalině šíří stejnoměrně na všechny strany. Na mezikruží plochy $\pi(x_2^2 - x_1^2)$ horního dna nádoby působí tedy od rotace kapaliny síla

$$
\begin{aligned}
R \,.\, \pi(x_2^2 - x_1^2) &= \tfrac{1}{2}\pi s\omega^2(x_2^2 - x_1^2) \,.\, r^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\pi s\omega^2(x_2^2 - x_1^2) \,.\, \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2),
\end{aligned}
$$

píšeme-li za kvadrát střední vzdálenosti mezikruží od osy

$$r^2 = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$



Obr. 3.

Rozdělíme-li celé dno na n mezikruží kruhy o poloměrech

$$x_0 = 0,\ x_1,\ x_2 \ldots x_{n-1},\ x_n = R$$

a sečteme-li veškeré síly od rotace na dno působící, t. j.

$$
\begin{aligned}
f_{01} &= \tfrac{1}{4}\pi s\omega^2(x_1^4 - x_0^4) \\
f_{12} &= \tfrac{1}{4}\pi s\omega^2(x_2^4 - x_1^4) \\
&\vdots \\
f_{n-1,n} &= \tfrac{1}{4}\pi s\omega^2(x_n^4 - x_{n-1}^4)
\end{aligned}
$$

obdržíme sílu výslednou F, jíž se snaží válec kapalinový prodloužiti se

$$F = \tfrac{1}{4}\pi s\omega^2 R^4. \tag{6}$$

Ve výpočtu je zase skryta integrace. Síla dF na elementární mezikruží šířky dx poloměru x a plochy $2\pi x \,.\, dx$ jest

$$dF = 2\pi x \cdot dx \,.\, \tfrac{1}{2} s\omega^2 x^2 = \pi s\omega^2 x^3 \,.\, dx$$

a síla celková

$$F = \pi s\omega^2 \int_0^R x^3 dx = \tfrac{1}{4}\pi s\omega^2 R^4.$$

Tato síla jest ovšem po dnu nestejnoměrně rozdělena rostouc od osy směrem k vnějšímu obvodu, leč je-li poloměr válce velmi malý, můžeme ji mysliti nahraeznu tlakem p, působícím stejnoměrně na celé dno. Pak ovšem je $F = \pi R^2 p$ a tedy tento tlak

$$p = \tfrac{1}{4} s\omega^2 R^2 = \tfrac{1}{2} P. \tag{7}$$

Jest zajímavo a důležito, že průměrný tlak, který musí přistoupiti k obyčejnému tlaku hydrostatickému na koncích rotujícího válce, jest jen poloviční než tlak na stěnách jeho. Kdybychom tedy celý rotující válec ponořili do kapaliny a vedle tlaku hydrostatického podrobili stejnoměrnému tlaku vnějšímu P, způsobenému na př. pístem na kapalině spočívajícím, museli bychom na koncích válce dáti působiti tahům rovným $\frac{1}{2} P$, aby byla rovnováha. Neboť teprve tehdy by na koncích působil vnější tlak

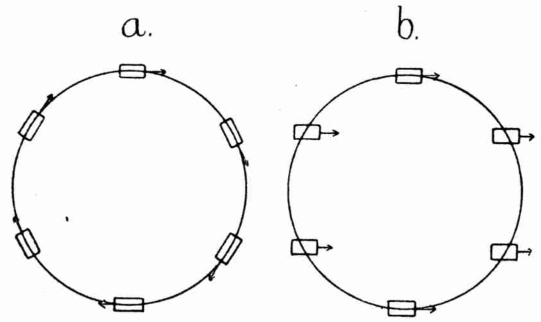
$$P - \tfrac{1}{2} P = \tfrac{1}{2} P = p,$$

rovný tlaku rotujícího sloupce. Kdyby tahu $\frac{1}{2} P$ nebylo, tu by se rotující válec snažil zkrátit vnějším přetlakem $\frac{1}{2}$P.

4. ***Vírová vlákna.*** Vírovým vláknem nebo s *Lordem Kelvinem* správněji *vírovým sloupcem* (vlastně sloupcovým vírem, „columnar vertex“) nazýváme válcovitou část tekutiny, která rotuje jako těleso tuhé se stejnoměrnou úhlovou rychlostí, jsouc obklopena tekutinou, která, byť se i pohybovala, přece se neotáčí. Po smyslu *Helmholtzově*, který prvý svým slavným pojednáním z r. 1858 „Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“, nauku o vířivých pohybech kapalin založil, jsou vírovými vlákny (Wirbelfäden) části kapaliny vyplněné vířivým pohybem, t. j. vírovými sloupci nekonečně malých poloměrů, a omezené čarami, které v celém svém průběhu udávají směr okamžité osy rotační, a to části průřezu nekonečně malého. Nám bude sloužit název vírové vlákno pro vírové sloupce libovolných poloměrů. Podstatnou vlastností vířivého pohybu jest, že se část kapaliny otáčí jako celek, jako těleso tuhé. Částice znázorněná ve svém pohybu

obr. 4*a* jest tedy částí vírového vlákna, kdežto částice obr. 4*b* jí není, byť i sledovala dráhu kruhovou.

Viděli jsme, že vírové vlákno může býti v rovnováze, je-li podrobeno všestrannému tlaku $\frac{1}{2}s\omega^2R^2$, kdežto jeho konce jsou současně podrobeny tahu $\frac{1}{4}s\omega^2R^2$. Z toho plyne, že vírové vlákno může končit pouze tam, kde tento tah může působit, t. j. na stěně, nebo že může býti samo v sobě ve tvaru prsténce uzavřeno, že však nemůže končiti ve volném povrchu kapaliny, neboť pak by tento byl tažen dolů, ani volně v kapalině. Příklad vírových vláken máme ve vírech, které vzniknou v klidné kapalině rychlým pohybem tuhého tělesa opatřeného ostrou hranou, na př. lžičky v čišce čaje, vesla ve vodě. Tato vírová vlákna



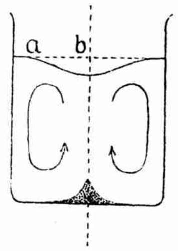
Obr. 4. *a*, *b*.

ovšem poměrně rychle zanikají následkem vnitřního tření každé skutečné kapaliny.

Připínají-li se konce vírového vlákna ke dvěma pohyblivým tuhým tělesům, tedy longitudinálním tahem jejich se obě tělesa k sobě přibližují, jako by se přitahovala. I leží na snadě myšlenka, vysvětlovati obdobně přitažlivou sílu mezi dvěma tělesy opačně zelektrovanými (zmagnetisovanými).

Dle *Faraday-Maxwellovy* theorie (II. 26, 29) pochází vzájemné přitahování i odpuzování takovýchto těles od siločar (resp. silotrubic jimi omezených), které spojují opačné náboje elektrické (magnetické, viz II. obr. 1. a 14., resp. 3. a 18.), a které se snaží právě tak jako vírová vlákna podélně se zkrátit a příčně rozšířit. Mohly by tedy snad silokřivky býti vírovými vlákny v etheru světelném. Ale dá se dokázati (viz na př. *J. J. Thomson*, Elemente der mathem. Theorie des Elektr. und des Magnetismus. Do němčiny přeložil Wertheim, Brunšvík), že v silotrubicích je příčný tlak přesně roven podélnému tahu, takže v mediu o všestranném tlaku P musí na koncích silotrubice k udržení rovnováhy působit tah $2P$, kdežto u vírového vlákna, jak jsme viděli, pouze $\frac{1}{2}P$. Tím možnost podobného výkladu padá.

Rozvíříme-li vodu v cylindrické nádobě tyčinkou nebo lžičkou, nabude povrch její tvaru v obr. 5. přibližně znázorněného. U stěn a dna se následkem přilnavosti a vnitřního tření voda téměř nepohybuje. Ježto by se voda u dna následkem přetlaku v místech a nad místy b udržovala v rovnováze, kdyby rotovala s ostatní vodou ve volné nádobě, vzniká právě tímto pře



Obr. 5.

tlakem ve vodě nerotující pohyb směrem od a ku b, takže se voda vedle rotace uvede také v proudění směrem šipek. Nacházejí-li se blíže dna lehké předměty (křídový prášek), odnášejí se směrem k ose nádoby, kdež se nakupí, jak snadno můžeme zjistiti. Týž zjev vykládá, proč potoky nebo říčky v prudkých záhybech podrývají a vyhlubují břeh ve vnějším oblouku, kdežto u vnitřního se tvoří nánosem mělčina. Jest patrno, že záhyb jednou, třeba náhodně vzniklý, se časem stává ostřejším. Příslovečným je od časů klassických u řeky Maiandros (odtud v architektuře „meandr"), dnes zvané Menderes, v Malé Asii.

5. ***Zdroje proudění.*** Pojednavše krátce o vírech, musíme se zmíniti o druhém typu pohybu kapalinového. Představme si, že v nesmírně velikém objemu kapaliny jsou jednotlivá význačná místa, body, v nichž kapalina neustále stejnoměrně — takže

sekundové množství je stálé — vzniká (tvoří se) neb zaniká (mizí). Takovéto body nazýváme *zdroje*, a to buď kladné, *vzniky*, nebo záporné, *zániky*.

