Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1901

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0030|log2

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATHEMATIKY A FYSIKY.

SPOLUPŮSOBENÍM ODBORNÍKŮ

REDIGUJE

PROF. AUGUSTIN PÁNEK

A VYDÁVÁ

JEDNOTA ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

ROČNÍK XXX.

V PRAZE.

Tiskem dr. Ed. Grégra. — Nákladem Jednoty českých mathematiků a fysiků

1901.

NIEDERSÄCHS.
STAATS- U. UNIV.
BIBLIOTHEK
GÖTTINGEN

2 1981.5984

OBSAH.

Věstník literární.

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Úlohy.

Stanovení relattivné hmoty země a slunce na základě fysikalním.

Napsal prof. Dr. **V. Strouhal** v Praze.

Stanoviti poměr hmoty země ke hmotě slunce jest úkolem nikoli snadným, kterýž řeší astronomie methodami, založenými na studiu pohybu těles nebeských. Takovým základem jest pohyb měsíce, pokud se jeví býti rušen sluncem (Hansen). Jiným základem jsou perturbace, jež způsobuje země v pohybech planet, zejména Venuše a Marse (Leverrier, Harkness, Tisserand, Newcomb, Backlund). Že úkol jest nesnadným, viděti nejlépe z výsledků, jež od různých zde uvedených badatelů byly vypočítány a jež se rozeznávají vespolek měrou větší než při methodách astronomických bývá pravidlem.

Vzhledem k tomu jest zajímavo upozorniti, že také fysika k řešení úkolu toho přispívá. Veličinou zde jakoby sprostředkující jest *konstanta gravitační*. Astronomie i fysika určuje tuto konstantu číselně, dle vlastních method, tam velmi jednoduchých, zde dosti obtížných a pracných, při čemž se číselné hodnoty vztahují na určité základní jednotky délky, hmoty a času. Poněvadž pak tyto jednotky základní jsou zcela jiné v astronomii a zcela jiné ve fysice, rozeznávají se číselné hodnoty pro konstantu gravitační v astronomii a ve fysice nalezené, jsouce rozdílné svým základem. Proto vede srovnávání obou hodnot k *výsledku novému*, kterým se k řešení úkolu výše naznačeného přispívá.

1. Vizme především, jak astronomie konstantu gravitační zavádí a číselně určuje. Kolem slunce, hmoty M, obíhá v době T oběžnice, hmoty m, v elliptické dráze, jejíž poloosa hlavní budiž a, vedlejší b, numerická excentricita e, parametr p. Za dobu T opíše tedy průvodič r plochu πab, tudíž za jednotku času plochu s, která jest určena vzorcem

$$s = \frac{\pi ab}{T}.$$

Dle třetího zákona Keplerova platí relace

$$T^2 : T'^2 = \frac{a^3}{1+\frac{m}{M}} : \frac{a'^3}{1+\frac{m'}{M}},$$

tak že lze na místě doby oběhu T zavésti do hořejšího vzorce pro s výraz *úměrný*, totiž

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+\frac{m}{M}}}$$

a nahradíme-li pak ještě poloosu b výrazem

$$a\sqrt{1-e^2},$$

obdržíme

$$s = C\sqrt{a(1-e^2)}\,.\,\sqrt{1+\frac{m}{M}},$$

kdež znamená C konstantu úměrnosti.

Vzhledem k vzorci

$$p = a(1-e^2),$$

lze formálně jednoduševji psáti

$$s = C\sqrt{p}\,.\,\sqrt{1+\frac{m}{M}}$$

a s velkou přibližností

$$s = C\sqrt{p},$$

poněvadž jest hmota oběžnice proti hmotě slunce velmi malou.

Obě rovnice poslední obsahují ve formě nejjednodušší všechny tři zákony Keplerovy spojené. Plocha průvodičem za každou jednotku časovou opsaná jest (velmi přibližně) úměrná kořenu z parametru dráhy. Věta platí ostatně netoliko pro dráhy elliptické, nýbrž pro dráhy v kuželosečkách vůbec.

Konstantu úměrnosti C určíme *číselně* použíce rovnic hořejších na konkretní případ *naší země* a volíce určité jednotky. Obdržíme tak vztah

$$\frac{\pi ab}{T} = C\sqrt{p}\,.\,\sqrt{1+\frac{m}{M}}$$

čili

$$\frac{\pi\,.\,a^{\frac{3}{2}}}{T} = C\sqrt{1+\frac{m}{M}},$$

ve kterémž toliko třeba, veličiny zde přicházející v jistých jednotkách číselně vyjádřiti a pak konstantu C počítati. Jednotkou délky jest v astronomii právě poloosa dráhy zemské; tudíž jest

$$a = 1.$$

Jednotkou času jest střední den sluneční; v této jednotce jest

$$T = 365{\cdot}2563835.$$

Jednotkou hmoty jest hmota slunce; tudíž jest

$$M = 1.$$

Zbývá tedy ještě m. Pro tuto hmotu přijal Gauss hodnotu

$$m = \frac{1}{354710}.$$

Z těchto dat vypočítáme

$$\lg 2C = 8{\cdot}2355814 - 10$$
$$2C = 0{\cdot}01720210.$$

Počítá se konstanta 2C a nikoli C, poněvadž má jednoduchý význam Kdyžby se totiž přibližně kladla hmota $m = 0$, vyšlo by

$$2C = \frac{2\pi}{T},$$

což jest průměrná úhlová rychlost, s jakou průvodič postupuje, vyjádřena v jednotce radiant a vztahovaná na střední den sluneční. Dle toho vzorce vyšlo by

$$\lg 2C = 8{\cdot}2355821$$
$$2C = 0{\cdot}01720213.$$

Rozdíl mezi touto hodnotou přibližnou a onou správnou zde sice jest, avšak, jak čísla ukazují, jest velice nepatrný. V logarithmu činí rozdíl jen 6·7 jednotek sedmého místa decimalního.*)

2. Význam konstanty 2C vzhledem k úkolu napřed uvedenému vynikne zvlášť, když se ukáže, v jakém vztahu jest ke konstantě gravitační $\varkappa$. Vyjádříme-li vzájemné urychlení mezi sluncem M a oběžnicí m jednak dle zákonů pohybu centrálního, jednak dle zákonu gravitačního, obdržíme rovnici

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a = \varkappa \frac{M + m}{a^2}.$$

Připojíme-li k ní rovnici hořejší, kterou se konstanta C zavedla, totiž

$$\frac{\pi a^{\frac{3}{2}}}{T} = C\sqrt{1 + \frac{m}{M}},$$

obdržíme výslednou relaci

$$\varkappa M = (2C)^2.$$

Čtverec konstanty 2C a konstanta gravitační $\varkappa$ jsou tedy veličiny úměrné; faktorem úměrnosti jest hmota slunce M. Když však přijmeme základní jednotky astronomické, pro které jsme nahoře číselnou hodnotu 2C počítali, pak jest

$$M = 1,$$

tudíž jednoduše

$$\varkappa = (2C)^2.$$

Z hořejší číselné hodnoty 2C obdržíme tudíž ihned číselnou hodnotu $\varkappa$, totiž

$$\varkappa = 2{\cdot}959 \,.\, 10^{-4}.$$

3. Také fysika snaží se číselnou hodnotu konstanty gra-

*) Srovnej G. Gruss, Základové theoretické astronomie, 1897, pag. 13.

vitační stanoviti, methodami různými, o nichž minulého roku přehledně bylo referováno*). Hojný číselný material, zjednaný pracemi celého století, jest po ruce; referent sestavil výsledky, jichž došli různí pozorovatelé v různých dobách, ne pro konstantu gravitační samu, nýbrž pro veličinu jinou, s ní určitou relací spojenou, totiž pro střední hustotu země, kteráž jest přehlednější a má jednodušší význam. Výsledky tyto i v dobách nejnovějších zjednané liší se od sebe dosti značně. Tak udává**) *Wilsing* 5·594 a 5·577, a vedle toho *Richarz* a *Krigar Menzel* 5·505, což jest rozdíl jedno procento přesahující. Bylo by žádoucno, aby práce celého století byla zakončena kritickým rozborem všech výsledků, tak aby podobně, jako se děje v astronomii (na př. pro parallaxu slunce), mohla jistá hodnota jakožto pravdě nejpodobnější býti všeobecně uznána a do počtů jiných přijímána. Kdyby se prostě ze všech výsledků, jak je tam referent sestavil, vzal arithmetický průměr, vyšlo by číslo 5·44. K první orientaci výsledek tento stačí; při další úvaze nutno však přihlédnouti k tomu, že váha různých výsledků není stejnou, přes to, že každý z pozorovatelů se snažil co nejvíce přesný výsledek si zabezpečiti; ale zkušenosti doby, o něž se opíral, a prostředky jemné mechaniky, jimiž vládl, byly různé. Vzhledem k tomu dlužno novějším pozorováním, a tu zvláště některým z nich, přičísti větší váhu, čímž se výsledek spíše těmto přizpůsobí. Za pravdě nejpodobnější pokládá „Bureau des longitudes“ hodnotu

$$S = 5{\cdot}50 \frac{g}{cm^3},$$

kteráž je v souhlasu, v mezích chyby pravděpodobné tam udané, s výsledkem, jehož prací 14letou došli *Richarz* a *Krigar Menzel.*

Se střední hmotou specifickou S jest konstanta gravitační $\varkappa$ spojena relací

$$\varkappa \,.\, S = \frac{G}{\frac{4}{3}\pi R}.$$

*) Dr. Vlad. Novák, Časopis pro pěst. mathem. a fys. roč. XXIX. pag. 10.

**) l. c. pag. 28.

Zde znamená R střední poloměr země, G střední urychlení ryze gravitační (bez centrifugalního) pro zemi naši při hladině moře. Číselně jest

$$R = 6371\cdot103\,km$$

$$G = 982\cdot3\,\frac{cm}{sec^2},$$

z čehož plyne

$$\varkappa\,.\,S = 3\cdot6808\,.\,10^{-7}\,\frac{1}{sec^2}\,.$$

Jsou tudíž hodnoty k sobě náležející

$$S = 5\cdot50\,\frac{g}{cm^3}$$

$$\varkappa = 6\cdot69\,.\,10^{-8}\,\frac{cm^3}{g\,.\,sec^2}\,.$$

4. Jak viděti, jest číselná hodnota konstanty gravitační určená fysikalně zcela jinou než určená astronomicky. Důvodem toho jest, že výpočet obou založen na základních jednotkách zcela různých; v astronomii jsou jednotkami těmito poloosa a dráhy zemské, hmota $\odot$ slunce a den d středního času slunečního; ve fysice jsou to *cm*, *g*, *sec*. Zde pak ukazuje se na příkladu klassickém důležitost rozměrů. Chceme-li obě číselné hodnoty $\varkappa$, jež ovšem vyjadřují totéž, do rovnice zavésti, dlužno psáti

$$6\cdot69\,.\,10^{-8}\,\frac{cm^3}{g\,.\,sec^2} = 2\cdot959\,.\,10^{-4}\,\frac{a^3}{\odot\,.\,d^2}\,.$$

Odvodivše rovnici tuto, vraťme se k úkolu napřed vytčenému. Z rovnice té plyne

$$\frac{6\cdot69\,.\,10^{-8}}{2\cdot959\,.\,10^{-4}} = \left(\frac{a}{cm}\right)^3 : \frac{\odot}{g}\,.\,\left(\frac{d}{\mathrm{sec}}\right)^2.$$

Zde jest především

$$\frac{d}{sec} = 86400.$$

Poměr $\frac{a}{cm}$ lze určiti z rozměrů země, na nichž definice metru založena, a z parallaxy slunce. Pro tuto přijala „Conférence internationale des étoiles fixes“ v Paříži 1896 hodnotu

$$8{\cdot}80.''$$

Přijme-li se pak pro aequatorealní poloměr země R_0 hodnota (A. Clarke)

$$R_0 = 6378{\cdot}3\, km,$$

vychází

$$\frac{a}{cm} = 149501 \,.\, 10^8.$$

Tím zbývá v rovnici hořejší, jakožto jediná neznámá, poměr

$$\frac{\odot}{g}$$

a tento lze počítati, t. j. vyjádřiti hmotu slunce v grammech. Aby se dostala čísla přehlednější, zaveďme hmotu naší země ♁ do počtu, píšíce

$$\frac{\odot}{g} = \frac{\odot}{♁} \cdot \frac{♁}{g} \,.$$

Z hodnot nahoře uvedených, pro R a S, vypočítá se

$$\frac{♁}{g} = 5{\cdot}9579 \,.\, 10^{27};$$

země naše má tedy hmotu téměř 6 tisíc trillionů tun. Zbývá pak již jen poměr $\frac{\odot}{♁}$, kterýž lze počítati. Výsledkem počtu jest hodnota

$$\frac{\odot}{♁} = 332310$$

anebo, jak se v astronomii obyčejně psává, kde se hmota slunce béře za jednotku,

$$\frac{♁}{\odot} = \frac{1}{332310} \,.$$

5. Mohlo by se zdáti — na první pohled — že methoda výpočtu zde uvedená jest zásadně pochybenou proto, poněvadž konstanta 2C, na níž výpočet poměru $\frac{m}{M}$ hmoty země a slunce byl založen, již známost tohoto poměru předpokládá. Avšak bližší úvaha ukazuje, že v konstantě 2C onen poměr jen jako *člen korrekční*, malého významu, jest obsažen, tak že korriguje jen poslední sedmé místo decimalní v jejím logarithmu. *Gauss* počítal konstantu 2C z hodnoty

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{354710}.$$

Leverrier (1872) nalezl pro týž poměr na základě saekularních nerovností v pohybech planet Venuše a Marse působených přitažlivostí země, hodnotu

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{324439},$$

kterou přijímají též Annaly observatoře v Paříži.

Obě hodnoty differují velmi značně. Avšak na konstantu 2C má difference ta vliv velmi nepatrný; neboť jest

$$\lg \sqrt{1 + \frac{1}{354710}} = 0{\cdot}00000067$$

$$\lg \sqrt{1 + \frac{1}{324439}} = 0{\cdot}00000061,$$

rozdíl sahá tedy až do osmého decimalního místa v logarithmu konstanty 2C. Z toho důvodu podržuje se i nyní ještě ta hodnota 2C, jak ji vypočítal Gauss, jakožto konstanta absolutní, ač jsou nyní k disposici data velmi přesná a provádí se při výpočtech jen malá kompensace*) v astronomické jednotce délkové, t. j. v odlehlosti *a*.

6. Ke konci přihledněmež, jak výsledek, jehož jsme došli z měření fysikalních, souhlasí s těmi, jež byly odvozeny methodami astronomickými. Přestaňme na hodnotách, pracemi nejno-

*) Gruss, l. c. pag. 16.

vějšími zjednaných, jež se v astronomii pokládají dle nynějšího stavu věcí za nejlepší.

„*Berliner astronomisches Jahrbuch*" pro rok 1902 uvádí dle *Newcomba* pro úhrnnou hmotu země a měsíce dohromady hodnotu

$$\frac{☾ + ♁}{☉} = \frac{1}{329390}.$$

Harkness dochází jakožto hodnoty pravdě nejpodobnější

$$\frac{☾ + ♁}{☉} = \frac{1}{327214}.$$

„*Nautical Almanac*" pro rok 1902 přijímá dle *Backlunda* hodnotu

$$\frac{☾ + ♁}{☉} = \frac{1}{328129}.$$

Uznáme-li pro hmotu měsíce za pravdě nejpodobnější hodnotu

$$\frac{☾}{♁} = \frac{1}{79{\cdot}667}$$

dle *Hansena*, jenž jest v tomto oboru (měsíce) autoritou všeobecně uznanou, vypočítáme z dat nahoře uvedených pro poměr hmoty země a slunce hodnoty následující:

$$\frac{♁}{☉} = \frac{1}{333650} \ldots \text{Newcomb}$$

$$\frac{♁}{☉} = \frac{1}{331410} \ldots \text{Harkness}$$

$$\frac{♁}{☉} = \frac{1}{332360} \ldots \text{Backlund.}$$

Tato čísla změnila by se jen velmi málo, kdybychom chtěli pro hmotu měsíce přijmouti hodnotu novější

$$\frac{☾}{♁} = \frac{1}{81{\cdot}068},$$

kterouž vypočítal *Harkness* z pozorování přílivu a odlivu.

Arithmetický průměr hodnot vypočtených dává

$$\frac{♁}{\odot} = \frac{1}{332473}.$$

Srovnávajíce s tímto výsledkem hodnotu nahoře vypočtenou

$$\frac{♁}{\odot} = \frac{1}{332310},$$

uznáme, že souhlas jest velmi dobrý.

Z tohoto souhlasu lze usouditi zase zpět, že hodnota konstanty gravitační, kterou jsme za základ výpočtu položili, jest i z důvodů astronomických pravdě velice podobnou.

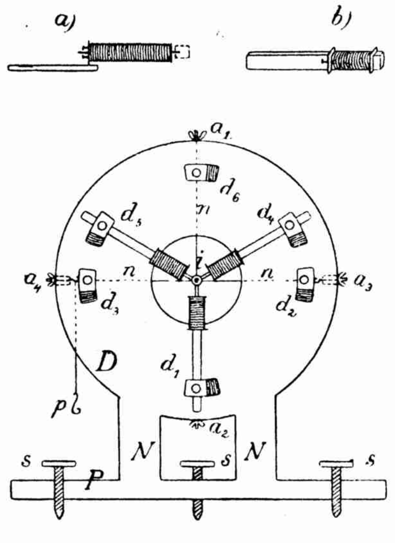
Jednoduchý přístroj k objektivnímu demonstrování proudů proměnných.

Sestavil

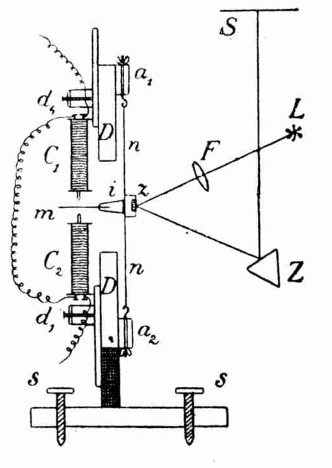
B. Navrátil,
ředitel vyšší realné školy v Prostějově.

V kruhové a přesně rovné desce D (obr. 1.) o průměru asi 35 *cm* vyřízne se soustředně kruhový otvor asi 10 *cm* v průměru. Desku tu postavíme na nohách N na podstavu P, jíž třemi šrouby *s* lze postaviti vodorovně, po případě dle potřeby nakloniti. Na jedné straně desky D (v obr. 1. na zadní, v obr. 2. na pravé) umístěny jsou na koncích svisného a vodorovného průměru 4 třmínky a_1 a_2 a_3 a_4, jimiž procházejí čtverhranné tyčky, jež šroubovými maticemi podél obou průměrů pošinovati lze, aniž samy se otáčejí. Na háčcích, jimiž vnitřní konce tyček jsou opatřeny, visí na stejně dlouhých nitích (žádá-li se větší pružnosti v kroucení, vezmeme přiměřeně tlusté struny) uprostřed vnitřního kruhového otvoru částka přístroje, označená *i*, již nazveme indikatorem.

Jest to korek vypilovaný asi v té podobě, jak obr. 2. ukazuje, do jehož čelné široké části zasazeno jest malé čtvercové zrcádko z o délce strany 2 *cm*, do užší části zadní magnetická (často dostačí i jen obyčejná nemagnetická železná) tyčinka m ztloušti 2 *mm* a zdéli 4 *cm*. Indikator jest zavěšen na nitkách n pomocí mosazného kroužku objímajícího korek na rozhraní tenčí a tlustší jeho části, a zároveň tak vyvážen, aby těžiště jeho padlo do roviny nití n. Tímto závěsem docílíme výchylky, po případě kmitání indikatoru buď okolo jedné niti — svisné nebo vodorovné — jakožto osy, když druhá nit jest docela popuštěna; neb okolo obou, když obě jsou napjaty, ve kterémž případě tudíž indikator při amplitudách velmi malých, o které jen nám zde jde, zaujati může stejně snadno každou polohu v prostoru kužele, jehož vrchol leží ve středu kroužku, a jehož osu označuje magnet m, když jest v rovnováze.



Obr. 1.



Obr. 2.

Na druhé straně desky D (v obr. 1. na přední, v obr. 2. na levé) upevniti lze skobami $d_1 \dots d_6$ ve směru radialním tyčkové elektromagnety tak, aby pól jejich byl ve vhodné vzdálenosti od pólu m indikatoru i. Magnetům těm dáno zařízení dvojí. Buď jest to obyčejný tyčkový elektromagnet s válcovitým jádrem z měkkého železa zdéli 10 *cm* o průměru 4 *mm* v cívce 8 *cm* dlouhé, ovinuté tlustším drátem tak zvoleným, aby odpor jeho se rovnal 1 ohmu. Cívka upevněna jest na dřevěném prkénku, jež skobami *d* v žádoucí poloze udržeti lze. Na konec železného jádra možno též navlíknouti válcovité nástavky z měkkého železa o průměru 1 *cm*, jak na obr. 1 *a*) tečkami jest naznačeno.

Anebo vzat byl ocelový magnet hranolový rozměrů

$$100 \times 10 \times 5\, mm,$$

k jehož jednomu pólu přišroubován nástavek z měkkého železa podobného tvaru 4 *cm* dlouhý a 2 *mm* široký, na nějž navlíknuta cívečka s četnými závity tenkého drátu, jak v telefonech vídáme, s úhrnným odporem 30 ohmů (obr. 1b). Prvého druhu užíváno bylo při malých elektromotorických silách, druhého při elektromotorických silách větších. Kdy kterého druhu užiti lze, o tom nejlépe v každém daném případě se poučíme zkoušením.

K objektivnímu znázornění proměnných proudů jest konečně zapotřebí intensivního zdroje světelného L (obr. 2.); užíváno téměř výhradně Křižíkovy elektrické lampy (o 40 voltech a 10 ampèrech), uzavřené v temné skříni, jejíž paprsky světelné učiněny napřed rovnoběžnými a vypouštěny pak kruhovým otvorem, jehož skutečný obraz vytvořen čočkou F na stínítku S po odraze světla od otáčivého zrcadla trojbokého Z. Vzdálenost ZS obnášela obyčejně 7·5 *m*. Místo elektrické lampy dostačí též intensivný argandský hořák, jehož plamen uzavřen jest ve válci z černého plechu, do jehož pláště navrtány jsou kruhové otvory různých velikostí, jichž obrazy pak jako dříve čočkou F promítneme na stinítko S. — Popíšeme nyní některé pokusy, jež přístrojem tímto lze ukázati, zejména ty, pro něž byl sestrojen.

1. *Proudy přerývané a střídavé jednofasové.* Proudy přerývané zjednáme si na př. kladívkem Neefovým, proudy střídavé příslušným strojem dynamoelektrickým.*) Elektromagnet, zatím

*) Na dynamoelektrický stroj ruční na proudy stejnosměrné s kollektorem o 24 lamellách navlečeny 4 mosazné kroužky I, II, III, IV se žlábky na obvodu a isolovány od sebe úplně, od lamell kollektoru jen částečně, tak že kterýkoliv kroužek s *jednou* lamellou kollektoru mohl býti vodivě spojen pouhým přitažením šroubku. Primární magnet stroje buzen byl zvláštním proudem. Dotýkají-li se kroužky I a II lamelly 1. a 13., odvádějí dotyčné

jen jediný, a to prvního druhu, t. j. o malém odporu upevníme v poloze d_1 (obr. 1. i 2.), vedeme jím střídavý proud a regulujeme napjetí nití, popouštějíce nit vertikální maticí spodní a_2 a přitahujíce dle potřeby nit horizontální maticemi a_3 a_4.

Napjetí horizontální ať je značně větší než vertikální. Uvedeme-li pak do cívky střídavý proud, vzniká na hořejším pólu elektromagnetu střídavě pól severní a jižní, jenž pól *m* indikatoru střídavě přitahuje a odpuzuje.

Při malé frekvenci proudu (na př. 2—4 za sek.) pozorujeme pak, jak světelný index na stinítku S střídavě se zdvihá nad polohu rovnovážnou a klesá pod ni. Amplitudy dosáhneme snadno 10 *cm* a více.

Jedná-li se o proud větší frekvence (na př. 30 za sek.), napínáme nit a_3 a_4, při poměrně malém napjetí nitě a_1 a_2, tak dlouho, až vlastní doba kmitu indikatoru *i* vyrovná se periodě proudu střídavého (přerývaného). Tu se pak světlý kotouček na stinítku S následkem rychlého kmitání indikatoru směrem shora dolů prodlouží, a otočíme-li zvolna zrcádkem Z, objeví se na stinítku lesklá vlnitá čára. Amplituda nyní snadno dosáhne hodnoty 30 *cm* neb i větší a na stinítku vidíme pak mohutnou světelnou vlnu známého tvaru sinusového. Dlužno však podotknouti, že má-li světlá tato vlna býti pravidelná, zejména, má-li stále míti tutéž amplitudu, jest nutno udržeti frekvenci proudu střídavého, t. j. otáčecí rychlost stroje proud budícího na míře dokonale konstantní, čehož při ručním pohonu ovšem jen nesnadno a i to jen na okamžik dosíci lze. Totéž platí o otáčecí rychlosti zrcádka Z, jež podmiňuje délku vlny. Ostatně i to zasluhuje zmínky, že v případě právě popisovaném střídavé proudy mohou býti i velmi slabé, poněvadž se magnetickými impulsy, byť i velmi slabými, amplituda kmitu indikatoru velmi rychle zvětšuje (podobně jako u souznění dvou těl stejně naladěných). A skutečně dostačil

kartáčky do žlábků přiléhající z armatury jednofasový proud střídavý. Zřídí-li se kontakt mezi kroužky I a II a lamellami 1 a 13, pak mezi III a IV a lamellami 7 a 19, obdržíme z příslušných 4 kartáčků proudy dvojfasové. Zjednáme-li kontakt mezi kroužky I, II, III, IV a lamellami 1, 13, 21, 5, obdržíme mimo proud střídavý z I a II též proudy trojfasové z II, III a IV.

i jen remanentní magnetismus primárního magnetu stroje k vytvoření veliké světlé vlny z daleka viditelné.

Amplitudu této vlny lze měniti buď variací síly proudu anebo, nelze-li toho učiniti, variací vzdálenosti pólu cívky od *m* a napjetí niti. Jedná-li se o proudy velmi slabé, můžeme na rámec přístroje D mimo cívku v d_1 upevniti ještě cívku druhou v poloze d_6 (obr. 1.; v obr. 2. jsou to cívky C_1 a C_2) tak, aby střídavým proudem na koncích k *m* obrácených se budily magnetické póly nestejnojmenné, jichž účinky na pól *m* se pak, jak patrno, sečtou. Ještě citlivějším stane se přístroj, upevní-li se odchylující cívky v polohách $d_2\, d_3$ (obr. 1.; obr. 2. tuto polohu také znázorňuje, když si jej myslíme jako půdorys). Zároveň učiníme svisné napjetí velmi malým (5—10 *g*) a napjetí horizontální co nejmenší, tak aby indikator právě ještě se udržel v poloze rovnovážné. V tomto případě doporučuje se, regulovati napjetí nití místo šroubků $a_3 a_4$ raději přímým zavěsováním závaží, jak obr. 1. u *p* naznačuje.

2. *Indukce elektrická a magnetická.* Při demonstrování základních zjevů indukce upotřebíme zařízení popsaného na konci odstavce právě předcházejícího. Při galvanické indukci užito bylo malinké indukční cívky, 8 *cm* dlouhé*); primární proud obnášel 0·4—0·8 amp. a měněn byl zvláštním kommutatorem v intervallech velkých, aby bylo lze rozeznati proudy indukované jak uzavřením, tak i přerušením proudu. Při magnetické indukci vsouván do cívky**) o úhrnném odporu 1 ohmu obyčejný tyčkový magnet. Na desce D upevněny byly cívky prvního druhu o malém odporu. V některých případech na jejich konce navlíknuty zmíněné již válcovité nástavky z měkkého železa, aby magnetické pole mezi nimi bylo stejnoměrnější. Světelný index na stinítku S ukazoval odchylky 10—20 *cm* od polohy rovnovážné na levo a na pravo dle směru proudu indukovaného. Že při tomto pokusu zrcádko Z jest zbytečno, netřeba zvlášť podotýkati.

3. *Proudy dvojfasové a kroužívé pole magnetické jimi vzbuzené.* Dvě cívky druhého druhu, t. j. o velikém odporu upevní se v poloze d_1 a d_2 (obr. 1.). Dvojfasový proud dodává dynamo-

---

*) Poměr počtu závitů primárních a sekundárních nebylo lze stanoviti.

**) Asi o 300 závitů drátu 1 *mm* tlustého.

elektrický stroj na dvojfasový upravený způsobem v poznámce již dříve popsaným, jehož primární magnet byl buzen proudem 0·8—4·5 amp. Jest důležito, aby obě niti, jak vodorovná tak svisná, byly stejně napjaty, čehož nejspolehlivěji docílíme zavěsováním závaží, jak už dříve bylo podotčeno. O stejnosti napjetí a vůbec o souměrnosti celého uspořádání lze se přesvědčiti tím způsobem, že pozorujeme napřed odchylku světelného indexu na př. ve směru vodorovném, odpovídající jednomu proudu střídavému, kdežto účinek druhé komponenty dvojfasové soustavy proudové jest přerušením vodiče eliminován, a totéž opakujeme, když účinkuje pouze druhá komponenta, dříve eliminovaná ve směru svisném, při čemž v úzkých mezích měníme napjetí nití, až amplitudy odchylek v obou směrech jsou sobě rovny. Působí-li pak obě složky současně, pozorujeme při malé frekvenci (2—4 za sek.), t. j. při velmi znenáhlém otáčení strojem volný pohyb kroužívý světelného indexu na stinítku S, jenž jest přímým obrazem kroužení pole magnetického výsledného, v jehož oblasti se pól *m* indikatoru *i* nalézá. Pozorovaná dráha světelného indexu jest obyčejně ellipsa, jejíž délka os obnáší 8—10 *cm*; méně často kruh stejných rozměrů. Zajímavo jest, že točíme-li strojem směrem protivným, též směr otáčecí indexu světelného se promění v protivný, což ukazuje, že i magnetické pole krouží směrem protivným, jakž ovšem také býti musí.

Nebo, jsou-li obě magnetické složky kroužívého magnetického pole, na sobě kolmé, v prvním případě

$$h_1 = \mathrm{H} \sin \frac{2\pi t}{\mathrm{T}},$$

$$h_2 = \mathrm{H} \sin \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \left(t - \frac{\mathrm{T}}{4}\right),$$

kdež T značí periodu střídavého proudu, jsou zajisté v případě druhém, točíme-li směrem protivným, poněvadž se pořad, v němž obě soustavy závitů armatury, dvojfasové proudy dávající, zamění, složky ty vyjádřeny

$$h_1 = \mathrm{H} \sin \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \left(t - \frac{\mathrm{T}}{4}\right),$$

$$h_2 = \mathrm{H} \sin \frac{2\pi t}{\mathrm{T}} \cdot$$

Jednoduchá konstrukce výsledné síly magnetického pole dle obou těchto skupin rovnic i jen pro dvě po sobě následující doby, na př. $t = 0$ a $t = \frac{\mathrm{T}}{4}$, ihned dosvědčí, že směry otáčecí krouživého pole magnetického v obou případech jsou protivny.

Zrychlujeme-li otáčení dynamoelektrického stroje, z počátku pravidelnost dráhy obrazce na stinítku úplně zmizí; světelný index míhá se nepravidelně sem tam, vznikají různé geometrické obrazce podobné Lissajouovým, až při jisté rychlosti objeví se opět ellipsa nebo kruh rozměrů dle upravení přístroje mnohdy velmi značných. Případ ten nastává tehdy, když poměr frekvence proudů a počtu vlastních kmitů indikatorové části apparatu jest vyjádřen jedničkou nebo vůbec číslem celým. Při ručním pohonu dynamoelektrického stroje nelze poměr ten ovšem ani zde udržeti trvale při hodnotě stálé; proto se též tvar ellipsy brzo mění v kruh, jenž přechází v ellipsu souměrně položenou, načež nastoupí pochod opačný atd. Účinné proudy mohou býti v tomto případě opět velmi slabé, dostačíť k jich vzbuzení i jen remanentní magnetičnost primárního magnetu dynamoelektrického stroje.

Ku provedení tohoto pokusu a dodejme hned i následujícího jeví se býti cívky prvního druhu méně vhodnými. Že se lépe osvědčují cívky druhého druhu, toho příčinou jest, že trvalá magnetičnost tyčí nástavky pólové po každé střídě proudu jistěji a rychleji uvádí do prvopočátečného stavu magnetického, nežli to bez spolupůsobení zevnější síly magnetické u cívek prvního druhu jest možno, v nichž, jak přímé zkoušky ukázaly, i po plném přerušení proudu vždy ještě značné residuum magnetičnosti se konstatovati mohlo.

4. *Proudy trojfasové a krouživé pole magnetické jimi vzbuzené.* Tři cívky druhého druhu upevníme na desku D v polohách $d_1\ d_4\ d_5$, jež uzavírají mezi sebou úhly 120° (obr. 1.) a spojíme je s dynamoelektrickým strojem tak, aby proud do nich vstupující vyvolal na koncích k indikatoru obrácených póly stejnojmenné. Ostatní svorky těchto cívek spojíme vodivě mezi sebou.

Vyrovnávací čtvrtý vodič ovšem při našem zařízení dynamoelektrického stroje musil docela odpadnouti. Napjetí nití budiž opět stejné.

Pozorovaný zjev souhlasil pak jak při otáčení znenáhlém, tak při otáčení rychlém s tím, což uvedeno bylo v odstavci předcházejícím. Při rychlém otáčení ručním byla však pozorována větší stabilnost ellips, po případě kruhů.

