Schmidtovou theorií zabýval se též *Barus*,*) avšak dospěl k náhledu nyní téměř všeobecně přijatému, že příčinu vodivosti vzduchu v okolí fosforu nutno hledati v ionisaci.

Jak patrno z tohoto krátkého vylíčení, není dosud otázka po příčině vodivosti vzduchu při oxydaci fosforu vznikající definitivně a uspokojivě rozřešena, ač nelze popříti, že hlavně polemika vedená o této otázce mezi Schmidtem a Harmsem značnou měrou přispěla k vytříbení názorů, byť i nevedla v každém směru k žádoucímu objasnění. Celkem však kloní se všeobecný úsudek k theorii elektronové.

Znázornění čísel délkami a naopak.

Napsal

Dr. **Jan Vilém Pexider** v Praze.

(Dokončení.)

V geometrii Veroneseově přípustny jsou vedle úseček konečných a aktuálně nekonečně malých ještě délky (ϑ, ϑ', ...) definované tak, že se, značí-li A a B konce konečné úsečky na přímce, nikdy nepřekročí konečné body úseček ϑ, ϑ', ..., nechť se úsečka AB nanese na přímku za sebou kolikrátekoliv. Úsečky toho druhu zovou se aktuálně nekonečně velké. Praktického významu v geometrii nemají; s theoretického stanoviska zajímava jest především ta okolnost, že lze pomocí jich ukázati, že trojúhelníky o stejné základně a stejné výšce nemusí míti v geometrii Veroneseově stejný plošný obsah. Vedle toho používá se jich k důkazu o nezávislosti axiomu Archimedova na ostatních skupinách I—IV. O průkazu objektivné existence úseček aktuálně nekonečně velkých nemůže ovšem býti řeči.

Důkazy existenční nebývají ani v geometrii bez značnějších obtíží; nebylo lze dokázati ani existenci všech „irracionálných" bodů v geometrii Euklidově. Existence „racionálných" bodů byla v 1. odstavci prokázána. Vedle toho lze se ještě přesvěd-

*) *C. Barus*, Drud. Ann. d. Phys. *11*. 1142. 1903.

čiti o existenci „algebraických" bodů, jimž odpovídají algebraická čísla, utvořená z jedničky pomocí konečného počtu základních operací: sčítání, odčítání, násobení a dělení, a pomocí pátého úkonu $|\sqrt{1+k^2}|$, kdež k značí číslo vzniklé použitím kterýchkoli z těchto pěti uvedených operací (v konečném počtu). Množina všech těchto speciálných „algebraických" bodů jest spočetně nekonečná*) a tudíž takřka ničím vedle množiny druhé mohutnosti, již při nejmenším má tak zv. lineárné kontinuum. Existenci libovolného „iracionálného" bodu geometrie zbudovaná na základě axiomů I—IV a VI vůbec nevyžaduje. V geometriích hovících všem těmto zásadám chyběti mohou celé třídy iracionálných bodů; dle toho, které iracionálné body obsahují resp. postrádají, budou se různiti. Jest tedy patrno, že s tohoto hlediska *geometrií euklidických jest nekonečně mnoho.* Všechny jsou částěmi jediné, v niž axiomaticky zavedena jest obapolně jednoznačná korrespondence mezi čísly a body, totiž geometrie Descartovy; a jen tato hoví současně axiomu úplnosti.

Jednotlivá čísla reálná representovati mohou pouze předměty diskrétní, kdežto množina čísel reálných vyčerpává lineárné kontinuum Euklidovo. Logicky přípustno jest však ještě kontinuum jiného druhu, Veroneseovo, jež vyčerpati lze soustavou nearchimedických čísel a v němž kontinuum Euklidovo jest množinou diskrétních bodů. Fakt tento jest nejsilnějším důvodem proti obecnému mínění, že pojem kontinua jest pojem apriorný. Punctum saliens vězí totiž v odpovědi na otázku, co jest to lim $|\alpha_k - \beta_k|$. Nejjednodušší jest zajisté odpověď, že jest to *v každém případě* určitý bod; a pak lze vztah ten čísti buď mathematicky: *Existuje skutečně každý bod, jenž konvergujícím nekonečným processem jest definován* (Věta Cantorova), aneb geometricky: *Leží-li z nekonečné posloupnosti délek, konvergujících k nule, každá zcela uvnitř předchozí, pak existuje...* (Věta Ascoliova). Avšak tato nejjednodušší odpověď není současně tou

*) Geometrie, obsahující v rovině jen tyto body, má nejmenší počet bodů, jaký nevyhnutelný jest k tomu, aby zůstaly zásady shodnosti i axiom Archimedův ještě v platnosti; geometrie, která by obsahovala méně bodů nežli tato, není již euklidickou. Krom toho má geometrie tato tu vlastnost, že všecky její body konstruovati lze pouhým nanášením úseček a přenášením úhlů v konečném počtu.

jedině přípustnou; proto je možný i jiný názor lineárného kontinua.

