Werk

Label: Article

Jahr: 1914

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0043|log44

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

jež spolu s body E, F, G tvoří skupinu korresiduální se skupinou A, B, C, D. Ježto tato skupina korresiduální je určena třemi svými body, je tato skupina táž, jako pro křivku K^3_{13}. Obě tyto kubické křivky určují tedy svazek, jehož body base vesměs leží na K^5. Další křivky tohoto svazku, jehož tři body base E, F, G známe, lze lineárně sestrojovati dle odst. 6. Sdružíme tento svazek projektivně se svazkem kuželoseček $[A, B, C, D]$ tak, aby si odpovídaly křivky určené resp. body A_{11}, A_{12}, A_{13}. Oba svazky vytvoří křivku pátého stupně, jež má s hledanou K^5 společné body: A, B, C, D, E, F, G, A_{11}, A_{12}, A_{13}, dalších šest, jež náleží do base svazku kubických křivek, a deset dalších průsečíků s kuželosečkami K^2_{12}, K^2_{13}, celkem dvacet šest bodů, a je s ní tedy totožna.

Tím je provedena lineární konstrukce této křivky, neboť o každém bodu roviny lze lineárně rozhodnouti, zdali ke křivce náleží čili nic.

O racionálních křivkách šestého stupně.

Napsal Dr. **Jan Vojtěch** v Brně.

Každá racionální křivka k-tého stupně v prostoru m-rozměrném může býti pokládána za průmět racionální křivky n-tého stupně prostoru n-rozměrného (pro $k \leqq n$, $m < n$) [1]. Zejména racionální křivky stupně n-tého lze s výhodou pojímati jako projekce racionální normální křivky téhož stupně v prostoru n-rozměrném. Touto methodou možno hravě odvoditi řadu vlastností uvedených křivek, protože racionální normální křivka je útvar jednoduchý. Také z racionálních křivek n-tého stupně v prostoru p-rozměrném ($p < n$) lze vyvozovati vlastnosti křivek k-tého stupně a speciálně křivek n-tého stupně v prostoru m-rozměrném.

---

[1]) *G. Veronese*, Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens, Mathem. Annalen 19. (1882) pp. 101—234., spec. p. 208.

Methody této se v theorii křivek příležitostně leckdy používá. Soustavně vyšetřovány tak dosud zejména vlastnosti rac. křivek stupně 4. a 5.[2])

V následujícím odvozeny jsou tímto způsobem některé (projektivní) vlastnosti racionálních křivek 6. stupně: nejprve pro normální křivku prostoru 6-rozměrného a odtud potom pro racionální křivky téhož stupně v prostorech nižších. Přednosti použité methody projekční jsou evidentní: je jednoduchá, jednotná a ovšem ryze geometrická. Cenná je také ta okolnost, že vynikne souvislost vlastností u křivek téhož stupně v různých prostorech.[3])

I.

1. Racionální normální křivka 6. stupně v prostoru 6-rozměrném $V_{1,6}^{6,0}$, stručně C_6[4]), může býti vytvořena buď šesti projektivními svazky 1. řádu prostorů S_5 s osovými prostory S_4, z nichž každý protíná křivku v pěti bodech, nebo dvěma kollineárními svazky 5. řádu přímek se středy na křivce[5]). Protože kollineace uvedených dvou svazků 5. řádu stanovena je sedmi dvojicemi elementů korrespodujících, jest C_6 určena devíti body v S_6, z nichž žádných sedm neleží v S_5.

---

[2]) *G. Marletta*, Studio geometrico della quartica gobba razionale, Annali di matem. (3) 8. (1903) pp. 97—128.

J. R. Conner, The rational plane quartic as derived from the norm-curve in four dimensions by projection and section, Amer. Journal of mathem. 33. (1911) pp. 203—248.

G. Marletta, Sulle curve razionali del quinto ordine, Rendiconti del Circolo matem. di Palermo 19. (1905) pp. 94—119.

[3]) Vlastnosti zde uvedené vyplývají udanou methodou z elementárních vztahů. Další by se objevily z podrobnějšího vyšetřování zejména rac. norm. křivky 6. stupně.

[4]) $V_{a,b}^{c,d}$ ať značí bodovou varietu a-rozměrnou v (lineárním) prostoru b-rozměrném, stupně c-tého rodu d; symbolem C_b stručně označíme racionální křivku 6. stupně v prostoru b-rozměrném (S_b).

[5]) *G. Veronese* na cit. místě. *G. Loria*, Sulle curve razionali normali in uno spazio a n dimensioni, Giornale di matem. 26. (1888).