Na těchto několika příkladech výkonnosti našeho přístroje přestaneme, dodávajíce jen ještě, že jím též snadno a rychle možno demonstrovati proudy stejnosměrné, a to i proudy velmi slabé, jaké na př. dává galvanický článek složený z drátku měděného a zinkového v rource naplněné vodou okyselenou kapkou kyseliny sírové.

O středech křivosti kotálnic.

Napsal

Miloslav Pelíšek,
professor c. k. státní průmyslové školy v Praze.

I.

Východištěm následujících úvah jest známá *konstrukce Eulerova*, jež se též připisuje *Savary-ovi*, kterou se vyhledá střed křivosti s křivky (p) opsané libovolným bodem p roviny pevně spojeným s kružnicí k o středu o a poloměru r, jež se valí po kružnici K o středu O a poloměru R; při tom jest, jak známo, vésti normálu pt a přímku po, dále jest vztýčiti v okamžitém středu otáčení t kolmici k normále pt, kteráž kolmice protíná po v bodě π; přímka πO protíná pak normálu pt v hledaném středu křivosti s kotálnice opsané bodem p.

Z konstrukce vysvítá též řešení opačné úlohy, vyhledati totiž onen bod p, který opíše kotálnice (p), jejíž střed křivosti jest daný bod s.

Body p a π jsou involutorně sdružené; sestrojíme-li střed křivosti σ epicykloidy (π) opsané bodem π, jsou patrně též středy křivosti s a σ involutorně sdružené.

Mezi body p a středy křivosti s kotálnic panuje vztah, kterým se zabývali *Transon, Bresse, Rivals, Dewulf, Bobek* a *Mannheim* *).

V následujícím vyvinuji svým způsobem vztah stanovený *Eulerovou* konstrukcí mezi body p a π, pak mezi body π a s a konečně mezi body p a s, při čemž mi jest ovšem nutno opakovati některé úvahy v *Mannheimově* díle obsažené; dospívám však též ku vlastním výsledkům a applikuji výsledky na konstrukce kuželoseček, jež mají oskulovati danou kružnici v daném bodě, jakož i na konstrukci křivek třetího a čtvrtého řádu, jež mají oskulovati ve dvojném bodě danou kružnici.

Aby mohla představa čtenáře utkvíti na určitém obrazci, vyvinuji nejdřív veškeré věty pro epicykloidy.

II.

Především si položme otázku, *které jest místo středů křivosti epicykloid opsaných body v nekonečnu?*

Pro nekonečně vzdálený bod p_∞ ve směru tp jest nám vésti bodem o rovnoběžku ku pt, jež protíná kolmici bodem t ku tp_∞ v bodě π_∞; spojnice $\pi_\infty O$ protíná normálu $p_\infty t$ v hledaném středu křivosti s_∞. Body π_∞ naplňují patrně kružnici $\varkappa_\infty$ o průměru ot. Body s_∞ jsou s body π_∞ podobně položené vzhledem ku středu O; naplňují tedy kružnici I, jejíž průměr tx obdržíme, vedeme-li bodem s_∞ rovnoběžku ku $\pi_\infty t$, jež protíná Ot v bodě x.

Středy křivosti všech epicykloid opsaných body v nekonečnu naplňují v libovolném okamžiku kružnici I, *jež se dotýká v okamžitém středu otáčení t pevné i hybné kružnice, jakož i jejich společné tečny* T. (*Transon, Bresse.*)

Z uvedené podobnosti následuje zřejmě pro poloměr ϱ kružnice I:

$$2\varrho : r = \mathrm{R} : (r + \mathrm{R}) \qquad \text{aneb} \qquad 2\varrho = \frac{r \,.\, \mathrm{R}}{r + \mathrm{R}},$$

*) Viz *Mannheim*: Principes et Développements etc p. 30—32, 41—43.

což lze též psáti:

$$\frac{1}{2\varrho} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}, \tag{1}$$

ve které rovnici jsou uvedené hodnoty uvažovány absolutně.

III.

Přistupme nyní k opačné otázce, *které body opisují epicykloidy, jejichž středy křivosti jsou v nekonečnu*, jinými slovy, které jest v libovolném okamžiku místo bodů, které opisují epicykloidy, jež mají právě v těchto bodech inflexní body?

Má-li býti střed křivosti v nekonečnu na normále pt, jest nám vésti bodem t kolmici a bodem O rovnoběžku ku této normále, jež se protínají na kružnici opsané na průměru tO, jakožto místě bodů π. Průsečík přímky $o\pi$ s normálou jest hledaný bod p.

Body p jsou zase k bodům π podobně položené vzhledem ku středu podobnosti o a naplňují tudíž kružnici J, jejíž průměr ty obdržíme, vedeme-li bodem p rovnoběžku $t\pi$.

Body roviny, které opisují epicykloidy, jejichž středy křivosti jsou v nekonečnu, naplňují kružnici J, *jež se dotýká v okamžitém středu otáčení t společné tečny* T *pevné a hybné kružnice.* (*Bresse.*)

Jinými slovy:

Pro každý epicykloidálný pohyb jsou veškeré inflexní body na kružnici J.

Z uvedené podobnosti následuje zřejmě pro poloměr ϱ_1 kružnice J:

$$2\varrho_1 : R = r : (r + R) \quad \text{aneb} \quad 2\varrho_1 = \frac{R \,.\, r}{r + R},$$

což lze též psáti:

$$\frac{1}{2\varrho_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}, \tag{2}$$

ve které rovnici jsou vyskytující se veličiny brány absolutně. Srovnáváním rovnic (1) a (2) seznáváme:

Kružnice* I *a* J *jsou shodné a vzhledem k okamžitému středu otáčení t souměrně položené.

V rovnici (1) se vyskytují jen absolutní hodnoty; přihlížíme-li též ku směru a znamení úseček vycházejících z bodu t, přejde rovnice (1) v rovnici

$$(1') \qquad \frac{1}{2\varrho} = \frac{1}{R} - \frac{1}{r}$$

aneb

$$(1'') \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{2\varrho} + \frac{1}{r},$$

při čemž je směr poloměru R vycházejícího z bodu t považován za kladný, a tedy R samo kladné, kdežto r při epicykloidálném pohybu samo o sobě za záporné.

Srovnáme-li rovnici (1″) s rovnicí:

$$(1''') \qquad \frac{2}{2R} = \frac{1}{2\varrho} + \frac{1}{r},$$

jež charakterisuje čtyři harmonické body, máme větu:

Průměr kružnice I *obdržíme, sestrojíme-li ku středu o hybné kružnice k okamžitému středu otáčení t a k jeho diametrálnému bodu pevné kružnice čtvrtý harmonický bod (sdružený s o).*

Též v rovnici (2) se vyskytují jen absolutní hodnoty úseček; přihlédneme-li k jejich znaménku, obdržíme podobně:

$$(2') \qquad \frac{1}{2\varrho'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$$

aneb

$$(2'') \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{2\varrho_1} + \frac{1}{R}.$$

Srovnáme-li ji s rovnicí:

$$(2''') \qquad \frac{2}{2r} = \frac{1}{2\varrho_1} + \frac{1}{R},$$

jež charakterisuje harmoničnost čtyř bodů, obdržíme větu:

Průměr kružnice J *obdržíme, sestrojíme-li ku středu* O *pevné kružnice, k okamžitému středu otáčení t a k jeho diametrálnému bodu hybné kružnice čtvrtý harmonický bod (sdružený s* O*).*

Sečtením rovnic (1′) a (2′) obdržíme:

$$\frac{1}{2\varrho} + \frac{1}{2\varrho_1} = 0 \quad \text{aneb} \quad \varrho_1 = -\varrho,$$

z čehož vysvítá, že kružnice I a J jsou na opačných stranách přímky T.

IV.

Mezi daným bodem p, jeho středem křivosti s, okamžitým středem otáčení t a průsečíkem s_∞ normály pt s kružnicí I stává jednoduchá souvislost. Označíme-li q průsečík přímek $o\pi_\infty$ a $O\pi$, pak jest

$$\frac{ss_\infty}{st} = \frac{q\pi_\infty}{qo} = \frac{st}{sp},$$

z čehož následuje:

$$ss_\infty \,.\, sp = st^2, \tag{3}$$

dle kterého vzorce lze taktéž sestrojiti střed křivosti s epicykloidy opsané bodem p pomocí průsečíku s_∞ normály pt s kružnicí I.

Táž souvislost stává mezi bodem p, jeho středem křivosti s, bodem t a průsečíkem $\mathfrak{p}$ normály pt s kružnicí J. Budiž u průsečík přímek op a $O\pi$, pak jest:

$$\frac{p\mathfrak{p}}{pt} = \frac{u\pi}{uO} = \frac{pt}{ps},$$

z čehož následuje:

$$p\mathfrak{p} \,.\, ps = pt^2, \tag{4}$$

dle kterého vzorce lze jednoduše sestrojiti střed křivosti s epicykloidy opsané bodem p pomocí průsečíku $\mathfrak{p}$ normály pt s kružnicí J.

Relaci (3) lze též psáti, vezme-li se ohled na směr a znaménka úseček:

$$(ts - ts_\infty)\,(tp - ts) + ts^2 = 0,$$

z čehož následuje:

$$\frac{1}{ts} = \frac{1}{tp} + \frac{1}{ts_\infty}, \tag{3'}$$

kde jest bráti úsečky algebraicky. Prodloužíme-li tedy úsečku ts o její délku do bodu m, tak že $tm = 2ts$, přejde relace (3′) v následující:

$$\frac{2}{tm} = \frac{1}{tp} + \frac{1}{ts_\infty}, \tag{5}$$

ze které jest patrno, že body p, t, s_∞, m jsou harmonické.

Máme tedy konstrukci:

Sestrojíme-li k danému bodu p, k okamžitému středu otáčení t a k průsečíku s_∞ normály pt s kružnicí I čtvrtý harmonický bod m (sdružený s t) a rozpůlíme úsečku tm v bodě s, jest tento bod střed křivosti epicykloidy opsané bodem p.

Je-li však dán bod p a příslušný střed křivosti s, obdržíme bod kružnice I, prodloužíme-li ts o její délku a sestrojíme k obdrženému bodu a bodům p a t čtvrtý harmonický bod.

Podobně lze dáti relaci (4) následující tvar:

$$\frac{1}{tp} = \frac{1}{ts} + \frac{1}{t\mathfrak{p}}. \tag{4'}$$

Prodloužíme-li tedy tp o její délku, obdržíme bod n vázaný na podmínku $tn = 2tp$, čímž přejde relace (4′) v následující:

$$\frac{2}{tn} = \frac{1}{ts} + \frac{1}{t\mathfrak{p}}, \tag{6}$$

ze které jest patrno, že body n, t, s, $\mathfrak{p}$ jsou harmonické.

Máme tedy konstrukci:

Sestrojíme-li k danému středu křivosti s, k okamžitému středu otáčení t a k průsečíku $\mathfrak{p}$ normály st s kružnicí J čtvrtý harmonický bod n a rozpůlíme úsečku tn, obdržíme bod p, který opisuje epicykloidu, jejíž střed křivosti jest daný bod s.

V předcházejícím jsme měli na zřeteli zvláštní případy, že jednak p, jednak s jest v nekonečnu, čímž jsme dospěli ke kružnicím I a J. Je-li v π v nekonečnu, naplňuje p patrně kružnici o průměru ot a s kružnici o průměru Ot.

Máme tedy větu:

Body kružnice, jež prochází středem hybné kružnice a dotýká se v okamžitém středu otáčení t pevné kružnice, opisují epicykloidy, jejichž středy křivosti jsou na kružnici, jež prochází *středem pevné kružnice a dotýká se taktéž v bodě t pevné kružnice.*

V.

Na základě předcházejících vět můžeme řešiti otázku, *které jest geometrické místo středů křivosti s všech epicykloid, které opíší body p libovolného průměru po hybné kružnice?*

Z Eulerovy konstrukce následuje, že jest svazek $t\,(p\ldots)$ involutorný se svazkem $t\,(\pi\ldots)$; mimo to jest svazek $O\,(\pi\ldots)$ perspektivný se svazkem $t\,(\pi\ldots)$, z čehož následuje, že jest svazek $t\,(p\ldots)$ projektivný se svazkem $O\,(\pi\ldots)$, aneb svazek $t\,(s\ldots)$ projektivný se svazkem $O\,(s\ldots)$.

Z toho následuje:

Geometrické místo středů křivosti s všech epicykloid opsaných body p libovolného průměru hybné kružnice, jest kuželosečka C, *jež prochází středem pevné kružnice* O *a okamžitým středem otáčení t. (Rivals.)*

Vedeme-li v bodě t tečnu T a označíme τ průsečík průměru op s tečnou T, přísluší společnému paprsku Ot svazků O a t paprsky τt a τO; kuželosečka C se tedy dotýká v bodech t a O tečen τt a τO.

Jest nám především dokázati, že kuželosečky C, jež odpovídají všem průměrům hybné kružnice, tvoří svazek.

Vedeme-li bodem t libovolnou příčku P, jež protíná určitý průměr hybné kružnice v bodě p a kružnici I v bodě s_∞, a sestrojíme-li k těmto třem bodům čtvrtý harmonický m, jest patrně dle (5) geometrické místo bodu m, otáčí-li se příčka P okolo t, kuželosečka C′ homothetická s C pro t jakožto střed podobnosti, při čemž jest 1:2 poměr úseček na každé příčce P. Z harmonických vlastností jest patrno, že řada bodů p, kterou určuje na P svazek průměrů hybné kružnice, jest projektivná s řadou bodů m, ve které protínají kuželosečky C′ touže přímku P. Otáčí-li se však P okolo t, jsou bodové řady p perspektivné, z čehož soudíme, že jsou bodové řady, ve kterých protínají příčky P kuželosečky C′, mezi sebou projektivné, což jest důkazem, že tvoří C′ svazek o základním bodě t; pak ale tvoří též homothetické kuželosečky C svazek o základním bodě t.

Poněvadž má svazek kuželoseček C již tři základní body reálné, totiž střed pevné kružnice O, okamžitý střed otáčení t a jeho soumezný na tečně T, je též čtvrtý základní bod reálným. Týž nemůže splynouti s O, poněvadž by pak měly všechny kuželosečky svazku v bodě O dva splývající body společné a musely by se zde dotýkati, což jest nemožné, poněvadž různým průměrům $o\tau$ přísluší různé tečny $O\tau$.

Tento čtvrtý reálný bod, jenž jest společný všem kuželosečkám, nemůže však též býti nějaký od t různý bod, poněvadž by se pak všechny průměry hybné kružnice musely ještě protínati v jednom bodě mimo o, což jest nemožné; splývá tedy čtvrtý základní bod svazku s bodem t, tak že můžeme vysloviti větu:

Geometrické místo středů křivosti s všech epicykloid opsaných body p všech průměrů hybné kružnice, jest svazek kuželoseček, jež procházejí středem O *pevné kružnice a jež se oskulují v okamžitém středu otáčení t.*

Společná oskulační kružnice v bodě t jest pro všechny kuželosečky C *kružnice* I *(Dewulf).*

Poslední část věty jest patrna z následující úvahy:

Vedeme-li bodem o průměr rovnoběžný k T, přísluší jeho bodu v nekonečnu bod t jakožto střed křivosti; oběma nekonečně blízkým polohám tohoto průměru a jejich bodům v nekonečnu přísluší nekonečně blízké body bodu t. Tyto tři soumezné body jsou na kružnici I, poněvadž odpovídají třem bodům přímky v nekonečnu; jsou to však současně ony tři soumezné body, jež jsou všem C společné.

Podobnou cestu volil *Mannheim,* aby dokázal, že všechny kuželosečky oskulují kružnici I v bodě t.

Toto oskulování jest však též patrno z následující jednoduché úvahy, jež má tu výhodu, že jest v platnosti pro libovolné křivky, jež se v tomto vyšetřovaném vztahu vyskytují.

VI.

Budiž p daný bod, i průsečík normály pt s kružnicí I a s střed křivosti na normále pt; pak jest:

$$\frac{1}{ts} = \frac{1}{tp} + \frac{1}{ti}.$$

Označíme-li α úhel, který svírá normála s tečnou T, ϱ poloměr kružnice I, x vzdálenost středu křivosti od kružnice I, a d vzdálenost bodu p od okamžitého středu otáčení t, pak jest:

$$\frac{1}{2\varrho \sin\alpha + x} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{2\varrho \sin\alpha}$$

aneb

$$x = \frac{4\varrho^2 \sin^2\alpha}{d - 2\varrho \sin\alpha}. \tag{7}$$

Svírá-li normála pt konečný úhel s tečnou T, a je-li vzdálenost bodu p od t též konečná, jest též vzdálenost středu křivosti s od kružnice I konečná, vyjma že se p nalézá na kružnici J, ve kterém případě jest $d = 2\varrho \sin\alpha$ a $x = \infty$.

Svírá-li normála pt konečný úhel s tečnou T a je-li vzdálenost bodu p od t nekonečně malá, jest též střed křivosti s nekonečně blízký bodu t; jest pak totiž

$$x \doteq 2\varrho \sin\alpha.$$

Protíná-li čára, jež jest místem bodů p, tečnu T v bodě t, a vedeme-li k této čáře tečnu τ v bodě t, jež přísluší jakožto přímka procházející bodem t sama sobě, jest patrno, že jest τ též tečnou v bodě t příslušné čáry, jež jest místem středů křivosti (s).

Křivky (p), jež procházejí okamžitým středem otáčení t, dotýkají se v tomto bodě s příslušnými křivkami (s).

Svírá-li normála pt nekonečně malý úhel s tečnou T, jest pak tetiva kružnice I úsečka $ti = 2\varrho \sin\alpha$, tedy nekonečně malá úsečka prvního stupně. Vzdálenost x středu křivosti s od kružnice I jest však pro všechny body p, jež mají od t konečnou vzdálenost d, nekonečně malá veličina druhého stupně, tak že tyto středy s splynou s kružnicí I; jest tedy patrno:

Všechny body p soumezné s tečnou T mají příslušné středy křivosti na kružnici I. Z toho soudíme dále:

Každé čáře (p) jakožto místu bodů p, jež protíná T *v re-*

álném od t různém bodě, odpovídá čára (s), jakožto místo středů křivosti s, jež oskuluje kružnici I *v bodě t.*

Protíná-li *(p)* tečnu T v μ reálných od *t* různých bodech, oskuluje *(s)* kružnici I v bodě *t* μ-krát.

Duálná věta zní:

Každé čáře (s), jež protíná tečnu T *v* μ *reálných od t různých bodech, přísluší čára (p), jež oskuluje kružnici* J *v bodě t* μ*-krát.*

Je-li úhel α, jakož i vzdálenost *d* nekonečně malá, jest též vzdálenost středu křivosti *s* od kružnice I nekonečně malá prvního stupně; z toho soudíme:

Dotýká-li se čára (p) tečny T *v bodě t, činí tak též čára (s).*

Příbuznost mezi body *p* a *s* jest jednoznačná; výjimku tvoří jen body tečny T.

Jako důsledek Eulerovy konstrukce musíme totiž považovati, že veškerým bodům přímky T jakožto místu bodů *p* přísluší *t* jakožto střed křivosti *s* a naopak, veškerým bodům přímky T jakožto místu bodů *s* přísluší bod *t* jakožto opisující bod *p*.

Z toho jest patrno:

Kolikrát prochází křivka *(p)* bodem *t*, tolikrát se rozpadá křivka *(s)* v tečnu T a zbývající křivku, jejíž řád se snižuje o týž počet jedniček; a naopak, kolikrát prochází křivka *(s)* bodem *t*, tolikrát se rozpadá křivka *(p)* v tečnu T a zbývající křivku, jejíž řád se snižuje o týž počet jedniček.

Dále jsou patrny věty:

Dotýká-li se křivka *(p)* tečny T v libovolném od *t* různém bodě, dotýká se křivka *(s)* kružnice I v bodě *t* ve čtyřech soumezných bodech, a sice tak, že povstane větev křivky *(s)*, jež má v bodě *t* bod zvratu, při čemž se dotýkají obě větve v bodě *t* tečny T na téže straně.

Má-li křivka *p* tečnu T za inflexní tečnu pro libovolný od *t* různý bod dotyku, nadoskuluje křivka *(s)* kružnici I v pěti s bodem *t* soumezných bodech.

VII.

Po této odchylce se vraťme ku svazku kuželoseček, jež přísluší průměrům hybné kružnice.

Z jakých kuželoseček sestává tento svazek, jest patrno ze vzájemné polohy kružnice J a vrcholu *o* svazku průměrů.

Je-li *o* uvnitř J, sestává svazek ze samých hyperbol. Je-li *o* na J, odpovídá průměru rovnoběžnému ku T parabola, a všem ostatním průměrům přísluší hyperboly. Je-li *o* vně kružnice J, přísluší průměrům, jež neprotínají J, ellipsy; průměrům, jež protínají J, hyperboly; průměrům, jež se dotýkají J, paraboly.

Jak známo, naplňují středy všech kuželoseček svazku zase kuželosečku, jež prochází diagonálními rohy základního čtyřrohu, a jejíž body jsou projektivné s kuželosečkami svazku; jsou-li však tři ze základních bodů soumezné, jsou též všechny tři rohy diagonálního třírohu soumezné, tak že máme větu:

Geometrické místo středů kuželoseček C *jest zase kuželosečka* 𝔎, *jež oskuluje kružnici* I *v bodě t.*

Uvažujeme-li zvláště kuželosečku C, jež přísluší průměru rovnoběžnému ku T, jest její tečna v bodě O též rovnoběžná ku T; jest tedy O*t* osa této kuželosečky C, a půlící bod *a* úsečky O*t* náleží tedy kuželosečce 𝔎. Z ohledu na souměrnost jest patrno, že jest *ta* osou kuželosečky 𝔎, která jest oskulační kružnicí I ve vrcholu *t* a vrcholem *a* dokonale určena.

Mannheim ukázal též, že osy kuželoseček C jsou rovnoběžné ku přímkám, jež půlí úhly tečny T a příslušných průměrů hybné kružnice.

VIII.

Přistupme nyní k opačné otázce, které jest geometrické místo bodů *p*, naplňují-li body *s* svazek průměrů pevné kružnice?

Zase jest řada $s \ldots$ involutorná s řadou $\pi \ldots$, svazek $t(\pi \ldots)$ jest perspektivný svazku $o(\pi \ldots)$ a tedy svazek $o(p \ldots)$ jest projektivný svazku $t(p \ldots)$; místo bodů *p* jest tedy kuželosečka, jež prochází body *o* a *t*.

Pomocí bodů kružnice J lze zase tímtéž pochodem jako v předcházejícím dokázati na základě harmonických vlastností daných rovnicí (6) následující větu:

Body p svazku kuželoseček D, *jež procházejí středem hybné kružnice o a oskulují v okamžitém středu otáčení t kružnici* J, *opisují v každém okamžiku epicykloidy, jejichž středy křivosti naplňují svazek průměrů* O*s pevné kružnice.*

Osy kuželoseček D rozpulují úhly tečny T a příslušných průměrů O*s*, a středy těchto kuželoseček naplňují novou kuželosečku L, jež oskuluje J v bodě *t* jakožto vrcholu, a jejíž druhý vrchol jest půlící bod *b* úsečky *ot*. Z jakých kuželoseček sestává svazek D, jest zase patrno ze vzájemné polohy kružnice I a středu O pevné kružnice. (Dokonč.)

Věstník literární.

Leçons sur les Fonctions entières, par *Emile Borel*, Maître de Conférences à l'Ecole Normale supérieure. (Paris, Gauthier-Villars, 1900, VI a 124 stran.)

Tato kniha jest druhým*) v řadě spisů, které auktor hodlá věnovati theorii funkční, a z nichž každý má býti uzavřeným celkem, neodvislým od ostatních.

Spisovatel, jehož kompetence v oboru funkční theorie jest obecně uznána, pojednává v neobjemné této knize způsobem jasným a i začátečníkům přístupným o transcendentních funkcích celistvých, t. j. o funkcích vyjádřených mocninovými řadami jedné proměnné, konvergujícími pro každou její hodnotu, a dospívá až k nejnovějším úvahám příslušným, z nichž některé jemu přináležejí.

Východištěm jest tu Weierstrassův rozklad funkce celistvé do t. zv. *primárních* faktorů; jemu následuje Laguerre-ův pojem *rodu* těchto funkcí, a některé vlastnosti funkcí rodu 0. a 1., ukazující k jich analogii s racionálnými funkcemi celistvými (polynomy), a příslušící výlučně těmto funkcím, nikoli však funkcím rodu vyššího, jakož i některé vlastnosti celistvých funkcí libovolného však konečného rodu, týkající se hlavně jich kořenů a jich derivací.

---

*) Prvním byly jeho „Eléments de la Théorie des ensembles et applications. (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898.)

Spisek, jejž lze vřele doporučiti všem, kdož chtějí vniknouti do method moderní theorie funkcí, uzavírají tři Noty, z nichž první jest otisk auktorova důkazu věty p. Picardovy, že celistvá funkce nenabývající *dvou* různých hodnot jest nutně konstantou, kdežto druhá a třetí jsou věnovány studiu t. zv. funkcí pravidelně resp. nepravidelně rostoucích (à croissance régulière, irrégulière). *Weyr.*

Pages choisies des savants modernes extraites de leurs oeuvres par *A. Rebière*. Paris, Nony, 1900. 5 fr.

Kniha tato je posledním dílem spisovatele, o jehož třech jiných zajímavých knihách bylo v tomto Časopise (roč. XXIX. str. 270.) referováno.

Jak titul již ukazuje, je to anthologie klassické literatury mathematické a přírodovědecké. Myšlénka, sestaviti takovou čítanku není snad nová (boloňská akademie před lety vypsala cenu na sestavení podobného výboru), ale je tu, pokud vím, poprvé a zdařile provedena. Bertrand v předmluvě k svému známému vzácnému kompendiu počtu differencialního praví, že knihou svou nechce klassiky nahraditi, ale ku čtení jich povzbuditi. Kniha, kterou máme před sebou, má účel podobný, ač ovšem cestu k dosažení jeho nastoupila zcela jinou. Myslím, že auktor brzo najde následovatelů, kteří se omezí na klassiky menších oborů věd našich, za to z nich podají více.

Vedle obsahu zajímají další podobizny slavných mužů; kniha také z této stránky doplňuje dílo téhož autora „Les savants modernes". Jsou tu zobrazeni: Koprník, Viète, Galilei, Kepler, Descartes, Fermat, Pascal, Cassini, Leibniz, Clairaut, Legendre, Fourier, Gauss, Poncelet, Chasles, Leverrier, Coulomb, Malus, Thénard, Dulong, Chevreul, Fresnel, Regnault, Wurtz a Sainte-Claire-Deville vedle celé řady vynikajících přírodopisců.*)

Prof. *Ladislav Červenka.*

Pět přednášek z oboru optiky, jež konal r. 1898 na c. k. báňské akademii v Příbrami pro „Budeč příbramskou" prof Dr. *Josef A. Theurer*. (Nákladem Budče příbramské v Příbrami 1899, 111 stran.)

Dle úvodních slov auktorových nemá podávati spis jeho přehledu o celé optice, nýbrž líčiti vývoj theorií optických, hlavně theorie emanační a undulační. Dle toho rozvržena látka

---

*) A. Rebière, professor mathematiky na l'Ecole normale supérieure de Saint-Cloud (škola, kterou by u nás nazvali asi ústavem ku vzdělání učitelů škol měšťanských), tchán Goursatův, zemřel koncem února t. r. ve vysokém stáří. Také Joseph Bertrand, slavný mathematik nahoře citovaný, zemřel letos dne 3. dubna.

příslušná na pět oddílů — pět přednášek — v nichž způsobem velmi zdařilým ukazuje auktor zánik theorie Newtonovy a postupující vzrůst theorie undulační.

Přednáška I. jedná o základních úkazech optiky geometrické, přímočarém šíření světla, odrazu a lomu světla. Úkazy vysvětlují se jak theorií emanační, tak undulační. Auktor poukazuje na jednoduchost výkladu theorie prvější a nesnáze, které se vyskytly při výkladech theorií undulační. Vyvozuje ze zjevu diffrakce odstranění vážných námitek proti theorii undulační (přímočaré šíření světla).

Kapitola končí totálným odrazem světla — bezpochyby k vůli předvedení světelné fontány Colladonovy jako effektnímu zakončení přednášky.

Přednáška druhá věnována jest výkladům spektrálným. Postup daný stanoviskem spisovatelovým jeví se zvláště pěkně v této kapitole, od nedokonale upravených a přece tak neobyčejně hluboce založených pokusů Newtonových k prvnímu spektroskopu a spektrometru, až konečně k podivuhodně jemným methodám bolometrickým. Auktor uvádí různé druhy spekter, oceňuje správně veliký význam spektrální analyse v astronomii a vykládá všeobecně absorpci světla.

Úkaz tento tvoří mu zároveň spojení s přednáškou následující, kde se jedná o účincích světla absorbovaného, hlavně o fluorescenci a fosforescenci. Přecházeje pak v oddíl optiky theoretické, popisuje a vykládá auktor úkazy interference, polarisace a dvojlomu světla. Výklad se tu děje pouze ze stanoviska theorie undulační.

V přednášce čtvrté uvedeny jsou úkazy interference světla polarisovaného, jak ve světle rovnoběžném tak i divergentním. Vylíčeny tu zvláštní vlastnosti křemene proti jiným tělesům krystallickým — otáčení roviny polarisační a vznik pojmu světla cirkularně a elipticky polarisovaného. Ukázáno, jak se experimentálně rozeznávají krystally jednoosé a dvojosé.

Pojem látek opticky aktivních rozšířen poukázáním na důležité pokusy *Faradayovy* (působení pole magnetického) a *Kerrovy* (působení pole elektrostatického).

Auktor dříve (v kapitole I.) poukázal na různý důsledek plynoucí z obou theorií pro vztah rychlostí paprsku dopadajícího a lomeného. Dle theorie Newtonovy byla by rychlost paprsku na př. do vody lomeného *větší* ve vodě než ve vzduchu, naproti tomu opak se ukazuje při theorii undulační. Proto uvádí auktor ke konci čtvrté přednášky methody k určení rychlosti světla a dovozuje výsledky těmito methodami získanými pád theorie emanační a potvrzení theorie undulační.

Přednáška poslední jest z oboru optiky *v širším* smyslu, jedná *o záření* vůbec. Vztah mezi světlem a elektřinou dán jest společným požadavkem obou věd, existence hypothetického ústředí.

Obě ústředí — jak pro výklad zjevů světelných, tak elektromagnetických — lze nahraditi *jediným* ústředím *společným.* Na této myšlénce vzrůstá Maxwellova elektromagnetická theorie světla, jiż J. Hertz způsobem experimentálným tak očividně potvrzuje.

Z novějších objevů druhů záření uvádí spisovatel paprsky, jež objevil Lenard, Röntgen, Becquerel, Goldstein, Sagnac a Wiedemann.

Již stručný tento přehled obsahu pěti přednášek z oboru optiky ukazuje, jak velké množství látky auktor spiskem svým zahrnul. Uváží-li se, že spisovatel nikde nezapomíná býti co možná srozumitelným i posluchačům resp. čtenářům nauk fysikálních méně znalým a že dovede býti stručným a jasným zároveň ve výkladech zjevů složených, sluší uznati praci jeho plnou měrou.

Auktor založiv pět svých přednášek na myšlénce stopovati pozvolný pád jedné theorie a začátky, jakož i veškerý vývoj theorie druhé, mimoděk na této cestě octl se mezi úskalím, jak totiž vyhověti požadavku, aby zároveň *systematicky* vylíčil důležité pojmy a zjevy optické v určitém pořádku. Spisovatel překonal však veškeré tyto obtíže hravě a z té stránky jest knížka jeho velmi pozoruhodna.

Některé menší výtky buďtež tuto uvedeny.

Recensent viděl ve fysikalním kabinetu báňské akademie příbramské drátěné modely optické, v tamní dílně optické zhotovené.

Bylo by bývalo jen obohacením spisu, kdyby byl auktor k textu přiložil obrázky (třeba dle fotografií kreslené) těchto modelů. Zasluhovaly by toho plnou měrou, neboť jsou velice instruktivně provedeny.

Na str. 14. mluví se o námitce přívrženců theorie emanační proti theorii Huyghensově — bylo by tu na místě důrazně vytknouti, že námitka tato vznikla dle *analogie úkazů akustických*, jakož i v poznámce o diffrakci, uvésti příklady diffrakce akustické.

V přednášce druhé, ačkoliv tu učiněna zmínka o obrovské fotografii slunečního spektra, provedené Rowlandem, není ničeho o *normalním spektru mřížkovém*, které jest přece spektrem základním. Toto opomenutí tím více bije do očí, že tu odvozovány důsledky z disperse anomalní.

Podobně nezmínil se spisovatel ani slovem o rozmanitých a velmi zajímavých pokusech *Tesslových*, ačkoliv Tessla byl jedním z prvých řešitelů úlohy „telegrafie bez drátu“ a dle všeho nejšťastněji chopil se problému telegrafie syntonní.

Auktor užívá slov „rozklad“ a „rozptyl“ světla nedůsledně.

Užívá-li již dvou slov, bylo by vhodné voliti „rozklad“ pro název celého zjevu disperse a „rozptyl“ pro *velikost* disperse. Světlo diffusní nazývá „rozptýlené“, hořejší nedůslednost může i tu vésti k omylu.

Newtonovy „fits“ překládá „nálady“ — soudě dle mechanických názorů Newtonových při theorii emanační není tento překlad šťastný. Auktor dále sám uvádí při výkladu periodicity světla dle theorie emanační, že částice světelného fluida otáčejí se a dle toho, kterým bodem na rozhraní dopadají, že se buďto odrážejí nebo lámou do ústředí druhého. Newton si patrně představoval částice fluida na př. jako ellipsoidy, které se kolem jedné osy otáčejí, dle toho, zda-li pak dopadají na rozhraní osou delší nebo kratší, dle toho že se pak lámou neb odrážejí. S touto představou „nálady“ částic nesouhlasí.