Tato naše představa jest ovšem vzhledem k nezničitelnosti hmoty pouze ideální, leč můžeme ji přibližně uskutečniti, myslíme-li, že do vzniků přivádí se kapalina velmi tenkými trubicemi z nějaké vnější nádrže, kdežto ze zániku podobně odtéká. Rozdíl mezi poměry nastávajícími v ideálním obraze a v tomto uskutečnění bude tím menší, čím trubice jsou užší. Vlivem zdrojů vzniká ovšem v kapalině pohyb, takže rychlost kapaliny v každém místě má za ustáleného stavu zcela určitou stálou velikost i stálý směr. Dále jest patrno, že v libovolném objemu úplně ohraničeném, t. j. omezeném myšlenou uzavřenou plochou, není-li v něm zdrojů, musí množství *nestlačitelné* kapaliny být stálé, neproměnné, jinými slovy, kolik kapaliny v jednotce časové do tohoto objemu vstupuje, tolikéž jej v témž čase opouští.

Postupujeme-li v kapalině od bodu k bodu stále ve směru rychlosti, vzniká souvislá čára, *křivka proudová*, jejíž tečná v každém bodě udává směr toku kapaliny. Proložíme-li proudové křivky všemi body obvodu malé plošky, na toku kolmé, vzniká *trubice proudová*, útvar význačný tím, že jeho stěnami žádná kapalina ani nevstupuje dovnitř trubice ani nevystupuje z ní ven. Snadnou úvahou docházíme k poznatku, že proudové trubice mohou začínati nebo končiti pouze na zdrojích, nebo u nekonečně rozlehlé kapaliny v nekonečnu. Jest patrno, že proudová trubice nemůže spojovati vznik se vznikem nebo zánik se zánikem — spojuje vždy vznik se zánikem. Mluvíme li o isolovaném zdroji, myslíme tím zdroj tak vzdálený od jiných, že kapalina od něho proudí na všechny strany stejně, čímž trubice proudové nabývají tvaru kuželů, jichž vrchol jest ve zdroji.

Množství nestlačitelné kapaliny, které v časové jednotce prostupuje libovolným průřezem proudové trubice, jest ovšem u všech průřezů stejné, neboť uvnitř trubice není zdrojů a kapalina následkem své nestlačitelnosti nemůže se nikde v trubici hromaditi. Myslíme-li si v některém místě trubice kolmý průřez plochy q_1, jímž proudí kapalina rychlostí v_1, jest objem za jednotku časovou prošedší kapaliny patrně $v_1 q_1$ a její hmota — je-li s hmota specifická — jest $s v_1 q_1$. Z definice proudové trubice plyne dle hořejšího pro jiný kolmý průřez q_2 vztah

$$s v_1 q_1 = s v_2 q_2$$

čili

$$v_1 : v_2 = q_2 : q_1 , \tag{8}$$

to jest, rychlosti nestlačitelných kapalin jsou v obráceném poměru průřezů proudových trubic. Velmi snadné jest sevšeobecnění těchto vývodů na kapaliny stlačitelné. I tu plyne z definice proudové trubice, že každým průřezem prochází současně totéž množství kapaliny — ač ovšem ne týž její objem. Spec. hmoty v různých průřezech jsou různé a platí tudíž všeobecnější vztah

$$s_1 v_1 q_1 = s_2 v_2 q_2 .$$

Na snadě leží analogie s ustáleným prouděním elektřiny ve hmotných vodičích, na př. ve vodivém roztoku. Isolovaný drát tvoří proudovou trubici. Ježto intensitu proudu J definujeme jakožto množství elektřiny průřezem trubice v jednotce časové procházející, jest patrně

$$J_1 = s_1 v_1 q_1 , \quad J_2 = s_2 v_2 q_2 ,$$

kde s_1 a s_2 jsou hustoty elektřiny. Rychlost proudění jest ovšem stálá, takže $v_1 = v_2$. Definujeme-li *hustotu proudovou* i jakožto množství elektřiny procházející za vteřinu jedničkovým průřezem na směru proudu kolmým, jest patrně

$$i_1 = \frac{J_1}{q_1} \quad \text{a} \quad i_2 = \frac{J_2}{q_2} .$$

Poněvadž pak $J_1 = J_2$, platí

$$i_1 : i_2 = q_2 : q_1 ;$$

hustota proudová je obráceně úměrna kolmému průřezu trubice proudové.

Vydatností (méně vhodně „silou“ nebo „mohutností“) *zdroje* nazýváme množství kapaliny ve zdroji za jedničku časovou vzniklé nebo zaniklé; její znamení je kladné u vzniků, záporné u zániků. Myslíme-li si část kapaliny omezenu uzavřenou plochou, která obsahuje zdroje, jest patrně množství kapaliny celkem za vteřinu vystupující z oné plochy dáno algebraickým součtem vydatností všech v ní uzavřených zdrojů.

Mějž ona plocha tvar koule o poloměru r, tedy plošném obsahu rovném $4\pi r^2$, v jejímž středu jest zdroj vydatnosti Q. Považujeme-li poloměr plochy za velmi malý oproti vzdálenosti od nejbližšího zdroje nebo od nejbližší stěny (ohraničení kapaliny), děje se proudění na všechny strany stejnoměrně, takže radiálná rychlost kapaliny na ploše kulové jest rovna v, kde

$$sv \,.\, 4\pi r^2 = Q,$$

takže radiálná rychlost proudu ve vzdálenosti r od zdroje jest rovna

$$v = \frac{Q}{4\pi r^2 s}. \tag{9}$$

Je-li kapalina nestlačitelná, jest její specif. hmota s všude stejná, takže potom ubývá rychlosti proudění se čtvercem vzdálenosti od zdroje. U zdroje negativního, zániku, má Q znamení záporné, takže i rychlost v je záporná; to znamená pouze, že směřuje radiálně dovnitř plochy zdroj obepínající.

6. ***Rychlostní potenciál.*** V každém bodě nekonečné nestačitelné kapaliny, v níž se nachází zdroj, jest rychlost proudění obráceně úměrna čtverci vzdálenosti uvažovaného bodu od zdroje. Přímo do očí bije obdoba s intensitou pole gravitačního (I. 97, 103) nebo elektrického (II. 27, 29). A vskutku stejně jako si zjednodušujeme problémy gravitační nebo elektrické zavádějíce pojem gravitačního či elektrického potenciálu, můžeme si zjednodušiti hydrodynamické problémy pomocí *potenciálu rychlostního**), jejž definujeme pomocí úvah zcela obdobných.

Jako jest	tak jest
rozdíl elektrického potenciálu $V_2 - V_1$ mezi blízkými místy A_1 a A_2 (II, obr. 18. resp. 22.) měřen součinem ze složky intensity elektrického pole F_{21} ve směru spojnice A_2A_1 násobené vzdáleností d obou míst	rozdíl rychlostního potenciálu $\psi_2 - \psi_1$ mezi blízkými místy A_1 a A_2 měřen součinem ze složky proudové rychlosti v_{21} ve směru spojnice A_2A_1 násobené vzdáleností d obou míst.

*) Tento název pochází od *Helmholtze*. Zavádíme zde potenciál rychlostní s opačným znamením, než je obvyklé, a to pro analogii s elektrickým.

Jsou tedy rychlostní potenciál a rychlost spojeny vztahem

$$\psi_2 - \psi_1 = v_{21} \, . \, d \quad \text{čili} \quad v_{21} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{d}. \tag{10}$$

Když od bodu A_n v blízkosti zdroje nakreslíme čáru k bodu A_1 v nekonečné vzdálenosti od zdroje, kde rychlost je blízce rovna nulle, rozdělíme ji na elementy, vypočítáme rozdíly rychlostního potenciálu mezi konci elementů a sečteme všechny, obdržíme rychlostní potenciál ψ_n v daném místě A_n kapaliny. Zcela obdobným způsobem *) jako v Jeništa-Mašek-Nachtikalově učebnici v článku „Potenciál pole elektrostatického" obdržíme za výsledek, že potenciál ψ ve vzdálenosti r od zdroje vydatnosti Q jest roven

$$\psi = \frac{Q}{4\pi s \, . \, r}, \tag{11}$$

což odpovídá úplně potenciálu elektrostatickému, v němž na místě náboje píšeme $\frac{Q}{4\pi s}$, stejně jako jsme to museli učiniti ve vzorci (9), aby rychlost odpovídala intensitě elektrostatického pole, jak plyne ze zákona Coulombova. Z výrazu (11) je patrno, že *plochami stejného potenciálu* čili *hladinami* jsou u jediného osamělého zdroje soustředné koule. Rovněž snadno nahlédneme, že křivky proudové stojí vždy kolmo na hladinách. Kdyby tomu tak nebylo, padala by složka rychlosti do hladiny a kdybychom postupovali podél ní, přicházeli bychom na místa nižšího potenciálu rychlostního, což odporuje definici hladiny.