2. Křivkou C_6 stanovena jest v S_6 *polárnost*[6]), v níž sobě odpovídají bod a prostor S_6, určený dotyčnými body oskulačních[7]) S_5, položených bodem tím ke křivce. Odpovídají sobě ovšem dále přímka a S_4, rovina a S_3, z nichž vždy druhý prostor je průsekem polárních S_5, korrespondujících bodům prvního. Incidentní sdružené body a prostory S_5 involutorní této korrelace vytvořují *kvadratickou varietu 5-rozměrnou* (základní varietu polárnosti); na této varietě leží křivka C_6 a oskulační S_5 křivky C_6 dotýkají se jí v bodech této křivky.

3. Jako C_6 jest protata libovolným prostorem S_5 v 6 bodech (jsouc stupně 6.), tak lze libovolným bodem vésti k ní 6 oskulačních S_5, t. j. *je třídy* 6.

Tečny křivky C_6 *tvoří rozvinutelnou* (oskulační) *plochu stupně* 10., kterou totiž libovolný S_5 protíná v křivce 10. stupně (třídy 6. se 6 hroty), čili libovolný S_4 protíná 10 tečen křivky C_6. Neboť průmět křivky C_6 ze středového prostoru S_3 (obecně položeného) do roviny musí býti racionální křivka 6. stupně (s 10 body dvojnými), tedy třídy 10.

Z oskulačních rovin křivky C_6 *vzniká rozvinutelná* (oskulační) *varieta 3-rozměrná stupně* 12. (protatá libovolným S_4 v křivce 12. stupně), t. j. libovolný S_3 protíná 12 oskulačních rovin křivky dané. Neboť dotčený průmět křivky C_6 ze středového S_3 do roviny jest (při obecné poloze středového prostoru) křivka 6. stupně 10. třídy bez hrotů, má tedy 12 stacionárních tečen.

Duálně platí: Libovolná rovina protíná 12 oskulačních S_3 křivky C_6, t. j. *oskulační prostory* S_3 *křivky dané tvoří rozvinutelnou* (oskulační) *varietu 4-rozměrnou stupně* 12., kterou totiž libovolný S_3 protíná v křivce 12. stupně.

Konečně *rozvinutelná* (oskulační) *varieta 5-rozměrná, tvořená oskulačními prostory* S_4 *křivky* C_6, *je stupně* 10., jsouc protata libovolnou rovinou v křivce 10. stupně (6. třídy s 12 hroty);

---

[6]) *W. K. Clifford*, On the classification of loci, Transactions of the R. soc. of London 169. (1878). *G. Castelnuovo*, Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale dello spazio a n dimensioni, Atti d. Ist. Veneto (6) 4. (1886).

[7]) Oskulační prostory S_k křivky mají s křivkou dotyk $(k+1)$-bodový.

neboť libovolná přímka protíná 10 oskulačních prostorů S_4 dané křivky.

C_6 nemá elementů S_k dvojných (násobných) (pro $k = 0$ až 5), t j. nemá dvojných ani bodů ani tečen ani oskulačních rovin ani oskulačních S_3, S_4, S_5. Nemá také elementů S_k stacionárních t. j. hrotů a prostorů s dotykem $(k + 2)$-bodovým.

4, Jestliže zvolíme kterékoli dva pětisečné prostory S_4 (z nichž totiž každý má s křivkou C_6 5 společných bodů) a promítáme z nich body křivky C_6, jsou vznikající tak svazky 1. řádu prostorů S_5 (s osovými S_4) projektivní; odpovídají sobě prostory S_5 promítající týž bod křivky. Za osové S_4 možno speciálně zvoliti oskulační prostory křivky.

Vzhledem k uvedené polárnosti platí duálně: Bodové řady na dvou přímkách, z nichž každá je průsekem pěti oskulačních prostorů S_5 křivky C_6 (spec. na dvou tečnách křivky), jsou projektivní tak, že sobě korrespondují body vymezené na nich týmž oskulačním prostorem S_5 křivky.

Odtud vyplývá: *Čtyři oskulační prostory S_5 křivky C_6 proťaty jsou tečnami jejími ve čtveřinách téhož dvojpoměru.*

5. Svazky 1. řádu prostorů S_5, jimiž se ze zvolených prostorů S_4 křivky C_6 promítají její body, jsou — jak uvedeno — projektivní a vytvořují podle počtu svého následující variety, jež všechny ovšem obsahují C_6.

Dva takové svazky vytvořují 5-rozměrnou kuželovou varietu 2. stupně, jejímž vrcholem je rovina (vytvořující prostory S_4 této variety procházejí touže rovinou, průsekem osových S_4). Z tří projektivních svazků prostorů S_5 s osovými pětisečnými S_4 vzniká 4-rozměrná kuželová varieta 3. stupně, jejíž S_3 procházejí týmž bodem, vrcholem variety. Výtvorem čtyř resp. pěti svazků uvedené povahy jest 3-rozměrná resp. 2-rozměrná varieta 4. resp. 5. stupně, jejíž vytvořující elementy jsou roviny resp. přímky.