Ustálenější názvy ploch a hran prismatu jsou plochy lámavé, hrana lámavá. Auktor užívá slova „lomící“.

Podobně píše „sklo Jenajské“ místo Jenské, země a slunce píše „Země“ a „Slunce“, ač nikoliv důsledně, „nadmangaňan“ místo manganistan, „barium-platin-cyanur“ místo kyanid platičitobarnatý, osvětlené místo na stínitku jmenuje „skvrnou“, vakuové lampy nazývá „rourami“.

Obr. 19. bylo by opraviti tak, aby obrázek zdroje S vznikal až za prodlouženou přímkou Z_2C; podobně opraviti průřez Nikolova hranolu (obr. 25.), kde jest úhel vyznačený 90^0, značně ostřejším.

Recensent nesouhlasí s auktorem ve výslovnosti cizích jmen, pokud jsou to jména anglických vědátorů. Jakkoli je velmi obtížno vystihnouti písmem jemné nuance ve vyslovování anglických samohlásek, přece nelze připustiti výslovnost jmén Lockyer, Michelson, Rowland, Tyndall, Young a Zeeman, jak ji uvádí spisovatel.

Několik nepatrných těchto výtek neoslabí uspokojení, se kterým čtenář bude čísti pět přednášek Theurerových, práci to důkladnou, promyšlenou a skutečně cennou.

Dr. *Vladimír Novák.*

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O zkoušení fotografického objektivu.

Napsal

Dr. Vladimír Novák,
docent české university v Praze.

Jakkoli tolik jest různých podmínek, jež nutno vyplniti, aby povstala dokonalá fotografie, přece možno v popředí všech, jako podmínku nejdůležitější, klásti *fotografický objektiv*. Nechci tím říci, že dokonalým objektivem musí se vždy podařiti dokonalý obrázek, aniž také, že méně cenným objektivem nelze vytvořiti fotografií velmi dobrých.

Poněvadž jest fotografický objektiv tak důležitou částkou fotografického přístroje, nutno jej dokonale seznati. Toto seznámení se s objektivem, kterým hodláme fotografovati, nezáleží ve fotografování *na zkoušku*, jemuž hojně desek padá za oběť, ale v poznání důležitých *konstant* objektivu a v stanovení jeho *vad*.

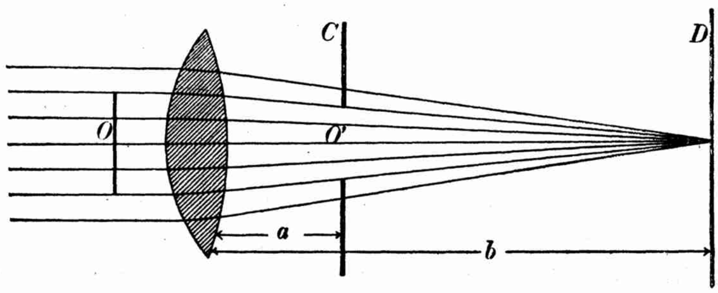
Mezi konstanty objektivu počítáme především jeho *ohniskovou dálku*, jeho *světlost* a velikost *obrazového pole*.

Vady objektivu vyskytují se jednak na *jeho ose*, jednak vznikají *šikmým* dopadem paprsků — mimo osu. Ve třech následujících odstavcích pojednáme především o určení konstant objektivu, dále pak o jeho vadách na ose, totiž o *aberraci sférické*, *chromatické* a *diffrakční*, a konečně pak o vadách mimo osu optickou vznikajících, o *skreslení*, *astigmatismu*, *komě* a *skřivení obrazového pole*.

I.

Ohniskovou dálku zhruba určíme zařízením komory na velmi vzdálený předmět (na př. měsíc) a měřením vzdálenosti matné desky od objektivu. Právě v této neurčitosti měřiti „od objektivu" spočívá přibližné jen určení ohniskové dálky. Pokud je objektiv jednoduchý (čočka tenká), postačí tato methoda pro mnohé účely, jinak lze i při objektivech složených s výhodou užiti methody následující.

Do proužku kartonu vyřízneme dva kruhové otvory ve vzdálenosti asi 0·2 měřené ohniskové dálky. Proužek takto upravený položíme na matnou desku a okreslíme jeho kontury ostře oříznutou tužkou na matnou desku, symmetricky kolem středu. Proužek pak upevníme na okenní tabuli, proti níž postavíme apparat fotografický. Jak polohu apparatu, tak také délku výtahu měníme tak dlouho, až ostrý obrázek na matné desce souhlasí s obrysy dříve nakreslenými. Na to označíme postavení matné desky na dolejším prkně apparatu a zařídíme apparat na předmět velmi vzdálený. Vzdálenost značky dřívější od tohoto posledního postavení matné desky udává přímo *ohniskovou vzdálenost* objektivu. Jak samo sebou zřejmo, musí míti komora apparatu výtah nejméně dvakrát tak dlouhý jako je měřená ohnisková dálka.



Obr. 1.

Světlost objektivu udává se *čtvercem poměru ohniskové dálky* ku *pravému průměru clonky*. Porovnáváme-li světlost dvou objektivů, nutno srovnati poměry $\left(\frac{f_1}{o_1}\right)^2$ a $\left(\frac{f_2}{o_2}\right)^2$. U objektivu jednotlivého porovnávají se často světlosti pouze poměrem v prvé mocnině $\frac{f}{o}$.

Určí se tudíž světlost objektivu změřením ohniskové dálky a pravého průměru clonky. Nalézá-li se clonka těsně u objektivu, pak skutečný její průměr jest zároveň pravým průměrem, jinak jest tomu, je-li objektiv od clonky vzdálen. Dopadají-li na čočku (viz obr. 1.) rovnoběžné paprsky, procházejí clonkou C pouze ty, které vyšly od plochy *o*. Značí-li *a* vzdálenost čočky od clonky, *b* vzdálenost čočky od matné desky D, jest patrně

$$o : o' = b : (b - a)$$

a tudíž

$$o = o' \frac{b}{b - a}.$$

Pravý průměr clonky (o) vypočítáme, když skutečný průměr (o') znásobíme poměrem vzdálenosti čočky od matné desky ku rozdílu této vzdálenosti a vzdálenosti clonky od čočky.

Pravý tento průměr clonky nutno vždy počítati, nalezá-li se před clonkou čočka spojná, tedy při objektivech symmetrických, nebo takových objektivech, při nichž clonka se nalezá mezi jednotlivými díly objektivů.

Přesné určení otvoru clonky dle *Belitskiho* provádí se tímto způsobem. Komoru zařídíme na velice vzdálený předmět. Na místo matné desky vložíme pak neprůhlednou desku na př. z plechu zinkového, v němž ve středu, to jest v místě, kam směřuje optická osa objektivu, vyvrtáme malý, asi millimetrový otvor. Ve tmavé komoře připevníme pak na objektiv desku fotografickou vrstvou citlivou k objektivu. Tak je komora k pokusu úplně připravena. Za deskou zinkovou zapálíme kousek magnesia. Světlo, malým otvorem do komory dopadající, projde clonkou a objektivem a promítne konturu clonky na desku fotografickou. Tato se pak vyvolá a průměr *pravého* otvoru clonky se změří.

Světlost objektivů bývá vyznačena na clonkách jeho; není-li tomu tak, nutno ji stanoviti a na clonky zaznamenati. Při irisových clonkách objektivů bývají často udána čísla, která *neznamenají světlost* objektivu, nýbrž *poměrnou exposici*. Tak na př. čísla na Goerzových dvojitých anastigmatech 6, 12, 24, 48, 96, atd. neznačí světlost, ale při určité exposici pro clonku 6, dvakrát tak velkou exposici při clonce 12, čtyřikrát tak velkou exposici při clonce 24, osmkrát tak velkou exposici při clonce další atd.

Za příklad buďtež srovnány světlosti rektigrafu „Lancaster“ při clonce f : 13 a anastigmatu „Rochester“ při clonce f' : 7·5.

Z hodnot pro ohniskové dálky těchto objektivů f (Lancaster) = 22·3, f (Rochester) = 18·4 *cm* plyne poměr:

$$\left(\frac{22{\cdot}3}{13}\right)^2 : \left(\frac{18{\cdot}4}{7{\cdot}5}\right)^2 = 1{\cdot}72^2 : 2{\cdot}45^2 = 0{\cdot}49.$$

Dle toho jest světlost prvého objektivu při clonce f : 13 asi *poloviční* světlost druhého objektivu při plném otvoru (f' : 7·5).

Pro kontrolu srovnány byly světlosti obou objektivů fotometricky.

Stálým zdrojem světelným osvětlena určitě veliká plocha, výřez ve stěně, vyplněný matovaným sklem, deska fotografická nahrazena fotometrem, který zjednán fotografií rovnoměrné škály skrze klín postupující průsvitnosti. Na desku fotometru vložen papír bromostříbrnatý.

Mezi exposicí a škálou užitého fotometru platí jednoduchý vztah. Číslo, které se ještě na papíru bromostříbrnatém vykopiruje, jest v linearní závislosti s *logarithmem* exposice.

Exponováno při obou objektivech dvakrát, jednou 8 minut, podruhé 16 minut, příslušná odečtení byla:

Exposice	logarithmus exposice	Rochester	Lancaster
8 minut	0·503	52·4	49·6
16 minut	1·204	55·2	52·2
rozdíly :	0·301	2·8	2·6 Střed 2·7.

Abychom docílili téhož účinku fotografického při obou objektivech, nutno exposici při druhém objektivu zvýšiti. Je-li x logarithmem onoho zvýšení (oproti exposici druhé) jest patrně:

$$x : (52{\cdot}4 - 52{\cdot}2) = 0{\cdot}301 : 2{\cdot}7$$

čili

$$x = 0{\cdot}022$$

a logarithmus žádané exposice

$$1{\cdot}204 + 0{\cdot}022 = 1{\cdot}226.$$

Nutno tedy objektivem Lancaster exponovati 16·8 minut, aby se docílilo téhož fotografického účinku jako osmi minutovou exposicí objektivem Rochester. Poměr obou světlostí tudíž:

$$8 : 16{\cdot}8 = 0{\cdot}48.$$

Výsledek tento souhlasí s dřívějším výpočtem poměru obou světlostí.

Poněvadž ustanovení pravého otvoru objektivu je dosti nesnadné, zvláště při osvětlení paprsky divergentními, hodí se tento druhý způsob měření poměru světlosti k určení $\frac{f}{o}$ zvláště dobře při malých clonkách.

Při porovnání světlostí různých objektivů poměrem $\left(\frac{f}{o}\right)^2$ zanedbává se *různost materiálu* obou objektivů, kteráž může způsobiti i při stejných ohniskových dálkách a stejně velkých clonkách různé osvětlení desky fotografické. Pro praxi fotografickou nemá tato okolnost velikého významu, leda výjimečně. Ukazuje se jen při srovnávání jednoduchých čoček s objektivy z mnoha čoček sestavenými, anebo při srovnání objektivů starších, světlem poškozených, s objektivy novými.

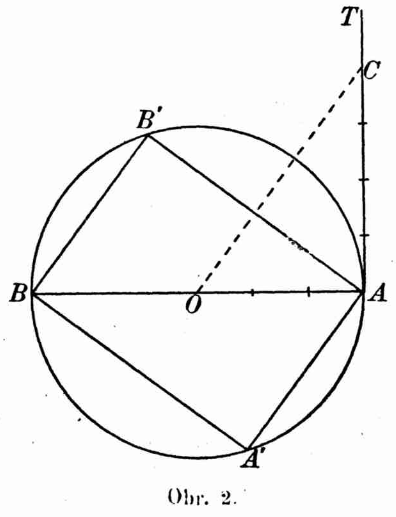
Abychom dokončili určení všech konstant daného objektivu, zbývá změřiti jeho *obrazové pole.* Obrazovým polem nazýváme plochu kruhu, který je při určité clonce objektivem vůbec osvětlen a dále též plochu kruhu, ve kterém se jeví obrázek ostře. Velikost obrazového pole určuje se úhlem, otvorem to paprskového kužele, jehož vrchol jest ve středu clonky a jehož plášť tvoří krajové paprsky, obrazové pole ohraničující.

Obrazové pole určíme velikou komorou, měřením průměru osvětlení části matné desky. Z tohoto měření a ohniskové dálky objektivu určíme úhlovou míru obrazového pole dle rovnice

$$tg\, 2\alpha = \frac{2\frac{r}{f}}{1-\frac{r^2}{f^2}}.$$

Úhel 2α značí úhel obrazového pole, r poloměr naměřeného kruhu a f ohniskovou dálku. K rychlému vyhledání úhlové míry obrazového pole slouží tabulka následující, v níž udán jest poměr $\frac{r}{f}$ a příslušný úhel pole obrazového.

$\frac{r}{f}$	Úh·l obrazového pole. °	$\frac{r}{f}$	Úhel obrazového pole °
0·01	1·1	0·45	48·5
0·02	2·3	0·50	53·1
0·03	3·4	0·55	57·6
0·04	4·6	0·60	61·9
0·05	5·7	0·65	66·1
0·06	6·9	0·70	70·0
0·07	8·0	0·75	73·7
0·08	9·2	0·80	77·3
0·09	10·3	0·85	80·7
0·10	11·4	0·90	84·0
0·15	17·1	0·95	87·1
0·20	22·6	1·00	90·0
0·25	28·1	1·10	95·5
0·30	33·4	1·20	100·4
0·35	38·6	1·30	104·9
0·40	43·6	1·40	108·9



Obr. 2.

Když by tedy objektiv ohniskové dálky 20 *cm* dával při plném otvoru pole průměru 32 *cm* pak jest

$$\frac{r}{f} = \frac{16}{20} = 0{\cdot}8$$

a tudíž úhel obrazového pole dle hořejší tabulky $77{\cdot}3^{0}$.

Velikost desky pro nalezený průměr pole obrazového určiti lze touto jednoduchou konstrukcí. Nakresleme (viz obr. 2.) kruh, jehož poloměr rovná se r, poloměru obrazového pole. Veďme v kruhu tom průměr, na jehož jednom konci vztyčíme tečnu AT. Obyčejné formáty desek fotografických jsou:

9 × 12 *cm*
12 × 16 *cm*
18 × 24 *cm*
24 × 32 *cm*
30 × 40 *cm*,

tak že poměr šířky a délky jest konstantním 3:4.

Poloměr OA rozdělme na 3 díly a 4 takové díly nanesme na tečnu AT. Spojíme-li bod C s O a vedeme-li body A a B rovnoběžky s přímkou OC, protnou tyto přímky kruh v bodech A′ a B′. Obdélník AA′BB′ udává velikost desky pro naměřený průměr obrazového pole.

Při rozhodnutí se pro určitý formát desky fotografické, nutno uvážiti, že se při fotografování často objektiv z osy apparatu vyšinuje na stranu nebo ve směru svislém, proto raději volí se deska menší než hořejší konstrukcí vychází.

Právě tak, jako se určuje celé obrazové pole, určí se pole ostrého obrazu. Velikost tohoto pole jest ovšem závislou na velikosti clonky. Určí se pro každou clonku zvláště zaostřením na vzdálené předměty a měřením průměru kruhu, jenž obsahuje obrázek ostrý. Měření napomahá řada koncentrických kruhů na matné desce tužkou narýsovaných. Při malých clonkách nutno předmět fotografovati a teprve na fotografii měření provésti. Příkladem budiž měření provedené na objektivu „*Rochester*“.

Ohnisková dálka v *cm*	Pravá velikost clonky v *cm*	Světlost objektivu	Průměr ostrého obrazového pole	Obrazové pole v úhlové míře	Velikost desky v cm^2
18·4	2·45	7·5	20·0	57°	12 × 15
	1·75	10·5	26·5	72°	15 × 21
	1·25	15·0	29·5	77°	18 × 24
	0·87	21	30·3	79°	„
	0·61	30	30·9	80°	„
	0·38	48	31·3	81°	„
	0·30	60	31·5	82°	„

B.

Úloha fotografie utvořiti čočkou skutečný obrázek osvětleného předmětu, zdá se býti velmi jednoduchou. Vyplnění všech přísných požadavků, které na dokonalém obrázku vyžadujeme, jest však problémem velmi složitým. Složitost spočívá v množství různých vad objektivu, které spolu se vyskytují a často na různých podmínkách záleží, tak že odstraňujíce vadu jednu, zvětšujeme vadu druhou. Třeba tedy v následujícím pojednám o jednotlivých vadách fotografického objektivu jednotlivě, přece již teď upozorňuji na složitost úlohy, která v současné existenci různých nedokonalostí má svou příčinu.

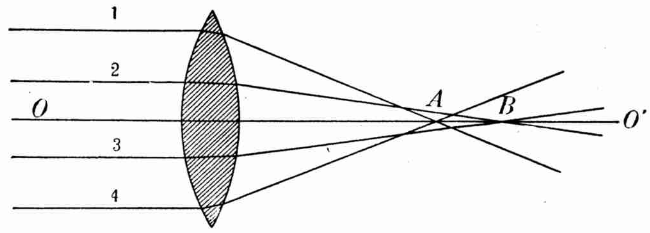
Objektiv fotografický vytváří reálný obrázek osvětleného předmětu na základě *lomu světla* plochami sférickými. Geometrické středy těchto ploch mají ležeti na jediné přímce, hlavní ose optické objektivu. Podmínce této lze s velkou přesností vyhověti, proto nepovšimneme si vad, které by odtud po případě vznikaly.

Pozorujme vady, které se objeví při paprscích *rovnoběžně* s hlavní osou objektivu dopadajících, čili vady jevící se na *ose* objektivu.

Budiž OO′ (viz obr. 3.) osou objektivu. S touto osou rovnoběžně dopadají na objektiv paprsky světla *monochromatického*. (1, 2, 3, 4).

Čočkou se lámou tak, že se paprsek 1 a 4 protínají v bodě A, paprsky 2, 3 v bodě B. Body tyto určují svou vzdáleností (AB) velikost *sférické vady* objektivu. Vzdálenost AB nazývá se *lineární aberrací sférickou.*

Tato vada objeví se na matné desce komory fotografické tím, že jak v poloze A nebo B objeví se světlý bod, obraz vytvořený paprsky 2, 3, (nebo 1, 2), obklopený světlou, znenáhla se ztrácející září, v podobě kruhové aureoly.



Obr. 3.

Při daném objektivu jest linearní aberrace určitou jen pro určitou clonku. Při plném otvoru objektivu jest největší, při užití menších clonek se zmenšuje. Záleží dále na *barvě* dopadajících paprsků. Při různých objektivech jest různá, závisíc nejen na formě objektivu ale také na jakosti skla.

Při čočce bikonvexní jest délková aberrace sférickou *positivní*, to jest paprsky *krajové* mají *menší* ohniskovou dálku než paprsky *středové*. Čočky konvexkonkávní mají aberraci *negativní*, paprsky *krajové* protínají se na ose *dále* od čočky než *středové*. Z určitého skla pro určitou barvu paprsku lze sestrojiti takový tvar čočky, při němž jest aberrace linearní nejmenší.

Tím ovšem není nikdy aberrace sférická úplně odstraněna a všechny jednoduché čočky, užité jako objektivy fotografické, ukazují vadu sférickou.

Úplné odstranění vady sférické možné jest kombinací dvou čoček, které mají sférické aberrace linearní *stejně veliké*, avšak *opačného znamení*. Tak lze kombinovati spojnou čočku skla korunového s rozptylkou ze skla flintového, aby sférické jich aberrace navzájem se rušily. Lze totiž tvar čočky (zakřivení) při určitém materialu tak měniti, že čočka mění svou aberraci sférickou, nikoliv však ohniskovou dálku.

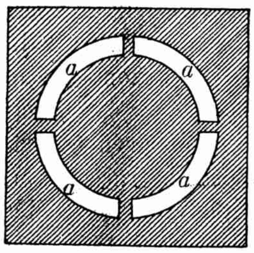
Nazveme-li poloměry křivosti obou sférických ploch, jimiž čočka jest omezena, r_1 a r_2, tloušťku čočky e, index lomu skla n, jest ohnisková dálka f určena výrazem

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left\{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{e}{r_1 r_2}\right\}.$$

Při daném materialu zbývají tudíž tři proměnné veličiny r_1, r_2 a e, jimiž lze docíliti různé aberrace sférické.

Sférická aberrace záleží — jak již uvedeno bylo — jednak na clonce čili vzdálenosti krajních a středových paprsků, jednak také na barevném tónu těchto paprsků. Odstraní-li se zmíněná aberrace pro určitou barvu pro paprsky nejkrajnější a středové není tím řečeno, že by *vůbec* byla odstraněna. Aby byla kompensace pro všechny partie čočky co možná úplnou, odstraňuje se úplně pro paprsky blízko středu a pro paprsky blízko kraje dopadající.

Poněvadž pro paprsky různé barvy vychází různá aberrace sférická, nelze pro všechny barvy zároveň kompensaci provésti. Zbývá tu vždy *chromatická difference* sférické aberrace, kterou lze však tak malou učiniti, že pro praxi fotografickou *jest bez významu.* *)



Obr. 4.

Zkoušení aberrace sférické na ose provede se jednoduše takto:

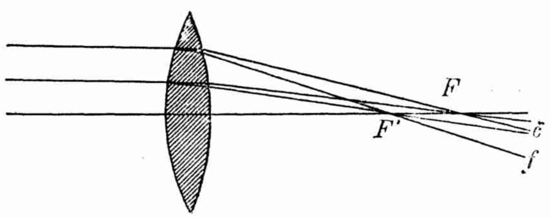
Za jasného dne slunečného postavíme na tyč skleněnou zrcadlovou kouli (jaké se často v zahradách vídají), tak aby v ní malý obrázek slunce povstával. Na tento obrázek slunce zařídíme komoru. Nemá-li objektiv vady sférické, objeví se na matné desce obrázek jako ostrý bod; jinak jest tento bod ob-

*) Pouze v mikrofotografii jest tato veličina značné důležitosti.

klopen rozplývající se záři. Zdali aberrace povstává krajními paprsky, přesvědčíme se zakrytím objektivu clonkou, jak ji obr. 4. vyznačuje.

Světlo může dopadati na objektiv pouze na obvodu objektivu v částech *a*.

Vložením takovéto clonky před objektiv, světlý střed na desce matné zmizí a zbude tam pouze ona záře, která pochází od paprsků, které se protínají buďto již *dříve*, *před* deskou matnou (zařízenou na ostrý střed) anebo *za deskou* matnou. Prvý případ konstatujeme pošinutím desky k *objektivu*, až se vytvoří ostrý obraz, druhý pošinutím desky *od* objektivu. V prvém případě říkáme, že aberrace není *dosti* opravena, ve druhém, že jest *pře*korrigována.



Obr. 5.

Dopadá-li na čočku (viz obr. 5.) světlo složené (na př. bílé), působí tato zároveň jako hranol a rozkládá světlo složené v paprsky barevné.

Různá lomivost těchto paprsků způsobí, že paprsky čočkou prošedší nesbíhají se na ose hlavní v jediném bodě, ale v celé řadě bodů, čili, že vzniká pro každý barevný tón určité ohnisko. K čočce nejbližší jest ohnisko paprsků fialových F', od čočky nejdále protínají se paprsky červené F. Vadu, která tímto úkazem povstává, zoveme *aberrací chromatickou.*

Pozorujeme ji při zaostřování objektivu na předmět bílý. Obrysy obrázku na desce matné jsou červenavé nebo fialové, dle toho, zda-li pošineme desku blíž k ohnisku paprsků fialových nebo červených.

Chromatická vada čoček odstraňuje se konstruováním čoček *achromatických.* Spojnou čočku ze skla menšího indexu lomu spojujeme s rozptylkou ze skla většího indexu lomu, tak aby čočka složená byla achromatickou spojkou (ovšem slabší). Značí-li n_D, n_C, n_F indexy lomu pro Fraunhoferovy čáry D, C, F, jmenujeme poměr $\frac{n_D - 1}{n_F - n_C} = \varrho$ *koefficientem rozptylu.* Pomocí tohoto čísla určí se snadno k dané spojce příslušná rozptylka, která spojku achromatisuje. Jest na př. dána čočka spojná, korunová, jejíž ohnisková dálka měří 10 *cm*, má býti achromatisována rozptylkou z těžkého skla flintového. Indexy lomu pro čáry C, D, F jsou:

	C	D	F
pro sklo korunové	1·5268	1·5297	1·5361
„ „ flintové	1·7718	1·7776	1·7924.

Z těchto čísel vychází koefficient rozptylu pro sklo korunové . . . . 56·9
pro sklo flintové . . . . 37·7.

Dle těchto výsledků nutno sestrojiti čočku rozptylnou tak, aby ohnisková dálka její byla

$$F_R = -10 \frac{56 \cdot 9}{37 \cdot 7} = -15 \cdot 1 \ cm.$$

Ohnisková dálka celé achromatické kombinace bude pak

$$\frac{1}{F_C} = \frac{1}{F_S} + \frac{1}{F_R}$$

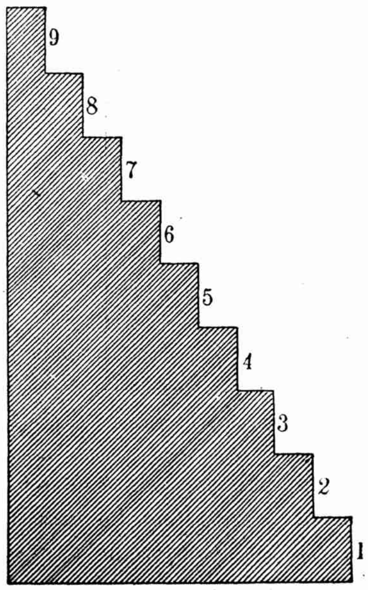
čili

$$F_C = \frac{10 \cdot (-15 \cdot 1)}{-15 \cdot 1 + 10} = \frac{151}{5 \cdot 1} = 29 \cdot 6 \ cm.$$

V příkladě uvedeném provedena byla achromatická kombinace pro paprsky *nejlépe viditelné*, žluté, určené čarou D, tak že se rozptyl mezi jasně žlutými a světle modrými paprsky (mezi čarou C a F) prošedšími čočkou korunovou, kompensoval rozptylem čočky flintové. Obrázek fotografický *nepovstává* však paprsky *největší viditelné jasnosti*, nýbrž paprsky *chemicky aktivními*. To jsou paprsky *temně modré, fialové* a při delší exposici též paprsky *ultrafialové*. Pro objektiv fotografický nutno voliti achromasii těchto paprsků působivých s paprsky nejjasnějšími, tak aby ohnisko paprsků žlutých (čára D) splývalo s ohniskem paprsků fialových (čára G).

Při delších exposicích, jako tomu je při fotografii astronomické, kde zároveň ohnisková dálka objektivu je značná, měříc několik metrů, provede se achromasie pro paprsky jasně modré a tmavě fialové. Správnou posici desky fotografické nutno ovšem určiti pokusem, což se stane jednou pro vždy, neboť vzdálenost předmětu je zde vždy prakticky nekonečně velikou. Achromasie při takovýchto objektivech má býti provedena pro tu barvu, pro kterou jsou užívané desky fotografické nejcitlivější.

Poněvadž úplné odstranění vady chromatické není možné, zbývá i při achromatických objektivech částečný rozptyl paprsků čili *sekundární* vada chromatická.

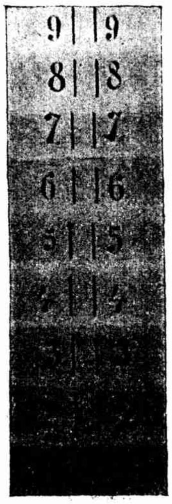


Obr. 6.

Čočka achromatická může býti zároveň tak sestrojena, aby byla prosta vady sférické. Při určité ohniskové dálce lze měniti

formu (poloměry křivosti) rozptylky, tak aby její aberrace sférická byla stejně veliká jako aberrace spojky, opačně ovšem označená. Objektiv takto sestrojený sluje pak *axialní aplanát.*

Zda-li ohnisko paprsků viditelných (nejjasnějších) souhlasí s ohniskem paprsků chemicky aktivních, můžeme snadno vyzkoušeti fotografováním předmětu v nestejných rovinách rozloženého. Ze silnější lepenky (viz obr. 6.) vyřízneme dle obrysu naznačeného dvě shodné schodovité části, které přiděláme k horizontalnímu prkénku tak, aby stály vertikalně. Vertikalní hrany (1, 1) (2, 2) atd. spojí se proužkem papíru, na němž uprostřed je větším písmem vyznačena číslice 1, 2, 3, . . .



Obr. 7.

Předmět takto upravený postavíme papírovými proužky kolmo k ose objektivu a zařídíme komoru tak, aby se číslo prostřední (na př. 5) jevilo býti nejostřejším. Exponujeme desku fotografickou a vyvoláme. Za příklad zkoušen byl takto achromatický objektiv Steinheilův *pozorovacího dalekohledu*, obrázek fotografický znázorněn jest reprodukcí v obr. 7. Jak patrno z něho, nejeví se nejostřejším číslo 9, na které bylo zařízeno, ale číslo 7.

Nazveme-li vzdálenost dílce, na nějž bylo zařízeno od objektivu a, při tom vzdálenost matné desky objektivu b, vzdálenost dílu, který se jeví na fotografii určitým a', jest patrně

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

a

$$\frac{1}{a'}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f'},$$

značí-li f ohniskovou dálku pro paprsky nejvíce viditelné (jasné) a f' ohniskovou dálku pro paprsky chemicky působivé. Z rovnic hořejších lze určiti správnou ohniskovou dálku f'. Při skutečné fotografii, známe-li obě ohniskové dálky f a f', naměříme vzdálenost a a zaostříme na paprsky nejjasnější. Aby pak na desce fotografické vznikl ostrý obrázek předmětu ve vzdálenosti a, nutno vzdálenost b změnit na b', tak aby

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{f'}.$$

Pošinutí matné desky jest při tom

$$b-b'=\frac{a^2(f-f')}{(a-f)(a-f')}.$$

Pro zmíněný objektiv nalezeno:

$$a=118{\cdot}2,\quad b=42{\cdot}2$$

a z toho

$$f=31{\cdot}1\ cm.$$

Rozdíl $a-a'$ činil $2\,cm$, tak že

$$f'=30{\cdot}9\ cm.$$

Aby tedy obrázek ve vzdálenosti na př. 150 *cm* ostře na desce fotografické vynikl, nutno při zařízení desky matné na obrázek paprsků viditelných pošinouti ještě desku k objektivu o

$$b-b'=\frac{150^2\,.\,0{\cdot}2}{118{\cdot}9\,.\,119{\cdot}1}=0{\cdot}32,$$

tedy asi o 3 *mm*.

Mnohé vady objektivu fotografického zmenšují se zmenšením clonky čili uspořádáním, při němž objektivem procházejí pouze paprsky blízko hlavní osy dopadající. Zdálo by se tedy, že užitím velmi malých clonek lze docíliti obrázků nejdokonalejších. Zmenšování clonky klade však určitou mez vada, která povstává *ohybem* paprsků malým otvorem. Tato *diffrakční aberrace* prozradí se tím, že obraz svítícího bodu nejeví se — i když ostatní vady objektivu jsou odstraněny — jako *bod*, nýbrž jako *ploška*, tím větší, čím menší jest otvor, kde se ohyb děje. Zmenšujeme-li otvor z 10 *cm* na 1 *mm* jeví se průměr plošky ohybem osvětlené číslem udaným v následující tabulce.

Průměr clonky	Průměr ohybové plošky vyjádřený zlomkem ohniskové dálky
10 *cm*	0·0000139
5 „	280
2 „	697
1 „	1390
0·8	1742
0·6	2323
0·5	2788
0·4	3482
0·3	4645
0·2	6968
0·1	13931.

Podle toho objektiv ohniskové dálky 25 *cm* zacloněný clonkou 2 *mm* v průměru, způsobil by ohybovou plošku průměru $25 \times 0{\cdot}0006968$ čili 0·017 *cm*. Poněvadž oko rozezná pošinutí o 0·1 *mm*, byl by obrázek takto získaný poněkud neurčitý (rozmazaný).

Otvor clonky tohoto objektivu $f : 0{\cdot}2 = \frac{25}{0{\cdot}2}$ čili 125 byl by již trochu malým. Pravidlem jest neužívati clonky menší než $f : 80$, nanejvýš $f : 100$.

Diffrakční aberrací dána jest také mez pro velikost otvoru pri fotografii *pouhým otvorem*, bez čočky. Při určitém otvoru, jímž paprsky od předmětu vycházející vstupují do temné komory, záleží velikost průměru plošky ohybové na vzdálenosti desky fotografické od otvoru (na výtahu komory). Měníme-li tuto vzdálenost, mění se velikost plošky ohybové; při určité vzdálenosti (délce komory, výtahu) jest ploška ohybová nejmenší. Pro různě veliké otvory v *mm* a různě velký výtah komory (také v *mm*) *udává průměr* plošky ohybové tabulka následující, již sestavil *A. Miethe*.