Tento druhý názor, Veroneseův, má silnou oporu v stanovisku čisté filosofie. Bod definován jest jakožto něco, co nemá vůbec žádných rozměrů, nýbrž jen polohu v prostoru. Myslímeli si nyní takovýchto elementů bezrozměrných množinu vyšší nežli prvé mohutnosti a sice, jak vše tomu nasvědčuje, množinu druhé mohutnosti, vznikne nám dle obecného názoru, jímž jest názor Euklidův, následkem zásady V1 lineárné kontinuum, délka, a tedy rozměr. Z určitého, vymezeného množství něčeho, z čeho rozměrnost jest vyloučena, skládá se rozměr. Jak to filosoficky ospravedlniti a vysvětliti, k tomu ovšem — pomoz si každý sám. Proto Veronese přímo popírá správnost Archimedova axiomu, proto zbudoval geometrii na zásadě této nezávislou a konstruoval v důsledku toho délky resp. čísla „aktuálně nekonečně malá resp. velká“, jichž uvedení do geometrie a tím v názor náš zdá se na poprvé snad přímo illogickým, poněvadž geometři navykli si po tisíciletí operovati jen s délkami konečnými. Tu však vysvítá již dosti jasně, v jak velké míře úvaha o základních větách geometrických jest logickou analysou naší schopnosti nazírací, a jak značně názory naše na prostor mohou se různiti právě v principielních otázkách.

V tomto ohledu pokusil se Russell v [3] vytknouti z našeho názoru na prostor ty nejjednodušší a hlavní, základní pravdy, v nichž nelze se různiti a bez nichž by již zkušenost lidská nebyla ani možna. Našel tři takové základní pravdy, nutné pro naši zkušenost, udal důvod jich nutnosti a vytkl, že jen ty jsou apriorné. Třebas bychom připustili, že se v apriorité nezmýlil, lze rozřešení to — třebas jen pro projektivnou geometrii — považovati za definitivní? Byl by v tom zajisté skrytě obsažen předpoklad, že soustavou axiomů geometrických ovládnuta jest veškerá věda geometrická, že všecky ať známé, neb v budoucnu nalezené věty a všecky geometrické poznatky jsou a budou jen logickými důsledky zprvu vzpomenutých axiomů. Jest tomu skutečně tak, či mohou naše vědomosti geometrické se rozmnožiti o podstatné části takové, že tyto nové poznatky nebudou regulovány dosud známými zásadami? Jak se podařilo ukázati, stačí systém dosavadní k důkazům a odvození elementárních pravd geometrických, k zbudování planimetrie atd; v něm máme úplný systém pro elementárnou geometrii. Avšak jsou i jiné partie, jež se shrnují obvykle pod název „analyse situs“ a v nichž základní věty nepodařilo se dedukovati ze soustavy axiomů geometrie Descartovy.

Analyse situs pojednává o všeobecných vlastnostech spojitosti křivek, ploch a prostoru, ale uvažuje je dosud tak, jak jsou dány naším názorem v prostoru. Jest však názor náš ve všem všude logický? Lze to sice předpokládati, ale pak jest to patrně nové, samostatné tvrzení, jež by se muselo předem důkladně doložiti (viz paradoxon shora uvedené). Analyse situs jedná na př. o rodu mnohonásobně souvislých ploch tak, jak tyto dány jsou pouhým názorem. Chceme-li však vlastnosti takových ploch stanoviti přesně, mathematickými vztahy, musíme místo ploch (i ostatních útvarů), názorem pouze approximativně daných, míti přesně definované geometrické útvary v té geometrii, v níž naopak úvahy mathematické nejlépe a nejjednodušeji lze učiniti názornými, v analytické geometrii Descartově. Tímto způsobem arithmetisujeme analysi situs dosahujíce toho, že lze operovati s útvary přesně definovanými a že možno i spojitost jich vhodně definovati ve smyslu Jordanově; tímto způsobem můžeme však veškeren obsah analyse situs arithmetisovati a základní věty tak vzniklé analysovati na jich jednoduchost a dokazatelnost či nedokazatelnost z axiomů elementárné geometrie. A tu právě se počíná ukazovati, že uvedený systém nedostačuje k odvození všech těchto arithmetisovaných vět. Avšak bude to ještě delší dobu trvati, nežli umožněno bude k dosavadnímu systému připojiti nové základní věty, zásady, jež pak ovládnou nejen elementárnou geometrii, ale i partie vyšší, shrnuté v analysi situs, ve všeobecné nauce o spojitosti geometrických útvarů.