Od ideální kapaliny požadujeme, aby v libovolném jejím bodě se skládaly rychlosti, pocházející od jednotlivých zdrojů, v rychlost výslednou dle pravidla známého z rovnoběžníka sil, nebo což jest totéž, aby v daném bodě způsoboval určitý zdroj touž rychlost toku, jako by ostatních zdrojů nebylo. Tento nový požadavek nazýváme principem superposice rychlostí, a jest tím lépe splněn, čím menší vnitřní tření v kapalině stává. Připustíme-li platnost principu superposice, můžeme snadno nalézti výsledný rychlostní potenciál, který panuje v určitém bodě A

---

*) Methoda integrálního počtu je applikována na týž případ ve *Vojtěchových* „Základech" str. 165.

působením libovolného počtu zdrojů. Mysleme si z bodu A libovolnou čáru vedenou do nekonečna a rozdělenou na nesmírně mnoho elementů délkových d. Jsou-li v_1, v_2, v_3... složky rychlostí ve směru prvého délkového elementu d myšlené čáry pocházející od zdrojů Z_1, Z_2, Z_3..., pak celková potenciální difference mezi začátkem elementu A a jeho koncem je rovna $(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots) d$, t. j. rovna součtu potenciálních differencí pochodících od různých zdrojů jednotlivě. Z toho plyne: Jsou-li vzdálenosti $AZ_1 = r_1$, $AZ_2 = r_2$ atd. a vydatnost zdroje Z_1 rovna Q_1 atd., pak je výsledný rychlostní potenciál ψ v bodě A dán vztahem

$$\psi = \frac{1}{4\pi s}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \ldots\right) \tag{12}$$

Pocházejí-li tedy rychlosti toku pouze od zdrojů (kladných vzniků a záporných zániků), jest jak patrno rychlostní potenciál zcela určitou, nebo jak říkáme jednoznačnou funkcí bodovou, závislou pouze na poloze uvažovaného bodu A. Proudění, které za těchto podmínek nastává, zveme *potenciálovým.*

Porovnáme-li výraz (12) s výrazem pro elektrostatický potenciál V, který, nazveme-li náboje v místech Z_1, Z_2... postupně e_1, e_2..., má tvar

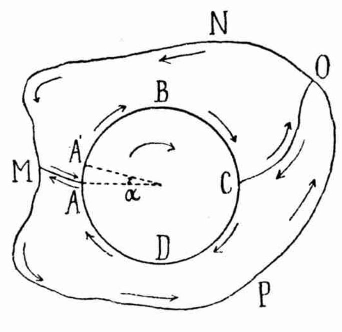
$$V = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \ldots \tag{13}$$

vidíme, že formálně $\psi = \frac{1}{4} V/\pi s$. Oba potenciály jsou si úměrny a křivky toku jsou totožny se silokřivkami, plochy téhož potenciálu rychlostního jsou zároveň hladinami elektrickými. Řešení úloh elektrostatických dává nám současně řešení hydrodynamických úloh o proudění potenciálovém, takže na př. obr 23. II. dílu Fysiky pro reálky znázorňuje zároveň hladiny a proudové křivky vzbuzené dvěma zdroji (vzniky). U dvou zániků obrátil by se pouze směr šipek u proudových křivek.

7. ***Cirkulace.*** Mysleme si v kapalině libovolnou uzavřenou křivku K, rozdělme ji počínajíce bodem A na samé kraťounké elementy délkové d, určeme rozdíly rychlostního potenciálu mezi začátkem a koncem každého elementu a všechny tyto difference sečtěme tak, aby křivka byla spojitě dokola kolem

proběhnuta. Tento součet, který nám dává potenciálovou differenci kolem křivky nazýváme dle *Stokesa cirkulací* kolem křivky. Pochází-li pohyb v kapalině pouze od zdrojů v ní porůznu umístěných, má rychlostní potenciál v každém bodě jedinou určitou hodnotu a proto, vrátivše se do téhož bodu A, z něhož jsme vyšli, dojdeme k téže hodnotě potenciálu, cirkulace kolem uzavřené křivky je rovna nulle.

Představme si nyní, že v kapalině nachází se vírové vlákno, jehož na ose kolmý řez jest dán kruhem $ABCD$ (obr. 6.). Je-li jeho poloměr r a úhlová rychlost vlákna ω, jest tangenciálná rychlost v rovna po celém obvodě $r\omega$. Rozdíl potenciálu rychlost-



Obr. 6.

ního mezi body A a A' o vzájemné vzdálenosti $d = r\omega$ jest dán součinem

$$v \, . \, d = \overline{AA'} \, . \, r\omega = r\alpha \, . \, r\omega = \omega r^2 \alpha$$

a součet všech potenciálových rozdílů při oběhu kruhu jednou kolem jest

$$\Sigma v d = \omega r^2 \, . \, \Sigma\alpha = \omega \, . \, r^2 \, . \, 2\pi. \qquad (14)$$

O tento obnos klesne potenciál, počítáme-li cirkulaci směrem otáčení vírového vlákna, nebo naopak stoupne, počítáme-li ji proti směru otáčení. Všimněme si, že πr^2 je rovno průřezu a vírového vlákna. Poloviční cirkulaci kolem vlákna, t. j. součin ωa, nazýváme dle *Helmholtze vírovou intensitou vlákna.* Jindy nazývá se též *vírovým momentem* vlákna. Takové pohyby kapaliny, když cirkulace rychlosti kolem okraje libovolného malého elementu plošného je rovna nulle, zvali jsme potenciálovými neboli nevířivými; má-li cirkulace konečnou hodnotu od nully různou jsou v kapalině víry.

Kdybychom ve výpočtu cirkulace byli do plošky oběhnuté pojali jiné části kapaliny, kde není vířivého pohybu, byli bychom došli k témuž výsledku. Počítejme cirkulaci kolem dráhy $MPONM$ za předpokladu, že mimo vírové vlákno není pohybu vířivého. To vyjádříme vzorcem

$$\text{Cirk } MABCONM = 0 \qquad \text{Cirk } OCDAMPO = 0,$$

kde předpis o počítání cirkulace je označen operatorem „Cirk". Sečteme-li, můžeme patrně nahraditi součet vzorcem

$$\text{Cirk } ABCDA + \text{Cirk } MPONM + \text{Cirk } MA + \text{Cirk } AM$$
$$+ \text{Cirk } OC + \text{Cirk } CO = 0.$$

Ježto však dle předpisu početního

$$\text{Cirk } MA = -\text{Cirk } AM \qquad \text{Cirk } OC = -\text{Cirk } CO$$

a

$$\text{Cirk } MPONM = -\text{Cirk } MNOPM$$

plyne to, co jsme chtěli dokázati, že totiž

$$\text{Cirk } MNOPM = \text{Cirk } ABCDA = 2\omega a. \tag{15}$$

Z toho plyne však snadným sevšeobecněním, že cirkulace rychlosti kolem libovolné uzavřené dráhy v kapalině se rovná dvojnásobnému algebraickému součtu vírových intensit všech vírových vláken, které dráhová křivka obepíná (při čemž vírové intensity jsou počítány v témž směru oběhu jako myšlená křivka).

Všimněme si, že v kapalině, v níž se nacházejí víry, přestává rychlostní potenciál býti jednoznačným; můžeť míti v témž bodě hodnotu ψ nebo $\psi \pm n 2\omega a$ a pod. dle toho, zdali při nějakém myšleném oběhu po uzavřené dráze tato dráha neobejímá žádné vírové vlákno, nebo obepíná n-kráte proběhnuta v jednom či opačném směru vlákno vírové intensity ωa a pod. Jest tomu podobně jako s datem na zeměkouli, když vyšedše z určitého bodu vrátíme se do něho buď neobešedše nebo obešedše osu zemskou (pól). V tomto druhém případě museli jsme totiž překročiti datovou mez (I, 87. 89.).

8. ***Základní věty o vírových vláknech.*** Vírovou intensitou vlákna zvali jsme součin $\pi r^2 \omega = \omega a$, kde r je poloměr vlákna. Lze obecně dokázati, že *není možno v ideální kapalině změniti vnějšími prostředky vírovou intensitu.* Vnější síly mohou působiti pouze na pevné hranice kapaliny (stěny nádoby), nikoli však na jednotlivé její částice. Proto nemůžeme v kapalině bez vnitřního tření působiti tangenciálními silami na otáčející se vírové vlákno, a nelze tudíž změniti otáčecí moment jeho kolem osy, jehož změna jest vázána na působení dvojic silových. *)

Bylo by však možno vlákno prodloužiti nebo zkrátiti, změniti jeho délku l. Energie vlákna jest čistě kinetická a rovna $\frac{1}{2} K\omega^2$, kde K, moment setrvačnosti rotujícího válce o hmotě M, je roven

$$K = \tfrac{1}{2} M r^2 = \tfrac{1}{2} \pi r^2 ls \, . \, r^2 = \tfrac{1}{2} \pi s l r^4. \qquad (16)$$

Jest tudíž kinetická energie vlákna rovna $\frac{1}{4} \pi s l r^4 \omega^2$. Nechť se nyní délka vlákna změní z l na $l + \lambda$. K tomu cíli musí působiti na konci vlákna (§ 3. (7)) tah

$$\pi r^2 \, . \, \tfrac{1}{4} s r^2 \omega^2 ,$$

který vykoná po trati λ práci

$$\tfrac{1}{4} \pi s \lambda r^4 \omega^2,$$

jež zvýší energii vlákna. Předpokládáme-li pro jednoduchost, že kapalina je nestlačitelna, nezmění se prodloužením objem válce, a nevykoná tudíž tlak působící kolmo na plášť válce žádné práce, která jinak je dána součinem z tlaku a změny objemové. Jest tedy celková energie vlákna, ovšem stále kinetická, rovna

$$\tfrac{1}{4} \pi s l r^4 \omega^2 + \tfrac{1}{4} \pi s \lambda r^4 \omega^2 = \tfrac{1}{4} \pi s (l + \lambda) r^4 \omega^2 . \qquad (17)$$

Zvýšila se elongací v poměru $(l + \lambda) : l = k$.