Přímková plocha 5. stupně, posléze uvedená, proťata je každým prostorem S_5 v racionální (normální) křivce 5. stupně.

6. Promítneme-li [8]) C_6 z jejího bodu A do prostoru S_5,

[8]) *A. Brambilla*, Intorno alle curve razionali in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Rendiconti d. Ist. Lombardo (2) 19. (1886).

obdržíme racionální křivku 5. stupně. K této lze z libovolného bodu B' v S_5 vésti 5 oskulačních S_4 (s dotykem 5-bodovým), jichž dotyčné body určují prostor S_4, jdoucí bodem B'; B' a tento S_4 jsou totiž sdruženy v nulovém systému prostoru S_5, stanoveném tam uvedenou racionální (normální) křivkou 5. stupně. Vrátíme-li se do S_6, nalézáme:

Libovolným bodem B v S_6 a bodem A křivky C_6 lze vésti 5 prostorů S_5, jež mají jinde s křivkou dotyk 5-bodový; prostor S_5, určený dotyčnými body těchto S_5 a bodem A křivky, prochází bodem B.

Podobnou cestou obdržíme větu: *Libovolným bodem v S_6 a trojsečnou rovinou křivky C_6 možno vésti 3 prostory S_5, mající s křivkou jinde dotyk 3-bodový; prostor S_5, položený dotyčnými těmito body a rovinou trojsečnou, prochází oním bodem.*

7. V prostoru S_6 vyskytují se přímky dvojího druhu: v některých se protíná 5 oskulačních S_5 křivky C_6, v jiných nikoli; oněch je ∞^5, protože tolikéž je pětisečných S_4 křivky C_6.

Prostor S_3 možno v S_6 voliti buď tak, že je obsažen v (jednom) pětisečném S_4 křivky C_6, nebo tak, že není obsažen v žádném takovém prostoru. Na základě polárnosti plyne odtud: *Rovina v S_6 obsahuje buď jednu přímku, v níž se protíná 5 oskulačních S_5 křivky C_6, nebo neobsahuje žádnou.*

Rovinou v S_6 neprochází žádný pětisečný S_4 křivky C_6 nebo jí prochází jeden takový prostor nebo nekonečně mnoho, jež tvoří varietu 2. stupně; jestliže je totiž rovina obsažena ve dvou pětisečných S_4, prochází jí ∞^1 takových prostorů. Z toho vyvozujeme:

V S_3 prostoru S_6 neexistuje buď žádná přímka, v níž se protíná 5 oskulačních S_5 křivky C_6, nebo existuje jedna nebo ∞^1 tvořících plochu 2. stupně (jednu soustavu plošných přímek jejích).

II.

8. Promítneme-li C_6 z bodu obecně položeného (středu projekce O) do prostoru S_5, vznikne v tomto racionální křivka 6. stupně, kterou označíme stručně C_5.

C_5 *má třídu* 10., t. j. libovolným bodem v S_5 lze k ní vésti 10 oskulačních S_4; neboť libovolná přímka (vedená bodem O) protíná 10 oskulačních S_4 křivky C_6.

C_5 má *tři rozvinutelné variety oskulační*: 2-rozměrnou *stupně 10.* tvořenou tečnami (libovolný S_3 protíná totiž 10 tečen křivky C_5), 3-rozměrnou *stupně 12.* tvořenou oskulačními rovinami křivky a 4-rozměrnou *12. stupně* tvořenou oskulačními prostory S_3.

Křivka C_5 *má 6 stacionárních*[9]) *prostorů* S_4. Neboť bodem O v S_6 lze vésti 6 oskulačních S_5 ke křivce C_6, jež se promítají v stacionární S_4 křivky C_5.

9. Projekcí základní kvadratické variety polárnosti (uved. v odst. 2.) z bodu do S_5 vznikne 4-rozměrná varieta 2. stupně (vepsaná rozvinutelné varietě oskulačních S_3). *Stacionární prostory* S_4 *křivky* C_5 *dotýkají se této variety 2. stupně v dotyčných bodech svých na křivce.*

Z věty uvedené v odst. 4. — promítneme-li totiž útvar složený z křivky C_6, z jejích šesti oskulačních S_5 jdoucích bodem O a z tečen jejích — vyplývá:

Skupiny bodové, v nichž tečny křivky C_5 *protínají jejích šest různých stacionárních prostorů* S_4, *jsou projektivní*[10]).

Projekcí z bodu $O \equiv B$ odvozujeme z věty nalezené v odst. 6.:

Z bodu na křivce C_5 *lze vésti 5 prostorů* S_4 *oskulačních ke křivce* (jež mají s C_5 jinde dotyk 5-bodový); *prostor* S_4 *dotyčnými body jejich určený prochází oním bodem křivky.*

10. Všimněme si polohy bodu O k pětisečným prostorům S_4 křivky C_6. Snadno nahlédneme, že bod O nelze tak voliti, aby jím neprocházel žádný nebo procházel jeden pětisečný prostor S_4 křivky C_6; prochází jím vždy nekonečně mnoho takových prostorů.