To vše jest vážnou námitkou proti Russellovu řešení a proti všem podobným pokusům, snažícím se stanoviti jednou pro vždy pro názor náš na prostor *nejmenší* počet základních zásad. Jeť v tom implicite zahrnut předpoklad, že názor ten jest hotov, kdežto dějiny geometrie učí spíše opak, že se totiž názor náš vyvíjí a stále tříbí. Byl zprvu jediný, Euklidův, od Lobačevského a Bolyaie byly dva, od Riemanna trojí a konečně se ukázalo, že nejen těchto nových jest nekonečně mnoho, nýbrž že i euklidických geometrií jest počet nekonečný. Nelze tedy jen tak upříti našemu názoru na prostor schopnost vývoje a míti za to, že onen minimální problém jest nebo bude definitivně řešen. Muselo by se současně dokázati, že názor, jenž se analysuje, jest hotový a neschopný dalšího vývoje. Mathematicky by se důkaz ten musel vésti tak, že by se ukázalo, že systém zásad, vystihujících onen názor, jest v sebe uzavřený, t. j. že nepřipouští rozšíření o žádnou nezávislou novou větu, aniž by současně některá ze zásad systému následkem toho pozbyla své platnosti. A není snad hřešeno, tvrdí-li se, že toho jsme ještě dosti daleko.

Jest zajisté vhodné vyjíti raději od geometrie projektivné, jež nemá zapotřebí čísel, metrických vztahů, a přejíti pak ku geometrii metrické a analytické. Neboť systém reálných čísel konstruován jest uměle, nezávisle na názoru, jsa založen na pojmu limity, jenž jest pojem konvencionálný, stejně jako i celá „vyšší mathematika", pokud jest založena na pojmu limity (počet differenciálný, integrálný, . . .) jest konvencionálnou. Proto vycházejí novější analysté od geometrie projektivné; tak to učinil Russell, tak podány jsou elementy geometrie od Enriqua v [1]. Přechod k metrické geometrii jest pak již snadný. Stačí k systému základních vět geometrie projektivné adjungovati jistou imaginárnou kuželosečku („kulový kruh") a geometrie metrická objeví se jako souhrn všech projektivných vlastností, jež mají útvary geometrické, precisují-li se vlastnosti tyto s ohledem na onu pomocnou imaginárnou kuželosečku. Obdobně vyjíti lze od analyse situs, ale pak použíti dlužno za příčinou nutné přesnosti k definicím křivých čar, ploch atd., pojmů vzatých z Cantorovy theorie množin (pokusy od Enriqua).

Vzájemné postavení těchto tří geometrií pochopí se pak velice snadno se stanoviska theorie transformací. Neboť metrická geometrie jest, jak známo, invariantní theorií „hlavní grupy" (G_7), projektivná invariantní theorií jisté patnáctičlenné grupy (G_{15}), utvořené kollineacemi prostoru*), a analysis situs inva-

*) V elementárné geometrii zůstanou vlastnosti útvarů nezměněny při pohybu a při transformacích podobných; nové koordinaty lze pak vy-

riantní theorií všech spojitých transformací bodových, jichž jest ovšem nekonečně mnoho (G_∞).

Jest možno též nezávisle na geometrii Descartově a následkem toho nezávisle na určitém systému souřadnic pojednávati o útvarech geometrických a operovati přímo s invarianty grupy potřebné právě k dedukcím vyvozovaným; úvahy tohoto rázu, zvané „přirozená geometrie“, geometria intrinseca, pocházejí hlavně od E. Césara [1]. Snaha emancipovati geometrii zcela od čísel nemůže však míti úspěchu; neboť pojem čísla dostaví se ihned do geometrie, jakmile se jen jedna a táž konstrukce opakuje. Proto bylo a jest vždy prospěšné, uvésti do geometrie čísla způsobem nejen jednoduchým, ale i rigorosně přesným, a postaviti se na stanovisko ryze formální. Základním větám mezi body (A), přímkami (a), rovinami (α) odpovídají pak určité jednoduché vztahy mezi A, a, α, a tyto mohou i jinak býti interpretovány, čímž geometricky provedeno jest zobrazení prostoru na jiné předměty. Tím vznikne nový druh geometrie, tak zv. inversní, jež se stanoviska theorie transformací jest*) invariantní theorií grupy o deseti elementech (G_{10}).

Z úvah těchto i předchozích vysvítá však dosti jasně velká důležitost problému geometrického znázornění čísel (a naopak), problému zdánlivě nepatrného. Jsou to pak hlavně výsledky školy Veroneseovy a Hilbertovy, jimž věda geometrická děkuje za definitivní vyjasnění.

---

jádřiti jako lineárné funkce původních:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z + d_1$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z + d_3.$$

Z těchto koeficientů $a_1, a_2, \ldots$ jest však pouze sedm na sobě nezávislých, šest pro pohyb a jeden pro transformaci na podobné útvary.

V projektivné geometrii vyjádřena jest nejvšeobecnější transformace vzorci

$$\varrho\, x_i = \sum_{1}^{4} k\; a_{ik}\, x_k, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Z šestnácti koefficientů $a_{11}, a_{12}, \ldots$ jest však jen patnácte libovolných.

Analysis situs jedná o takových vlastnostech křivek, ploch a částí prostorových, které se nemění při žádné spojité deformaci. Takovýchto deformací jest patrně nekonečně mnoho.

*) V konkrétním případě.