Jest ovšem myslitelno, že po elongaci nerotuje již vlákno jako tuhý celek, nýbrž že různé částice mají různé vlastní úhlové rychlosti. Leč není tomu tak. Rozdělme vlákno na částice m_1, m_2, m_3 ... ve vzdálenostech ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ... od osy vlákna před elongací, kteréž se změní na R_1, R_2, R_3 ... po ní. Před elongací měly společnou úhlovou rychlost ω, po ní mají různé Ω_1, Ω_2, Ω_3 ... Pak byla

*) Viz můj článek „O pohybu otáčivém" v ročníku 44. tohoto Časopisu.

kinetická energie vlákna před elongací rovna

$$\tfrac{1}{2}(m_1 \varrho_1^2 \omega^2 + m_2 \varrho_2^2 \omega^2 + \ldots) = \tfrac{1}{2} \Sigma m \varrho^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2} \omega^2 \,.\, \Sigma m \varrho,$$

po ní jest

$$\tfrac{1}{2}(m_1 R_1^2 \Omega_1^2 + m_2 R_2^2 \Omega_2^2 + \ldots) = \tfrac{1}{2} \Sigma m R^2 \Omega^2 .$$

Větu (17) právě nalezenou, že se kinetická energie vlákna elongací zvýší v poměru k, vyjadřuje vztah

$$\Sigma m R^2 \Omega^2 = k \,.\, \Sigma m \varrho^2 \omega^2. \qquad (18)$$

Výrok dřívější, že totiž otáčecí moment vlákna nelze změniti, a ovšem že ani elongací se nemění, rovněž snadno vyjádříme. Hybnost prvé částice byla před elongací $m_1 \varrho_1 \omega$ a tedy moment hybnosti (moment otáčecí) byl $m_1 \varrho_1^2 \omega$. Po elongaci jest pak podobně $m_1 R_1^2 \Omega_1$. Můžeme tedy psáti

$$\Sigma m R^2 \Omega = \Sigma m \varrho^2 \omega. \qquad (19)$$

Ježto předpokládáme kapalinu nestlačitelnou, nemění se její objem, a byl-li poloměr vlákna před elongací r, a po ní $\bar{r}$, jest

$$\pi r^2 l = \pi \bar{r}^2 (l + \lambda)$$

čili

$$\frac{r^2}{\bar{r}^2} = \frac{l + \lambda}{l} = \varkappa .$$

Moment setrvačnosti K před elongací byl roven

$$K = \Sigma m \varrho^2 = \tfrac{1}{2} M r^2$$

a po ní, ježto se jedná o válec téže hmoty M a poloměru $\bar{r}$, jest

$$\Sigma m R^2 = \tfrac{1}{2} M \bar{r}^2,$$

takže

$$k \Sigma m R^2 = \Sigma m \varrho^2. \qquad (20)$$

Z rovnic (18), (19) a (20) obdržíme stav vlákna po elongaci nejsnáze tak, že násobíme (19) faktorem μ a (20) faktorem ν, které mohou mít všechny hodnoty vyjma nullu a všechny rovnice sečteme. Pak

$$\Sigma \{ m R^2 (\Omega^2 + \mu \Omega + \nu k) \} = \Sigma \left\{ m \varrho^2 k \left(\omega^2 + \frac{\mu}{k} \omega + \frac{\nu}{k} \right) \right\} \qquad (21)$$

Tato rovnice platí jen pro všechny konečné hodnoty μ a ν. Volme je tak, aby pravá strana se rovnala nulle. Ježto je ω stálé, u všech částic stejné, stačí k tomu voliti

$$\frac{\mu}{k} = -2\omega, \quad \frac{\nu}{k} = \omega^2$$

čili

$$\mu = -2\,\omega k\,, \quad \nu = k\omega^2.$$

Tak obdržíme z levé strany

$$\Sigma\{mR^2(\Omega^2 - 2\,\omega k\Omega + k^2\omega^2)\} = \Sigma mR^2(\Omega - k\omega)^2 = 0.$$

Aby poslední součet členů vesměs kladných se rovnal nulle, musí každý člen o sobě rovnat se nulle, čili musí

$$\Omega_1 - k\omega = 0, \quad \Omega_2 - k\omega = 0 \text{ atd.},$$

to jest

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \ldots = k\omega\,. \qquad (22)$$

Z toho jest patrno:

Prodloužíme-li vírové vlákno na délku k-násobnou, vzroste úhlová rychlost jeho otáčení rovněž k-kráte; ale vlákno se zase otáčí jako celek, úhlovou rychlostí $k\omega$, všem částicím společnou. Ježto pak se otáčecí moment vlákna elongací nezměnil, jest

$$\tfrac{1}{2} Mr^2\omega = \tfrac{1}{2} M\bar{r}^2\Omega$$

a tedy také

$$\pi r^2\omega = \pi\bar{r}^2\Omega\,, \qquad (23)$$

čímž je dokázána věta z počátku uvedená, že vírová intensita vlákna jest veličina časově stálá, vnějšími prostředky nezměnitelná. Nemůžeme tudíž v ideální kapalině vírové vlákno vytvořiti, ani zase vírové vlákno jednou existující zničiti, ba nemůžeme vůbec ani jeho vírovou intensitu změniti. Dá se dále dokázati, že částice kapaliny, které tvoří vírové vlákno, jsou stále tytéž, čili žádné nové částice ve vírové vlákno nevstupují, aniž je opouští, a to ani tehdy ne, když se vlákno v kapalině pohybuje.

Ovšem, všechny kapaliny skutečně jeví vnitřní tření, které nám umožňuje, abychom v nich vzbudili vířivé pohyby, působíce tangenciálními silami na stěny, které kapalinu obklopují. Viděli jsme to přímo v § 2., kde jsme o vzniku vířivého pohybu promlouvali. Viskosita vede však stejně ku konečné době trvání a znenáhlému zániku vírových vláken, jichž energie se mění v teplo.

9. ***Proudění kapaliny kolem vírového vlákna.*** I dokonalá kapalina v okolí vírového vlákna dostane se do proudění, byť i zůstala nevířivou. To jest nutným důsledkem věty (15), že

cirkulace v libovolné uzavřené křivce kolem vlákna má konečnou, od nully rozdílnou hodnotu. Jest totiž dle předpisu početního cirkulace součtem součinů z komponenty rychlosti a elementu délkového v určitém směru proběhnutého, a kdyby tudíž všechny rychlosti byly rovny nulle, musil by výsledek počtu být rovněž roven nulle.

Představme si v nekonečné kapalině dlouhé, přímé vírové vlákno, a mysleme si v rovině na ose vlákna kolmé kruh poloměru R, jehož střed je v ose vlákna.

Ježto, jak jsme právě viděli, nastává podél kruhu R proudění, bude vzhledem k všestranné symmetrii jeho tangenciálná rychlost všude stejná a rovna v. Cirkulace rychlosti v kruhu jest

$$2\pi Rv = 2i$$

čili

$$v = \frac{1}{\pi}\frac{i}{R}, \tag{24}$$

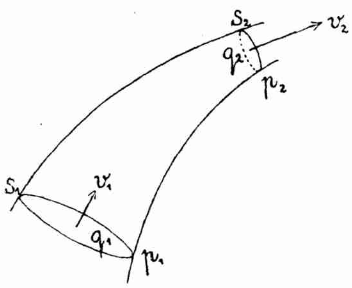
kde i značí vírovou intensitu vlákna ve směru oběhu kruhu. Klesá tedy rychlost proudění mimo vlákno se vzdáleností od jeho osy, kdežto ovšem ve vlákně samém rychlost tangenciálná $r\omega$ s touto vzdáleností stoupá. Tím jest také na prvý pohled patrný rozdíl pohybu vířivého a nevířivého.

Zde máme nový příklad analogie mezi hydrodynamikou a naukou o elektřině. Zákon Biot-Savartův, jak těmito dvěma učenci původně byl experimentálně nalezen, učí, že magnetické pole kolem dlouhého přímkového vodiče, protékaného proudem intensity I, jest kruhové a že klesá se stoupající vzdáleností R, takže jest úměrno podílu I/R. Týž vztah plyne ovšem integrací z elementárního zákona Laplaceova (II. 50, 45). Úplná obdoba vírové intensity a intensity el. proudu a podobně rychlosti proudění a intensity magnetického pole padá přímo do očí, a již *Helmholtz* ve výše citovaném slavném pojednání na ni poukázal.

Lze ji vésti dále; kinetická energie systému vírových vláken odpovídá úplně magnetické energii systému proudovodičů a pod. Zde nemůžeme se jí dále zabývati.

10. ***Přenášení energie podél proudových trubic.*** Jest zřejmo, že pláštěm proudové trubice nepřenáší se ven žádná mechanická

energie, ježto žádné částice kapalinové jím neprostupují. Ovšem je možno, že pláštěm trubice prostupuje ven či dovnitř energie ve tvaru tepla. Je-li kapalina v trubici podrobena vlivu tíže, může se — není-li trubice horizontální — měniti její potenciálná energie, stoupajíc či klesajíc dle toho, zdali těžiště kapaliny se zvedá nebo snižuje. Zcela všoobecně však platí zákon o zachování energie, který praví, že žádná energie nepřichází na zmar, ač ovšem také žádná nevzniká z ničeho.