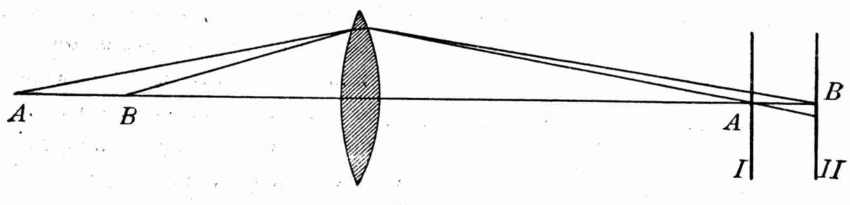
Otvor	Výtah komory (vzdálenost otvoru od desky fotogr.)							
	10	20	30	50	100	200	300	400
0·6	0·311	0·322	0·334	0·356	0·412	0·524	**0·636**	**0·748**
0·5	263	277	290	317	385	**0·519**	0·652	786
0·4	217	234	251	285	**369**	537	0·707	876
0·3	172	195	218	**262**	375	599	0·825	1·050
0·2	140	177	**201**	267	437	774	1·111	1·448
0·1	122	**140**	252	387	724	1·398	2·072	2·746
0·09	**120**	195	270	420	795	1·545	2·295	3·045
0·07	131	227	323	515	995	1·955	2·915	3·875
0·05	138	252	365	592	1·160	2·295	3·430	4·565

Obr. 8. ukazuje reprodukci fotografie učiněné otvorem 0·4 *mm* v průměru, na desku 13 × 18 *cm* ve vzdálenosti 30 *cm*. Neurčitost kontur ukazuje v souhlase s tabulkou předešlou ohybové plošky průměru asi 0·3 *mm*; v reprodukci, která jest menší, nelze ovšem plošky tyto spolehlivě ani odhadovati.

Ačkoliv jednotlivé části předmětů v obr. 8. znázorněných v nestejné byly vzdálenosti od otvoru komory, přece jeví se všechny části obrázku stejně *neostře*. V tom spočívá veliký rozdíl obyčejné komory temné od komory opatřené čočkou. Čočka dává pro každou určitou vzdálenost předmětu určitou vzdálenost obrazu. Nalezá-li se před objektivem předmět, jehož dva body A a B (viz obr. 9.) leží na ose objektivu, zobrazí se bod A v A', bod B v B', tak že deska, na níž reálný obrázek zachycujeme, ukáže v poloze I. ostrý obrázek bodu A, za to neurčitý obrázek bodu B a podobně s výměnou A za B v po-

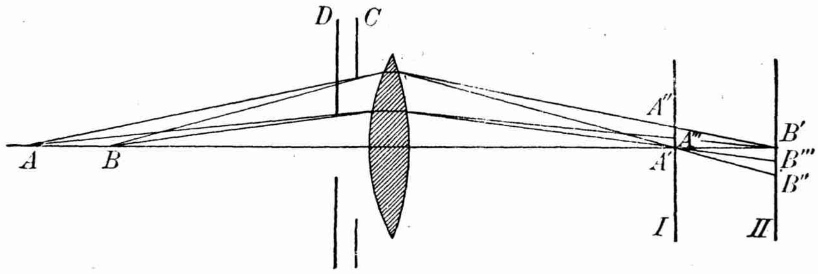
Obr. 8.

loze II. Aby oba obrázky byly stejně ostře vyznačeny, tomu odporují zákony lomu čočkou, to není možno, aniž také žádoucno. Často se však jedná o to, aby ona neostrost některých částí obrazu nepřesahovala jisté meze na př. 0·1 *mm*.



Obr. 9.

Neostrost způsobená ***hloubkou*** předmětu fotografovaného záleží patrně jednak na vzdálenosti předmětu od objektivu, na ohniskové dálce a velikosti clonky. Ustupuje-li předmět A B po hlavní ose od objektivu, blíží se jeho obrazy A' B' k ohnisku čočky a to bod B' rychleji než A', tak že vzdálenost A'B' se menší, zmíněné vady objektivu — může-li okolnost tato za vadu pokládána býti — ubývá. Při stálé vzdálenosti předmětu od čočky bude patrně vzdálenost A' B' menší při objektivech opticky mohutnějších (kratší ohniskové dálky) než při objektivech



Obr. 10.

s ohniskovou vzdáleností větší. Konečně při téže vzdálenosti předmětu od objektivu a různé clonce zostří se obraz ve hloubce tím spíše, čím bude kužel paprsků čočku opouštějících a k bodům A', resp. B' směřujících *ostřejší* čili čím bude clonka menší. Případ tento názorně demonstruje obr. 10. (Dokončení.)

Elementární odvození momentu setrvačnosti některých těles pravidelných.

Žákům středních škol napsal

Dr. Vladimír Janků,
professor v Přerově.

Jak známo, dán jest moment setrvačnosti tvarem

(1) $$M = \Sigma \mu \varrho^2,$$

kdež značí μ hmotu a ϱ příslušnou vzdálenost od osy, vzhledem k níž moment setrvačnosti jest určiti.

Majíce toto na mysli, můžeme přistoupiti k vypočítávání momentů některých pravidelných útvarů.

Jest určiti moment setrvačnosti tyče, jejíž hmota jest m

a délka l, šířka a tloušťka jsou velmi malé proti délce, tak že můžeme tyč považovati vlastně za přímku.

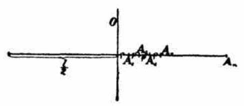
Mysleme si celou tyč rozdělenu na $2n$ dílů velmi malých stejné délky ϱ (obr. 1.); pak jest

$$l = 2n\varrho. \tag{2}$$

Hmota jednoho dílku budiž μ. Je-li tyč z látky stejnorodé, pak

$$m = 2n\mu. \tag{3}$$

Určeme nyní moment setrvačnosti vzhledem k ose O, půlícím bodem, tedy těžištěm jdoucí.



Obr. 1.

Moment tento skládá se ze dvou momentů stejných, totiž z momentu levé strany tyče vzhledem k ose O a pravé strany k téže ose O. Třeba tedy vypočísti moment jediný a dvojnásobné jeho jest úhrnným momentem. Moment tyče jest

$$M = 2[\mu\varrho^2 + \mu(2\varrho)^2 + \mu(3\varrho)^2 + \ldots + \mu(n\varrho)^2], \tag{4}$$

předpokládáme-li, že hmota částiček tyče soustředěna jest v bodech $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

Tento vzorec lze psáti ve tvaru

$$M = 2\mu\varrho^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = 2\mu\varrho^2 S. \tag{5}$$

Součet arithmetické řady 2. stupně, jež ve výraze tomto se naskytá, jest

$$S = \frac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1).$$

Jelikož dle předpokladu jest n číslo velmi veliké, tu lze jedničky vynechati a dostaneme

$$S = \frac{1}{6} n \,.\, n \,.\, 2n = \frac{1}{3} n^3,$$

tak že
$$M = 2\mu\varrho^2 \,.\, \frac{1}{3} n^3 = \frac{2}{3} \mu n \,.\, \varrho^2 n^2.$$

Přihlédnouce k vzorcům (2) a (3), dostaneme

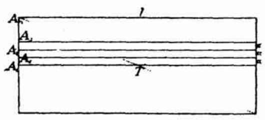
$$M = \frac{ml^2}{12}. \tag{6}$$

Vzorce (6) použijeme k vypočtení momentu tyče mající podobu rovnoběžnostěnu. Jak známo, platí mezi momentem setrvačnosti M vzhledem k ose těžištěm jdoucí a momentem vzhledem k jiné ose, s prvou rovnoběžné ve vzdálenosti a od těžiště se nacházející, jejž nazveme M', vztah

(7) $$M' = M + ma^2,$$

kdež m značí hmotu onoho tělesa, jehož moment k této druhé ose hledáme.

Najíti jest moment setrvačnosti desky podoby obdélníka, jejíž tloušťka jest nepatrná proti délce l a šířce b. Osa nechť jde těžištěm desky.



Obr. 2.

Rozdělme šířku na $2p$ rovných dílců α (obr. 2.), tak že

(8) $$b = 2p\alpha.$$

Vedeme-li díly takto vzniklými rovnoběžky k délce, tu deska rozpadne se na $2p$ pruhů o hmotě μ. Má-li deska hmotu m, pak

(9) $$m = 2p\mu.$$

Hmotu pruhu mysleme si soustředěnu na jednotlivých přímkách, tak na př. hmota prvého pruhu je na přímce A_1, posledního na přímce A_n.

Moment desky jest roven součtu momentů jednotlivých přímek. Dle vzorce (7) jest moment prvé přímky A_1

$$M_{A_1} = \frac{\mu l^2}{12} + \mu\alpha^2,$$

druhé

$$M_{A_2} = \frac{\mu l^2}{12} + \mu(2\alpha)^2 \text{ atd.}$$

Jelikož jest tu symmetrie vzhledem k přímce A_0, lze počítati moment horní poloviny a dvojnásobné jest moment celé desky,

$$(10)\quad M = 2\left[\frac{\mu l^2}{12} + \mu\alpha^2 + \frac{\mu l^2}{12} + \mu(2\alpha)^2 + \ldots + \frac{\mu l^2}{12} + \mu(p\alpha)^2\right].$$

Tento vzorec lze psáti ve tvaru

$$M = 2\left[p \cdot \frac{\mu l^2}{12} + \mu\alpha^2(1^2 + 2^2 + \ldots + p^2)\right]$$

$$= 2\left(p\mu\frac{l^2}{12} + \mu\alpha^2 S\right)$$

$$= 2p\mu\frac{l^2}{12} + 2\mu\alpha^2\frac{p^3}{3}.$$

Dosadíme-li do tohoto posledního tvaru hodnoty za μ a α z (8) a (9), obdržíme konečně

$$(11)\qquad M = \frac{m}{12}(l^2 + b^2).$$

Je-li deska podoby čtverce, pak $b = l$ a vzorec (11) nabude tvaru

$$(12)\qquad M = \frac{m}{6}l^2.$$

Určiti moment setrvačnosti rovnoběžnostěnu pravoúhlého k ose těžištěm jdoucí a kolmé k některé stěně.

Úlohu tuto převedenou na úlohy předešlé, lze hravě řešiti. Rovnoběžnostěn myslíme si totiž rozdělený na tenké desky řezy kolmými k ose momentu. Desky ty jsou vesměs shodny; je-li hmota jedné μ a počet jejich n, pak hmota rovnoběžnostěnu jest $n\mu$ moment

$$M = n\frac{\mu}{12}(l^2 + b^2) = m\frac{l^2 + b^2}{12}.$$

Vzorec tento jest identický s (11), z čehož vidíme, že moment nezávisí na výšce rovnoběžnostěnu (výška || s osou setrvačnosti), nýbrž jen na hmotě, délce a šířce jeho.

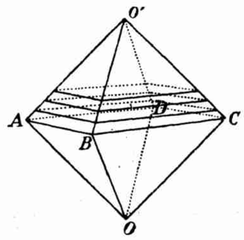
Jest ustanoviti mom. setrvačnosti osmistěnu kol osy, procházející dvěma protějšími rohy OO′.

Rozdělme osmistěn řezy k ose OO′ kolmými na $2n$ desk čtvercových o stejné výšce (obr. 3.). Strany desk buďtež a_1, a_2, ..., a_n, hmoty příslušné μ_1, μ_2, ..., μ_n v jehlanci horním ABCDO′. Podobně tomu jest i v dolním jehlanu ABCDO. Hmota osmistěnu dána vzorcem

(13) $$m = 2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_n).$$

Moment osmistěnu, jenž roven součtu momentů jednotlivýchdesk čtvercových, určuje vzorec

(14) $$M = 2\left(\frac{\mu_1}{6}a_1^2 + \frac{\mu_2}{6}a_2^2 + \frac{\mu_3}{6}a_3^2 + \ldots + \frac{\mu_n}{6}a_n^2\right).$$



Obr. 3.

Je-li σ specifická váha osmistěnu, pak jest poměr hmot dvou desk

$$\mu_1 : \mu_x = a_1^2 v\sigma : a_x^2 v\sigma,$$

kdež v značí výšku desky. Krátíce, dostaneme

$$\mu_x = \mu_1 \frac{a_x^2}{a_1^2},$$

tedy

$$\mu_2 = \mu_1 \frac{a_2^2}{a_1^2},\ \mu_3 = \mu_1 \frac{a_3^2}{a_1^2}, \ldots, \mu_n = \mu_1 \frac{a_n^2}{a_1^2}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do vzorců (13) a (14), dostaneme

(15) $$m = \frac{2\mu_1}{a_1^2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2),$$

(16) $$M = \frac{\mu_1}{3a_1^2}(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \ldots + a_n^4).$$

Stěna ABO′, jak z obrazce patrno, rozdělena na podobné trojúhelníky:

$$\triangle A_1B_1O' \sim \triangle A_2B_2O' \sim \triangle A_3B_3O' \sim \ldots \sim \triangle A_nB_nO'.$$

Jelikož $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-1}A_n = A_nO'$, lze psáti $A_1O' = nA_1A_2$, $A_2O' = (n-1)A_1A_2, \ldots, A_nO' = 1 \,.\, A_1A_2$; použijeme-li podobnosti trojúhelníků, dostaneme

$$a_1 : a_2 : a_3 : \cdots : a_n = n : (n-1) : (n-2) : \cdots : 1,$$

z čehož

$$a_2 = \frac{a_1}{n}(n-1),\ a_3 = \frac{a_1}{n}(n-2), \ldots, a_n = \frac{a_1}{n} . 1.$$

Tyto hodnoty dosadíme do vzorců (15) a (16), tedy

$$m = \frac{2\mu_1}{n^2}(n^2 + \overline{n-1}^2 + \overline{n-2}^2 + \cdots + 2^2 + 1^2)$$

$$= \frac{2\mu_1}{n^2} . \frac{n^3}{3} = \frac{2\mu_1 n}{3},$$

z čehož

$$(17) \qquad \mu_1 = \frac{3m}{2n}.$$

Podobně vzorec (16) změní se po náležité úpravě v tento

$$(18) \quad \mathrm{M} = \frac{\mu_1 a_1^2}{3n^4}[n^4 + (n-1)^4 + \ldots + 3^4 + 2^4 + 1^4] = \frac{\mu_1 a_1^2}{3n^4} \mathrm{S}'.$$

Součet řady

$$\mathrm{S}' = \frac{1}{30} n (n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1);$$

zde opět můžeme jedničky vynechati a obdržíme

$$\mathrm{S}' = \frac{1}{30} n . n . 2n . 3n (n+1),$$

kdež opět jest jednička malou veličinou proti velmi velikému n, lze ji tudíž vynechati, tak že

$$\mathrm{S}' = \frac{n^5}{5}.$$

Tuto hodnotu do vzorce (18) dosadíce, obdržíme

$$(19) \qquad \mathrm{M} = \frac{\mu_1 a_1^2 n}{15}.$$

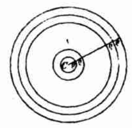
Dosadíme-li hodnotu μ_1 ze vzorce (17) a je-li $a_1 = a$ (strana osmistěnu), pak jest konečný vzorec pro moment osmistěnu

$$(20) \qquad \mathrm{M} = \frac{ma^2}{10}.$$

V tomto vzorci není obsažena výška osmistěnu. Považujeme-li tedy osmistěn za dvojjehlan, můžeme výšku jeho libovolně zvětšiti nebo zmenšiti, při čemž moment zůstává týž; ovšem nesmí se změniti strana podstavy čtvercové a pak hmota dvojjehlanu (váha jeho).

Jest ustanoviti moment setrvačnosti desky kruhové k ose jdoucí středem a kolmé k desce.

Obrazec 4. značiž kruhovou desku o poloměru r. Osa jest k nákresně kolmá a jde středem C.



Obr. 4.

Poloměr rozdělíme na n stejných, velmi malých dílů, tak že

(21) $$r = n\varrho.$$

Dělícími body veďme soustředné kruhy o středu C. Tím rozdělí se deska na samá mezikruží a malý kruh uprostřed. Je-li σ specifická váha desky, pak jest hmota středního kruhu

$$\mu_1 = \pi\varrho^2\sigma;$$

hmota prvého mezikruží jest

$$\mu_2 = \pi(2\varrho)^2\sigma - \pi\varrho^2\sigma = 3\pi\varrho^2\sigma = 3\mu_1,$$

hmota druhého mezikruží

$$\mu_3 = \pi(3\varrho)^2\sigma - \pi(2\varrho)^2\sigma = 5\mu_1$$

a konečně

$$\mu_n = (2n - 1)\mu,$$

při čemž hmota desky

$$m = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = \mu_1(1 + 3 + \ldots + \overline{2n - 1}),$$

t. j.

(22) $$m = n^2\mu_1.$$

Mysleme si, že hmota jednotlivých mezikruží nachází se rozložena jen na vnější kružnici jejich, pak bude moment celé desky rovnati se součtu momentů jednotlivých mezikruží.

(23) $$M = \mu_1 \varrho^2 + \mu_2 (2\varrho)^2 + \mu_3 (3\varrho)^2 + \ldots + \mu_n (n\varrho)^2.$$

Vzorec (23) lze psáti též ve tvaru

(24) $$M = \mu_1 \varrho^2 + 3\mu_1 . 2^2 . \varrho^2 + 5\mu_1 . 3^2 . \varrho^2 + \ldots + \overline{2n - 1}\, \mu_1 . n^2 \varrho^2$$
$$= \mu_1 \varrho^2 [1 + 3 . 2^2 + 5 . 3^2 + \ldots + (2n-1)\, n^2] = \mu_1 \varrho^2 S''.$$

Součet řady

$$S'' = \frac{n}{6} (n + 1)(3n^2 + n - 1);$$

je-li n velmi veliké, lze opět 1 vynechati proti n a obdržíme

$$S'' = \frac{n}{6} . n . n (3n + 1),$$

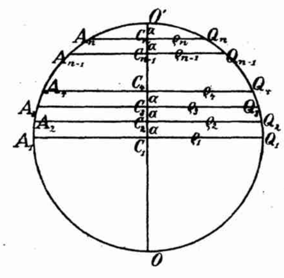
vynecháme-li i zde 1, dostaneme

$$S'' = \frac{n^4}{2}.$$

Dosadíme-li hodnoty za S'' a μ_1 ze vzorce (22) do (24), dostaneme konečně moment desky kruhové

(25) $$M = m \frac{r^2}{2}.$$

Moment setrvačnosti koule vzhledem k ose jdoucí středem.



Obr. 5.

Poloměr koule $C_1O' = r$ rozdělme na n stejných dílů α (obr. 5.), tak že

(26) $$r = n\alpha.$$

Dělícími body veďme kolmé řezy k tomuto poloměru, čímž polokoule rozdělí se na n vrstev podoby desk kruhových. Je-li hmota jednotlivých vrstev $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, tu jest hmota polokoule rovna součtu těchto hmot a hmota celé koule

$$m = 2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_n). \tag{27}$$

Je-li specifická váha σ, pak poměr hmot dvou vrstev jest

$$\mu_1 : \mu_x = \pi \varrho_1^2 \alpha\sigma : \pi \varrho_x^2 \alpha\sigma,$$

$$\mu_x = \mu_1 \frac{\varrho_x^2}{\varrho_1^2},$$

tedy

$$\mu_2 = \mu_1 \frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2}, \quad \mu_3 = \mu_1 \frac{\varrho_3^2}{\varrho_1^2}, \quad \ldots, \quad \mu_n = \mu_1 \frac{\varrho_n^2}{\varrho_1^2}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do vzorce (27), obdržíme

$$m = 2 \cdot \frac{\mu_1}{\varrho_1^2} (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \ldots + \varrho_n^2). \tag{28}$$

Z trojúhelníků $C_1C_2Q_2$, $C_1C_3Q_3$, $\ldots$, $C_1C_nQ_n$ najdeme, uváživše, že n jest velmi veliké,

$$\begin{aligned} \varrho_1^2 &= r^2 \\ \varrho_2^2 &= r^2 - \alpha^2 \\ \varrho_3^2 &= r^2 - (2\alpha)^2 \\ &\vdots \\ \varrho_n^2 &= r^2 - (\overline{n-1}\,\alpha)^2, \end{aligned} \tag{29}$$

a sečteme-li obě strany,

$$\begin{aligned} \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \ldots + \varrho_n^2 &= nr^2 - \alpha^2 (1^2 + 2^2 + \ldots + \overline{n-1}^2) \\ &= nr^2 - \frac{\alpha^2 n^3}{3}. \end{aligned}$$

Přihlédnouce k (26) dostaneme

$$= \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \ldots + \varrho_n^2 = \frac{2nr^2}{3}, \tag{30}$$

kteroužto hodnotu do vzorce (28) dosadíme, čímž

$$(31)\qquad m = 2\,\frac{\mu_1}{\varrho_1^2}\cdot\frac{2nr^2}{3} = 2\,\frac{\mu_1}{r^2}\cdot\frac{2nr^2}{3} = \frac{4\mu_1 n}{3}.$$

Moment polokoule roven jest součtu momentů všech desk a moment celé koule dle (25)

$$M = 2\left(\mu_1\frac{\varrho_1^2}{2} + \mu_2\frac{\varrho_2^2}{2} + \ldots + \mu_n\frac{\varrho_n^2}{2}\right).$$

Dosaďme hodnoty za $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$, i obdržíme

$$(32)\qquad M = \mu_1\varrho_1^2 + \mu_1\frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2}\cdot\varrho_2^2 + \ldots + \mu_n\frac{\varrho_n^2}{\varrho_1^2}\cdot\varrho_n^2$$

$$= \frac{\mu_1}{\varrho_1^2}(\varrho_1^4 + \varrho_2^4 + \varrho_3^4 + \ldots + \varrho_n^4).$$

Umocníme-li jednotlivé z rovnic (29) dvěma, obdržíme

$$\begin{aligned}
\varrho_1^4 &= r^4\\
\varrho_2^4 &= r^4 - 2r^2\alpha^2 + \alpha^4\\
\varrho_3^4 &= r^4 - 2r^2(2\alpha)^2 + (2\alpha)^4\\
&\vdots\\
\varrho_n^4 &= r^4 - 2r^2(\overline{n-1}\,.\,\alpha)^2 + (\overline{n-1}\,.\,\alpha)^4,
\end{aligned}$$

načež sečtěním

$$\varrho_1^4 + \varrho_2^4 + \ldots + \varrho_n^4 = nr^4 - 2r^2\alpha^2(1^2 + 2^2 + \ldots + \overline{n-1}^2) + \alpha^4(1^4 + 2^4 + \ldots + \overline{n-1}^4).$$

Dosadíme-li známé již součty řad S a S′, dostaneme, jelikož u jest velmi veliké,

$$\varrho_1^4 + \varrho_2^4 + \ldots + \varrho_n^4 = nr^4 - 2\alpha^2 r^2\frac{n^3}{3} + \alpha^4\frac{n^5}{5}.$$

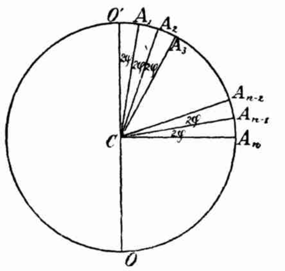
Rovnice tato změní se pomocí (26)

$$(33)\qquad \varrho_1^4 + \ldots + \varrho_n^4 = nr^4 - \frac{2}{3}nr^4 + \frac{1}{5}nr^4 = \frac{8}{15}nr^4.$$

Dosadíme-li konečně do vzorce (32) hodnoty z (31) a (33), nabudeme moment koule

$$M = \frac{2}{5} mr^2. \tag{34}$$

Najíti moment kruhové desky k ose, jež jest totožna s průměrem.



Obr. 6.

Rozdělme čtvrtkruh $O'CA_n$ na n velmi malých trojúhelníků vespolek stejných se společným vrcholem v C (obr. 6.). Hmota trojúhelníka budiž μ, takže hmota celé desky jest

$$m = 4n\mu. \tag{35}$$

Hmotu trojúhelníků mysleme si soustředěnu na symmetrále vrcholového úhlu 2φ.

Jelikož

$$2n\varphi = \frac{\pi}{2},$$

tedy

$$\varphi = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{36}$$

Moment prvého trojúhelníka $O'CA_1$ najdeme, rozdělíce jej na p dílů kružnicemi o středu C stejně od sebe vzdálenými (obr. 7.); jest tudíž

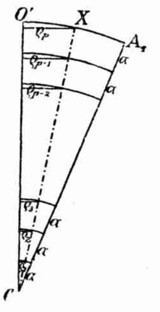
$$r \doteq p\alpha.$$

Hmoty dílců takto vzniklých jsou v poměru

$$\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 : \cdots : \nu_p = 1 : 3 : 5 : \cdots : (2p-1).$$

Značí-li CX symmetrálu úhlu 2φ, pak jest moment trojúhelníka

$$\begin{aligned} M_1 &= \nu_1\varrho_1^2 + 3\nu_1(2\varrho_1)^2 + 5\nu_1(3\varrho_1)^2 + \ldots + (2p-1)(p\varrho_1)^2 \\ &= \nu_1\varrho_1^2[1 + 3.2^2 + 5.3^2 + \ldots + (2p-1)p^2] \\ &= \nu_1\varrho_1^2\frac{p^4}{2}. \text{ [Viz vzorce (24), (25)].} \end{aligned}$$



Obr. 7.

Z obrazce ale patrno, že $\varrho_1 = \alpha \sin \varphi$, tedy

$$M_1 = \nu_1\alpha^2\frac{p^4}{2}\sin^2\varphi.$$

Jelikož

$$\nu_1 + 3\nu_1 + 5\nu_1 + \ldots + (2p-1)\nu_1 = \mu = \nu_1 p^2,$$

tu poslední výraz pro M_1 nabude tvaru

$$M_1 = \frac{\mu}{2}r^2\sin^2\varphi.$$

Zcela obdobně najdeme moment druhého trojúhelníka

$$M_2 = \frac{\mu}{2} r^2 \sin^2 3\varphi$$
$$\vdots$$
$$M_n = \frac{\mu}{2} r^2 \sin^2 (2n - 1) \varphi.$$

Sečteme-li momenty všech trojúhelníků, dostaneme moment čtvrtiny desky a násobíce čtyřmi dostaneme celý moment

$$(37)\quad M = 4 \frac{\mu}{2} r^2 [\sin^2 \varphi + \sin^2 3\varphi + \sin^2 5\varphi + \ldots + \sin^2 (2n-1) \varphi]$$
$$= 4 \frac{\mu}{2} r^2 . S'''.$$

Součet řady S''' dá se snadno nalézti. Dosadíme-li za φ hodnotu z (36), nabude řada tvaru

$$S''' = \sin^2 \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{1}{2n} \frac{3\pi}{2} + \ldots + \sin^2 \frac{1}{2n} (2n-3) \frac{\pi}{2}$$
$$+ \sin^2 \frac{1}{2n} (2n-1) \frac{\pi}{2}$$
$$= \sin^2 \frac{\pi}{4n} + \sin^2 \frac{3\pi}{4n} + \ldots + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4n}\right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n}\right)$$
$$= \sin^2 \frac{\pi}{4n} + \sin^2 \frac{3\pi}{4n} + \ldots + \cos^2 \frac{3\pi}{4n} + \cos^2 \frac{\pi}{4n}.$$

Sečteme-li člen prvý s posledním, druhý s předposledním atd., dostaneme vždy 1, jelikož členů jest n, tedy bude součet řady $\frac{n}{2}$; dosadíce tuto hodnotu do vzorce (37), dostaneme

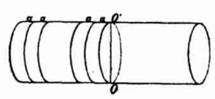
$$M = \frac{4\mu}{2} \frac{n}{2} r^2$$

a dle (35) konečně

$$M = \frac{1}{4} mr^2. \tag{38}$$

Pomocí tototo vzorce snadno najdeme moment setrvačnosti tyče válcové, jejíž průřezem jest kruh.

Najíti moment setrvačnosti tyče válcové k ose těžištěm jdoucí a kolmé k jeho výšce. Rozdělme válec (obr. 8.) řezy k základně rovnoběžnými na $2n$ stejných malých desk kruhových.



Obr. 8.

Hmota desky budiž μ a výška její α. Je-li hmota válce m a délka jeho l, pak

$$\begin{aligned} m &= 2n\mu \\ l &= 2n\alpha. \end{aligned} \tag{39}$$

Dle vzorce (7) jsou momenty jednotlivých desk na levé straně

$$M_1 = \frac{\mu r^2}{4} + \mu\alpha^2,\ M_2 = \frac{\mu r^2}{4} + \mu(2\alpha)^2, \ldots,\ M_n = \frac{\mu r^2}{4} + \mu(n\alpha)^2,$$

podobně na straně pravé.

Zde opět mysleme si hmotu desky soustředěnu na základně její. Moment celé tyče jest tedy

$$\begin{aligned} M &= 2\left[\frac{\mu r^2}{4} + \mu\alpha^2 + \frac{\mu r^2}{4} + \mu(2\alpha)^2 + \ldots + \frac{\mu r^2}{4} + \mu(n\alpha)^2\right] \\ &= 2\left[n\frac{\mu r^2}{4} + \mu\alpha^2(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)\right] \\ &= 2\left[n\frac{\mu r^2}{4} + \mu\alpha^2\frac{n^3}{3}\right] = 2n\mu\frac{r^2}{4} + 2n\mu\frac{\alpha^2 n^2}{3}. \end{aligned}$$

Přihlédnouce k (39) dostaneme konečně

$$(40) \qquad M = m\frac{r^2}{4} + m\frac{l^2}{12} = \frac{m}{12}(3r^2 + l^2).$$

O kulovém blesku.

Napsal

Dr. **Vlad. Novák,**
docent c. k. české university v Praze.

Mnohé zjevy přírodní dějí se kolem, aniž by upoutávaly pozornost lidí, buď oddaných svému zaměstnání, nebo ve chvíli prázdné těšících se klidu a odpočinku nerušenému. Vedle takových zjevů vyskytují se však mohutná, uchvacující divadla v přírodě, v nichž energie sil přírodních vystupuje velikolepě, zastrašujíc neb alespoň udivujíc méně vzdělané a pobádajíc k pozorování a zkoumání vzdělance. K těmto zjevům náleží mnohé děje atmosferické, z nichž nejpůsobivějším jest bouře provázená blesky a hromy.

V následujícím chci se zmíniti o zvláštním druhu blesku, který svým tvarem, barvou a celým průběhem svým tak nápadně se liší od blesků obyčejných, že dlouho existence jeho byla vůbec popírána.

Čtenář vzpomene sobě na některou bouři, již sám zažil a kterou mohl klidně z bezpečného úkrytu pozorovati. Oblohu zataženou tmavými mraky občas rozbrázdily ostré, hrbolaté čáry pronikavého světla, jimž následoval rozmanitý zvuk hromu. Nebo se osvětlovaly celé velké plochy na obloze, jako by září blízkých požárů. Tyto tvary blesku nejčastěji se vyskytující, slují *blesky jiskrovými a plošnými.* Podobny jsou pak blesky jiskrové výboji elektrickému, který nastane mezi elektrodami influenční elektriky, nebo přístroje Ruhmkorffova, když připojíme k elektrodám kondensatory a když jiskra vrstvou vzduchovou přeskakuje. Takováto jiskra má podobu svítící, klikaté čáry, někdy větevnatě se rozdělující, právě jako jiskrový blesk, jehož fotografie připomíná — dle Kayser-a — obraz vodopisné mapy, znázorňující tok řeky se všemi přítoky hlavními i podružnými.

Blesk plošný jest často jen odrazem světla od mraku, tak že příčinou tohoto zjevu jest blesk jiskrový — jinak má bezpochyby původ svůj ve výboji elektřin méně kondensovaných, tedy jako výboj mezi elektrodami influenční elektriky, z níž jsme kondensatory odstranili.

Přiblížíme-li elektrody elektriky blízko k sobě, přeskakují při otáčení strojem velmi četné jiskřičky mezi elektrodami, tak že se téměř ustavičný, souvislý úkaz objeví. Tím hlavně se liší jeden způsob výboje od druhého, že výboj jiskrový jest přetržitý, výboj bez kondensace téměř souvislý. V tomto výboji souvislém lze rozeznávati některé zajímavé zjevy, přihlížíme-li k optické stránce výboje, která přirozeně nejvíce vyniká.

Přiblížíme-li elektrody hodně blízko k sobě, povstává výboj v podobě *svítivého oblouku*, jenž při větší vzdálenosti elektrod ukazuje *trsy* elektrické, přecházeje při vybíjení se velkých množství elektrických ve výboj *v trsovitém oblouku.* Při dalším vzdálení elektrod ukazují se při výboji pouze trsy, jemné a velice rozčleněné to křivolaké linie modravým světlem svítící.

Přestoupíme-li při vzdalování elektrod určitou mez, pak obě elektrody pouze září, zvuk výboje dříve slyšitelný úplně ustane, nastává výboj *elektrickým zářením.*

Úkazy blesku jiskrového a plošného lze takto v malém prováděti v laboratoři a tím je blíže pozorovati a studovati.

Tím záhadnějším a tajuplnějším byl úkaz blesku, který se lišil od blesků jiskrových a plošných tak nápadně, že od mnohých za nemožný byl prohlašován a uváděn jako klam zrakový, halucinace a pod.

Než případy pozorování zvláštního toho druhu blesku stále se množily, nebyly to osoby jednotlivé, jež blesk takový viděly, ale často osob několik, tak že objektivnost zjevu určitěji dokazována. Tvar zvláštního blesku popisován jako *kulový* — odtud pojmenování *blesk kulový* — jako ohnivá koule, nebo tvar vejčitý, hruškovitý. Kulový blesk, na rozdíl od blesku jiskrového, déle trvá, pohybuje se od mraku k zemi nebo naopak jako letící pták, nebo valící se koule, která pozvolna se snášejíc, dopadne země, po případě několikrát jako míč se odrazí. Zvláštní sykot provází v pohybu ohnivé těleso, jež náhle bez hluku mizí, nebo se strašlivým rachotem exploduje.

Velikost světlé koule blesku kulového různě se uvádí, někdy jen jako pěst veliká, dosahuje jindy velikosti hlavy, ano byly pozorovány případy blesků kulových, které prý byly podobny válejícímu se kameni mlýnskému. Zářivé koule bleskové otáčejí se kolem vlastní osy, hned rychleji, hned pomaleji, vytryskujíce kol do kola plameny nebo jiskry. V atmosféře, zvláště pak blízko povrchu zemského a v uzavřených místnostech zanechávají sirný zápach, tak že pohybem, zjevem, zvukem i zápachem vzbuzují v laikovi hrůzu a zděšení, vrcholící v představě pekelné bytosti.