Křivku C_6 možno totiž pokládati za výtvor dvou projektivních svazků 5. řádu přímek se středy A_1 a A_2 na křivce.

---

[9]) Stacionární prostor Sk křivky má s ní dotyk $(k+2)$-bodový.

[10]) Tuto a některé jiné vlastnosti odvozuje analyticky *G. Loria*, Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a $n-1$ dimensioni, Rendiconti d. Circolo matem. di Palermo 2. (1888).

Spojnici p_1 bodu O s bodem A_1 odpovídá ve svazku se středem A_2 přímka p_2, neprocházející bodem O (leží-li O mimo křivku, jak předpokládáme). Rovině p_2O odpovídá rovina jdoucí přímkou $p_1 \equiv A_1O$; výtvorem projektivních svazků 3. řádu s těmito rovinami jako osovými jest 3-rozměrná kuželová varieta 4. stupně s vrcholem v bodě O. Pětisečné prostory S_4 křivky C_6 jdoucí bodem O (v počtu ∞^3) obsahují vytvořující roviny této variety.

V S_5 proto platí: *Pětisečné prostory S_3 křivky C_5 obsahují vytvořující přímky plochy 4. stupně.*

11. Zvolíme-li střed projekce O v oskulačních prostorech křivky C_6, dostaneme promítnutím *speciální křivku* C_5; při tom sníží se její třída a zmenší se počet jejích prostorů stacionárních. Případu, kdy O je na křivce C_6, netřeba připomínati; projekcí v S_5 je tu racionální křivka 5. stupně (normální).

Je-li O v obecném bodě variety tvořené oskulačními S_4 křivky C_6, vznikne C_5 *třídy 9. se stacionárním prostorem S_3, mající jen 4 stacionární S_4.* Neboť libovolná přímka jdoucí bodem O (jenž je v oskulačním S_4) protíná už jen 9 jiných oskulačních S_4; oskulační S_4 obsahující O promítá se v stacionární S_3, který platí za 2 stacionární S_4, protože oskulační S_4 křivky C_6 je průsekem dvou sousedních oskulačních S_5.

Je-li O v průseku dvou oskulačních S_4 křivky C_6, dostaneme C_5 *třídy 8. s dvěma stacionárními S_3 a dvěma stacionárními S_4.* Jestliže zmíněné dva oskulační S_4 křivky C_6 jsou sousední, t. j. je-li O v obecném bodě variety tvořené oskulačními S_3, má vznikající C_5 (*třídy 8.*) *stacionární rovinu a tři stacionární S_4.*

C_5 třídy 7. s jednou stacionární rovinou, jedním stacionárním S_3 a jedním stacionárním S_4 nebo *se stacionární přímkou* (tečnou) *a dvěma stacionárními S_4* vznikne, položíme-li O do průseku oskulačních S_3 a S_4 křivky C_6 resp. do obecného bodu variety tvořené oskulačními rovinami křivky C_6.

Konečně nejspeciálnější křivky C_5 obdržíme, zvolíce O na tečně křivky C_6 nebo v průsečíku její oskulační roviny a oskulačního S_4 nebo v průsečíku dvou oskulačních S_3 nebo v průsečíku tří oskulačních S_4; povstanou tak křivky C_5 *třídy 6.*, z nichž první *má hrot a jeden stacionární S_4*, druhá *stacionární*

tečnu a stacionární S_3, třetí *dvě stacionární roviny* a čtvrtá *tři stacionární prostory* S_3.

12. Každá kollineace v S_6, při níž je C_6 invariantní, indukuje na této projektivnost její řady bodové; a naopak projektivnost na C_6 má za následek kollineaci prostoru ji obsahujícího, při níž je křivka invariantní. Aby taková souvislost existovala mezi kollineací prostoru S_5 a projektivností na invariantní křivce C_5, musí býti v S_6 invariantní střed projekce a tedy skupina oskulačních prostorů křivky jím procházejících, pročež i skupina dotyčných bodů prostorů těch na křivce. I platí věta:

Aby v S_5 *existovala kollineace s invariantní křivkou* C_5, *k tomu je nutno a stačí, aby na* C_5 *byla projektivnost s invariantní skupinou dotyčných bodů prostorů stacionárních* [11]).

Vskutku je-li v S_5 kollineace s invariantní křivkou C_5, jest v S_6 kollineace s invariantní C_6 a středem projekce, tedy s invariantní skupinou oskulačních prostorů bodem tím jdoucích a proto v S_5 na C_5 projektivnost s invar. skupinou dotyčných bodů prostorů stacionárních. Naopak, je-li na C_5 projektivnost s invariantní takovou skupinou, je na C_6 projektivnost obdobné vlastnosti a v S_6 kollineace s invariantní C_6 a bodem, proto v S_5 kollineace s invariantní C_5.