Obr. 7.

Představme si část proudové trubice (obr. 7.). do níž vstupuje kapalina kolmým průřezem q_1 za tlaku p_1 rychlostí v_1, a z níž vytéká průřezem q_2 za tlaku p_2 rychlostí v_2. Vstupujíc do trubice, působí kapalina jako píst, který tlačí na kapalinu před ní se nacházející silou $p_1 q_1$, a kterýž posouvaje se v krátkém čase τ o délku $v_1 \tau$, koná práci $p_1 q_1 v_1 \tau$, takže práce v jedničce časové vykonaná jest $p_1 q_1 v_1$. Mimo to jest hmota do trubice za vteřinu vstupující $q_1 v_1 s_1$, kde s_1 je spec. hmota kapaliny v průřezu q_1, a tato hmota má rychlost v_1, takže její kinetická energie jest rovna $\frac{1}{2} s_1 q_1 v_1^3$. Celkem tedy vstupuje v jedničce časové do trubice množství mechanické energie

$$p_1 q_1 v_1 + \tfrac{1}{2} s^1 q_1 v_1^3 = q_1 v_1 (p_1 + \tfrac{1}{2} s_1 v_1^2).$$

Zcela podobněme dojde k poznání, že množství mechanické energie tokem kapaliny z trubice za vteřinu vystupující jest $q_2 v_2 (p_2 + \frac{1}{2} s_2 v_2^2)$. V trubici samé, jak jsme viděli, může se ztráceti energie mechanická měníc se třením v teplo, ztráceti či nabývati energie gravitační nebo postupem skrze stěny energie tepelná. Množství energie uvnitř trubice se nacházející musí za ustáleného, stacionárního stavu býti stálé, neboť kdyby neustále rostlo, muselo by se v ní hromaditi do nekonečna, nebo kdyby mělo stále klesati, byla by musela trubice původně míti nekonečnou zásobu energie. Z principu o zachování energie plyne pak zcela obecně:

$$q_2 v_2 (p_2 + \tfrac{1}{2} s_2 v_2^2) - q_1 v_1 (p_1 + \tfrac{1}{2} s_1 v_1^2) = \text{sekundovému zisku energie uvnitř trubice.} \tag{25}$$

Tato rovnice platí zcela všeobecně.

Jedná-li se o *tok nestlačitelné kapaliny v horizontální trubici stálého průřezu* a je-li *kapalina dokonalá* (ideální), bez tření, tu pro

$$q_1 = q_2 , \; s_1 = s_2$$

a všeobecně platné u trubic neproměnného tvaru

$$q_1 v_1 s_1 = q_2 v_2 s_2 \tag{26}$$

plyne $v_2 = v_1$ a dále, poněvadž pravá strana (25) se rovná nulle,

$$p_2 = p_1 .$$

Není tlakového spádu podél trubice. Ostatně není tento výsledek ničím jiným než vyjádřením principu setrvačnosti.

Jedná-li se v témž případě o *kapalinu skutečnou*, vede vnitřní tření k ztrátě energie mechanické, jež se mění na energii tepelnou. Jsou-li průřezy q_1 a q_2 vzdáleny o délku l, a ztrácí-li jednotka objemová na jedničkové dráze množství energie E, ztrácí objem $q_1 v_1 = q_2 v_2$ na délce l množství energie $q_1 v_1 l E$ a rovnice (25) přechází v

$$q_2 v_2 (p_2 + \tfrac{1}{2} s_2 v_2^2) - q_1 v_1 (p_1 + \tfrac{1}{2} s_1 v_1^2) = - q_1 s_1 v l E \tag{27}$$

čili, ježto za daných poměrů

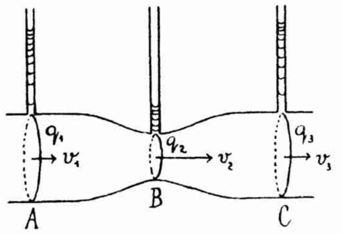
$$s_1 = s_2 , \quad q_1 = q_2 , \quad v_1 = v_2 ,$$

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = E. \tag{28}$$

Podél trubice nastává stálý spád tlakový, jak je znázorněn ve vaší fysice (I. obr. 117. resp. 143.), jehož názorný význam objasňuje rovnice (28).

Protéká-li elektrický proud drátem stejného průřezu, nastává dissipace elektrické energie ve tvaru Jouleova tepla a energie proměněná v teplo při průchodu jedničkového množství jedničkou délky drátu určuje potenciálný spád, t. j. klesnutí potenciálu na jedničce délky drátu (srov. II. 56, 62). Potud se podobá proudění elektřiny toku skutečné kapaliny; ale uvidíme hned v příštím odstavci, že tato podobnost rychle mizí za případů jen poněkud složitějších.

11. ***Tlak nestlačitelné kapaliny trubicí proměnného průřezu.*** Není-li průřez trubice všude stejný, nýbrž je-li na příklad (obr. 8.) v místě B zúžena, tedy i tehdy, jedná-li se o kapalinu ideální, bez tření tekoucí trubicí horizontální, musí v místech šir-



Obr. 8.

šího průřezu A a C býti tlak větší než v B. Nahlédneme to snadno i bez počtu. Ježto za ustáleného toku je sekundový objem kapaliny každým průřezem procházející stejný, musí

$$q_1 v_1 = q_2 v_2$$

a tudíž je rychlost v malém průřezu q_2 totiž

$$v_2 = \frac{q_1}{q_2} v_1$$

větší než ve větším. Kapalina musí se na trati AB zrychlovati, k čemuž je potřebí stálé zrychlující síly, kterouž je právě přetlak $p_1 - p_2$. Naopak mezi B a C je pohyb kapaliny zpozděný, její rychlost klesá a to zase následkem opačně působícího přetlaku $p_3 - p_2$.

Vidíme tedy přímo: Teče-li kapalina zúženou trubicí a není-li nikde ani ztráty ani zisku gravitační nebo thermické energie, je její tlak největší tam, kde je rychlost nejmenší.

Početně plyne pro ideální kapalinu nestlačitelnou v horizontální trubici dosazením

$$s_1 = s_2 = s \quad \text{a} \quad v_2 = v_1 \cdot \frac{q_1}{q_2}$$

do rovnice (25), v níž pravá strana je rovna nulle

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2} s v_1^2 \left\{ \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 - 1 \right\} \tag{29}$$

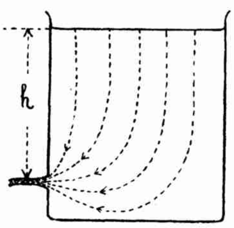
Ovšem předpokládá tato rovnice přibližně platná i pro kapaliny skutečné, že rychlost kapaliny nepřestoupí jisté meze, kdy v kapalině s vnitřním třením přestává pohyb dle proudových čar a nastává *stav turbulentní*, takový, že proudové čáry se spirálovitě stáčí, kapalina tvoří víry. Prakticky užívá se našeho výsledku ve *Venturiho vodoměru*, který není než kusem trubice se zúžením uprostřed, podobně jako znázorňuje obr. 8. Místo tlakových trubiček je v místě A a B opatřen manometry, nejčastěji samoregistrujícími. Z rozdílu jejich údajů usuzuje se na rychlost proudění resp. na sekundové množství procházející kapaliny.

Z jiných applikací znáte vodní vývěvu (I, 131, 144) nebo nassávání vzduchu do Bunsenova hořáku v místech, kde do široké trubice vchází malým otvorem plyn či konečně známý malý pokus následující: Kolmo na spodní konec skleněné trubičky připevníme kruhovou destičku s centrálním otvorem pozorně tak, aby trubička z ní nevyčnívala. Foukáme-li trubičkou a přiblížíme-li k destičce lehký rovný předmět (prázdnou škatulku od sirek), jest k destičce zcela proti očekávání přitahován. V posledně jmenovaných případech jedná se ovšem o pohyb plynu, který jest snadno stlačitelný, takže náš jednoduchý vztah pozbývá platnosti; leč stačí říci, že, není-li změna tlaková příliš veliká, zůstávají hořejší úvahy v hlavních rysech platny.

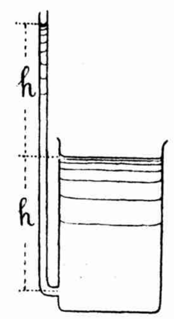
Nyní vidíme podstatný rozdíl mezi tokem kapaliny a elektrickým proudem. Prochází-li tento vodičem AC, v němž jest zúžené místo B (obr. 8.), tu sice klesá potenciál elektrický od místa A k B, ale nestoupá, nýbrž klesá dále, postupujeme-li od B k C.

12. *Výtok kapaliny z nádoby.* O výtoku kapaliny z nádoby jest pojednáno ve vaší učebnici fysiky (I. 130, 146), takže se zde můžeme omeziti na několik poznámek.