Kulové blesky obyčejně se vyskytují mezi jinými blesky; někdy následují po výboji jiskrovém, někdy se objeví jiskrový výboj až po nich. Jasnost blesků kulových je menší než blesků jiskrových, od nichž se také barvou odlišují. Bývají kulové blesky modravé, tmavě nebo karmínově červené, cihlově rudé, žlutočervené a někdy i bělavé. Nejčastěji mají barvu plamenorudou a karmínově červenou.

Zvláštní vlastností blesků kulových jest vyskytování se blesků těch při bouři v místnostech uzavřených, pohyb jich v takových místnostech, kde zdánlivě otvory nepatrnými prolézají z místnosti do místnosti, někdy bez velikých škod, někdy zase způsobujíce tytéž neblahé účinky, jakými se udeření blesku vůbec vyznačuje.

Četné příklady blesku kulového uvádí *Arago**) a ve zvláštní sbírce *Sauter***).

Nežli přikročíme k vysvětlování neobyčejně zajímavého tohoto úkazu — pokud ovšem vysvětlení to dosud je možné — nebude nezajímavo, uvésti několik příkladů blesků kulových, jak je očití svědkové popisují.

---

*) *Arago's Werke*, vydané od W. G. Hankela, 4. p. 25—49.

**) *J. Sauter*, Beilage zum Programme des. Kgl. Realgym. in Ulm, 1892.

O. C. Marsh *) popisuje kulový blesk, který spatřil za bouře v přístavu Southhamptonském na palubě lodi. „Bylo to 23. července 1878 o 2. hod. odpolední, kdy se od západu přihnala prudká bouře, při níž několikráte v Southhamptonu udeřilo. Právě, když padly první dešťové krůpěje, stanul jsem na zádi lodi, dívaje se však ku přídě. Najednou pozornost moje vzbuzena byla jasným světlem, objevivším se na hořejší části předního stožáru. Sotva jsem světlo dobře spozoroval, bylo již asi v poloviční výšce stožáru a padalo zvolna k palubě. Světlo toto bylo *kulovým bleskem* podoby hruškovité, něžného, růžového, v širší části žlutavého zabarvení. Šířka jeho byla as 4 až 5 palců, délka 6—8.“

„Když kulový blesk dostihl paluby ve vzdálenosti asi 40 stop ode mne, následovala hlasitá detonace a teprve po několika minutách mohl jsem se rozhlédnouti po škodě způsobené Kormidelník, který stál u hlavního stěžně asi 25 stop ode mne, byl sražen k palubě, vzpamatoval se však brzy. Týž blesk nebo snad část jeho, vnikla od předního stěžně ventilačním okénkem do lodní kuchyně, kdež vyrazila z rukou kuchařových velikou mísu cínovou a vůbec nádobí v nepořádek uvedla, aniž by něco valněji poškodila. Po výbuchu blesku kulového bylo cítit po nějakou chvíli silný zápach ozonový. Důstojník službu konající, kapitán Mathews, jenž na přídě zatím meškal a jemuž se ničeho nestalo, tvrdil ihned po úderu blesku, že viděl po palubě šířiti se pruhy světelné, jiskrám podobné. Sám byl jsem explosí poněkud pomaten, viděl jsem však jasně, že přední paluba ozářena byla jasným světlem rozptýleným. Majetník yachty G. Peabody Russel se svými hosty sešli do vnitř lodi, jakmile bouře začala, a nestalo se jim ničeho.“

Novějšího data jsou následující příklady kulových blesků.

Dne 19. dubna a 29. roku 1886 pozorováno za prudkých bouří a lijavců s nimi spojených v Hirschberkách (ve Slezsku) několik blesků kulových. Úkaz je potvrzen mnohými pozorovateli.

Professor fysiky a řiditel elektrické továrny v *Pontevedra* pozoroval zajímavý úkaz blesku kulového 2. ledna roku

---

*) American Journal of Sciences N. vol I. (1896) 13. p.

1890. Za jasného a čistého nebe objevila se náhle ohnivá koule, velikosti pomeranče, která vnikla do továrny světlíkem. Udeřila do stroje pro rozvádění elektrického světla, odtud přeskočila na pracující dynamo. Před očima užaslých dělníků a inženýrů udeřila dvakráte s dynama do svodičů a zpět, pak padla k zemi a roztříštila se za ostré a hlasité detonace v spoustu jiskcr, jež beze stopy zmizely. Mimo budovu a to právě v okamžiku, kdy kulový blesk se snášel, pozoroval jej professor přírodopisu Señor Garcéra.

Dle zprávy „Atti della R. Academia dei Lincei" z roku 1892, pg. 308, udeřilo dne 1. listopadu 1892 v Římě do kostela di S. Giovanni della Malva, aniž by při tom nějaké neštěstí se přihodilo.

Asi 200 metrů od kostela nalézá se palác Akademie dei Lincei, kde právě pracoval *Mancini*. Blížící se bouře stemnila tak oblohu, že Mancini nucen přerušiti práci svou, přistoupil k oknu a pozoroval oblohu. Náhle intensivní světlo a silné zahřmění přesvědčilo jej, že na blízku udeřilo. Téměř v témž okamžiku zpozoroval Mancini nad svou hlavou v nevelké vzdálenosti světlé těleso, jež se silným výbuchem na malé jiskry se rozptýlilo.

Dne 7. června roku 1895 v Paderbornu pozoroval gymnasialní professor *Schnittker* při bouři, kterak jasná, rudožlutá koule, velikosti koule kuželkové, tiše a rychle s mraku k zemi padá a náhle jako puma exploduje. Současně pozoroval na místě 500 *m* od prvnějšího vzdáleném farmaceut Schlüter jasnou, bledéfialovou kouli, velikosti dvojnásobné koule kuželkové, ve vzdálenosti 2 metrů před svými okny šikmo do výše se zvédati. Koule se také roztrhla s detonací podobnou dělovému výstřelu.

Několik těchto zajímavých příkladů snad poučilo dostatečně čtenáře o existenci zvláštního úkazu kulového blesku.

Naskytuje se nyní otázka, jak vysvětliti podivný úkaz tento, doložiti jeho podmínky a ukázati, že lze jej právě tak, jako blesky jiskrové a plošné v malém, pokusem předvésti.

Rozmanití badatelé jako A r a g o, D u M o m e l, D e T e s s a u, A b b é M o i g n o, H i l d e b r a n d s s o n, hrabě P f e i l, S u c h s l a n d a jiní rozmanitými hypothesami hleděli blesky kulové vysvětliti. Daleko přesvědčivějšími byly náhledy, opírající se o skutečné pokusy, které provedl francouzský fysik *Gaston Planté* v Paříži.

Maje na mysli podobu výboje elektrického mezi elektrodami elektriky indukční s blesky jiskrovými a plošnými, hledal Planté podmínku souvislého, trvalého toho výboje, jakým zdál se býti blesk kulový. Výboj jiskrový děje se mezi elektřinami vysokého rozdílu potencialného, poněvadž však *množství* elektrická, jež se výbojem v pohyb uvádějí, jsou *malá*, končí takový blesk *velmi rychle*.

Aby dosáhl výboje, jenž by několik vteřin potrval, Planté rozhodl se zkusiti výboj elektrický při značném rozdílu potencialném a při velkém množství elektřiny. Tohoto výboje mu ovšem nemohla poskytnouti elektrika indukční a proto užil článků. Výborně hodily se mu sekundarní články — jím vynalezené první akkumulatory. Zprvu nabíjel kondensator, sestávající z tenké destičky slídové, polepené na obou stranách staniolem, póly batterie 800 článků. Byla-li destička na některém místě slabší, nebo nalézala-li se na ní malá prasklina, nastal na tom místě výboj elektrický zvláštního způsobu. Na místě takovém ukázala se zprvu světlá jiskřička, pak se okolní staniol roztavil, utvořila se z něho *žhavá kulička*, která, valíc se po povrchu kondensatoru, ostatní staniol v rozmanitých směrech propálila.

Planté zdvojnásobil potom počet svých článků (na 1600), tak že dosáhl potencialného rozdílu 4000 Volt. Místo kondensatoru slídového sestavil kondensator vzduchový. Polepy tvořeny byly dvěma kotouči z pijavého papíru, jejž před pokusem navlhčil, tak že isolující vrstvou byl vzduch a vodní páry, čímž Planté se hleděl ke skutečnosti co možná přiblížiti. Spojil-li oba papíry s póly své batterie, povstala mezi oběma elektrodami *ohnivá kulička*, jež se po povrchu papíru sem a tam pohybovala, náhle mizela, aby povstala jiná podobná. Úkaz trval několik minut, dokud se články sekundarní nevybily. Ohnivá kulička na určitém místě zmizí, poněvadž tepelným účinkem vysuší vlhkost elektrod a pak se na tomto místě odpor značně zvýší. Na jiných místech, dosud vlhkých, ukáže se pak opět výboj v této zvláštní formě. Podstatou svítící koule při pokusu

Plantéově zdá se býti zředěný, žhavý vzduch, obsahující zároveň plyny povstalé rozkladem vody.

Dle výkladu Plantéova povstávaly by tedy blesky kulové při vybíjení se nejen silně napjatých elektřin, ale též při velikém jich množství mezi elektrodami polovodivými. Rozklad vody, který na vlhkých elektrodách výbojem nastane, pomahá utvoření se výboje kulového — tento výsledek Plantéova pozorování souhlasí s velmi četnými příklady skutečných blesků kulových, které nad mokrou (deštěm) půdou byly viděny.

Barvu blesku kulového vykládá Planté různým zředěním rozžhaveného plynu a různým množstvím vodíku, které obsahuje. Vybijí-li se bleskem kulovým veliké množství elektřiny, nastane silné zředění a mocný rozklad vody, blesk má *červenavou* barvu, kterou můžeme pozorovati, když zředěným vodíkem (v Geiszlerově trubici) vedeme výboj elektrický. Vybíjí-li se menší množství elektřiny, nastane menší zředění, vyvine se méně vodíku a blesk má barvu modravou, jakou ukazuje zředěný vzduch, prochází-li jím výboj elektrický. Elektrodami v přírodě jsou buďto země deštěm zvlhlá, a mrak, který k zemi značně se přiblížil, nebo vrstva vzduchu vodními parami prosycená od země úzkou vrstvou suššího vzduchu oddělená.

Z různých tvarů výboje elektrického nejpodobnější jest blesku kulovému výboj v podobě trsovitého oblouku, zvláště pak, děje-li se výboj tento vzduchem poněkud zředěným*). Vybíjíme-li prostorem takovým veliké lahve leydenské, vloživše zároveň do kruhu veliké odpory, aby se výboj pozdržel, podobá se výboj blesku kulovému.

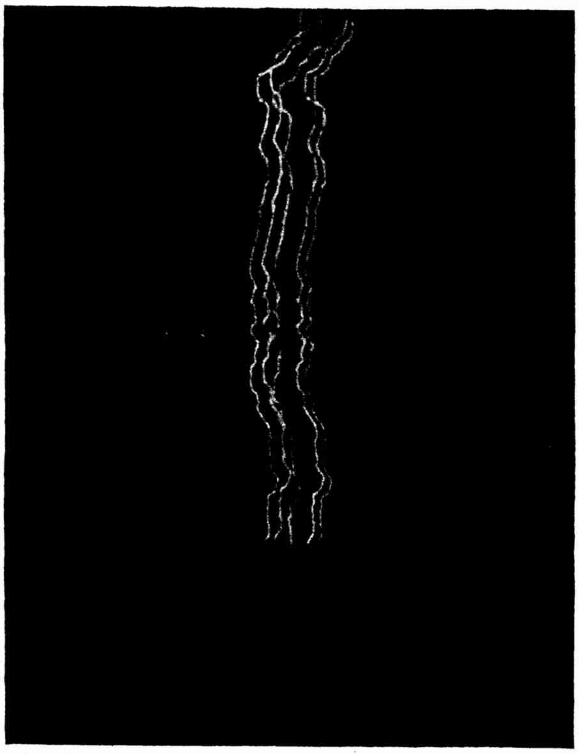
Poněvadž výboj v předešlém pokusu začíná jiskrou a teprve potom ukazuje světelné zjevy blesku kulového, soudíme z toho, že také blesky kulové tvoří se na dráze, kterou již blesk jiskrový utvořil.

Důsledek tento potvrzují mnohá pozorování blesků kulových. I když v některých líčeních čteme, že se objevila ohnivá koule bez předchozího blesku jiskrového, můžeme předpokládati, že takový jiskrový blesk udál se opodál, nebo že byl tak slabé intensity, že ušel pozorování.

---

*) Tlaku as 5 *cm* rtuti.

Fotografie jiskrových blesků zachycené komorou, jež se zvolna pohybovala ve směru vodorovném, ukazuje všeobecně několik blesků *vedle sebe.* (Viz vyobr.) Vykládáme si to složitým výbojem při blesku jiskrovém, který děje se po dráze jednou vzduchem proražené. Často se tato dráha větrem posunuje a pak jednotlivé části blesku kulového liší se podobou.



V *počátečním* blesku vyvíjí se elektřiny nahromaděné na dvou protilehlých místech dvou mraků, nebo mraku a země, a to potud, pokud v kratičkém tom okamžiku mohou v proud býti uvedeny. Bleskem počátečním utvoří se *dráha v isolatoru,* kterou se mohou vyrovnávati další množství elektrická, přivedená k její koncům. Přivádí-li se taková množství po delší dobu, nastane v dráze počátečního blesku téměř *trvalé vybíjení,* které lze pozorovati tenkráte, když intensita začátečního blesku byla malá, anebo když dráha blesku (větrem a p.) poněkud se pošinula. Při trvalém, pravidelném proudění velkých množství elektřin nastanou světelné úkazy podél dráhy bleskové, které se nazývají blesky *růžencové.* Blesky růžencové tvoří vlastně již přechod k formě kulové.

Při výboji, trvajícím delší dobu mezi mrakem a zemí utvoří se, ovšem že zřídka, na výbojové dráze prvního blesku *ohnivá koule, blesk kulový.*

Proč právě jen na určitém místě bleskové dráhy blesk kulový se vytvoří, je dosud neznámo. Pozorování pouze dokazuje, že kulový blesk utvoří se na zúžené části bleskové dráhy. Podoba blesku kulového, jak již dříve podotknuto bylo, není vždy kulová, je-li protáhlá, jeví se toto protažení ve směru výbojové dráhy. Horizontalní pohyb blesku kulového vysvětlí se snadno pošinutím bleskové dráhy větrem neb i silami elektrickými, pohyb vertikalní ve směru bleskové dráhy způsoben je bezpochyby změnami v intensitě proudění elektřiny při výboji.

M. Toepler*) vysvětluje mnohé, překvapující vlastnosti blesků kulových domněnkou, dle které podél dráhy výbojové nastává poměrně volný spád potencialný, tak že vzdálenosti 1 *cm* přináleží potenciálný rozdíl menší než 1700 Volt, jako je tomu as při oblouku trsovitém. Pokusem se ukázalo, že oblouk trsový uchyluje se z původní polohy přiblíženým tělesem elektrickým. Tak se také kulový blesk vyhýbá na př. člověku, nebo předmětům se zemí spojeným, při bouři elektrickým.

Velmi podivným úkazem při blesku kulovém zdá se býti jeho objevování se v místnostech uzavřených, zmizení malými otvory (klíčovou dirkou) a pod.

Také tato vlastnost blesků kulových dá se přirozeně vysvětliti. Za elektrody, k nimž připojíme dráty od sekundarní cívky induktoru Ruhmkorffova, zvolíme dvě desky břidlicové (polovodiče). Děje-li se přerušování proudu primarního elektrolytickým přerušovačem *Wehneltovým,* vznikne téměř trvalý výboj

---

*) *Max Toepler,* Wied. Ann. 1900, pg. 628.

oblouku trsového. Elektrody břidlicové představují mrak a zemi. Mírný pohyb vzduchu způsobí pohyb oblouku trsového.

Vložme nyní mezi obě desky břidlicové vodivou (nebo polovodivou) destičku, upevněnou na isolovaném držadle a přidržme ji blíž k elektrodě, která zemi představuje. Vložená destička jest jako by stropem, střechou a pod. Působíme-li nyní mírným proudem vzduchovým na trsový oblouk, tak aby byl nucen přejíti destičku, obejde ji, nebo *přeskočí* na ni. V tom se však rozdělí na dva oblouky, jeden se ukazuje mezi destičkou a hořejší elektrodou, druhý mezi destičkou a elektrodou dolejší. Stane se tedy destička vložená jako by *novou elektrodou.* Zajímavo jest, že oba oblouky jsou v dalším od sebe nezávisly, že se jeden pohybuje jinam než druhý, že na př. hořejší úplně zmizí a dolejší trvá a pod.

Tak stávají se kovové předměty, zámky ve dveřích a pod. novými elektrodami, tak šíří se kulový blesk z místnosti do místnosti, mizí v jedné a objevuje se ve druhé. Užaslým pozorovatelům zdá se pak ovšem, že *táž* ohnivá koule prolezla nepatrným otvorem ve stěně, dveřích, oknu atd. Ve skutečnosti několika elektrodami povstane několik kulových blesků zároveň nebo po sobě v různých těch prostorách mezi elektrodami.

Ukončení celého úkazu kulového blesku děje se buďto úplně *beze zvuku* nebo se slabší či silnější *detonací.* V prvém případě přestává jednoduše trvalý proud elektřiny. V případě druhém končí blesk kulový bleskem obyčejným.

Bleskovou drahou děje se na konec vyrovnání elektřin bleskem jiskrovým.

Kdy nastane to neb ono ukončení blesku kulového, o tom rozhoduje povaha obou elektrod, mezi nimiž se výboj děje.

Aby po blesku počátečním povstal téměř trvalý proud elektrický, příčina blesku kulového, nesmí býti obě elektrody úplně vodivé — ovšem pak nemusí býti obě polovodiči, stačí, je-li polovodičem jedna z nich.

Zemi a mrak dlužno ovšem považovati za polovodiče, přece však může vodivost býti na jednom konci dráhy bleskové jinou než na konci druhém. Po výboji počátečním nastane větší spád potencialný v elektrodě, která proudu větší odpor klade, v elektrodě lépe vodivé jest spád potencialný mírnější. Proud elektrického výboje reguluje pak elektroda s větším odporem.

Pomysleme si, že vlhká půda země stane se lépe vodivou než mrak, pak jest na konci bleskové dráhy — u země — mírný spád potencialný a elektřina vyrovnává se tu tiše, kulový blesk mizí beze vší detonace. Detonace může však nastati, když by hořejší konec bleskové dráhy pošinut, dostihl mraku velké kapacity elektrické a relativně vodivějšího než jest příslušné místo na zemi.

Podstatně rozdílným jest úkaz nastávající v případě, kdy země klade proudu výbojovému větší odpor než elektroda druhá, mračno, kdy tedy země celý výboj reguluje.

Pokud blesk kulový nastává při tom na místech stejné vodivosti, děje se výboj klidně, jakmile však nalezne dráha výbojová místa vodivější, porušuje se ustálenost proudu a nastávají výboje k předmětům vodivějším. Tak vypryskují jiskry z kulového blesku k předmětům kovovým, nebo celý blesk přeskakuje od jednoho kovového předmětu na druhý.

Nalezne-li konec dráhy výbojové tělesa značné kapacity a malého odporu proti odporu ve mraku, končí blesk kulový obyčejným bleskem jiskrovým.

M. Toepler v pojednání uvedeném snaží se určiti intensitu blesků kulových na základě srovnání jich s trsovým obloukem.

Třemi rozmanitými cestami dospívá poměrně velmi dobře souhlasných výsledků, že jest intensita blesků kulových nejvýše 15—20 ampère.

Jiskrový blesk, kterým se vyrovnávají elektřiny v čase velmi krátkém, má sice intensitu až 10000 ampère uvážíme-li však třeba *několika minutové* trvání blesků kulových, poznáme, jak nesmírná množství elektrická se tu vybíjejí.

Ačkoliv tedy ještě zbývá zkoumati mnohé okolnosti aby úkaz blesku kulového úplně byl vysvětlen, stává se přece celý pohádkový a příšerný zjev tento přirozeným, určitým druhem elektrického výboje, tohoto nevyčerpatelného zdroje nejzajímavějších projevů energie elektrické.

Úlohy.

Úloha 1.

Řešiti jest rovnici

$$(4x^2 - 11)(4x^3 - 11) = 105.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 2.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$\frac{x^5 - a}{x - b} = y^4,$$
$$\frac{y^5 - a}{y - b} = x^4.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 3.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 341,$$
$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 330.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 4.

Řešiti jest rovnici

$$\frac{x - 12}{x^2} = \frac{15 - (x + 1)^2}{x - 2}.$$

Posl. techniky *Jaroslav Milbauer.*

Úloha 5.

Které kořeny má soustava rovnic

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$
$$x + x^2y^2 + y = 7\,?$$

Posl. techniky *Jaroslav Milbauer.*

Úloha 6.

Budiž dokázána věta:

Je-li

$$b = \prod_{k=1}^{n} b_k ,$$

jest

$$\frac{1}{lg_b a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{lg_{b_k} a} .$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 7.

Ustanoviti obecný člen a součet řady, ve které

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} .$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 8.

Zvětší-li se každý rozměr obdélníka o 3 cm, zvětší se jeho úhlopříčka o 4 cm a jeho obsah o 60 cm². *Které rozměry má obdélník?*

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 9.

Do rovnostranného trojúhelníka vepsána jest kružnice, do zbylých částí vepsány kružnice, do částí při vrcholech trojúhelníka opět kružnice a t. d.

V kterém poměru jest součet všech těchto kruhů k ploše kruhu opsaného?

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Úloha 10.

Dán jest obdélník abcd; strana ab spatřuje se ze středu m protější strany cd v úhlu α, strana ad ze středu n protější strany bc v úhlu β.

V kterém poměru jsou rozměry obdélníka, je-li

$$\alpha = 2\beta ?$$

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Úloha 11.

Obdélník rozdělen jest úhlopříčkou a osou souměrnosti kolmou k delší straně ve dva trojúhelníky a dva lichoběžníky.

a) Jest určiti podmínku, kdy lze lichoběžníkům kružnici vepsati.

b) Jest dokázati, že pak středy těchto kružnic se středy kružnic vepsaných v oba trojúhelníky tvoří vrcholy čtverce.

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Úloha 12.

Vypočítati a sestrojiti jest úhel ostrý vyhovující rovnici

$$7 \lg \cos x + 3 \lg \sin x = 13 \lg \operatorname{tg} x.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 13.

Sestrojiti jest pětiúhelník abcde, ve kterém každá z úhlopříček jest rovnoběžná s jednou stranou. Vrcholy a, b, c jsou dány.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 14.

Dána jest plocha trojúhelníka $\Delta = 6\ cm^2$, *součet výšek* $2\sigma = 9{\cdot}4\ cm$ *a průměr kružnice opsané* $2r = 5\ cm$. *Určiti obvod a strany.*

P. *Marian Haas*, kněz na Strahově.

Úloha 15.

Obvod trojúhelníka $2s = 24$, *poloměr kružnice opsané* $r = 2{\cdot}1\sqrt{5}$, *vepsané* $\varrho = \sqrt{5}$. *Které jsou strany?*

P. *Marian Haas*, kněz na Strahově.

Úloha 16.

Z kruhu o poloměru $r = 85\ cm$ *vyřízli jsme plášť a ze dvou kruhů o poloměru* $\varrho = 26\ cm$ *základny rovnoběžnostěnu pravoúhlého, jehož povrch* $P = 15792\ cm^2$.

Které jsou rozměry rovnoběžnostěnu?

Prof. *Th. Schulz.*

Úloha 17.

Kolmému kruhovému kuželi o straně $s = 169\ cm$ *vepsána polokoule, která se pláště dotýká. Jak velký jest povrch a obsah kužele, je-li poloměr polokoule* $\varrho = 60\ cm$?

Prof. *Th. Schulz.*

Úloha 18.

a) Dán jest čtyrboký jehlan, jehož podstavou jest různoběžník abcd, vrchol v, a kdekoli v prostoru bod m. Bodem m proložiti jest rovinu σ, která by jehlan proťala v rovnoběžníku.

b) Dán jest různoběžník abcd v rovině ϱ jakožto podstava jehlanu. Které jest geometrické místo vrcholu jehlanu, jejž rovinami protínati lze ve čtvercích?

Řed. *Vinc. Jarolímek.*

Úloha 19.

Sestrojiti jest vrchol plochy kuželové v, dána-li její řídící křivka druhého stupně K a tři body na ploše m, n, p mimo rovinu křivky K.

Řed. *Vinc. Jarolímek.*

Úloha 20.

V prostoru buďtež dány tři paprsky A, B, C týmž bodem v procházející a čtvrtý D, který prvé tři neseče. Sestrojiti jest plochu kulovou, která daných čtyř paprsků se dotýká.

Řed. *Vinc. Jarolímek.*

Úloha 21.

Trať železniční má od místa A do B stoupání $tg\alpha = 0{\cdot}0262$, od B do C stoupání $tg\,\alpha_1 = 0{\cdot}0349$. Jak dlouhé jsou tratě AB, BC, má-li C od A vodorovnou vzdálenost 10 km a je-li 280 m nad A?

Prof. *Th. Schulz.*

Úloha 22.

Dány jsou body

$$a(1,\ 2),\quad b(2,\ 4),\quad c(5,\ 3).$$

a) Ustanoviti jest body d, e tak, aby v pětiúhelníku abcde každá ze čtyř stran $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ byla rovnoběžná s jednou úhlopříčkou;

b) dokázati, že též pátá strana $\overline{ea}$ *jest s příslušnou úhlopříčkou rovnoběžná.*

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 23.

V pravoúhlé soustavě dány jsou přímky

$$M \equiv 4x + 3y - 15 = 0,$$
$$N \equiv 7x - 24y + 3 = 0;$$

jest ustanoviti body, které jsou co nejblíže průsečíku daných přímek a mají od nich součet neb rozdíl vzdálenosti $k = 117$.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 24.

Která jest podmínka, při které přímka

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

jest normálou ellipsy

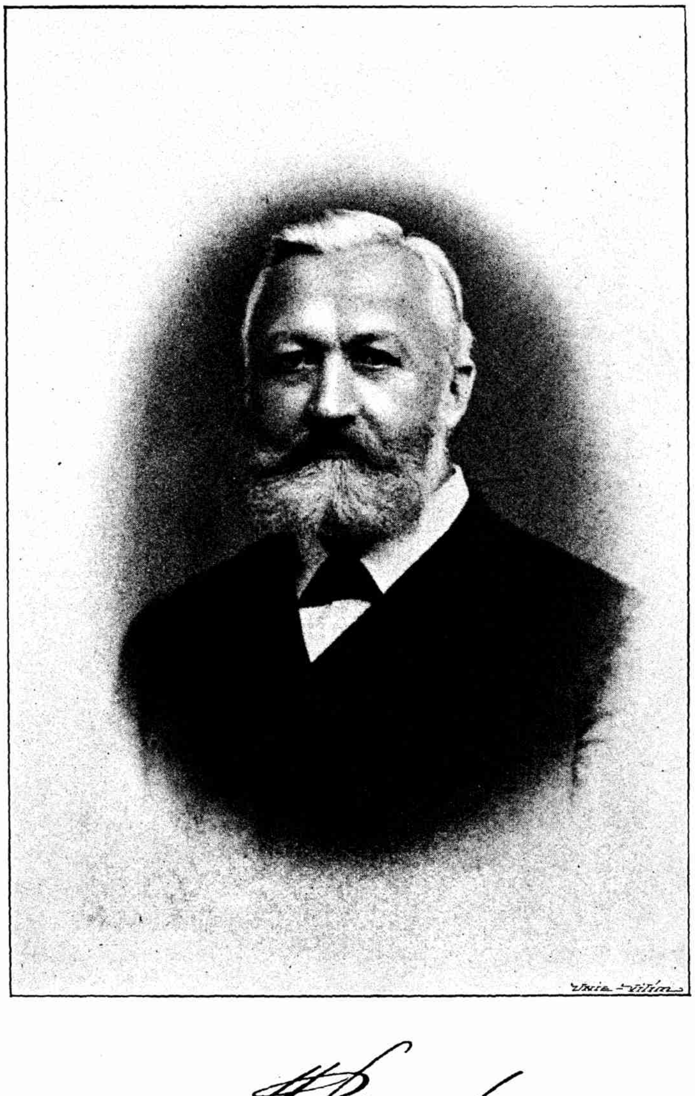
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1?$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 25.

Dána jest kuželosečka a na této tři libovolné body M_1, M_2, M_3. *Pak vedeny přímky* P_1, P_2, P_3 *rovnoběžné s hlavní osou ve vzdálenostech* FM_1, FM_2, FM_3, *kdež* F *značí ohnisko kuželosečky, a body* M_1, M_2, M_3 *spuštěny kolmice* Q_1, Q_2, Q_3 *k ose hlavní. Jest dokázati, že průsečíky* (P_1Q_1), (P_2Q_2), (P_3Q_3) *jsou na jediné přímce.*

Posl. fil. *Karel Nečas.*



Al. Pokorný

O životě a činnosti

MARTINA POKORNÉHO.

Napsal

Augustin Pánek.*)

Citelná rána stihla letos *Jednotu českých mathematiků* úmrtím velezasloužilého předsedy a čestného člena jejího, *Martina Pokorného*, ředitele střední školy na Malé Straně v Praze v. v., který dne 30. ledna r. 1900 u věku 63 let ukončil svůj život. Zesnul po delší nemoci v Praze na Újezdě čís. 596-III.

Ztráty té jest tím více želeti, ježto v zesnulém odešel pilný a neunavný pracovník, přítel mládeže a muž vědy na slovo vzatý, který, pojistiv si trvalou pamět v české literatuře vědecké, zanechal též světlou a nevyhladitelnou vzpomínku v mysli všech, kdož znali jeho vzácně ušlechtilou a ryzí povahu i srdce zlaté.

O životě Martina Pokorného.

Martin Pokorný narodil se dne 30. listopadu 1836 v Hradci Králové z rodičů měšťanských a nezámožných. Prvního vychování školního dostalo se mu v opatrovně jeho rodiště, řízené proslulým paedagogem *Tom. A. Vorbesem*, a tu položen základ budoucí jeho píli a chuti k pracím duševním — jak toho Pokorný častokráte sám vzpomínal. Na hlavní škole byl jeho učitelem rovněž chvalné pověsti požívající *Karel Šádek*. Již tu objevilo se u Pokorného patrně nadání počtářské, jímž nad své spolužáky vynikal.

*) K sepsání tohoto životopisu ochotně uvolil se podepsaný, byv k tomu vyzván výborem Jednoty českých mathematiků, po návrhu člena výboru p. *Václava Starého*, ředitele realné školy na Král. Vinohradech.

Roku 1846 přijat do gymnasia svého rodiště, kterýžto ústav, jako všechny podobné, byl tehdáž ještě německý. Avšak duch českého žactva této školy horoval již nadšením vlasteneckým; bylo to dědictví odkázané professory *Klicperou, Chmelou* a jinými nadšenými vlastenci mladé generaci. Čeho nemohla podávati škola, nahrazováno soukromou četbou českých knih, jichž si žáci navzájem půjčovali, zdokonalujíce se ve své mateřštině a připravujíce se tímto způsobem téměř bezděky k důstojnému počátku studií českých, které r. 1850 zavedeny tu byly místo německých, ač jen částečně a také jenom na čas dosti krátký.

Za takových tedy okolností zahájil Pokorný svá studia.

Na gymnasiích byl tehdy ještě v platnosti starý plán, a že tu bylo hlavním cílem vycvičení ve formách latinských a poněkud řeckých, je s dostatek známo. Teprve ve vyšších třídách, v nichž vyučováno již dle nové osnovy, opět vzkříšeny byly vlohy mathematické, ve snaživém a neobyčejně nadaném jinochu dřímající. Zásluhu o to dlužno přičísti *především* tehdejšímu řediteli ústavu, výtečnému učiteli *Paděrovi* a pak zesnulému pozdějšímu c. k. zemskému školnímu inspektoru *Václavu Jandečkovi,**) jenž v posledních třech letech gymnasijních studií vyučoval Pokorného mathematice a fysice a jenž ve studiích těchto věd utvrdil jej přesností svých výkladů a zvláštním upravováním úloh. Shledav v Pokorném žáka nad jiné pilného a chápavého, zvláštní pozornost mu věnoval a jej k domácímu studiu mathematiky a fysiky horlivě nabádal.

Podrobiv se r. 1854 zkoušce maturitní, při níž obstál s vyznamenáním, Pokorný opouštěl gymnasium, znaje již počet differenciální a integrální dosti podrobně.

Vstoupiv téhož roku jakožto mladík osmnáctiletý na universitu Pražskou, oddal se cele oblíbeným svým studiím, připravuje se na gymnasiální professuru mathematiky a fysiky.

V prvním roce měl ještě za učitele mathematiky známého professora *Janderu*, pak *Kulíka* a *Macku*; fysiku studoval z části ještě u *Petřiny*, později u *Pierra*.

Skončiv triennium universitní, přijal po *Vojtěchu Lešetickém*, nynějším řediteli paedagogia Hradeckého v. v., vychova-

*) Známé jsou učebnice Jandečkovy, které byly v době svého vydání v Rakousku vůbec nejpřesnější školní knihy o „Geometrii" jednající.

telství synů *svobodného pána Podstatského-Tonserna* na Moravě. Tam tři léta vytrval a podrobil se v té době státním zkouškám z mathematiky a fysiky pro vyšší gymnasia.