Protože existuje ∞^1 projektivností na C_5 s invariantními dvěma body, vyplývá z hořejší věty:

Křivky C_5 *třídy 6. s dvěma* (pouze) *prostory stacionárními jsou invariantní při* ∞^1 *kollineacích prostoru svého.*

Křivek takových jsou, jak uvedeno v odst. 11., tři typy; pro typus s dvěma stacionárními rovinami platí mimo to:

Křivka C_5 *s dvěma rovinami stacionárními jest invariantní při* ∞^1 *involutorních kollineacích svého prostoru.*

Při každé této involutorní kollineaci zaměňují se obě stacionární roviny. Dvě takové kollineace involutorní mají za produkt kollineaci prve uvedenou (a naopak).

---

[11]) *G. Loria* na místě cit. v pozn. [10]).

III.

13. Racionální křivku 6. stupně v prostoru S_4 (označme ji C_4) obdržíme projekcí křivky C_6 z přímky obecně položené (p) nebo projekcí křivky C_5 z bodu mimo ni ležícího. Promítající kuželová varieta 6. stupně je v prvém případě složena z rovin, z druhém z přímek.

Obecná křivka C_4 je *třídy 12.* (libovolným bodem lze k ní vésti 12 oskulačních prostorů S_3), jak poznáme buď na základě křivky C_5 nebo C_6.

C_4 má *dvě rozvinutelné variety oskulační,* a to plochu tečen *stupně 10.* a 3-rozměrnou varietu oskulačních rovin *12. stupně* (t. j. libovolná přímka protíná 12 oskulačních rovin křivky C_4).

Obecná C_4 má *10 stacionárních prostorů* S_3. Vyvodíme to třebas odtud, že z libovolného bodu v S_5 (středu projekce) lze vésti k C_5 10 oskulačních S_4. Stacionární prostory S_3 křivky C_4 dotýkají se (3-rozměrné) variety 2. stupně.

14. Spojme přímku p (středovou přímku projekce) s bodem A_1 na křivce C_6; této rovině $\alpha_1 \equiv pA_1$ odpovídá ve svazku se středem A_2, který jest se svazkem středu A_1 projektivní a vytvořuje s ním křivku C_6, rovina α_2. Rovina α_2 může míti trojí polohu k p: buď neprotíná p nebo ji protíná nebo ji obsahuje. V posledním případě je p bisekantou křivky a promítáním vznikne v S_4 křivka 4. stupně; zbývají tedy dva případy.

V prvém položme rovinou α_2 a přímkou p prostor S_4, jemuž ve svazku se středem A_1 odpovídá prostor, jenž s ním má společnou rovinu jdoucí přímkou p. Pětisečné tyto prostory S_4 křivky C_6 jsou osovými prostory svazků, jež vytvořují 5-rozměrnou kuželovou varietu 2. stupně s vrcholovou rovinou. V druhém případě určují rovina α_2 a přímka p prostor S_3; tento a jemu odpovídající prostor bodem A_1 jsou osovými prostory svazků, které vytvořují 4-rozměrnou kuželovou varietu 3. stupně s vrcholovou přímkou p; vytvořující S_3 této variety jsou obsaženy v pětisečných S_4 křivky, jež jdou přímkou p.

Docházíme takto pro C_4 k výsledku: *Křivek C_4 jsou dva druhy: jejich pětisečné roviny buď tvoří 3-rozměrnou kuželovou*

varietu 2. stupně s vrcholem v bodě nebo obsahují vytvořující přímky plochy 3. stupně.

15. Na C_4 existuje *involuce 6. stupně 1. řádu* I_1^6 (t. zv. *fundamentální*), konjugovaná k involuci I_4^6, vymezené na křivce prostory S_3. Obě involuce ty jsou průměty [12]) involucí vytčených na C_6 prostory S_5, jež patří jednak do svazku s osovým S_4, jednak do svazku s osovým S_1, při čemž S_1 je přímka, z níž C_6 promítáme v C_4, S_4 pak prostor k S_1 polární vzhledem k C_6.

Skupiny fundamentální involuce jsou na C_4 tvořeny také projekcemi (ze středové přímky) bodů křivky C_6, v nichž se křivky té dotýkají oskulační prostory její, jdoucí jednotlivými body přímky středové. Z této povahy fundamentální involuce vyplývá:

Křivka C_4 je invariantní při kollineacích prostoru S_4 ji obsahujícího, jež jsou určeny projektivnostmi na křivce, při kterých je invariantní fundamentální involuce její [13]).