Vytéká-li kapalina z nádoby postranním otvorem, mají trubice proudové tvar tečkováním v obr. 9. přibližně naznačený. Je patrno, že jejich průřez u povrchu je velmi veliký oproti průřezu v otvoru, takže u povrchu je rychlost proudění velmi malá. Tlak na povrchu je roven atmosférickému tlaku P, stejně jako tlak ve vodním paprsku blízko u výtokového otvoru v místech, kde se stal paprsek stejnoměrným. Kdyby byl totiž větším, rozšiřoval by se paprsek, kdyby byl menším, stahoval by se.



Obr. 9.



Obr. 10.

Také zde platí rovnice (25), jejíž pravá strana, značící zisk na gravitační energii, zde je dána výrazem $sqvg \,.\, h$, je-li q průřez vytékajícího paprsku, v rychlost toku, h pak výška od volné hladiny kapaliny k výše zmíněnému místu paprsku. Z rovnice (25) plyne tedy, píšeme-li

$$s_1 = s_2 = s,\ p_1 = p_2 = P \text{ a } q_2 v_2 = q_1 v_1 = qv,$$
$$qv\,(P + \tfrac{1}{2} s v^2) - qv\,(P + \tfrac{1}{2} s v_1^2) = sqvgh.$$

Dle toho, co jsme nahoře řekli, je rychlost v_1 u povrchu kapaliny velmi malá a lze tedy člen $\frac{1}{2} s v^2$ v druhé závorce levé strany vynechati, čímž dospíváme k známému *zákonu Torricelliovu*

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{30}$$

Nechceme se zmiňovati od odchylkách, které ve skutečnosti od tohoto zákona nastávají, nýbrž přejdeme hned k následujícímu pokusu.

Spojme výtokový otvor s trubicí vertikálně vzhůru ohnutou (obr. 16.) a představme si, že je z prvu prázdná, že otvor v nádobě, ležící v hloubce h pod povrchem jest uzavřen zasunutým šoupátkem. Otevřeme-li jej, počne kapalina — budiž ideální — v trubici stoupat, a stoupá tak dlouho, až zisk gravitační energie kapaliny v trubici se rovná práci na ní vykonané. Budiž takto dosažená výška rovna H a průřez trubice q. Ježto těžiště vodního sloupce výšky H a hmoty sqH, tedy váhy $sqHg$, se nachází vpolovině výšky, ve výši $\frac{1}{2}H$ nad otvorem, je energie polohy rovna $sqHg \cdot \frac{1}{2}H$, tedy, rovnajíc se práci vykonané při pádu hmoty sqH z výše h, dává nám vztah

$$\tfrac{1}{2}sqH^2g = sqHgh \quad \text{čili} \quad H = 2h. \tag{31}$$

Ideální kapalina vystoupí tedy do výše rovnající se dvojnásobné výšce tlakové. Ježto však tento stav není rovnovážný, vyprázdní se trubice znova a tato hra by se opakovala u kapaliny ideální do nekonečna. U kapaliny skutečné ustálí se následkem ztrát energie vnitřním třením po několika kyvech kapalina ve výšce dané zákonem spojitých nádob.

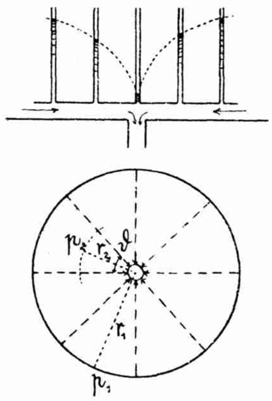
Zcela analogický zjev nastává při nabíjení kondensatoru batterií o stálé elektromotorické síle. Vyžaduje-li kondensator náboje Q, aby se nabil na potenciál V batterie, tedy energie, kterou batterie kondensatoru dodá, je rovna QV, kdežto konečná energie v kondensatoru trvale nahromaděná je rovna $\frac{1}{2}QV$. (II, 32. a 37., resp. 36. a 42.); polovina energie batterií dodané se promění v teplo, tím, že při nabíjení kondensatoru vznikají elektrické oscillace, kde z počátku se mění potenciál kondensatoru mezi přibližně $2V$ a nullou, Oscillace však velmi rychle uhasínají. Přebytečná energie $\frac{1}{2}QV$ proměnila se v Jouleovo teplo.

13. ***Radiální tok kapaliny.*** Nechť teče kapalina mezi dvěma rovnoběžnými kruhovými deskami se všech stran k středovému otvoru v desce spodní (obr. 11.). Takovýto tok nazývá se radiálním, ježto patrně omezením trubic proudových jsou poloměry kruhu. Je-li vzdálenost obou desk rovna d, a je-li ϑ úhel mezi dvěma sousedními přímkami proudovými, je průřez trubice proudové ve vzdálenosti r_2 od středu roven $r_2\vartheta d$. Panuje-li v této vzdálenosti tlak p_2, kdežto na okraji desky poloměru r_1 tlak p_1,

máme u nestlačitelné kapaliny a horizontálních desk dle rovnice (25), v níž $q_1 v_1 = q_2 v_2$, dále $q_1 = r_1 \vartheta d$ a $q_2 = r_2 \vartheta d$, takže $v_2 = v_1 \cdot \frac{r_1}{r_2}$, a kde pravá strana se rovná nulle,

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2} s (v_2^2 - v_1^2) = \tfrac{1}{2} s v_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1\right). \qquad (32)$$

Ježto pravá strana je kladná, je tlak p_2 menší než p_1, tlaku zase s přibývající rychlostí kapaliny ubývá, jak bychom mohli stanoviti manometrickými trubicemi, v obr. 11. zakreslenými. Ve skutečnosti často pozorujeme, že, vyprazdňuje-li se nádoba vodou naplněná středovým otvorem ve dně, prohlubuje se

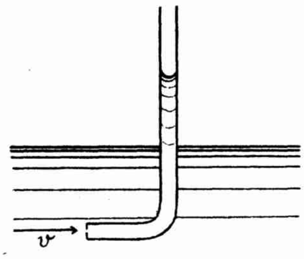


Obr. 11.

povrch nad otvorem, někdy tak silně, že se i vzduch do otvoru nassává. Někdy dostane se sice náhodně voda do rotačního pohybu, leč hlavní příčinou prohlubování jest radiální tok. Kdyby v obrazci 11. kapalina středním otvorem tekla vzhůru, tedy stejně jako je nakresleno vzniká negativní tlak uprostřed desk. Ostatně přiléhá tento případ úzce k pokusu popsanému na konci 11. paragrafu tohoto článku.

14. ***Síla působící v průřezu proudové trubice.*** Je-li kapalina v klidu, působí na ploše q silou pq, která stejně jako hydrostatický tlak má touž velikost, nechť postavíme plošku q do libovolného směru. Pohybuje-li se však kapalina, působí vedle

toho další silou, která má směr jejího pohybu. Průřezem q prošlo v čase τ množství $sqv\tau$ kapaliny, která měla hybnost jako vždy danou součinem z hmoty a rychlosti $sqv^2\tau$. Změna hybnosti v jednotce časové jest dle základního zákona Newtonova silou. Na přední straně průřezu proudové trubice vymizela v jednotce časové hybnost sqv^2. Působí tudíž kapalina před průřezem na kapalinu za ním se nacházející jednak všestrannou silou pq, jednak silou ve směru pohybu kapaliny působící sqv^2, takže jest celková síla ve směru pohybu $q\,(p + sv^2)$. Dle principu akce a reakce, ježto se nejedná o pohyb zrychlený, působí touž silou směru opačného kapalina za průřezem se nacházející na kapalinu před ním. O této síle přesvědčuje nás t. zv. *Pitotova trubice*, staré to zařízení k měření rychlosti proudící kapaliny. Jest to prostě



Obr. 12.

skleněná, proti směru proudící kapaliny v pravém úhlu ohnutá trubice, opatřená na konci velmi jemným otvorem (obr. 12.), Výstupová výše kapaliny je měrou její rychlosti. Kdyby normála k rovině otvoru svírala se směrem rychlosti úhel 90°, nevystoupila by kapalina v trubici nad okolní hladinu.

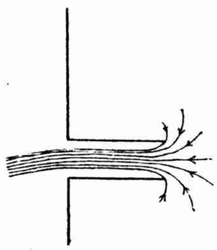
Applikujme tento výsledek na výtok kapaliny z nádoby otvorem průřezu q_1 (viz § 12). Zanedbáváme-li vnitřní tření kapaliny je výtoková rychlost $v = \sqrt{2gh}$. Buď q_2 průřez vodního paprsku v místech, kde se stal stejnoměrným. Pak, jak jsme řekli, je vnitřní tlak v paprsku roven tlaku atmosférickému P a kapalina právě průřez ten opouštějící jest do předu poháněna silou $q_2\ (P + sv^2) = q_2\ (P + 2\,ghs)$. Touž silou je kapalina před průřezem tlačena zpět. Paprsek jest počínaje od otvoru zúžen z průřezu q_1 na menší q_2 a atmosférický tlak tlačí tuto konickou část paprsku do nádoby zpět silou $P(q_1 - q_2)$. Jest tedy u výtoku tlačena kapalina zpět silou

$$P(q_1 - q_2) + q_2 (P + 2\,ghs) = Pq_1 + 2\,ghsq_2.$$

Na plošku q_1 stěny působila, pokud byl výtokový otvor uzavřen, síla $q_1 (P + gsh)$.