Po té r. 1861 vstoupil v letním semestru jako zkušební kandidát na c. k. německé Novoměstské gymnasium, tehdy ještě piaristské, kdež následujícího roku byl ustanoven supplujícím učitelem mathematiky a češtiny.*)

V postavení tom setrval do r. 1865, kdy jmenován byl městskou radou král. hlav. města Prahy professorem mathematiky a přírodních nauk na městském realném gymnasiu Malostranském, jež toho roku právě bylo zřízeno a jehož ředitelem byl *Václav Zelený*. V r. 1874 byl ředitel Zelený nucen pro churavost odevzdati řízení ústavu professoru *Františku Kořínkovi*, známému spisovateli a publicistovi českému. Když Kořínek 19. listopadu téhož roku zemřel, svěřeno řízení ústavu nejstaršímu tenkráte členu sboru, Pokornému, který potom ředitele stále zastupoval. Když pak r. 1875 nezapomenutelného Zeleného předčasně smrt národu a vědě odňala, Pokorný jmenován skutečným ředitelem ústavu. Vzorně řídil svěřený sobě ústav i přivedl jej svým paedagogickým taktem i obezřelým počínáním k rozkvětu. Když ústav r. 1892 byl sestátněn, Pokorný převzat do státní služby a setrval při ústavě až do jeho rozdělení na dva samostatné ústavy: gymnasium a realku.

Roku 1883 při volbách do sněmu král. Českého byl k naléhavému přání občanstva Malostranského kandidován a zvolen za poslance, i zasedal na sněmu až do r. 1885.

Odcházeje r. 1895 ve stáří 61 let do výslužby, těšil se, že při dobrém ještě zdraví bude moci zbytek svého života věnovati veřejné činnosti, obecnému dobru.

Ode dne 20. listopadu téhož roku byl členem sboru

*) Zaznamenáváme, že v těch dobách byli žáky Pokorného na gymnasiu *Mírumil Neumann* († 1873) a *August Seydler* († 1891). Jak známo, byl Mírumil Neumann docentem experimentální fysiky a August Seydler řádným professorem mathematické fysiky a theoretické astronomie při universitě Pražské. Životopis Neumannův viz Věstník Jednoty č. m. roč. II. V Praze, 1874 a životopis Seydlerův viz Strouhal V. dr., *O životě a působení dra A. Seydlera.* V Praze, 1892. Nákladem České Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění. V Praze, 1892. Také v Časopise pro pěst. mathem. a fysiky, roč. XXI. pag. 103.

obecních starších za druhý sbor na Malé Straně. Dne 9. listopadu 1899 zvolen též do městské rady, tu však zarputilá choroba dlouhé působnosti mu nedopřála.

Jako člen obecního zastupitelstva Pražského měl nejlepší příležitost své bohaté zkušenosti uplatniti. Že pak všude, kde bylo třeba jeho důkladných vědomostí i zkušeností, ochotně pracoval, toho důkazem, že byl členem školního odboru, kommisse ku přehlížení závěrečných účtů a dozorčí kommisse mateřských škol i dětských útulků. Mimo to byl členem hospodářským kuratoria vychovatelny v Libni, hospodářským inspektorem české obecné i měšťanské školy chlapecké u Panny Marie Vítězné na Malé Straně, jakož ještě i mnoho jiných funkcí svěřeno mu bylo.

Vědecká činnost Martina Pokorného.

Pokorný byl na poli literárním záhy činný. První jeho pokus literární možno zaznamenati r. 1862, kdy vydal spis *Základové technologie*, jakožto 10. díl sborníku prof. *Baldou* založeného a „Průmyslová škola“ zvaného. Uvedeného spisu napsal prof. Balda prvé čtyři archy, když další jeho práci přerušila smrt. Vyzván nakladatelem I. L. Kobrem na doporučení přítele svého *Hálka,* Pokorný uvolil se napsati pokračování a dokončení.

Vedl si při tom tak šťastně, že s ním Kober smluvil zpracování II. a III. dílu *Kroniky práce*, totiž *Sil přírody a užívání jich* (1868) a *Dobývání surovin* (1870). „Síly přírody“ obsahují v samostatném zpracování Pokorného velmi pěknou a dosti obšírnou fysiku, vynikající zvláště bedlivým přihlížením k historické stránce jednotlivých oborů, zároveň pak i zevnější úpravou a pěknými i četnými illustracemi. Před tím nebylo u nás fysiky soustavně a populárně na základě tak širokém sepsané, není tedy divu, že zejmena mladší generace té doby zpracování toto s nadšením přijala a dychtivě studovala.

Zvláště důležitý a v literatuře naší významný je spis Pokorného *Determinanty a vyšší rovnice* (1865), jímž nauka o determinantech, tehdy ještě u nás málo známá, uvedena poprvé do české literatury mathematické; v příčině řešení vyšších rovnic nemáme dosud za něj žádné náhrady.

Publikace tato formou ve mnohém samostatná, nepozbyla do dnes své ceny, což svědčí jistě s dostatek o dokonalosti a vědeckosti její.

K sepsání této knihy vyzván byl Pokorný tehdejším professorem mathematiky na král. české polytechnice v Praze *Gustavem Skřivanem*, který r. 1863 na této vysoké škole první české přednášky o mathematice zahájil. Uvádíme tuto doslovně osvědčení Skřivanovo, jak ve spisu Pokorného jest vytištěno; svědčíť o tom, že Pokorný již tehdy byl nejen uznávanou autoritou svého oboru, ale také, že úkolu svému čestně dostál. Svědectví to mu Skřivan vydává těmito slovy:

„Shledav potřebu příručné knihy v oboru vyšších rovnic i determinantů pro posluchače českých přednášek na polytechnickém ústavu v Praze, učinil jsem poptávku k p. spisovateli této knihy, nechtěl-li by se uvázati v sestavení takového spisu, k čemuž on se uvoliv, se mnou o plán se smluvil a na základě jeho předloženou knihu sepsal. Vyslovuje svůj souhlas s provedením celku, odporučuji spis tento posluchačům svým, jakožto knihu příručnou tím spíše, ježto při přednáškách svých k němu vztahovati se budu."

K znamenitému doplnění tehdejší skrovné české mathematické literatury školní přispěl Pokorný r. 1874 překladem prvního dílu Baltzerových „Die Elemente der Mathematik". Překlad dle 4. vydání učebnice této, jež byla přeložena do několika jazyků evropských, pořídil Pokorný s názvem *Dra Richarda Baltzera Základové mathematiky.* Zavděčil se jím všem učitelům mathematiky, kteří překlad tento uvítali jako spis nejen novějším výzkumům vědy hovící, ale i vynikající soustavností a přesností jak ve výměrech, tak i v celém provedení.

Velezajímavý spis Pokorného, první toho druhu v české literatuře, jednající o pojišťovací otázce, má skromný název *„Důchod invalidní"* (1885) a je tím cennější, že obsahuje právě část v tomto oboru nejmladší, totiž pojištění důchodu pro osoby, které při svém povolání staly se k dalšímu působení neschopnými.

Publikace tato obsahující článek, vydaný v několika pokračováních v „Časopise pro pěst. mathem. a fys.", přihlíží k otázce invaliditního důchodu s přesnějšího hlediska mathematického, než dosud se vůbec dělo, a v úvodě poskytuje několik pokynů pozoruhodných, osvětlujíc stručným, ale jasným způsobem jádro pojišťovací otázky vůbec. Celá práce tato, jakkoli rozsahem ne příliš objemná, jest po způsobu Pokorného velice obsažná; jako byla při všech pracích jeho stručnost při plnosti obsahu a jasnost výrazu charakteristickou vlastností jeho péra, tak jest i při této. Pokorný, jenž byl ve věcech těchto jakožto mathematik Vzájemně pojišťovací banky „Slavia" bez odporu jedním z nejkompetentnějších odborníků, ukazuje stručným rozborem dosavadních theoretických prací v tomto oboru, co již provedeno a co ještě činiti zbývá. Jeho kritické schopnosti ukázaly se zde ve světle nejlepším. Ukazuje nám, co hlavní badatelé k účelům praktickým hledící učinili dobrého a v čem byli pochybili, sám pak, opíraje se z části o tyto práce starší a vlastní názory, spřádá tkanivo vlastního badání samostatně dále a dále a dospívá k výsledkům většinou novým, jak svou soustavností, tak i dokonalou souvislostí přesvědčujícím.

Část praktická, ciferní, která spis zakončuje, vyznačuje se rovněž přehledností a jest každému, kdo by otázkou tou blíže obírati se chtěl, pomůckou nejlepší.

Spis tento byl přivítán od přátel politické arithmetiky*) jakožto výtečná rukověť pro nejdůležitější otázku sociální: zaopatření v stáří.

Pokládáme za nutné, zmíniti se ještě, že *K. V. Zenger* a *Fr. Fridrich Čecháč*,**) kteří počali vydávati dílo s názvem *Fysika pokusná i výkonná*, (jehož pouze I. díl totiž „*Mechanika*" (1882) úplně byl vydán a další díl „*Optika*" nedokončen), ***svěřili revisi*** tohoto díla Pokornému, který tu přispěl nemálo k utvoření terminologie fysikální, tehdy ještě málo ustálené. K posouzení, do jaké míry jdou zásluhy Pokorného, uvádíme doslovně poděkování jemu svědčící v „Předmluvě" pp. spisovatelů tohoto díla.

„V přední řadě zmíniti se musíme o vydatné podpoře, které se nám dostalo od vysoce váženého ředitele malostran. real. gymn. p. Martina Pokorného, jenž se uvázal s obětavostí

*) Viz Aug. Pánek „*Arithmetika národohospodářská*". Ottův Slovník Naučný.

**) Pan Čecháč byl v oddělení vyšší realky žákem Pokorného na Městské střední škole v Praze.

skutečně nevšední k práci zajisté nejnamáhavější, rukopis náš čísti a opraviti, pokud se týče stránky jazykové. Avšak nejen to, i mnohý jiný pokyn jeho byl nám velevítaným, jeho jest rovněž zásluhou, že mnohé v textu stalo se jadrnějším, přesnějším a jasnějším. Tu namáhavou práci jeho my odplatiti nedovedeme, i budiž jemu tuto vysloven nelíčený, nejsrdečnější dík.

Tím nikterak však zásluhy jeho vyčerpány nejsou. Jako u každého díla, které na základech širších poprvé pojednává o jisté látce v jazyce, v němž díla podobná na dobro zastoupena se nenacházejí, vyskytuje se i tuto hojně pojmův a slov, jež příslušnými termíny v jazyce našem dosud nahrazeny nejsou. Tu se vší péčí byli jsme toho dbalí, aby utvořená slova na odpor nebyla duchu a zvláštnostem jazyka, i zde hojnou poradu s panem řed. M. Pokorným jsme brali, a musíme přiznati, že s dobrým výsledkem."

Nutno zde též uvésti, že Pokorný byl hlavním spolupracovníkem Riegrova Slovníku Naučného a odborným redaktorem fysiky Ottova Slovníku Naučného. Do obou těchto encyklopaedií, zvláště do prvé, napsal hojně hesel, z nichž mnohé obsáhlostí svou celému pojednání se rovná.

Jako spisovatel vědecký a zároveň věrný syn svého národa Pokorný hájil vždy zcela správný názor, že jest povinností každého jednotlivce, by duševními plody svými v přední řadě obohatil literaturu vlastního národa a teprve v druhé řadě vydal publikaci svou též v cizím jazyce. Hájil stanovisko, uznávané v dřívějších dobách jen některými spisovateli, neboť praskrovnou jevila se tehdy malá řada českých pojednání ve srovnání s velikým množstvím přesně vědeckých prací, uveřejněných od českých učenců jazykem cizím, nejvíce ovšem německým. Kolik stkvostů mohlo dnes za okolností příznivějších krášliti literaturu naši! Proto zcela oprávněným je stesk, jímž Pokorný v Osvětě (1878) str. 876 na neblahé tyto poměry touží:

„Na konec budiž mi dovoleno, zasesknouti si na věc opravdu smutnou, na manii *mnohých* našich mladších učenců, vydávati mnohé spisy své jazykem německým. Což nestačí jim vědomí, že docházejí uznání v národě svém a že obohacují (když jest tomu tak) literaturu svého národa? Domnívají se, že našedše spíše nakladatele německého než českého slávu svou již pevně založili? — U jedněch zajisté jest to důkazem veliké netečnosti národní, u jiných nemenší přeceňování vlastní důležitosti, nemluvě ani o pohnutkách jiných. Tak nesmýšleli a nejednali heroové naší literatury! Kam poděl se duch Jungmannův, Šafaříkův, Palackého atd.? — Planá jest výmluva ta, že tím šíří se spíše k sousedům našim vědomost o naší činnosti vědecké, že spíše nás ocení co národ vzdělaný! Naopak, pánové, právě naopak! Páni sousedé naši známým svým způsobem pohltí vaše německy psané spisy, večtou je v literaturu svou, a my, národ *váš*, jenž vás vychoval *sobě*, ztrácí všeliké právo hlásiti se k těmto pracím vašim jakožto ke svým! — Budiž mi prominuto, že zde horlím o tuto věc. Ale posoudiž každý sám, zdali možno zachovati krev chladnou, vidí-li se zřejmě, že mnohý z učenců těchto, jakmile se domnívá, že, co právě sepsal, jest poněkud důležitější, předloží to pánům sousedům co majetek jejich, a svému vlastnímu národu, literatuře domácí, hodí jen zde onde některý drobet, který nepokládá za dosti důležitý k hlásání své slávy! Nevylučuji zajisté nijakž sepsání zvláštních příležitostných spisů v jazyce cizím, jde-li o určitý účel, ale — suum cuique — však se mi zajisté rozumí! Jen trochu více hrdosti národní — v tom to vězí!"

I v jiném směru osvědčil se Pokorný jako šířitel vzdělanosti v oboru věd přírodních. Za rozličnými účely měl v letech 1867 až 1882 nejméně 30 populárních přednášek z fysiky pro širší obecenstvo, které vždy bývaly velmi četně navštíveny a sledovány se vzácnou pozorností i odměňovány hojnou pochvalou. Mimo to měl několik přednášek o středním školství v kruzích odborníků, dále slavnostní řeč při přenesení poprsí Vydrova*)

---

*) Poprsí toto z mramoru vytesané bylo pořízeno z usnesení filosofické fakulty a v universitní knihovně postaveno s nápisem:

STANISLAUS WYDRA

E SOC. JESU NATUS REGINAEHRADECII 13. NOV. 1741
DEFUNCTUS PRAGAE 3. DEC. 1804.
MATHESIS IN UNIV. PRAG. ANN. 30 PROFESSOR,
DOCTUS, PIUS, CANDIDUS,
PATRIAE ET PROFESSIONIS SUAE PERAMANS
ET COLLEGIS ET DISCIPULIS SUIS CARISSIMUS.
POSUIT FACULTAS PHILOSOPHICA ANN. 1814.

do místností mathematického semináře r. 1889, při vysvěcení náhrobku Šimerkova v Praskačce r. 1889*) a m. j. Předností jeho při tom všeobecně uznávanou byla nenucená, plynná řeč, jadrnost a jasný projev myšlenek, i ohebný a hlasitý orgán.

* * *

Zmíniti sluší se též o tom, čeho jsme se ještě nedotekli, totiž o působení jeho učitelském. Pokorný byl známý svým humanním chováním k žákům; klidně sice, ale pevně dbal pořádku, kázně a mravnosti; poutavé výklady jeho činily jej vždy učitelem velmi oblíbeným, tak že tato učitelská činnost jeho došla uznání v srdcích žactva, které vzpomíná dosud — jak pisateli této posmrtné vzpomínky známo — svého bývalého učitele nejen s úctou, ale i s opravdovou láskou. Též u sboru professorského požíval jako ředitel pro vzácný takt, jímž jeho jednání se sborem se vyznačovalo, nelíčené úcty a vážnosti.

Po dobu svého působení jako ředitel ústavu přihlížel Pokorný neustále k tomu, aby sbor, v jehož čele stál, svěřenou sobě mládež studující vedl vždy nejlepší cestou nejen k vědění, humanitě a mravnosti, ale aby jí vštěpoval též lásku k vlasti a národu. Jen pravdě dáváme svědectví, tvrdíme-li, že ústav za vedení Pokorného vždy správně konal úkol svůj, čemuž nasvědčují celé řady mužů, odchovanců to bývalé městské střední školy, kteří jako professoři vysokých a středních škol, kněži, úředníci, inženýři, lékaři, právníci atd. působí se zdarem v oborech, jež jim předpisuje jejich životní povolání.

* * *

Viz Studnička F. J. „*O mathematickém učení na universitě Pražské od jejího založení až do počátku našeho století a o vlasteneckém tu působení professora Stanislava Vydry.*“ V Praze, 1888. Dále téhož autora „*Bohatýrové ducha*“. V Praze, 1898. Životopisný nástin Stan. Vydry též v „Časopise pro pěstov. mathem. a fys.“ Ročn. I. V Praze, 1872.

*) Pomník P. Václava Šimerky, jejž čestnému členu svému zbudovala Jednota českých mathematiků, odhalen a posvěcen dne 1. listopadu 1889. Viz Aug. Pánek „*Svěcení pomníku P. Václava Šimerky v Praskačce*“. Časopis pro pěst. mathem. a fys. Roč. XIX. Životopis Šimerkův, podaný pisatelem těchto řádků, viz tamtéž roč. XVII.

Vedle záslužné působnosti literární a učitelské, zaměněné později činností ředitelskou, Pokorný získal si hojných zásluh též o humanní a spolkové instituce.

Již r. 1865 zvolen za jednatele nově založeného *Spolku ku podporování chudých studujících na středních školách Pražských*, jehož předsedou stal se *Wenzig*,*) dále zasedal po léta v ředitelství *Svatoboru* jako účetní, byl zakládajícím členem a delší dobu též předsedou *Občanské Besedy Malostranské*, která jej za jeho zásluhy čestným členstvím vyznamenala, a od r. 1878 byl předsedou *Jednoty českých mathematiků*, která uznávajíc blahodárnou činnost Pokorného, jmenovala jej roku 1884 svým čestným členem. Roku 1893 jmenován Pokorný dopisujícím členem *České Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění.***)

Zásluhy, kterých si získal Pokorný o Jednotu č. m. i o vědu, ocenil též dvorní rada prof. dr. *F. J. Studnička*, věnovav jemu r. 1899 svůj spis „Úvod do nauky o determinantech" (Sborník Jednoty č. math. čís. III.) slovy „velezasloužilému předsedovi Jednoty č. m., spisovateli prvé české knihy o determinantech."

Jaké vážnosti v kruzích učitelských Pokorný se těšil, možno posouditi z toho, že roku 1882 při sjezdu lékařů a přírodozpytců českých v Praze zvolen v odboru paedagogickém za předsedu schůze, i vložen zde na něho úkol, starati se o založení *Ústředního spolku professorů středních škol českých.* Podařilo se mu to skutečně přes to, že snahy o zařízení spolku podobného, avšak pouze pro východní Čechy, hned po prvních krocích jeho v tom směru se objevily, a dávno vytouženému spojení učitelstva středních škol záhubou hned v zárodku hrozily. V červnu 1883 skonstituoval se spolek a zvolil za předsedu Pokorného.

Od založení *Vzájemně pojišťovací banky „Slavia"* Pokorný byl mathematikem jejím, a jeho mathematické výpočty byly vždy promyšleny a tak přesny, že v c. k. ministerstvu došly vždy nejen úplného souhlasu, ale také, pokud se týče jich spolehlivosti, zvláštního uznání.

---

*) Viz „Krok" ročn. II. Zprávy, str. 319, 1865.

**) Viz Almanach České Akademie, ročn. IV. V Praze, 1894.

Když pak před několika lety zřízen byl českým sněmem *Pojišťovací fond císaře Františka Josefa I.*, povolán Pokorný do ředitelstva. Též zasedal v představenstvu *Úrazové pojišťovny dělnické pro království České.**)

Mimo to neopomíjel Pokorný nikdy svými odbornými vědomostmi nezištně obecnému dobru prospěti. Bylť dlouhá léta mathematikem *Pensijního fondu spolku českých žurnalistů*,**) *Pensijního spolku členů Národního divadla* a j.

---

*) Sem povolán byl přípisem c. k. místodržitelství pro král. České ze dne 19. října 1899 čís. 173566 tohoto znění:

Vaše Blahorodí!

Jeho Excellence pan c. k. ministr vnitra povolal Vaše Blahorodí na základě § 12. zákona ze dne 28. prosince 1887 č. l. ř. z. ex 1888 za člena představenstva úrazové pojišťovny dělnické pro království České v Praze.

O tom kladu si za čest dáti Vašemu Blahorodí následkem výnosu c. k. ministerstva vnitra ze dne 12. října 1899 č. 32464 vědomost.

C. k. místodržitel:

Coudenhove.

Jeho Blahorodí
panu Martinu Pokornému,
c. k. gymnasijnímu řediteli na odpočinku
v Praze, 596-III.

**) Uvádíme zde přípis chefredaktora časopisu „Politik" † I. Schicka, svědčící Pokornému:

Slovutný pane!

Výbor pensijního fondu spolku českých žurnalistů vysoce cení Vaši obětavost a velké služby, kteréž jste mu prokázal jako vynikající učenec a odborník.

Zásluhy Vaše o spolek náš, zejmena sestavováním mathematické bilance a radami poskytovanými jsou tím větší, jelikož prodchnuty jsou i nevšedním přátelstvím ku spolku našemu.

Konám milou mi povinnost a jménem našeho výboru skládám Vám vřelé díky za vzácnou ochotu a lásku Vaši, jež pensijnímu spolku našemu jediné umožňují, aby na pevných základech zdárně se vyvíjel.

K díkům našim pojím zároveň snažnou prosbu, abyste i na dále ráčil nám býti pomocnou rukou a věnoval nám i příště svou přízeň v nesnadném našem podniku.

Přijmětež, slovutný pane, výraz hluboké naší vděčnosti a úcty.

Jménem výboru pensijního fondu spolku českých žurnalistů

oddaný Váš

I. Schick,
předseda.

V Praze dne 8. července 1886.

Při všech svých zásluhách a při svém všestranném vzdělání byl Pokorný povahy skromné a mírné, ač mírnost tato jevila se u něho ve šťastném souladu s užíváním patřičné energie. Chování Pokorného, jak každý, kdo jej znal, dosvědčiti musí, vynikalo vždy zvláštní uhlazeností. Jsa jemnocitný a šlechetný, nikomu nedovedl odůvodněné prosby odříci, snaže se každému radou i skutkem ochotně a nezištně pomoci.

Ušlechtilé vlastnosti tyto získaly Pokornému nevšední vážnosti jakož i nejvřelejší sympathie ve všech kruzích, s nimiž se stýkal. Zvláště však intimní přátelství poutalo jej s nynějším professorem Malostranské reálky panem *Josefem Pourem,* s jehož rodinou v nejdůvěrnějším přátelství až do své smrti žil. Upřímné toto přátelství své projevil Pokorný tím, že prof. Pourovi odkázal všechny mathematické spisy ze své knihovny.

Rok co rok v létě meškal Pokorný ve Všenorech u Prahy, vyhledávaje tu zotavení tělesného i duševního. Poprvé uchýlil se sem asi před 30ti lety a od té doby věren zůstal oblíbeným lesům všenorským. Avšak usaditi se ve Všenorech a jen a jedině užívati, to nebylo v povaze Pokorného, který nespustil nikdy se zřetele snahu, zátiší všenorské, známé do té doby pouze nemnohým zasvěcencům, povznésti na vábný útulek letní, na hledanou villegiaturu Pražanů. A neunavnou prací svojí v tomto směru získal si velikých zásluh o rozkvět a zvelebení Všenor.

Jeho milá, přívětivá tvář byla příčinou, že kolem něho znenáhla soustředil se všechen život letních obyvatelů Všenorských, jichž počet pro oblíbenost Pokorného v kruzích nejširších rok za rokem rostl. O Všenory a jich letní obyvatele staral se Pokorný v pravdě otcovsky. Nedal si pokoje, stále o něčem novém pracoval, stále něčím prospěšným se zabýval. Když pak ve Všenorech počato se stavbou vill, a návštěva neustále stoupala, tu již nestačily síly jednotlivce, a proto založil r. 1884 *Spolek pro zvelebování Všenor a okolí*, jehož stanovy sám vypracoval. Po ustavení spolku byl zprvu jeho místopředsedou a od r. 1889 předsedou. Nebylo podniku, při němž by v prvé řadě nebyl zúčastněn Pokorný, a záhy bylo dobře znáti, že ve Všenorech vládne síla uvědomělá, dobro působící. Jeho neunavná činnost nejvíce vynikla, když spolek, chtěje příjmy své zvýšiti, počal pořádati různé zábavy; tu nebylo akademie, koncertu, věnečku, ať již k účelu spolkovému, dobročinnému neb vlasteneckému, jehož protektorem by nebyl štědrý pan *Jan Nolč*, majitel velkostatku, a předsedou neunavný Pokorný, jichž dvojici jako spolkový ministr financí zdárně doplňoval dlouholetý návštěvník Všenor, ředitel Obchodní záložny v Praze, pan *Josef Wagner*.

Tito pánové, jakož i mnozí jiní tvořili kroužek upřímných přátel, kteří přečasto se scházeli, bavíce se hrou v kuželky, zamilovanou to zábavou Pokorného, jehož přítomnost celé zábavě vždy ráz milé srdečnosti dodávala.

Přes to, že Pokorný byl pilným pracovníkem na všech stranách, přece tímto způsobem neutratil všechen čas ve Všenorech ztrávený, neboť i tu zabýval se vážnými myšlenkami, a mnohá jeho práce literární měla tu vznik svůj i závěr.

Každoroční pobyt ve Všenorech stal se Pokornému milou nutností a tak nemohl, mezi školním rokem k tomu času nemaje, pomýšleti na delší cestu do ciziny.

Teprve r. 1896, kdy již byl ve výslužbě, mohl v skutek uvésti dávné přání své, vykonati v průvodu někoho, italské poměry znalého, cestu do severní Italie. Za průvodčího nabídl se Pokornému ochotně Monsignore P. *Jan Drozd*, dřívější milý kollega jeho z realného gymnasia Malostranského. Nabídka byla s radostí přijata, a tak vydali se oba přátelé v první polovici dubna na cestu. Opustivše Prahu, jeli přes Mnichov, Bodamské jezero a přes Curych do Lucernu, odtud pak Gotthardskou drahou do Lugana. Po přání Pokorného navštívili též alpská jezera, načež provázeni stále pohodou nejkrásnější stihli do Milána, v němž mimo památky města prohlédli si též výstavu uměleckou, malířskou a sochařskou, jež se tu právě konala. Z Milána odjeli do Vlašských Benátek, kdež setrvali do 13. května, kterýžto den, přinuceni k tomu nastalým neobyčejně chladným počasím, vydali se na zpáteční cestu přes Terst a Vídeň do Prahy, kamž přibyli dne 15. května, osvěženi a v náladě nejlepší.

Ostatek léta tohoto roku ztrávil Pokorný opět ve Všenorech, provázen naposledy milovanou chotí svou *Marií*, rozenou *Kinzlovou*, s níž se dne 8. října téhož roku na vždy rozloučil.

Domácnost jeho vedla pak slečna *Eleonora Pokorná*, dcera bratra jeho, pana *Josefa Pokorného*, měšťana usedlého v Hradci Králové, která s nevšední péčí a láskou strýce svého ošetřovala.

V létě r. 1897 opětoval cestu do Italie, tak že toho roku poprvé v dlouhé řadě let Všenory ho nespatřily.

Avšak již roku následujícího společnost všenorská opět uvítala Pokorného ve svém středu, netušíc, že jej vítá naposledy. V létě roku 1899 stal se totiž opět nevěrným svému útulku letnímu, meškaje již potřetí v Italii, kam se tentokráte odebral ne pro pouhou zábavu, ale již ze zdravotních příčin, chtěje vzdorovati zhoubné nemoci, která počínala na zdraví jeho hlodati a která také jej udolala.

Úmrtí Pokorného způsobilo značné vzrušení.

Ve výborové schůzi Jednoty č. m. věnoval pisatel těchto řádků jakožto místopředseda pohrobní vzpomínku † Martinu Pokornému těmito slovy:

„Velectění pánové! Jednota naše utrpěla velikou ztrátu úmrtím milovaného a vysoce váženého předsedy a čestného člena svého, pana Martina Pokorného. Zemřelý předseda náš byl mužem povahy ryzí, vynikaje nejen rozšafností, ale i všeobecnou a odbornou vzdělaností. Každý zajisté, kdo drahého zesnulého znal, dá mi za pravdu, přirovnám-li jej ke hvězdě, která velikostí a září svou nad družky své vyniká. Neboť jako se zálibou patříme na hvězdu jasně zářící, tak s obdivem pohlížíme k muži, u něhož učenost a bezúhonnost s láskou k vlasti v jedno se pojily, a jenž žádné překážce se nevyhýbaje, vždy pevným krokem k vytčenému kráčel cíli. Důkladné vědomosti, jimiž zesnulý se honosil, učinily jej nevšedně způsobilým pro vysoké školy, avšak nepodařilo se mu v dobách minulých domoci se postavení takového, čehož lze jen litovati. Při svém všestranném vzdělání byl zesnulý náš předseda povahy skromné, jemnocitné a šlechetné, což zračilo se v jeho vlídném a uhlazeném jednání, jež mu u každého vřelé sympathie zjednalo. Pokud se týče vědecké činnosti jeho, nechci ji podrobněji rozbírati, jen tolik podotýkám, že on byl prvním, který nauku o determinantech uvedl do české literatury mathematické, a že jej mezi přední pracovníky v oboru pojišťovací mathematiky řaditi dlužno. S Pokorným odešel na věčnost jeden z nejlepších synů našeho národa, jenž za svou práci nehledal ani uznání, ani marné chvály, nejméně pak zisku, a jemuž odměnou bylo vědomí, že pro dobro pracoval. Jsa přesvědčen, že, kdo milovaného předsedu našeho jen poněkud znal, navždy jej v milé paměti zachová, prosím, byste, velectění pánové, povstáním památku drahého zesnulého uctili."

Projev tento pak zaznamenán v protokole výborových schůzí.

Také ve schůzi městské rady král. hlav. města Prahy dne 1. února t. r. konané vzpomenul předsedající druhý náměstek starostův, pan Ferdinand Voitl, zesnulého člena Pokorného, oceniv jeho zásluhy, načež povstáním vzdána čest jeho památce. V téže schůzi oznámil p. náměstek Voitl, že byl vyvěšen k uctění památky zvěčnělého smuteční prapor na radnici staroměstské. K návrhu jeho byla nejbližším příbuzným zesnulého vyslovena jménem městské rady přípisem soustrast, na rakev jeho pak položen při pohřbu věnec a prokázány byly zesnulému obvyklé pocty tím, že propůjčen zlatý vůz pohřební a vůz pro věnce, a že rozžehnuty svítilny plynové v ulicích, jimiž průvod se ubíral.

Pohřeb konal se dne 2. února t. r. o 3. hod. odpolední z farního chrámu Panny Marie Vítězné (u Karmelitanů na Malé Straně), kamž rakev s ostatky zvěčnělého z domu smutku byla přenesena a postavena na katafalk, jehož pozadí tvořil háj exotických květin a kolem něhož rozestaveno množství hořících světel. Před katafalkem rozprostřeno bylo množství drahocenných věnců, palem a květinových darů, které věnovali nejbližší příbuzní zesnulého, Jednota českých mathematiků, Česká Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění, král. hlavní město Praha, banka „Slavia", Zemský pojišťovací fond císaře Františka Josefa, sbory professorské c. k. české reálky a c. k. českého gymnasia na Malé Straně, žáci VII. třídy reálky (Vždy laskavému řediteli) a žáci gymnasia Malostranského (Svému bývalému řediteli), Spolek českých žurnalistů, rodina Nolčova, Malostranská Beseda, Marie a Jiří Mayrovi, letní kolonie Pražanů ze Všenor a m. j.

Po vykonaných církevních obřadech proslovil veledůstojný pan farář dr. *Jindřich Beránek* nad rakví vřelou řeč, vzpomenuv občanských cností zesnulého a velebě jej jako vzorného vychovatele a vzácného přítele studující mládeže.

Průvodu, k němuž dostavila se všecka téměř intelligence Pražská, zúčastnil se Jeho Jasnost *Jiří kníže z Lobkowicz*, vévoda Roudnický, nejvyšší zemský maršálek král. Českého a náměstek protektora České Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění Jeho císařské a královské Výsosti Nejjasnějšího Pana arciknížete Františka Ferdinanda Rakouského d'Este, dr. *Fr. Lad. baron Rieger*, pak převor souverainního rytířského řádu Maltézského (Johannitů) Frà *Walter* s podpřevorem Frà *Iblem*,*) dále zástupci vědeckých korporací, obecní zastupitelstvo král. hlavn. města Prahy a Král. Vinohrad, professoři vysokých škol a c. k. zemští školní inspektoři, pak ředitelé českých i německých středních škol, professoři vyšší průmyslové školy, českoslovanské obchodní akademie, českých středních, měšťanských a obecných škol, členové ředitelstva a úředníci Vzájemně pojišťovací banky „Slavia“, „Zemské banky“, „Úrazové pojišťovny dělnické pro král. České“, členové „Malostranské Besedy“, přečetní bývalí žáci a kollegové zesnulého, příbuzní a četní osobní přátelé.

Pohřební průvod, zahájený chovanci vychovatelny v Libni a žáky reálky a gymnasia Malostranského, ubíral se ulicemi Pražskými na hřbitov Olšanský, kdež zesnulý vedle milované družky svého života k věčnému spánku do rodinné hrobky uložen.

Kdyby nebylo jiného, již neobyčejná účast, kterou veřejnost při pohřbu Pokorného projevila, byla by znamením, že zemřel muž vzácných vlastností duševních, jenž s řídkou svědomitostí i neúmornou pílí plnil povinnosti své vždy a všude, kam ve veřejném životě jej osud postavil.

* * *

V následujícím podám *chronologický* seznam publikací Pokorného, které tu uvedeny s doslovným titulem.