16. Duálním elementem k pětisečnému prostoru S_4 křivky C_6 je přímka, v níž se protíná 5 oskulačních S_5 křivky té. Promítneme-li C_6 do S_4 z takové přímky, obdržíme C_4 *s pěti hyperoskulačními* [14]) S_3 (s dotykem 6-bodovým). Protože tečny křivky C_6 protínají pevné oskulační prostory S_5 v projektivních skupinách bodů, platí:

Hyperoskulační prostory S_3 křivky C_4 (jsou-li různé) *vymezují na tečnách křivky projektivní skupiny bodové.*

O křivce C_4 s pěti hyperoskulačními S_3 platí dále:

Každá skupina fundamentální involuce na křivce skládá se z pěti dotyčných bodů hyperoskulačních S_3 a kteréhokoli bodu na křivce.

Neboť pět hyperoskulačních S_3 křivky C_4 jsou průměty pěti oskulačních S_5 křivky C_6 z jejich průseku, středové přímky. Prostor S_4, polární k této přímce vzhledem k C_6, určen jest

---

[12]) *L. Berzolari*, Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Annali di matem. (2) 21. (1893).

[13]) Srv. *G. Marletta*, Sulle curve razionali del quinto ordine, l. c.[2]) p. 105.

[14]) Hyperoskulační (také stacionární singulární) prostory křivky n tého stupně slují prostory, jež mají s křivkou dotyk nejvyššího stupně (n-bodový).

dotyčnými body uvedených pěti oskulačních S_5; prostory S_5 svazku s osovým oním S_4 protínají C_6 v involuci, jejímž průmětem na C_4 je involuce fundamentální. Je tedy patrno, že každá skupina fundam. involuce na C_4 obsahuje dotyčné body jejích S_3 hyperoskulačních.

Z podmínky pro automorfní kollineaci křivky C_4 (uved. v odst. 15.) vyvozujeme vzhledem k větě právě vytčené:

Křivka C_4 s pěti hyperoskulačními S_3 je invariantní při kollineacích prostoru S_4, jež přísluší k projektivnostem na křivce s invariantní skupinou dotyčných bodů prostorů hyperoskulačních.

IV.

17. Racionální křivku 6. stupně v obyčejném prostoru (C_3) lze pokládati za projekci buď křivky C_6 z roviny nebo křivky C_5 z přímky nebo křivky C_4 z bodu. Středové elementy projekce nesmějí ovšem býti incidentní s křivkou promítanou.

Obecná C_3 je třídy 12.; vyplývá to na př. odtud, že přímka protíná 12 oskulačních rovin křivky C_4 (S_3 protíná 12 oskulačních rovin křivky C_6). *Rozvinutelná plocha tečen křivky C_3 je stupně 10.* (třídy 12., jak uvedeno); libovolná přímka protíná tedy 10 tečen křivky. Plocha ta je průmětem oskulačních ploch (tvořených tečnami) racionálních křivek 6. stupně ve vyšších prostorech.

Obecná C_3 má 12 stacionárních rovin; plyne to na př. z třídy křivky C_4 (bodem — středem projekce lze vésti 12 oskulačních S_3 k C_4) nebo ze stupně variety oskulačních S_3 křivky C_6 (rovina, středová pro projekci, protíná 12 oskulačních S_3 křivky C_6).

18. Oskulační prostory S_3 křivky C_6 dotýkají se kvadratické základní variety polárnosti, kterou C_6 v S_6 určuje. Odtud vychází promítnutím:

Stacionární roviny křivky C_3 dotýkají se plochy 2. stupně.

Protože průmět křivky C_3 v S_2 musí býti racionální, prochází bodem v S_3 10 bisekant křivky C_3 (tečny v to počítaje) čili *obecná křivka C_3 má 10 zdánlivých bodů dvojných.*

Z bodu křivky C_3 lze k ní vésti 6 trisekant. Neboť ze svého bodu promítá se C_3 do roviny v racionální křivku

5. stupně, tedy s 6 body dvojnými; každý z nich je průsečíkem trisekanty s rovinou. Jest tedy C_3 šestinásobnou křivkou plochy, kterou vytvořují její trisekanty.

19. V S_6 jsou zajisté prostory S_4, jež nejsou pětisečnými prostory křivky C_6. Každý z nich je prořat pětisečnými S_4 v ∞^5 rovinách; poněvadž má rovin ∞^6, existují v S_6 roviny, jimiž nelze vésti pětisečný S_4 ke křivce C_6. Jsou tam ovšem i roviny, jimiž prochází jeden pětisečný S_4 křivky C_6. Jakmile však možno rovinou vésti ke křivce C_6 dva pětisečné S_4, lze takových prostorů vésti ∞^1, které tvoří 5-rozměrnou kuželovou varietu 2. stupně se středovou rovinou. Neboť ony dva S_4 lze zvoliti za osové prostory dvou svazků prostorů S_5, jichž korrespondující členy (promítající týž bod křivky) protínají se v pětisečných S_4, jdoucích jejich rovinou. Projekcí do S_3 vyvozujeme z uvedeného:

V prostoru S_3 existují tři druhy racionálních křivek 6. stupně: Křivka C_3 buď nemá žádnou nebo má jednu pětisečnou přímku nebo má nekonečně mnoho přímek pětisečných; v posledním případě tvoří tyto přímky plochu 2. stupně (jednu soustavu plošných přímek jejích) [15]).