„Předpokládáme-li, že rozdělení tlaku po stěně, v níž je otvor, se nezměnilo, byl-li otvor otevřen," tu, poněvadž kapalina zůstává jako celek v rovnováze i proudí-li paprsek ven, je

$$q_1 (P + gsh) = Pq_1 + 2\,ghsq_2 \quad \text{čili} \quad q_2 = \tfrac{1}{2} q_1.$$



Obr. 13.

Pokusy o výtokové rychlosti otvorem ve stěně podávají však výsledkem přibližně $q_2 = 0{\cdot}62\, q_1$ (I, 130, 142). Tento rozdíl má jednak původ ve vnitřním tření, jednak v tom, že uvozovkami vyznačený předpoklad není správný. Podél stěny nastává totiž jakýsi druh radiálního proudění (viz § 13), čímž se výsledný tlak na stěnu mění. Radiální proudění vymýtíme, užijeme-li *Bordova zpětného násadce* (obr. 13.), který posunuje výtokový otvor dále od stěny, více než o dvojnásobný jeho průměr. V tomto případě odpovídá nalezený vztah $q_2 = \tfrac{1}{2} q_1$ daleko lépe skutečnosti.

Astronomická zpráva na leden, únor a březen 1917.

Veškerá udání v čase středoevropském vztahují se na meridián středoevropský a 50° severní zeměpisné šířky. Přehled radiantů byl udáván pravidelně v předešlých astronomických zprávách, a protože se podstatně nemění, bylo od dalšího jeho otiskování v přehledu úkazů upuštěno.

Přehled oběžnic.

Merkur má značnou zápornou deklinaci, takže je až do dubna v poměrech pro pozorování nepříznivých.

Venuše má rovněž značnou zápornou deklinaci. Vychází začátkem ledna 2^h a začátkem února 1^h před východem Slunce.

Pro *Marta, Jupitera, Saturna* a *Slunce* je udán na desetiny hodin východ: *v*, nebo západ: *z*, nebo doba vrcholení: *vrch*, a v celých stupních deklinace: δ, v následující tabulce:

Datum	*Mars*		*Jupiter*		*Saturn*		*Slunce*		
	z	δ	*z*	δ	*vrch*	δ	*z*	*v*	δ
I. 1.	5,1	—22	13,7	+ 9	13,3	+21	4,1	20,0	—23
31.	5,3	—17	12,0	+10	11,2	+21	4,9	19,6	—17
III. 2.	*v*	— 8	10,4	+12	9,1	+22	5,7	18,7	— 7
IV. 1.	17,5	+ 1	9,1	+ 14	7,1	+22	6,8	17,6	+ 4

Uran je v souhvězdí Kozorožce, *Neptun* v souhvězdí Raka.

Přehled úkazů.

Leden 1917.

1. J. II. z. $9^h 33^m 57^s$. — J. II. k. $12^h 6^m 46^s$; Jupiter zapadá $13^h 40^m$.

2. 16^h Merkur v největší východní elongaci 19° 22′.

○ 7. J. I. k. $8^h 20^m 18^s$. — 21^h *úplné zatmění Měsíce* u nás jen částečně viditelné. Úplné zatmění začíná ve $20^h 00^m$ a krátce potom Měsíc zapadá.

8. J. II. z. $12^h 11^m 9^s$; Jupiter zapadá $13^h 14^m$.

11. *Min. Algolu* $16^h 37^m$.

14. J. I. k. $10^h 16^m 3^s$; Jupiter zapadá $12^h 53^m$. — *Min. Algolu* $13^h 16^m$.

☾ 16.

17. 8^h *Saturn* v opposici se *Sluncem*. — *Min. Algolu* $10^h 5^m$.

18. 19^h *Merkur ve spodní konjunkci se Sluncem.*

19. J. II. k. $6^h 40^m 3^s$.

20. *Min. Algolu* $6^h 54^m$.

● 22. 7^h *konjunkce* Merkura s Měsícem. — 20^h *částečné zatmění Slunce.* Slunce vychází v $19^h 46^m$ již zatměno. Ko-

nec zatmění v $21^h 03^m$ v posičním úhlu 52^0. Největší zatmění obnáší 0,65 průměru slunečního.
23. 14^h *Neptun* v opposici se *Sluncem.*
26. J. II. z. $6^h 45^m 0^s$, k. $9^h 17^m 37^s$.
27. J. III. z. $5^h 41^m 3^s$, k. $6^h 21^m 12^s$.
☽ 29.
30. J. I. k. $8^h 36^m 19^s$. — 10^h *Merkur* v konjunkci s *Venuší* (Merkur $2^0 53'$ sev.).
31. *Min. Algolu* $18^h 10^m$.

Únor 1917.

2. J. II. z. $9^h 22^m 46^s$.
3. J. III. z. $9^h 43^m 36^s$, k. $11^h 24^m 27^s$; Jupiter zapadá v $11^h 47^m$. — *Min. Algolu* $14^h 58^m$.
○ 6. J. I. k. $10^h 31^m 55^s$; Jupiter zapadá $11^h 38^m$. — *Min. Algolu* $11^h 47^m$.
9. *Min. Algolu* $8^h 36^m$.
11. 22^h *Merkur v největší západní elongaci* $26^0 2'$.
☾ 14.
15. J. I. k. $6^h 56^m 22^s$; Slunce zapadá $5^h 18^m$.
20. J. II. k. $6^h 29^m 50^s$.
● 21.
22. J. I. k. $8^h 51^m 49^s$.
23. *Min. Algolu* $16^h 41^m$.
26. *Min. Algolu* $13^h 29^m$.
27. J. II. k. $9^h 7^m 52^s$.
☽ 28. 11^h *konjunkce* Marta se Sluncem.

Březen 1917.

1. *Min. Algolu* $10^h 18^m$. —
4. *Min. Algolu* $7^h 7^m$.
○ 8.
10. J. k. $7^h 11^m 15^s$.
11. J. III. k. $7^h 32^m 42^s$.
☾ 16.
17. J. I. k. $9^h 6^m 26^s$; Jupiter zapadá $9^h 44^m$.
18. 11^h *Merkur* v konjunkci s *Venuší* (Merkur $0^0 44'$ již.). — *Min. Algolu* $15^h 12^m$.
21. *Min. Algolu* $12^h 1^m$.
● 22.
23. 21^h *Merkur* v konjunkci *s Martem* (Merkur $0^0 56'$ již.).
24. J. II. k. $6^h 21^m 54^s$. — *Min. Algolu* $8^h 50^m$.
☽ 29. 6^h *Merkur ve svrchní konjunkci se Sluncem.*
30. *Venuše* v konjunkci *s Martem* (Venuše $0^0 39'$ již.).

S.

Úlohy.

a) Z mathematiky.

1.

Řešiti jest soustavy rovnic:

α) $x + y + xy = a$
$x^2 + y^2 + x^2y^2 = b$

β) $x + y + \sqrt{xy} = a$
$x^2 + y^2 + xy = b$

Prof. *Rudolf Hruša.*

2.

Dokažte bez použití analytické geometrie větu: Protíná-li hlavní osa kuželosečky v bodě N normálu vztyčenou v bodě M ke kuželosečce, jest průmět úsečky MN na průvodič roven parametru kuželosečky.

Dr. *V. Hruška.*

3.

Na straně BC daného trojúhelníku ABC jest dán bod D; tímto bodem mají se vésti dvě přímky DE, DF v úhlu φ tak, aby trojúhelník DEF, který má vrcholy E, F na stranách AB, BC, měl plochu co nejmenší.

Šk. rada *Václav Hübner.*

4.

Kružnice postupně se dotýkající mají společné vnější tečny. Stanovte jich poloměry a součet jich ploch.

L. Kolenatý.

5.

a) Dvěma body vésti kružnici na hmotné kouli.
b) Určiti průměr hmotné koule.
(Užitím pravítka, kružítka a pomocné nákresné noviny.)

Zásob. officiál *J. Kroupa.*

6.

Dvě paraboly mají ohniska F_1, F_2 a společnou řídící přímku d; jsou-li ohniska na téže straně přímky d a neleží-li na kolmici k d, protínají se obě paraboly ve dvou bodech v konečnu, jichž spojnice je osou souměrnosti F_1, F_2.

Týž.

7.

Najděte trojúhelník největšího resp. nejmenšího obvodu, jsou-li dány poloměry kružnice vepsané a opsané.

Prof. *Ant. Lochmann.*

8.

Najděte na ellipse bod, jehož normála má od středu vzdálenost co největší.

Týž.

9.

Sečísti jest řadu

$$\tfrac{1}{2}\binom{n}{1} - \tfrac{2}{3}\binom{n}{2} + \tfrac{3}{4}\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\binom{n}{n}.$$

F. Mádle.

10.

Pohybuje-li se úsečka stálé délky a tak, že její koncové body zůstávají stále na pravoúhlých osách souřadných, obaluje křivku zvanou asteroidou o rovnici $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Která tečna asteroidy je zároveň její normálou?

Týž.

11.

Na obvod kružnice o středu S opsané pravidelnému sedmiúhelníku $ABCDEFG$ budiž od vrcholu A směrem $ABC\ldots$ nanesen třikrát její poloměr, tak že $AM = MK = KL$; průsečíky úseček BG, CF, DE, s průměrem ASL označme M, N. O a průsečík přímek HL, KS označme P. Dokažte, že body M, N, O se z bodu P promítají třemi paprsky svírajícími navzájem úhly 60°.

Supl. prof. *Jaromír Pilnáček.*

12.