Základové technologie. Sepsali Josef Balda a Martin Pokorný.**) S 24 vyobrazeními. V Praze, 1862. Nákladem knĕhkupectví: I. L. Kober. (Průmyslová škola. X.) Stran 272.

Über einige Eigenschaften periodischer Decimalbrüche. Vierzehntes Programm des k. k. Prager Neustädter Gymnasiums am Schlusse des Studienjahres 1864. Aus der

---

*) P. Ibl byl členem professorského sboru realného gymnasia na Malé Straně v Praze, když jeho ředitelem byl Pokorný.

**) Balda napsal první čtyři archy.

Druckerei der k. k. Schulbücherverlags-Verwaltung für Böhmen.

Determinanty a vyšší rovnice. V Praze, 1865. Tiskem a nákladem knihtiskárny Dr. Ed. Grégra. Stran 134.

Poznámka k Schlömilchovu návodu řešení rovnice čtvrtého stupně. Krok. Listy vědecké se zvláštním zřetelem k potřebám gymnasií a reálek. Vydávají Dr. J. Dastich, prof. Ed. Novotný, Fr. J. Zoubek. Svazek I. V Praze 1865. Tiskem a nákladem kněhkupectví B. Stýbla. Pag. 305—308.

Zu Schlömilch's Methode der Auflösung biquadratischer Gleichungen. Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik. X. 1865 pag. 320.

Mathematické příspěvky pro školu. Krok. Listy vědecké se zvláštním zřetelem k potřebám gymnasií a realek. Vydávají Dr. J. Dastich, prof. Ed. Novotný, Fr. J. Zoubek. Ročník II. V Praze 1865. Nákladem kněhkupectví: I. L. Kober. Pag. 104—105.

Mnohostěny Archimedické. První zpráva roční o nižším gymnasiu realním na Malé Straně v Praze. V Praze, 1867. Nákladem vlastním.

Síly přírody a užívání jich. Vzdělal Martin Pokorný. Kronika práce, osvěty, průmyslu a nálezův. Díl II. S 8 velkými přílohami a 365 dřevorytinami v tekstu. V Praze, 1868. Nákladem kněhkupectví: I. L. Kober. Stran 407.

Dobývání surovin z nitra země, z povrchu a z vody. Vzdělal Martin Pokorný. Kronika práce, osvěty, průmyslu a nálezův. Díl III. S 8 velikými přílohami a 290 dřevorytinami v tekstu. V Praze, 1870. Nákladem kněhkupectví: I. L. Kober. Stran 399.

Příspěvek k počtu úmorovému. Třetí Zpráva Jednoty českých mathematiků. V Praze, 1871, pag. 30.

Métrické míry a váhy. Matice průmyslnická. Roč. I. č. 1. Sborník průmyslnický.. V Praze, 1872. Nákladem Matice průmyslnické. Pag. 49—86.

Pokroky ve fysice molekulární. Osvěta. Listy pro rozhled v umění, vědě a politice

Redaktor a vydavatel Václav Vlček. Roč. III. díl I. V Praze, 1873. Pag. 193–203, pak 271—280.

Pokroky v náuce o světle.

Osvěta. Listy pro rozhled v umění, vědě a politice. Redaktor a vydavatel Václav Vlček. Roč. III. díl I. V Praze, 1873. Pag. 321—336.

Thomasův počítací stroj.

Matice průmyslnická. Roč. I. č. 4. Sborník průmyslnický. V Praze, 1873. Nákladem Matice průmyslnické. Pag. 1—26.

Jiří Stefenson, vynálezce lokomotivy.

Matice průmyslnická. Roč. I. č. 4. Sborník průmyslnický. V Praze, 1873. Nákladem Matice průmyslnické. Pag. 50—57.

Justus Liebig.

Osvěta. Listy pro rozhled v umění, vědě a politice. Redaktor a vydavatel Václav Vlček. Roč. III. díl II. V Praze, 1873. Pag. 524—530.

Pokroky ve hvězdářství.

Osvěta. Listy pro rozhled v umění, vědě a politice. Redaktor a vydavatel Václav Vlček. Roč. III. díl II. V Praze, 1873. Pag. 877—888.

Dra Richarda Baltzera *Základové mathematiky.* Ze čtvrtého opraveného vydání přeložil M. P. Díl prvý. Prostá arithmetika, obecná arithmetika, algebra. V Praze, 1874. Nakladatel Theodor Mourek. Stran 252.

Zvuk a sluch.

Osvěta. Listy pro rozhled v umění, vědě a politice. Redaktor a vydavatel Václav Vlček. Roč. IV. díl I. V Praze, 1874. Pag. 405—422.

Novinky z hvězdářství.

Osvěta. Listy pro rozhled v umění, vědě a politice. Redaktor a vydavatel Václav Vlček. Roč. IV. díl II. V Praze, 1874. Pag. 909—914.

Mathematika. Pod hlavním titulem „Nové písemnictví."

Osvěta. Listy pro rozhled v umění, vědě a politice. Redaktor a vydavatel Václav Vlček. Roč. VIII. díl II. V Praze, 1878. Pag. 874.

Poučka o čtyrúhelníku z tětiv.

Časop. pro pěst. mathem. a fys. VIII. 1879, pag. 133.

Mathematika. Fysika. Astronomie a meteorologie.

Památník druhého sjezdu českých lékařův a přírodozpytcův 1882. V Praze, 1882. Nákladem komitétu sjezdu českých lékařův a přírodozpytcův. Pag. 21—41.

Vydáno nákladem Jednoty č. m. jako separátní otisk s názvem:

Stručný nástin české práce vědecké v mathematice, fysice i astronomii. V Praze, 1882. Stran 23.

Důchod invalidní.

Časopis pro pěst. mathem. a fysiky. XIV. 1885, pag. 111.

Vydáno jako zvláštní otisk s týmž názvem. S lithografovanou tabulkou. V Praze, 1885. Stran 65.

Akustika.

Encyklopaedie paedagogická. Slovník vědomostí z vychovávání a vyučování domácího a veřejného ve školách nižších, středních a vysokých. Díl I. V Praze, 1886. Tiskem a nákladem knihtiskárny Františka Šimáčka. Pag. 169—179.

Mathematika.

Bibliothéka mládeže studující, vydávaná péčí Ústředního Spolku učitelstva středních škol českých. Serie I., číslo 5. — Jubilejní památník na oslavu čtyřicetiletého panování Jeho Veličenstva císaře a krále Františka Josefa I. Nakladatel knihkupectví B. Stýbla v Praze, 1888. Pag. 102—112.

Fysika.

Paedagogika pro střední školy. Píše Dr. Petr Durdík. Část III. Oddělení 2. V Praze, 1890. Nakladatel Fr. A. Urbánek. Pag. 489—495.

Na paměť dvacetipětiletého trvání městské střední školy v Praze 1865 - 1890.

Dvacátá třetí výroční zpráva o obecném gymnasiu realním spojeném s vyššími třídami gymnasijními a realními (městské střední škole) v Praze za školní rok 1890. V Praze, 1890. Nákladem důchodů obce Pražské. Pag. 5 a d.

Vydáno jako zvláštní otisk s týmž názvem. V Praze, 1890. Stran 38.

Mathematika, deskriptivní geometrie, fysika, astronomie a meteorologie.

Národopisná výstava československá v Praze 1895. Hlavní katalog a průvodce. Vydal výkonný výbor. Redigoval Josef Kafka. Druhé oddělení: Literatura.

Do *Riegrova Naučného Slovníku* od písmeny H počínajíc napsal téměř všecky články z mechanické technologie a i mnohé chemické, rovněž i velmi četné články z fysiky (všech daleko přes 200); podepisoval se tu šifrou *Pý.*

Též do *Ottova Slovníku Naučného* přispěl několika články pod šifrou *MP.*

Publikační činnost Pokorného není tímto seznamem vyčerpána úplně. Nejsou tu pojaty jeho posudky, uveřejněné v Literárních Listech, pak v Kroku, vydávaném v letech 1864—1865, a úlohy, jež napsal do Časopisu pro pěst. mathematiky a fysiky.

O středech křivosti kotálnic.

Napsal

Miloslav Pelíšek,
professor c. k. státní průmyslové školy v Praze.

(Dokončení.)

IX.

Přistupme nyní k obecnější otázce, *které místo naplňuje bod s, naplňuje-li bod p libovolnou přímku* X*?*

Pak jest svazek $o(p\ldots)$ perspektivný se svazkem $t(p\ldots)$, svazek $t(p\ldots)$ jest involutorný se svazkem $t(\pi\ldots)$ a tedy svazek $o(p\ldots)$ projektivný se svazkem $t(\pi\ldots)$, aneb svazek $o(\pi\ldots)$ projektivný se svazkem $t(\pi\ldots)$; body π naplňují tudíž kuželosečku H, jež prochází bodem o a dotýká se v bodě t přímky T.

Promítáme-li nyní křivou řadu $\pi\ldots$ z bodu O, jenž neleží na H, a protneme tento svazek svazkem $t(p\ldots)$, jenž jest projektivný k řadě $\pi\ldots$, obdržíme, jak známo, jakožto místo bodů s křivku třetího řádu, jež se však rozpadá ve přímku ot a v nějakou kuželosečku G, jež se dotýká přímky T v bodě t.

Přímku ot nutno z příbuznosti vyloučiti, poněvadž jejímu průsečíku s přímkou X odpovídá jen jediný střed křivosti, který se může stanoviti direktně pomocí výše uvedených harmonických vlastností. Týmž pochodem jako dříve dospějeme ku větě:

Libovolnému svazku přímek X *jakožto místu bodů* (p) *přísluší svazek kuželoseček* G, *jež procházejí bodem* s *sdruženým vrcholu* p *svazku přímek a oskulují v bodě* t *kružnici* I. Osy těchto kuželoseček jsou rovnoběžné ku přímkám, jež rozpulují úhel tečny T a příslušné přímky X svazku. Středy těchto kuželoseček naplňují novou kuželosečku, jež oskuluje kružnici I v bodě t a prochází půlícím bodem úsečky st.

Splyne-li zvláště vrchol p svazku přímek X se středem pevné kružnice O, obdržíme příslušný střed křivosti s, sestrojíme-li čtvrtý harmonický bod m (sdružený s t) k bodům O, t a průsečíku normály Ot s kružnicí I, a rozpůlíme-li úsečku tm.

Uvažujeme-li zvláště osnovu přímek X rovnoběžných jakožto místo bodů p, přísluší jim jakožto místo středů křivosti s svazek kuželoseček, jež oskulují I v t, a jejichž čtvrtý základní bod jest průsečík rovnoběžky vedené bodem t s kružnicí I, jež tedy náleží svazku.

Předcházející výsledky možno shrnouti v obecnou větu:

Libovolné přímce roviny jakožto místu bodů p přísluší jakožto geometrické místo bodů s kuželosečka, jež oskuluje kružnici I *v bodě t.*

Naopak jest též v platnosti:

Každá kuželosečka K, jež oskuluje kružnici I v bodě t, přísluší jakožto místo středů křivosti s nějaké přímce P jakožto místu opisujících bodů p. Zvolíme-li totiž na K body s_1, s_2, přísluší jim body p_1, p_2, a přímce $p_1p_2 = P$ přísluší kuželosečka, jež oskuluje I v t a prochází body s_1, s_2 a jest tedy totožná s K.

X.

Týmž pochodem jako dříve můžeme dokázati duálné věty:

Libovolnému svazku přímek Y *jakožto místu bodů s přísluší svazek kuželoseček* H *jakožto místo bodů p, jež oskulují kružnici* J *v bodě t a procházejí všechny bodem p, jenž přísluší vrcholu s svazku přímek* Y. Středy těchto kuželoseček naplňují novou kuželosečku, jež oskuluje J v bodě t a prochází půlícím bodem úsečky pt. Osy těchto kuželoseček jsou rovnoběžné ku přímkám, jež půlí úhly tečny T a příslušných přímek Y.

Splyne-li zvláště daný střed křivosti s se středem o hybné kružnice, obdržíme příslušný bod p, sestrojíme-li čtvrtý harmonický bod n (sdružený s t) k bodům o, t a průsečíku normály ot s kružnicí J a rozpůlíme úsečku tn.

Uvažujeme-li zvláště osnovu rovnoběžných přímek Y′ jakožto místo bodů *s*, přísluší jim svazek kuželoseček jakožto místo bodů *p*, jež oskulují kružnici J v bodě *t* a procházejí průsečíkem této kružnice s rovnoběžkou vedenou bodem *t*, tak že kružnice J náleží svazku.

Tyto výsledky můžeme shrnouti v obecnou větu:

Libovolné přímce roviny jakožto místu bodů s přísluší jakožto místo bodů p kuželosečka, jež oskuluje kružnici J v okamžitém středu otáčení t.

Naopak jest též v platnosti:

Každá kuželosečka K, jež oskuluje kružnici J v bodě *t*, přísluší jakožto místo opisujících bodů *p* nějaké přímce P jakožto místu středů křivosti *s*. Zvolíme-li totiž na K dva body p_1, p_2, přísluší jim body s_1, s_2 a přímce $s_1 s_2 =$ P přísluší kuželosečka, jež oskuluje J v *t* a prochází body p_1, p_2 a jest tedy totožná s K.

Jako vedlejší výsledek máme větu:

Vedeme-li bodem t kružnice I transversály, jež protínají kružnici I v bodech i a libovolnou přímku X v bodech p, a sestrojíme-li k bodům p, t, i čtvrté harmonické body s sdružené s t, jest jejich místo kuželosečka, jež oskuluje kružnici I v bodě t.

Poněvadž každé přímce P jakožto místu bodů *p* přísluší kuželosečka K jakožto místo bodů *s*, jest vyšetřovaný vztah *čtvercová korrespondence,* kterou se zabývali *Magnus, Steiner, Reye* a jiní, a sice patrně onen zvláštní případ, o němž se děje zmínka v díle *Clebsch-Lindemann* Vorlesungen über Geometrie I., str. 476., že totiž splývají všechny tři hlavní body s bodem *t*, což jest příčinou, že se všechny ony kuželosečky oskulují.

XI.

Jsou-li body *p* na kuželosečce, jež se dotýká v okamžitém středu otáčení *t* tečny T, jest svazek paprsků *t* (*p*...) involutorný ke svazku *t* (π...). Výtvar svazku *o* (*p*...) a svazku *t* (π...), jenž jest projektivní s křivou řadou *p*..., jest křivka třetího řádu jakožto místo bodů π...

Přejde-li však paprsek tp v tečnu v bodě t, stotožňuje se paprsek op a $t\pi$ s přímkou ot, která jest tedy částí místa bodů $\pi\ldots$, kdežto zbývající část jest kuželosečka, jež se dotýká v bodě t tečny T.

Místo bodu s obdržíme jakožto výtvar svazku O $(\pi\ldots)$ se svazkem t $(p\ldots)$ aneb t $(s\ldots)$, jenž jest křivé řadě $\pi\ldots$ projektivní; naplňuje tedy s křivku třetího řádu, jež má v bodě t dvojný bod. Přejde-li však paprsek $tp = ts$ v tečnu T, stotožní se paprsek $t\pi$ a $O\pi$ s přímkou Ot, jež jest tedy částí místa s, kdežto zbývající část jest kuželosečka, jež se dotýká v bodě t tečny T. Přímka Ot nenáleží místu s, poněvadž jejímu průsečíku s danou kuželosečkou přísluší jediný bod jakožto střed křivosti, který se může stanoviti direktně na základě výše uvedených harmonických vlastností.

Máme tudíž větu:

Body p kuželosečky A, jež se dotýká v bodě t kružnice J, opisují epicykloidy, jejichž středy křivosti s naplňují taktéž kuželosečku A', jež se dotýká v bodě t kružnice I. (Mannheim).

Větou tou již jest současně vyřčena věta duálná.

Kuželosečku A' můžeme zase konstruovat pomocí kružnice I, vedeme-li bodem t libovolné příčky a sestrojíme harmonické body dle relace (5).

Máme tedy vedlejší výsledek:

Dotýká-li se kuželosečka A kružnice I v bodě t a sestrojíme-li na příčkách bodem t, jež protínají kuželosečku a kružnici v bodech p a i, k bodům p, t, i čtvrtý harmornický bod m sdružený s t, naplňuje bod m zase kuželosečku, jež se dotýká v t dané kuželosečky i kružnice.

Je-li daná kuželosečka A, jež se dotýká v t tečny T, kružnice, jest dělicí poměr $pt : it$ na všech bodem t vedených příčkách stejný; jest tedy též dělicí poměr $mp : mi$ na všech příčkách tentýž, z čehož následuje, že bod m a tudíž i půlící bod s úsečky tm naplňuje kružnici, jež se dotýká v bodě t přímky T.

Máme tedy větu:

Body p kružnice, jež se dotýká v okamžitém středu otáčení t kružnice J, opisují epicykloidy, jejichž středy křivosti s naplňují též kružnici, jež se dotýká kružnice I v bodě t.

Tím jest též vyřčena věta duálná.

Je-li dána kružnice A, obdržíme snadno průměr kružnice A′ pomocí výše uvedené harmonické konstrukce.

Jako vedlejší výsledek máme:

Vedeme-li bodem dotyku t dvou kružnic transversály a sestrojíme-li na nich čtvrtý harmonický bod k povstalým průsečíkům, naplňuje týž zase kružnici, jež se dotýká v bodě t daných kružnic.

Poněvadž přísluší průsečíkům všech kružnic, jež se dotýkají v t pevné a hybné kružnice, průsečíky zase takových kružnic, jest patrno, *že jsou pomyslné kruhové body v nekonečnu samodružné body*; z toho ale jest patrno, že každé jiné kružnici přísluší ve vyšetřovaném vztahu křivka, jež prochází těmito pomyslnými kruhovými body v nekonečnu.

XII.

Jsou-li body p na kuželosečce B, jež protíná v t tečnu T a prochází středem o hybné kružnice, jest svazek $o(p\ldots)$ projektivný se svazkem $t\ (p\ldots)$, svazek $t\ (\pi\ldots)$ jest involutorný se svazkem $t\ (p\ldots)$, a tedy svazek $o\ (\pi\ldots)$ projektivný svazku $t\ (\pi\ldots)$; místo bodů $\pi\ldots$ jest kuželosečka, jež prochází body o a t.

Promítáme-li body π této kuželosečky ze středu O pevné kružnice a protneme-li tento svazek svazkem $t\ (p\ldots)$, jenž jest projektivní s křivou řadou $\pi\ldots$, jest jejich výtvar křivka třetího řádu B′, jež prochází bodem O a t, jenž jest dvojný bod, a ve kterém se B′ dotýká přímky T i dané kuželosečky B.

Křivka B′ se nerozpadá, poněvadž přímka Ot nepřísluší sama sobě.

Poněvadž kuželosečka B protíná tečnu T v reálném od t různém bodě, oskuluje dle dřívějšího křivka B′ kružnici I.

Máme tedy větu:

Body p kuželosečky B, jež protíná v okamžitém středu otáčení t kružnici J a prochází středem o hybné kružnice, opisují epicykloidy, jejichž středy křivosti naplňují křivku třetího řádu

B′, jež prochází středem O pevné kružnice a bodem t, ve kterém se dotýká dané kuželosečky a oskuluje kružnici I.

Přímky, jež spojují bod t s průsečíky dané kuželosečky B s kružnicí J, udávají směry asymptot křivky B′.

Naplňují-li body p obecněji kuželosečku B, jež protíná v bodě t kružnici J, jsouc jinak libovolná, naplňují body π... křivku třetího řádu, jež prochází body o a t, který jest dvojným bodem křivky, ve kterém se tato dotýká přímky T; směry asymptot obdržíme, spojíme-li o s průsečíky dané kuželosečky a kružnice opsané na průměru ot.

Body s naplňují i nyní, po vyloučení přímky Ot, křivku třetího řádu, jež má v t dvojný bod, ve kterém jedna větev oskuluje kružnici I a druhá větev se dotýká dané kuželosečky.

Naopak jest též v platnosti:

Každá čára třetího řádu B′, jež oskuluje kružnici I v bodě t, přísluší jakožto místo bodů s nějaké kuželosečce B jakožto místu bodů p, jež protíná T v bodě t. Zvolíme-li totiž na B′ čtyři body s_1, s_2, s_3, s_4, jimž přísluší p_1, p_2, p_3, p_4, jest těmito a bodem t určena kuželosečka B, které zase přísluší křivka třetího řádu, jež oskuluje I v bodě t, jenž jest její dvojný bod, a prochází body s_1, s_2, s_3, s_4; poněvadž však platí bod t jakožto dvojný bod, ve kterém se obě čáry třetího řádu oskulují a protínají, za *6* bodů, mají tedy obě čáry 10 bodů společných a tudíž se stotožňují.

Podobným pochodem jako dříve se dá ukázati věta duální:

Naplňují-li body s kuželosečku, jež protíná v t kružnici I, jsouc jinak libovolná, přísluší jí jakožto místo bodů p křivka třetího řádu, jež oskuluje kružnici J v bodě t, který jest její dvojný bod.

A též opak:

Každá křivka třetího řádu, jež oskuluje kružnici J v bodě t, jenž jest její dvojný bod, přísluší jakožto místo bodů p kuželosečce jakožto místu bodů s, jež protíná kružnici I v bodě t, jsouc jinak libovolná.

Křivku B′ můžeme zase konstruovat pomocí kružnice I a harmonických bodů, čímž obdržíme vedlejší výsledek:

Vedeme-li průsečíkem t dané kružnice I s danou kuželosečkou B libovolné příčky a sestrojíme k vzniklým průsečíkům čtvrté harmonické body, naplňují tyto body křivku třetího řádu, jež se dotýká v t dané kuželosečky a oskuluje v témže bodě kružnici I.

XIII.

Podobně jako v dřívějších případech se dá ukázati:

Naplňují-li body p kuželosečku (p), jež neprochází bodem t, naplňuje bod π křivku (π) čtvrtého řádu, jež má v o a t dvojné body, které jsou isolované, jsou-li přímky ot a T nesečny dané kuželosečky. Body v nekonečnu křivky (π) přísluší průsečíkům kuželosečky (p) s kružnicí opsanou na ot jakožto průměru. Směry asymptot křivky (π) obdržíme, spojíme-li tyto průsečíky s bodem o. Naopak odpovídají bodům v nekonečnu kuželosečky (p) průsečíky křivky (π) s kružnicí opsanou na ot jakožto průměru, a asymptoty kuželosečky (p) jsou rovnoběžné ku spojnicím těchto průsečíků s bodem o.

Bod s naplňuje, po vyloučení přímky Ot, taktéž křivku čtvrtého řádu (s), která má v t dvojný bod, který jest isolován, neprotíná-li kuželosečka (p) tečnu T v reálných bodech.

Bodům v nekonečnu kuželosečky (p) přísluší průsečíky křivky (s) s kružnicí I, a jsou tedy asymptoty kuželosečky (p) rovnoběžné ku spojnicím průsečíků křivek (s) a I s bodem t. Průsečíkům kuželosečky (p) s kružnicí J přísluší body v nekonečnu křivky (s), jejíž asymptoty jsou rovnoběžné ku přímkám, jež spojují průsečíky kružnice J a kuželosečky (p) s bodem t.

Protíná-li kuželosečka (p) tečnu T ve dvou reálných bodech, oskuluje křivka (s) kružnici I v bodě t dvakrát.

Naopak jest též v platnosti:

Každá křivka čtvrtého řádu C^4, jež oskuluje dvakrát kružnici I v bodě t, přísluší jakožto místo bodů s nějaké kuželosečce C^2 jakožto místu bodů p, jež neprochází bodem t. Zvolíme-li totiž na C^4 pět bodů s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, jimž přísluší p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, jest těmito body určena C^2, které zase přísluší křivka čtvrtého řádu $C_1{}^4$, jež oskuluje dvakrát kružnici I v bodě t a prochází body s_1, s_2, s_3, s_4, s_5. Poněvadž každá z křivek

C^4 a C_1^4 oskuluje dvakrát I v bodě *t*, mají tři soumezné dvojné body společné, jež počítají ovšem za dvanáct průsečíků; mimo to procházejí obě body s_1, s_2, s_3, s_4 a s_5 a mají tedy celkem 17 bodů společných a stotožňují se tudíž.

Též jest v platnosti duálná věta:

Každé kuželosečce C^2, jež neprochází bodem *t* přísluší jakožto místu středů křivosti *s* křivka čtvrtého řádu C^4 jakožto místo opisujících bodů *p*, jež oskuluje dvakrát kružnici J v bodě *t*, protíná-li C^2 tečnu T v reálných bodech.

Naopak jest též v platnosti, že každá C^4, jež oskuluje J v bodě *t* dvakrát, přísluší jakožto místo bodů *p* nějaké C^2, jež neprochází bodem *t*, jakožto místu bodů *s*.

Sestrojíme-li křivku (*s*) pomocí harmonických bodů, máme vedlejší výsledek:

Vedeme-li bodem t dané kružnice, jež není současně průsečíkem této kružnice a dané kuželosečky, transversály a sestrojíme k bodu t a k povstalým průsečíkům čtvrté harmonické body, naplňují tyto křivku čtvrtého řádu, jež oskuluje v bodě t dvakrát danou kružnici, jsou-li průsečíky tečny T v bodě t s danou kuželosečkou reálné.

Pochod dosud užitý vede též k cíli, máme-li na zřeteli křivky třetího, čtvrtého a n-tého řádu jakožto místo bodů *p*.

XIV.

Z předcházejícího jest patrno, které jsou zákony uvedené příbuznosti, je-li geometrické místo bodů *p* křivka *n*-tého řádu, jež neprochází bodem *t*.

Poněvadž protíná (*p*) kružnici J ve $2n$ od *t* různých bodech, protíná (*s*) přímku v nekonečnu též ve $2n$ bodech, a křivka (*s*) jest tedy řádu $2n$-tého a má v bodě *t* *n*-násobný bod, poněvadž (*p*) protíná tečnu T v *n* reálných neb podvojmo konjugovaných bodech, jejichž příslušné jsou všechny v *t*.

Každé větvi křivky (*p*), jež protíná T ve dvou reálných bodech, přísluší větev křivky (*s*), jež oskuluje dvojnásobně kružnici I v bodě *t*.

Každé větvi křivky (p), jež prochází bodem t, odpovídá větev křivky (s), jež se v bodě t dotýká oné větve.

Prochází-li však (p) bodem t, protíná kružnici J ještě ve $2n-1$ od t různých bodech; křivka (s) pak protíná přímku v nekonečnu ve $2n-1$ bodech a jest tedy $2n-1$ řádu. Dotýká-li se (p) v bodě t kružnice J, aneb má-li v bodě t dvojný bod, protíná kružnici J ještě ve $2n-2$ od t různých bodech; křivka (s) pak protíná přímku v nekonečnu ve $2n-2$ bodech a jest tedy řádu $2n-2$. Oskuluje-li křivka (p) kružnici J, aneb má-li v t trojnásobný bod, protíná (p) ještě J ve $2n-3$ bodech; křivka (s) pak jest řádu $2n-3$.

Obecně můžeme říci:

Je-li (p) křivka n-tého řádu, jež má v t λ-násobný bod, ve kterém vchází s kružnicí J dotyky stupňů μ, ν, ..., odpovídá jí křivka (s) řádu $2n-\lambda-\mu-\nu$, jež se dotýká v bodě t všech λ větví křivky (p); protíná-li při tom (p) tečnu T v π reálných bodech, oskuluje (s) kružnici I v bodě t π-násobně.

XV.

Nebude od místa podati s vynecháním veškerých podrobností *přehlednou karakteristiku* vyšetřované příbuznosti:

1. Bodům p v nekonečnu přísluší Bressova kružnice I jakožto místo bodů s.

2. Bodům s v nekonečnu přísluší Bressova kružnice J jakožto místo bodů p.

3. Kuželosečkám, jež oskulují kružnici J jakožto místu bodů p, přísluší přímky jakožto místo bodů s.

4. Kuželosečkám, jež oskulují kružnici I, jakožto místu bodů s, přísluší přímky jakožto místo bodů p.

5. Kuželosečkám, jež se dotýkají v bodě t Bressových kružnic, jakožto místu bodů p neb s, přísluší kuželosečky jakožto místo bodů s nebo p, jež se taktéž dotýkají Bressových kružnic. Zvláště přísluší kružnicím, jež se dotýkají v bodě t Bressových kružnic, jakožto místu bodů p neb s zase kružnice, jež se dotýkají v bodě t Bressových kružnic, jakožto místo bodů s neb p; zejmena přísluší hybné a pevné kružnici jakožto

místu bodů p neb s kružnice, jež se dotýkají v t Bressových kružnic, jakožto místo bodů s neb p.

6. Kuželosečkám, jež protínají Bressovy kružnice v bodě t, jakožto místu bodů p, přísluší jakožto místo bodů s křivky třetího řádu C^3, jež se dotýkají v bodě t daných kuželoseček a oskulují v tomto bodě Bressovu kružnici I.

Zvláště přísluší kružnicím, jež protínají Bressovy kružnice v bodě t, křivky C^3, jakožto místo bodů s, jež procházejí kruhovými pomyslnými body v nekonečnu, dotýkají se v t daných kružnic a oskulují v t Bressovu kružnici I.

7. Kuželosečkám, jež protínají Bressovy kružnice v bodě t, jakožto místu bodů s, přísluší jakožto místo bodů p křivky třetího řádu C^3, jež se dotýkají v bodě t daných kuželoseček a oskulují v tomto bodě Bressovu kružnici J.

Zvláště přísluší kružnicím, jež protínají Bressovy kružnice v bodě t, jakožto místu bodů s křivky C^3 jakožto místo bodů p, jež procházejí kruhovými pomyslnými body v nekonečnu, dotýkají se v t daných kružnic a oskulují v t Bressovu kružnici J.

8. Kuželosečkám, jež neprocházejí bodem t, jakožto místu bodů p přísluší jakožto místo bodů s křivky čtvrtého řádu C^4, jež mají v bodě t dvojný bod, ve kterém — není-li isolovaný — oskulují kružnici I dvakrát.

Libovolným kružnicím, jež neprocházejí bodem t, přísluší zvláště jakožto místu bodů p křivky C^4 jakožto místo bodů s, jež procházejí pomyslnými kruhovými body v nekonečnu a oskulují v bodě t kružnici I dvakrát, protíná-li daná kružnice tečnu T v reálných bodech.

9. Kuželosečkám, jež neprocházejí bodem t, jakožto místu bodů s přísluší jakožto místo bodů p křivky čtvrtého řádu C^4, jež mají v bodě t dvojný bod, ve kterém — není-li isolovaný — oskulují kružnici J dvakrát.

Zvláště přísluší kružnicím takovéto křivky, jež mimo to procházejí pomyslnými kruhovými body v nekonečnu.

10. Křivce (p) řádu n, jež neprochází bodem t, přísluší křivka (s) řádu $2n$, jež má v t n-násobný bod, kterým prochází tolik reálných větví, v kolika reálných bodech protíná (p) tečnu T, při čemž kružnice I oskuluje všechny tyto větve. Má-li (p)

v t λ-násobný bod, ve kterém vchází s kružnicí J dotyky stupňů μ, ν, ..., snižuje se o $\lambda + \mu + \nu + \ldots$ řád křivky s, která se při tom dotýká v bodě t všech λ větví křivky (p).

11. Též jest v platnosti věta duálná.

K předcházejícím větám jsem dospěl neodvisle, maje předchozí vědomost jen o výsledcích podaných ve zmíněném díle Mannheimově; po ukončení této práce jsem byl upozorněn na pojednání *K. Bobek: „Über die Krümmungsmittelpunkte der Curven, welche die Punkte einer Ebene bei einer unendlich kleinen Verschiebung derselben in ihr beschreiben“*, uveřejněné 5. března 1880 ve Zprávách o zasedání král. české společnosti nauk v Praze, p. 56—64. V práci této jest elegantním způsobem odvozeno, že uvažovaná příbuznost jest zvláštní případ příbuznosti Steinerovy. Autor direktně dokazuje, že přímkám přísluší kuželosečky, jež se oskulují v okamžitém středu otáčení a zvláště, že přímce v nekonečnu přísluší kružnice, jejíž jméno neudává, jakož i vůbec literárních poznámek nečiní; též ukazuje, že přímky, jež procházejí okamžitým středem otáčení, jsou samodružné.

Z vlastností Steinerovy příbuznosti činí pouze závěrek, že křivce řádu n přísluší křivka řádu $2n$, jejíž singularity, které obdrží Steinerovou příbuzností, jsou vesměs v okamžitém středu otáčení; dále, že řád křivky se snižuje, prochází-li daná křivka okamžitým středem otáčení.

XVI.

Poněvadž se veškeré uvedené případy dají konstruktivně provésti jen za pomoci Bressových kružnic a vícekráte zmíněných harmonických konstrukcí, jest na jevu, že právě karakterisovaný vztah není v platnosti toliko pro jediný epicykloidální pohyb, nýbrž že nastane týž *vztah* pro nekonečně mnoho cyklických pohybů, jež mají Bressovy kružnice společné; k tomu jest však jen třeba, aby poloměry r a R hybné a pevné kružnice hověly rovnici:

$$(1) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2\varrho},$$

ve které považujeme poloměr Bressových kružnic za daný.

XVII.

Uvažujme nyní zvláštní případy cyklického pohybu, při čemž však uvedeme jen význačnější věty.

1. Pohyb kardioidálný.

V rovnici (1′) jest nám položiti $r = -R$, čímž obdržíme

$$\varrho = \frac{R}{4}.$$

Při kardioidálném pohybu se rovná poloměr Bressových kružnic čtvrtině poloměru základní kružnice.

Geometrické místo všech bodů, jež opisují zkrácené kardioidy, jež mají právě v těchto bodech inflexní body, jest v každém okamžiku kružnice, jež se dotýká v okamžitém středu otáčení t pevné kružnice, a jejímž poloměrem jest čtvrtina poloměru pevné kružnice.