Vzhledem k třetímu typu křivek C_3 můžeme říci: *Má-li křivka C_3 dvě pětisečné přímky, má jich ∞^1 tvořících soustavu plochy 2. stupně. Dva svazky rovin, jimiž se body křivky C_3 z jejích dvou pětisečných přímek promítají, jsou projektivní; korrespondující roviny protínají se v pětisečných přímkách křivky, jež vytvořují plochu 2. stupně.*

20. Na C_3 existuje *fundamentální involuce* I_2^6, jejíž skupiny jsou konjugovány (apolární) ke skupinám bodovým, vyme-

[15]) Racionální křivky 6. stupně jsou křivky *nejnižšího stupně*, kterých v S_3 existují s tohoto hlediska *tři druhy* (u křivek n-tého stupně existuje totiž také druh bez $(n-1)$-sečné přímky jen pro $n \leqq 6$). Racionální křivka 5. stupně musí už míti aspoň jednu čtyrsečnou přímku; o známé této vlastnosti křivek 5. stupně (kterou dokázali *E. Bertini*, *Em. Weyr* a j.) můžeme se jednoduše přesvědčiti takto: Čtyrsečné S_3 racionální normální křivky 5. stupně v S_5 protínají S_3, který není čtyrsečným, v ∞^4 přímek; není proto v S_5 přímek, jimiž by neprocházel čtyrsečný S_3. Projekcí z přímky do S_3 nalézáme tedy, že neexistuje rac. křivka 5. stupně v S_3 bez čtyrsečné přímky (průmětu čtyrsečného S_3).

zeným na C_3 rovinami prostoru. Fundam. tato involuce jest průmět oné involuce na křivce C_6 (z níž vznikla projekcí C_3), kterou tam stanoví prostory S_5 svazku 2 řádu s osovým prostorem S_3. polárním k středové rovině projekce vzhledem k C_6.

Fundamentální involuce na C_3 je důležitá při vyšetřování kollineací prostoru S_3, při nichž je C_3 invariantní (v. odst. 15.). Neboť platí:

Projektivnost na C_3, při níž jest invariantní fundamentální involuce na křivce, určuje v S_3 kollineaci s invariantní křivkou C_3.

21. Křivka C_3 může míti nejvýše *4 hyperoskulační roviny.* Neboť jen 4 oskulační S_5 protínají se u C_6 v téže rovině; jejich průměty z této roviny do S_3 jsou roviny hyperoskulační.

Z vlastnosti tečen křivky C_6, uvedené v odst. 4., plyne (protože přímky protínající čtyři roviny v čtveřinách téhož dvojpoměru tvoří t. zv. tetraedrální komplex přímek):

Tečny křivky C_3, jež má čtyři různé roviny hyperoskulační, náležejí tetraedrálnímu komplexu, jehož základní čtyrstěn tvoří tyto roviny.

O uvažované křivce platí: *Skupiny fundamentální involuce na křivce C_3 se čtyřmi hyperoskulačními rovinami obsahují vesměs dotyčné body čtyř těchto rovin a dva kterékoli body křivky* [16]). Neboť prostory S_5 vymezující na C_6 involuci, jejímž průmětem je fundam. involuce na C_3, procházejí prostorem S_3, polárním k středové rovině projekce vzhledem k C_6. Tento S_3 určen je však dotyčnými body čtyř oskulačních S_5 křivky C_6, které se promítají (z jejich průseku) v hyperoskulační roviny křivky C_3; obsahují tedy prostory S_5, jdoucí uvedeným S_3, jen dva proměnlivé body křivky.

Ze složení fundamentální involuce křivky C_3 s čtyřmi rovinami hyperoskulačními a z významu této involuce pro kollineace prostoru S_3 s invariantní křivkou C_3 vyvozujeme:

Křivka C_3 se čtyřmi rovinami hyperoskulačními je invariantní při kollineacích, určených projektivnostmi na křivce, při nichž je invariantní skupina dotyčných bodů těchto rovin.

[16]) *E. Ciani*, Sopra le curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione, Rendiconti d. Circolo matem. di Palermo 26. (1908), s odvozením analytickým.