Jaké jest geometrické místo středů rovnostranných trojúhelníků vepsaných do ellipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Týž.

13.

Dokažte, že libovolná přímka procházející bodem $(-p, 0)$ protíná parabolu $y^2=2px$ ve dvou bodech, jichž normály se protínají v bodě na této parabole ležícím.

Týž.

14.

Výraz $2\binom{\binom{n}{2}}{3}-3\binom{\binom{n}{3}}{2}$ upravte na tvar

$$a_0\binom{n}{5}+a_1\binom{n+1}{5}+a_2\binom{n+2}{5}+\ldots+a_5\binom{n+5}{5}.$$

Prof. *Jan Schuster.*

15.

Určete objem hranolce, který vznikne z pravidelného hranolu n-bokého, otočí-li se jedna podstava kol středu o úhel ε. Jaké těleso vznikne, necháme-li n růsti do nekonečna?

Týž.

16.

Lomenou čáru složenou ze $2n$ stejných úseček a učiňte hranami pobočnými a doplňte nahoře i dole vždy dalšími n hranami tak, aby vznikl hranolec, omezený dvěma pravidelnými n-úhelníky shodnými jako podstavami a $2n$ shodnými rovnoramennými trojúhelníky. Dokažte, že sklon dvou pobočných hran je nezávislý od n, má-li hranolec objem co největší.

Týž.

17.

Z trojúhelníku rovnoramenného složiti plášť souměrného čtyřstěnu o největším objemu.

Týž.

18.

Řada 2, 4, 8, 16, 31, 58, ... vznikla sečtením souhlasných členů řady arithmetické třetího stupně a řady geometrické. Určiti její obecný člen a součtový vzorec.

† Dr. *Vladimír Živanský.*

19.

Určiti jest v rovnicích

α) $x^3 - ax^2 + ax - 1 = 0$

β) $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$

a tak, aby součet třetích mocnin kořenů byl maximem neb minimem.

Týž.

20.

Bodem, v němž paprsek vedený ohniskem kuželosečky seče příslušnou přímku řídící, vedeny jsou tečny ke kuželosečce. Jest určiti souřadnice středu příslušné poláry a vyšetřiti geometrické místo těchto středů, otáčí-li se paprsek kolem ohniska.

Týž.

b) Z deskriptivní geometrie.

1.

Sestrojte kulovou plochu dotýkající se uvnitř stran daného trojúhelníka a přímky s rovinou tohoto trojúhelníka různoběžné.

Prof. *Fr. Granát.*

2.

Dány jsou dvě přímky mimoběžné o, t nakloněné k oběma průmětnám; o jest osou rotačního válce, který se dotýká přímky t. Má se sestrojiti půdorysná a nárysná stopa tohoto válce.

Prof. *Josef Hanuš.*

3.

Sestrojiti osu rotační plochy kuželové, která jest určena vrcholem, jedním bodem na povrchu, tečnou přímkou a odchylkou povrchových přímek od osy.

Prof. *Jan Kroupa.*

4.

Sestrojiti kouli, dotýkající se dané přímky a dané roviny, jež jsou navzájem rovnoběžné, známe-li jeden průměr co do polohy. Týž.

5.

Zobraziti rotační paraboloid, jsou-li dány čtyři body na povrchu a podmínka, že osa je kolmá k půdorysně.
Prof. *Ant. Navrátil.*

c) Z fysiky.*)

1.

Jak lze pomocí libelly (I. 115, 125) o poloměru křivosti R měřiti zrychlení? Když zeměkoule obíhá elliptickou dráhu kolem slunce, mění se její rychlost dle druhého zákona Keplerova (I, 93, 99). Bylo by možno vhodně citlivou libellou stanoviti zrychlení zeměkoule? *K.*

2.

V kapalině jsou vyznačeny proudové trubice tak, že jejich kolmé průřezy jsou všude obráceně úměrny rychlosti toku. Rovněž jsou vyznačeny plochy téhož rychlostního potenciálu a to tak, že rychlostní potenciál stoupne o stálou hodnotu, když přejdeme od jedné plochy k následující. Dokažte, že tyto plochy dělí proudové trubice na útvary buňkovité, které obsahují vždy týž obnos kinetické energie. *K.*

3.

Dvě přímková a rovnoběžná vírová vlákna jsou ve vzájemné vzdálenosti d umístěna v nekonečném objemu nestlačitelné kapaliny. Vírové intensity obou vláken jsou stejné, ale opačného znamení. Spojíme obě vlákna kolmicí, prodloužíme ji přes vlákno druhé, a ve vzdálenosti δ od něho nakreslíme kruh o poloměru R, takže $R^2 = (d + \delta)\,\delta$ v rovině na osách vláken kolmé. Dokažte, že tento kruh je proudovou křivkou. *K.*

---

*) Řešení úloh předpokládá studium článku prof. Dra. *B. Kučery* „O některých analogiích mezi hydrodynamikou a naukou o elektřině“, v tomto čísle uveřejněného.

4.

V nekonečné, nestlačitelné kapalině nachází se dublet, to jest vznik A a zánik B téže vydatnosti ve velmi malé vzájemné vzdálenosti. Přímka AB nazývá se osou dubletu. Ve směru, jenž s ní tvoří úhel ϑ a vzdálenosti r od středu C dubletu bod P. Dokažte, že složka rychlosti toku v bodě P, padající do směru PC jest rovna $\frac{2\sigma\cos\vartheta}{4\pi s r^3}$, kdežto do směru na $P\,C$ kolmého padá vložka $\frac{\sigma\sin\vartheta}{4\pi s r^3}$, kde s je spec. hmota kapaliny, a σ moment dubletu, to jest součin z vydatnosti vzniku a vzdálenosti $A\,B$. *K.*

5.

Lineární zdroj sestává ze spojité řady zdrojů bodových, v přímku sestavených. Jeho vydatností Q nazýváme množství za sekundu v jedničce délkové vznikající kapaliny. Dokažte, že ve vzdálenosti r nastává rychlost toku $\frac{Q}{2\pi s r}$. *K.*

6.

Dva lineární zdroje vydatnosti $+Q$ a $-Q$ rovnoběžné a ve vzdálenosti δ tvoří lineární dublet momentu $\sigma_1 = Q\,\delta$. Dokažte, že ve vzdálenosti r_1 tvořící s osou dubletu úhel ϑ je radiální složka toku rovna $\frac{\sigma_1\cos\vartheta}{2\pi s r_1^2}$, kdežto složka kolmá na ní jest $\frac{\sigma_1\sin\vartheta}{2\pi s r_1^2}$. *K.*

7.

Kapalina spec. hmoty s teče stejnoměrnou rovnou trubicí a ztrácí následkem vnitřního tření množství E energie na jedničku objemu při proběhnutí jedničky délkové. Jaký musí býti sklon trubice k horizontále, aby tlak kapaliny byl podél celé trubice stálý? *K.*

8.

Paprsek kapaliny dopadá rychlostí v na rovinnou plochu a kapalina roztéká se po dopadu tangenciálně po ploše. Dokažte, že síla, kterou působí paprsek na plochu, je sqv^2, kde q je průřez paprsku, s spec. hmota kapaliny. Má sqv^2 význam tlaku? *K.*

9.

Rychlíkové lokomotivy pro dlouhé tratě mohou plniti své vodní nádrže mezi jízdou pomocí následujícího zařízení. Nádrž jest opatřena vertikální trubicí, která dá se spustiti tak, že zasahá do dlouhého reservoiru vodního umístěného mezi kolejemi. Spodní konec trubice jest ohnut v pravém úhlu, takže horizontálním ramenem se pohybuje proti vodě v reservoiru. Je-li horní konec trubice ve výši h nad hladinou vody v reservoiru a je-li rychlost lokomotivy V, s jakou rychlostí poteče voda do nádrže na lokomotivě, zanedbáme-li vnitřní tření?

Pokyn k řešení: Udělme v myšlenkách lokomotivě i reservoiru společnou rychlost — V. *K.*

10.

Jak dlouho bude trvati, než se naplní nádrž objemu 10 hektolitrů na lokomotivě ujíždějící rychlostí 60 *km* za hodinu trubicí průměru 10 *cm*, je-li její horní ústí ve výši 250 *cm* nad hladinou vody v reservoiru a je-li energie zmařená v trubici ve tvar tepla rovna $^1/_3$ práce vykonané při zvedání vody. *K.*

Řešení úloh.

Řešení úloh buďtež zaslána do 15. dubna 1916 na adressu: S. doc. Dr. *K. Rychlík*, v Praze II., Mikulandská 3.

Páni řešitelé se žádají, aby řešení každé úlohy bylo napsáno *zvlášť* na jednu neb několik čtvrtek papíru obyčejného formátu. V čelo *každého* řešení budiž uvedeno číslo úlohy (tekst úlohy není nutno psáti), jméno řešitele a ústavu, na němž studuje. Řešení buďtež seřazena dle čísel, a jsou-li zasílána v obalu menšího formátu než čtvrtkového, jako celek složena. Zároveň uveďte páni řešitelé při poslední zásilce na zvláštním lístku papíru seznam všech řešení, která vůbec zaslali.

Mimo to je nutno, aby páni řešitelé uvedli přesnou adressu svou, aby mohly býti ceny správně rozeslány.

Neopomeňte zásilek dostatečně frankovati.