Podle toho, zdali skupina čtyř dotyčných bodů hyperoskulačních rovin křivky C_3 je obecná nebo harmonická nebo ekvianharmonická, možno rozeznávati tři typy křivek C_3 se čtyřmi rovinami hyperoskulačními [17]).

22. Položíme-li středovou rovinu projekce do průseku dvou oskulačních prostorů S_4 křivky C_6, obdržíme jako průmět křivku C_3, jež má *dvě tečny s dotykem 5-bodovým*. Křivku tuto možno pokládati za speciální případ křivky, o níž jednáno v odst. 21.

Křivka C_3 o dvou tečnách s dotykem 5-bodovým *je invariantní při* ∞^1 *dvojosých kollineací involutorních*; každá kollineace tato určena je involutorní projektivností na křivce, jež zaměňuje dotyčné body obou uvedených tečen. Křivka ta je však *invariantní i při* ∞^1 *kollineací* (neinvolutorních), které příslušejí k projektivnostem na křivce s oněmi dvěma body jako samodružnými. Každá z těchto kollineací je produktem dvou involutorních kollineací hořejších.

V.

23. Racionální křivku 6. stupně v rovině (C_2) lze obdržeti projekcí buď křivky C_6 ze středového S_3 (jenž s ní nemá společného bodu) nebo křivky C_5 ze středové roviny nebo křivky C_4 ze středové přímky nebo konečně křivky C_3 z bodu jako středu (za obdobných podmínek).

C_2 a křivka 10. stupně 6. třídy, jež je řezem 5-rozměrné oskulační variety křivky C_6 s rovinou křivky C_2, jsou polárně reciproké vzhledem ke kuželosečce, v níž rovina křivky C_2 protíná kvadratickou základní varietu polárnosti stanovené křivkou C_6.

24. *Fundamentální involuce* na křivce C_2 je I_3^6. Obdržíme ji tím, že zvolíme v S_6 rovinu polární k onomu prostoru S_3, z něhož C_6 promítáme v C_2 (v polárnosti určené v S_6 křivkou C_6), protneme křivku C_6 prostory S_5 svazku 3. řádu s onou rovinou jako osovou a vymezené takto skupiny bodové promítneme do roviny; dají skupiny fundam. involuce.

---

[17]) Grupami automorfních kollineací těchto křivek zabývá se *E. Ciani* na uv. místě [16]).

Z uvedené polárnosti vyplývá, že skupiny fundam. involuce na C_2 určeny jsou také body středového prostoru S_3; každá skupina této involuce je totiž průmětem skupiny dotyčných bodů šesti oskulačních S_5 jdoucích bodem prostoru S_3 ke křivce C_6. Odtud také je patrno, že skupiny fundam. involuce jsou apolární ke skupinám involuce I_2^6, jež na C_2 jsou vytčeny přímkami roviny její; jeť podmínkou apolárnosti dvou skupin bodových incidence elementů, jimiž skupiny ty jsou stanoveny.

Jako pro C_4 a C_3 platí i pro C_2: *Projektivnost na křivce C_2, při které je invariantní fundamentální involuce křivky, určuje kollineaci roviny s invariantní C_2.*

25. Křivka C_2 může míti nejvýš *3 hyperoskulační přímky* (tečny); vznikne z C_6 projekcí z takového S_3, který je průsekem tří oskulačních S_5 křivky té.

Uvedené tři oskulační prostory S_5 křivky C_6 dotýkají se ve svých dotyčných bodech na křivce (spolu s ostatními oskul. S_5) základní kvadratické variety polárnosti, stanovené křivkou C_6 v S_6; odtud projekcí dostáváme:

U křivky C_2 s třemi přímkami hyperoskulačními náležejí tyto přímky a jejich dotyčné body (jako tečny a body) *téže kuželosečce* [18]).

Protože rovina polární v S_6 k středovému S_3 projekce obsahuje dotyčné body tří oskulačních S_5, z nichž vznikají tečny hyperoskulační, platí: *Fundamentální involuce křivky C_2 s třemi hyperoskulačními tečnami má skupiny, jež všechny obsahují dotyčné body těchto tří tečen a tři libovolné body na C_2.*

Vzhledem k významu fundam. involuce (vytčenému v odst. 24.) patří ke každé projektivnosti na C_2 s invariantní skupinou tří dotyčných bodů přímek hyperoskulačních kollineace roviny s invariantní křivkou C_2. I máme větu:

Křivka C_2, jež má tři tečny s dotykem šestibodovým, je invariantní při grupě šesti kollineací své roviny.

Kollineace této grupy odpovídají těm projektivnostem na křivce, při nichž tři uvedené body její se zaměňují. Grupa ta obsahuje mimo identitu tři kollineace involutorní a dvě cyklické s periodou 3.

[18]) *L. Brusotti*, Sulle curve piane razionali dotate di tre punti d'iperosculazione, Rendiconti d. Ist. Lombardo 37. (1904).