Pro body p hybné kružnice k jest dělicí poměr $pi : pt = 4 : 1$, z čehož plyne, že úsečka tm se rovná $\frac{8}{3}$ tetivy kružnice I, a úsečka ts se rovná $\frac{4}{3}$ této tetivy. Máme tedy konstrukci:

Středy křivosti prosté kardioidy obdržíme, prodloužíme-li tetivu kružnice I na normále o jednu třetinu její délky.

Vzdálenost středu křivosti s od bodu dotyku t jest však třetina tetivy, kterou tvoří normála na základní kružnici; jest tedy též v platnosti:

Středy křivosti všech kardioid opsaných v libovolném okamžiku body hybné kružnice naplňují zase kružnici, jejíž poloměr jest třetina základní kružnice.

Naplňuje-li p svazek paprsků, naplňuje s svazek kuželoseček, jež oskulují v t kružnici I. Je-li vrchol svazku a v nekonečnu na přímce ot, jest čtvrtý základní bod b svazku kuželoseček průsečík přímky ot s kružnicí I; splyne-li a s o, jest bod b ve vzdálenosti $\frac{3}{4}$ R od bodu t; je-li a v průsečíku s kružnicí J, jest b v nekonečnu; splyne-li a s průsečíkem kružnice I, jest b ve vzdálenosti $\frac{1}{4}$ R od t; splyne-li a se středem O pevné kružnice, jest b ve vzdálenosti $\frac{2}{3}$ R od t atd.

Naopak, naplňuje-li s svazek paprsků, naplňuje p svazek kuželoseček, jež oskulují v t kružnici J. Má-li vrchol svazku paprsků zvláštní polohy, má též vrchol svazku kuželoseček podobné zvláštní polohy jako v předcházejícím.

Naplňuje-li p kružnici, jež se dotýká v t základní kružnice, naplňuje i s takovou kružnici.

2. Pohyb evolventní.

V rovnici (1′) jest položiti $r = \infty$, čímž obdržíme

$$\varrho = \frac{R}{2}.$$

Při evolventním pohybu jest poloměr Bressových kružnic polovina poloměru základní kružnice.

Z toho následuje:

Geometrické místo všech bodů p, jež opisují v libovolném okamžiku zkrácené evolventy, které mají právě v těchto inflexní body, jest kružnice, jež se dotýká vně v okamžitém středu otáčení t základní kružnice, a jejíž poloměr jest polovina poloměru základní kružnice.

Naplňuje-li p svazek paprsků, naplňuje s svazek kuželoseček, jež oskulují I v t.

Je-li zvláště vrchol svazku paprsků a na přímce Ot v nekonečnu, jest čtvrtý základní bod b svazku kuželoseček ve vzdálenosti $\frac{1}{4}$ R od t; je-li a v průsečíku s kružnicí J, jest b v nekonečnu; splyne-li a s O, jest b půlící bod poloměru Ot. A t. d.

Naplňuje-li naopak s svazek paprsků, naplňuje p svazek kuželoseček, jež oskulují J v bodě t; zvláštním polohám bodu a odpovídají zase snadno stanovitelné zvláštní polohy bodu b.

Naplňuje-li p kružnici, jež se dotýká v bodě t základní kružnice, naplňuje i s takovou kružnici.

3. Pohyb hypocykloidálný.

V rovnici (1′) jest položiti r kladné. Je-li r menší než R, čímž nastane hypocykloidálný pohyb v užším slova smyslu, pak jest ϱ záporné, a kružnice I se dotýká vně základní kružnice, kdežto kružnice J uvnitř.

Je-li r větší než R, nastane *pohyb pericykloidálný*, jenž jest, jak známo, vlastně pohyb epicykloidálný; skutečně jest pak zase ϱ kladné, a Bressovy kružnice mají zase tutéž polohu vůči základní kružnici jako při pohybu epicykloidálném.

Je-li $r = R$, nemůže ovšem nastati žádný pohyb; jen v tomto případě splynou Bressovy kružnice s tečnou T v okamžitém středu otáčení.

Jakožto zvláštní případ pohybu hypocykloidálného jest:

4. Pohyb elliptický.

V rovnici (1′) jest položiti $r = \frac{R}{2}$, čímž obdržíme

$$\varrho = -\frac{R}{2}.$$

Při elliptickém pohybu splyne kružnice J v každém okamžiku s hybnou kružnicí.

Ellipsy opsané body hybné kružnice mají tedy v každém okamžiku středy křivosti v nekonečnu; opisují tudíž přímky a sice průměry pevné kružnice.

Střed křivosti s ellipsy, kterou opisuje libovolný bod p roviny, obdržíme, sestrojíme-li k bodům p, t a k průsečíku normály, s onou kružnicí, jež se dotýká v t vně základní kružnice a jejíž průměr se rovná poloměru základní kružnice, čtvrtý harmonický bod m sdružený s t, a rozpůlíme úsečku mt.

Středy křivosti *s* všech ellips opsaných v libovolném okamžiku body *p* průměrů základní kružnice a tedy též průměrů ellips tvoří svazek kuželoseček, jež oskulují v okamžitém středu otáčení *t* onu kružnici, jež se rovná hybné kružnici a dotýká se vně pevné kružnice v okamžitém středu otáčení *t*, kdežto čtvrtý základní bod svazku jest bod v nekonečnu na průměru Ot.

Kuželosečky ty jsou vesměs hyperboly, vyjma onu parabolu, jež přísluší průměru rovnoběžnému tečně T.

Středy křivosti *s* všech ellips opsaných body *p* průměrů hybné kružnice naplňují svazek kuželoseček, jež oskulují v okamžitém středu otáčení onu kružnici, jež se rovná hybné kružnici a dotýká se v *t* vně základní kružnice, kdežto čtvrtý základní bod obdržíme, prodloužíme-li poloměr tO o třetinu jeho délky.

Středy křivosti *s* všech ellips opsaných body *p* osnovy rovnoběžných přímek naplňují v každém okamžiku svazek kuželoseček, jež oskulují tutéž kružnici I v bodě *t*, a jejichž čtvrtý základní bod jest průsečík rovnoběžky vedené bodem *t* s toutéž kružnicí. A t. d.

Naopak:

Mají-li středy křivosti *s* ellips opsaných body *p* naplňovati libovolnou přímku, naplňují opisující body *p* kuželosečku, jež oskuluje hybnou kružnici v okamžitém středu otáčení *t* a prochází průsečíkem rovnoběžky vedené bodem *t* s hybnou kružnicí.

Mají-li středy křivosti *s* ellips opsaných body *p* naplňovati v libovolném okamžiku průměry ellipsy (neb základní kružnice), naplňují body *p* kuželosečky, jež oskulují v okamžitém středu otáčení hybnou kružnici a procházejí středem této kružnice. A t. d.

Body kružnice, jež se dotýká v okamžitém středu otáčení základní kružnice, opisují okamžitě ellipsy, jejichž středy křivosti naplňují taktéž takové kružnice; zvláště přísluší kružnici opsané na ot jakožto průměru kružnice opsaná na Ot jakožto průměru.

5. Cykloidálný pohyb.

V rovnici (1′) jest položiti $R = \infty$, z čehož následuje

$$\varrho = -\frac{r}{2}.$$

Při cykloidálném pohybu obnáší poloměr Bressových kružnic polovinu poloměru hybné kružnice; kružnice I se dotýká vně, kružnice J uvnitř hybné kružnice.

Geometrické místo všech bodů, které opisují zkrácené cykloidy, jež mají právě v těchto bodech inflexní body, jest v každém okamžiku kružnice, jež se dotýká v okamžitém středu otáčení hybné kružnice a prochází jejím středem.

Středy křivosti s všech cykloid opsaných v libovolném okamžiku body p průměrů hybné kružnice tvoří svazek kuželoseček, jež oskulují v okamžitém středu otáčení t onu kružnici, jež se dotýká v t vně hybné kružnice, a jejíž poloměr se rovná polovině poloměru hybné kružnice, při čemž jest čtvrtý základní bod svazku v nekonečnu na průměru, jenž prochází bodem t. Tyto kuželosečky jsou vesměs hyperboly, vyjma onu parabolu, jež odpovídá průměru rovnoběžnému k tečně T v okamžitém středu otáčení t.

Středy křivosti s všech cykloid opsaných v libovolném okamžiku body p osnovy přímek kolmých k tečně T tvoří svazek kuželoseček, jež oskulují v t touže kružnici I, při čemž jest čtvrtý základní bod průsečík kružnice I s rovnoběžkou bodem t. Přímkám, jež protínají kružnici J, odpovídají hyperboly, tečnám paraboly a nesečnám ellipsy.

Středy křivosti s cykloid opsaných v libovolném okamžiku body p osnovy přímek nakloněných k základní přímce T, naplňují svazek kuželoseček, jež oskulují kružnici I v bodě t a procházejí průsečíkem rovnoběžky vedené bodem t s kružnicí I; kuželosečky ty jsou hyperbola, parabola neb ellipsa, dle toho, jsou-li dané přímky sečna, tečna neb nesečna kružnice J.

Středy křivosti s cykloid opsaných v libovolném okamžiku body p osnovy přímek rovnoběžných k základní přímce T tvoří svazek kuželoseček, jež mají svůj vrchol v okamžitém středu otáčení t, v němž nadoskulují kružnici I, a jsou zase hyperbola, parabola neb ellipsa, dle toho, jsou-li dané přímky sečna, tečna neb nesečna kružnice J.

Naopak:

Mají-li středy křivosti *s* cykloid opsaných body *p* naplňovati danou přímku, naplňují body *p* v každém okamžiku kuželosečku, jež oskuluje v bodě *t* kružnici J a prochází průsečíkem rovnoběžky, vedené bodem *t* k dané přímce, s kružnicí J.

Osnově přímek kolmých k základné přímce T jakožto místu bodů *s*, odpovídá svazek kuželoseček jakožto místo bodů *p*, jež oskulují v bodě *t* kružnici J a procházejí všechny diametrálným bodem k bodu *t* na kružnici J.

Přímkám rovnoběžným k základní přímce T jakožto místu bodů *s* odpovídá svazek kuželoseček jakožto místo bodů *p*, jež nadoskulují kružnici J v bodě *t*.

Kuželosečky ty jsou hyperboly, paraboly neb ellipsy, dle toho, jsou-li ony přímky sečny, tečny neb nesečny kružnice I.

Středy křivosti *s* cykloid opsaných v libovolném okamžiku body *p* hybné kružnice naplňují shodnou kružnici, jež se dotýká vně hybné kružnice v okamžitém středu otáčení. Středy křivosti *s* cykloid opsaných v libovolném okamžiku body *p* kružnice, jež se dotýká v *t* přímky T, naplňují zase kružnici, jež se dotýká T v bodě *t*, a jejíž průměr obdržíme známou harmonickou konstrukcí.

XVIII.

Předcházejících výsledků můžeme použiti ku strojení kuželoseček, křivek třetího, čtvrtého a vyššího řádu, jež oskulují neb nadoskulují v daném bodě danou kružnici.

1. Úloha. *Jest sestrojiti kuželosečku K, jež nadoskuluje danou kružnici I v bodě t a prochází daným bodem s.*

Bod *t* jest patrně vrcholem kuželosečky.

Prodlužme *ts* o délku této úsečky do *m* a sestrojme k bodům *t*, *m* a k průsečíku *i* přímky *tm* s kružnicí I čtvrtý harmonický bod *p* (sdružený s *i*). Bodem *p* veďme rovnoběžku P ku tečně T v bodě *t* kružnice I.

Označíme-li *a* průsečík přímky P s průměrem kružnice I procházejícím bodem *t* a sestrojíme-li k bodu *a* a k průsečíkům tohoto průměru s kružnicí I čtvrtý harmonický bod b sdružený s t, jest půlící bod u úsečky tb druhý vrchol hledané kuželosečky. Druhou její osu obdržíme snadně ze známé relace mezi poloměrem oskulační kružnice ve vrcholu kuželosečky a oběma poloosami. Můžeme však též sestrojiti libovolné body této kuželosečky, vedeme-li bodem t libovolnou příčku, jež protíná P v bodě r a kružnici I v bodě j; sestrojíme-li dále k bodům r, t, j čtvrtý harmonický bod n sdružený s t a rozpůlíme-li úsečku tn v bodě x, náleží tento bod hledané kuželosečce. Tato jest hyperbola, parabola neb ellipsa, dle toho, je-li přímka P sečna, tečna neb nesečna kružnice J shodné s I, jež se dotýká v bodě t vně kružnice I.

Zvláštní případy této úlohy nastanou, je-li bod s v nekonečnu na libovolné příčce bodem t aneb zvláště na průměru kružnice I, jenž prochází bodem t.

2. Úloha. *Jest sestrojiti hyperbolu, jež jest určena oskulační kružnicí ve vrcholu a směrem asymptoty.*

Vrcholem t vedeme rovnoběžku ke směru asymptoty, jež protíná kružnici I v bodě i; tetivu ti přeneseme z t na opačnou stranu do p a vedeme tímto bodem p rovnoběžku P k vrcholové tečně T. Vedeme-li dále libovolnou příčku bodem t, jež protíná přímku P a kružnici I v bodech r a j, a sestrojíme-li k bodům r, t, j čtvrtý harmonický bod n sdružený s t, a rozpůlíme-li konečně úsečku tn v bodě x, náleží tento bod hledané hyperbole. Provedeme-li tuto konstrukci zvláště pro průměr kružnice I, obdržíme druhý vrchol hyperboly; ze známé relace mezi poloměrem křivosti ve vrcholu a oběma poloosami můžeme vyhledati druhou poloosu.

3. Úloha. *Jest sestrojiti parabolu, jež jest určena oskulační kružnicí ve vrcholu.*

Přeneseme průměr kružnice I z bodu t na opačnou stranu do bodu p a vedeme tímto bodem rovnoběžku k vrcholové tečně T. Vedeme-li dále libovolnou příčku vrcholem t, jež protíná P a I v bodech r a j, a sestrojíme-li k bodům r, t, j čtvrtý harmonický bod n sdružený s t a rozpůlíme-li konečně úsečku tn, náleží půlící bod x hledané parabole.

Poznámka. Je-li dána oskulační kružnice ve vrcholu paraboly, jest tím též udáno ohnisko, a možno tedy ihned užiti základných konstrukcí; výše uvedená konstrukce má tedy jen význam, že udává zvláštní vlastnost paraboly.

4. Úloha. *Jest sestrojiti kuželosečku, jež oskuluje danou kružnici I v bodě t, je-li dán průsečík s hledané kuželosečky s oskulační kružnicí, jakož i další bod a této kuželosečky.*

Prodlužme přímku *ta* o její délku do bodu *m* a sestrojme, značí-li *i* její průsečík s kružnicí I, k bodům *t*, *i*, *m* čtvrtý harmonický bod *n* sdružený s *i*. Veďme dále bodem *n* rovnoběžku P ku přímce *st* a libovolným bodem *p* této přímky P transversálu *pt*, jež protíná I v bodě *j*; sestrojíme-li k bodům *p*, *t*, *j* čtvrtý harmonický bod *r* sdružený s *t* a rozpůlíme-li úsečku *tr* v bodě *x*, náleží tento bod hledané kuželosečce. Tato jest hyperbola, parabola neb ellipsa, dle toho, je-li P sečna, tečna neb nesečna kružnice J shodné s I, a jež se dotýká v *t* vně kružnice I. Osy této kuželosečky jsou rovnoběžné ku přímkám, jež půlí úhly tečny T a přímky P.

5. Úloha. *Jest sestrojiti hyperbolu, jež oskuluje danou kružnici I v bodě t, je-li dán její průsečík s s oskulační kružnicí a směr asymptoty.*

Bodem *t* vedeme k asymptotě rovnoběžku, jež protíná I v bodě *i*; přeneseme tetivu *ti* z bodu *t* na opačnou stranu do bodu *p* a vedeme bodem *p* rovnoběžku P ku přímce *ts*. Přímky P pak užijeme jako v předcházejících případech.

6. Úloha. *Jest sestrojiti kuželosečku, jež oskuluje danou kružnici I v bodě t, jsou-li dány další dva body a, b, této kuželosečky.*

Prodloužíme přímku *ta* o její délku do *m* a sestrojíme, značí-li *i* její průsečík s kružnicí I, k bodům *t*, *m*, *i* čtvrtý harmonický bod *c* sdružený s *i*. Opakujeme tutéž konstrukci pro bod *b*, čímž obdržíme bod *d*. Přímky $cd = P$ užijeme jako v předcházejících případech.

Jako zvláštní případ předcházející úlohy obdržíme:

7. Úloha. *Jest sestrojiti hyperbolu, jež má oskulovati kružnici I v bodě t, jsou-li dány směry asymptot.*

Bodem *t* vedeme rovnoběžky ku směrům asymptot, jež protínají kružnici I v bodech *i* a *j*; přeneseme tetivy *ti* a *tj* z *t* na opačnou stranu, čímž obdržíme přímku P, které užijeme jako v předcházejících případech.

8. Úloha. *Jest sestrojiti kuželosečku, jež oskuluje danou kružnici I v bodě t, je-li dán další její bod a a směr osy.*

Pro bod *a* provedeme konstrukci jako v dřívějších případech, čímž obdržíme bod *p* přímky P; přímka P sama svírá s tečnou T dvojnásobný úhel jako osa kuželosečky. Přímky P pak užijeme známým způsobem. Úloha jest patrně dvojznačná. Též zde obdržíme zjednodušení, předpokládáme-li *a* buď na I neb v nekonečnu.

9. Úloha. *Jest sestrojiti křivku třetího řádu C^3, je-li dána oskulační kružnice I ve dvojném bodě t, jakož i čtyři další body a, b, c, d.*

Pro body *a*, *b*, *c*, *d* provedeme touže konstrukci jako v předcházejících případech, čímž obdržíme body *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, které určují s bodem *t* kuželosečku C^2, která bude obecně protínati tečnu T v bodě *t*.

Provedeme-li pro body této kuželosečky inversní konstrukci, obdržíme body hledané křivky C^3, jež jest obecnou křivkou třetího řádu, jak bylo výše ukázáno.

Je patrno, že můžeme tuto úlohu různými způsoby specialisovati, volíme-li některé z bodů *a*, *b*, *c*, *d* v nekonečnu (nejvýše tři) aneb též na kružnici I (nejvýše dva). Na př.:

10. Úloha. *Jest sestrojiti křivku třetího řádu C^3, je-li dána oskulační kružnice I ve dvojném bodě t a směry všech tří asymptot, jakož i druhá tečna τ v bodě t.*

Bodem *t* vedeme rovnoběžky k směrům asymptot a vyhledáme jejich průsečíky s kružnicí J. Tyto tři průsečíky určují s bodem *t* a tečnou *τ* kuželosečku C^2, které užijeme jako v předcházejícím případě.

11. Úloha. *Jest sestrojiti křivku čtvrtého řádu C^4, jež oskuluje ve dvojném bodě t kružnici I dvojnásobně, jsou-li dány další její body a, b, c, d, e.*

Pro body *a*, *b*, *c*, *d*, *e* provedeme touže konstrukci jako v předcházejících případech, čímž obdržíme body *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, *e'*, jimiž jest určena kuželosečka C^2, jež neprochází bodem *t*, a jež musí protínati v reálných bodech tečnu T kružnice I, má-li býti úloha možná.

Pro libovolné body kuželosečky C^2 provedeme inversní konstrukci, čímž obdržíme body, jež náležejí hledané C^4; tato jest obecná křivka čtvrtého řádu, jak bylo výše odůvodněno.

Jest patrno, že můžeme tuto úlohu různými způsoby specialisovati, zvolíme-li některé z bodů *a, b, c, d, e* buď v nekonečnu (nejvýše čtyři), neb též na kružnici I (nejvýše dva). Na př.:

12. Úloha. *Jest sestrojiti křivku čtvrtého řádu C^4, jež oskuluje ve dvojném bodě t kružnici I dvojnásobně, jsou-li dány směry všech čtyř asymptot a tečna τ v bodě t.*

Vedeme bodem *t* rovnoběžky ke směrům asymptot a vyhledáme jejich průsečíky s kružnicí J; tyto určují s tečnou τ kuželosečku C^2, které užijeme jako v předcházejících případech.

Splynou-li dva z daných bodů v předcházejících úlohách s pomyslnými kruhovými body v nekonečnu, obdržíme jakožto pomocnou křivku místo libovolné kuželosečky kružnici; máme tedy speciálné úlohy:

13. Úloha. *Jest konstruovati křivku třetího řádu, jež oskuluje ve dvojném bodě t kružnici I a prochází pomyslnými kruhovými body v nekonečnu, jakož i dalšími dvěma body.*

14. Úloha. *Jest konstruovati křivku čtvrtého řádu, jež oskuluje v bodě t kružnici I dvakrát a prochází pomyslnými kruhovými body v nekonečnu, jakož i dalšími třemi body.*

XIX.

V předcházejícím jsme měli na zřeteli jen křivky *algebraické*; přihlédněme nyní též ku případu, že by křivka (*p*) byla *transcendentní*, na př. *sinusoida*, jejíž body obratu jsou na tečně T, a jež jest dále v poloze souměrné ku přímce *o*O.

Přímky τ_1, τ_2, jež se dotýkají všech vrcholů sinusoidy, transformují se jako kuželosečky K_1, K_2, jež nadoskulují v *t* kružnici I, a jejichž druhé vrcholy obdržíme snadno pomocí často užité harmonické konstrukce.

Kuželosečky ty jsou ellipsy, paraboly neb hyperboly, dle toho, jsou-li tečny τ_1, τ_2 nesečny, tečny neb sečny kružnice J.

Spojíme-li vrcholy sinusoidy s bodem *t*, jsou průsečíky těchto přímek s kuželosečkami K_1, K_2 ony body, ve kterých se transformovaná sinusoida dotýká těchto kuželoseček.

Vedeme-li dále bodem *t* tečny k sinusoidě a určíme k bodům dotyku korrespondující body pomocí harmonické konstrukce, obdržíme další body s tečnami transformované sinusoidy.

Poněvadž protíná sinusoida tečnu T v nekonečně mnohých reálných bodech, oskuluje transformovaná sinusoida kružnici I v bodě *t* nekonečněkráte.

XX.

Zajímavou jest též otázka, vyskytují-li se v rovině body *involutorné*, t. j. body, jimž přísluší tytéž body; považujeme-li je za body soustavy (p) neb za body soustavy (s).

Budiž p_1 libovolný bod a s_1 jeho příslušný střed křivosti na normále $p_1 t$. Bod p_2, jenž splývá s bodem s_1, má svůj střed křivosti na téže normále, jenž bude obecně od p_1 různým. Z harmonických konstrukcí následuje, že řady bodů $p_1 \ldots$ a $s_2 \ldots$ jsou projektivné; dvojné body těchto řad jsou tedy hledanými body. Družiny této projektivity vyhledáme následujícím způsobem:

Bodu *j* na kružnici J přísluší střed křivosti v nekonečnu, a tomuto bodu jakožto bodu soustavy (p) přísluší střed křivosti *i*.

Bodu *p* v nekonečnu přísluší střed *i*, a tomuto jakožto bodu soustavy (p) přísluší půlící bod tetivy *ti*. Okamžitý střed otáčení *t* přísluší stále sám sobě, a jest tedy jeden dvojný bod uvedených průmětných řad, jež jsou určeny družinami: j, i; ∞, x; t, t; pak ale následuje, že druhý dvojný bod těchto řad splyne též s bodem *t*.

Tím jest podán důkaz, že *mimo t není žádných reálných dvojných bodů, jež by tvořily kvadratickou involuci.*

Podobné jest řešení obecnější úlohy:

Bodu p_1 přísluší střed s_1, bodu $s_1 \equiv p_2$ přísluší střed s_2; bodu $s_2 \equiv p_3$ přísluší střed s_3; která jest podmínka, aby bod s_3 splynul s p_1, a obecně, aby bod s_n splynul s p_1?

Tím obdržíme řadu úloh, jež *Steiner* nazval *úlohy o závěrech* (Schliessungsprobleme).

Splyne-li s_n s p_1, obdržíme skupinu n bodů, jež si příslušÍ involutorně; závěr nastane, vyjdeme-li z kteréhokoliv z těchto bodů. Body $p_1 \ldots$ a $s_n \ldots$ tvoří projektivné řady, jejichž dvojné body jsou hledaná řešení. Geometrické místo hledaných bodů bude tedy křivka, jež protíná každou bodem t vedenou přímku v $2n$ bodech, při čemž t jest považovati za n násobný bod; k místu tomu náleží též patrně tečna T v okamžitém středu otáčení t.

Má-li specielně s_3 splynouti s p_1, přísluší bodu p v nekonečnu střed i a tomuto jakožto střed křivosti půlící bod x tetivy ti, a tomuto jakožto střed bod v nekonečnu; nastal tedy závěr. Druhý závěr tvoří zase bod t.

Místo všech bodů, jež tvoří kubickou involuci, se skládá z přímky v nekonečnu a tečny T, dále z kružnice I a z kružnice, jež prochází středem kružnice I a dotýká se tečny T v bodě t.

Z předcházejících příkladů jest patrno, že dvojné body vyskytujících se projektivných řad jsou vždy reálné, poněvadž jeden z nich jest okamžitý střed otáčení t; nastanou tedy reálné závěry pro libovolné číslo n.

Poněvadž druhý dvojný bod na libovolné normále jest určen jedině jako funkce tetivy na kružnici I neb J, bude na všech normálách poměr vzdálenosti dvojných bodů k tetivě tentýž. Jest to patrno z toho, že provádíme touže konstrukci v různých měřítkách; poměr výsledků k voleným jedničkám musí tedy býti stálý. Druhý dvojný bod bude tedy naplňovati kružnici, jež se dotýká Bressových kružnic v bodě t; z toho následuje dále, že i ostatní body vyšších involuc naplňují taktéž takové kružnice.

Máme tedy obecný výsledek:

Geometrické místo všech bodů, jež tvoří závěry libovolného stupně, sestává z kružnic, jež se dotýkají Bressových kružnic v okamžitém středu otáčení; jedna z nich se rozpadá ve přímku v nekonečnu a tečnu T.

Věstník literární.

Hydrodynamika. Sepsal Dr. *Frant. Koláček.* Sborníku Jednoty českých mathematiků čís. II. V Praze, 1899, 288 stran. Nákladem Jednoty českých mathematiků. Krámská cena 3 zl. 80 kr., pro členy 2 zl. 85 kr.

Napsati dobrou hydrodynamiku není věru úkolem snadným, neboť v hydrodynamice vyskytují se obtíže mathematické ve větší míře než v kterékoli jiné části theoretické fysiky, a jest také proto dosud hydrodynamika poměrně nejméně propracována a ucelena. Uvážíme-li mimo to ještě, že dosud v české literatuře o hydrodynamice napsáno nemáme pranic, pak teprve pochopíme pravý význam knihy té pro literaturu naši.

Bohatý obsah Koláčkovy *Hydrodynamiky* roztříděn jest v 10 kapitol; z nich prvá věnována jest všeobecným úvodním úvahám o tlacích v tekutinách. V kap. II. odvozeny jsou základní pohybové rovnice Lagrangeovy i Eulerovy, a rozborem těchto jsou roztříděny veškeré pohyby tekutin dokonalých na pohyby víření prosté a vířivé; objasněn jest tu význam potenciálu rychlostí jak obecně, tak i na jednodušších příkladech. Vlastnosti potenciálu rychlostí vyšetřovány jsou v kap. III., a podána tu podstata pohybů cyklických v prostorech mnohonásobně souvislých a spolu poukázáno k zajímavým analogiím elektromagnetickým. V kap. IV. řešeny jsou některé problémy tělesa tuhého v tekutině nekonečné. V kap. V. odvozeny jsou direktními úvahami Lagrangeovy všeobecné rovnice pro pohyb tuhých těles v tekutině v přítomnosti cyklosy, podán fysikalní význam veličin v nich se vyskytujících a řešeny některé pohybové problémy pro jediné těleso v nekonečné tekutině. V kap. VI. řešeny jsou některé problémy pomocí sférických úkonů, jichž stručná theorie tu též podána; tak zejmena oscillace mořského povrchu, oscillace padajících kapek vodních, a pak odvozena též velice zajímavá zdánlivá akce in distans dvou koulí radialně neb translatorně oscillujících. Kap. VII. věnována jest rovinným pohybům tekutiny, jež tvoří pěknou illustraci k nauce o funkcích soujemných. Podán tu princip Schwartzovy methody zobrazovací a na jejím základě odvozeno rozpojité rozdělení rychlostí pro případ paprsků vodních, jež jest tím důležito, že odtud odvozené vzorce pro odpor tekutiny proti pohybům tuhých těles jedině skutečnosti odpovídají; tím jest tudíž odstraněn nesouhlas mezi skutečností a výsledky theorie odvozenými za předpokladu spojitého rozdělení rychlostí.

Hlavní problémy o pohybech vířivých podány jsou v kap. VIII., a úvahy theoretické objasněny tu na četných případech specialních, z nichž nejzajímavějším jest vzájemné působení vláken vírových, jež možno poměrně snadno experimentelně potvrditi. V kap. IX. studovány vlny vodní a to jak v jednom tak i ve dvou rozměrech prostorových, a konečně kap. X. věnována jest vlivu viskosity na pohyby tekutin; odvozeny tu příslušné vztahy energetické a probrány zejmena ony případy, jež možno poměrně snadno realisovati a tak konstantu vniterného tření měřiti.

Na četných místech připojeny jsou též poznámky historické a literární, jimiž má býti jednak podána genese hlavních pouček hydrodynamických, jednak má býti poukázáno na experimentální práce potvrzující vývody theoretické.

Jak z uvedeného obsahu patrno, jest v Koláčkově Hydrodynamice podán v celku souhrn všech případů, jež theoreticky řešeny byly. Veškeré problémy jsou tu podány ve vlastním spracování autorově a dosti jest též problémů částečně neb úplně nových. Tak jest mimo jiné novým přímé fysikalní odvození všeobecných rovnic Lagrangeových pro pohyb těles tuhých v tekutině u přítomnosti cyklosy (v kap. V.), podobně též oscillace zakřiveného povrchu vodního vlivem kapillarity (v kap. VI.) a theorie vlnění ve dvou rozměrech prostorových (v kap. IX.).

Autor snaží se býti všude jasným, stručným a názorným, ale přes to jsou mnohé oddíly pro studium značně obtížny z důvodů, jež na počátku recense této jsou uvedeny. Ovšem většině čtenářstva dostačí také pro přehlednou znalost hydrodynamiky pouze studium kapitol I.—IV. a pak VIII. a X.

Názornosti napomáhá prof. Koláček tím, že všude k úvahám obecným připojuje hojnost specialních problémů hydrodynamických, jež svědomitého čtenáře jistě budou nabádati k dalšímu samostatnému přemýšlení. Rovněž upozorňuje autor veskrze na analogie elektromagnetické, jak totiž ve mnohých případech hydrodynamických rychlosti rozděleny jsou dle těchže zákonů jako síly magnetické ve známých problémech elektromagnetických. Tak objasněny jsou zejmena pohyby cyklické (v kap. III.), vzájemné působení dvou koulí translatorně oscillujících (v kap. VI.) a pak pohyby vířivé (v kap. VIII.).

Aby pak zmírnil autor obtíže mathematické, nepředpokládá nikde znalost specialnějších partií mathematických, nýbrž sám je stručně odvozuje, což jest zvláště v našich skrovných literárních poměrech s výhodou, kde není možno čtenáře odkázati na příslušné spisy odborné. Tak podána jest mimo jiné v základech nauka o funkcích sférických (v kap. VI.), problém zobrazovací pomocí funkcí komplexních (v kap. VII.) a pak potřebné poučky o integrálech Fourierových, Fresnelových a Besselových (v kap. IX.).

Jak autor v úvodu uvádí, vlivem vnějších okolností spis jeho musil dříve vyjíti než sám si přál. Tím dlužno vysvětliti, že stylisace není veskrze bezvadná.

Po formální stránce jest kniha tato Jednotou českých mathematiků vypravena velmi pěkně; jen nezamlouvá se pisateli tohoto posudku, že obrazce položeny jsou až na konec knihy a tu soustavně neuspořádány.

Jak patrno z rozboru tohoto, Koláčkovou Hydrodynamikou získali jsme velmi cenný příspěvek pro mathematicko-fysikalní literaturu, jenž by byl ozdobou i každé světové literatury; zasluhuje si proto plným právem, aby byl studován s týmž porozuměním a zájmem, s jakým byl psán. Jako důsledek pronáším jedno přání k výboru Jednoty českých mathematiků. Jak mi známo, má prof. Koláček svoje universitní přednášky o theoretické fysice takřka k tisku připraveny. Nebylo by proto možno jako některý další svazek Sborníku vydati další některou část přednášek prof. Koláčka, buď snad mechaniku jakožto základ theoretické fysiky, či optiku, o níž dosud nemáme žádného vědeckého spisu ve své literatuře, či kterýkoliv jiný díl theoretické fysiky? Byl by to čin velice záslužný, a v dohledné době mohli bychom se pak dočkati celé theoretické fysiky, jejíž potřeba pro nás den ode dne vzrůstá.

Dr. *Frant. Nachtikal.*

Úvod do nauky o determinantech. Sepsal Dr. *F. J. Studnička.* V Praze, 1899. Nákladem Jednoty českých mathematiků. (230 str.)

Kniha tato, tvořící III. číslo Sborníku Jednoty českých mathematiků, jejíž sepsání svěřeno rukoum nejpovolanějším, jest určena v první řadě studujícím, jimž podává podstatné části obecné nauky o determinantech, úvahy o zvlášť zajímavých determinantech speciálných, a applikace jak na úkoly algebraické tak geometrické.

Pan spisovatel, jenž první s důrazem poukázal na Cauchy-ho jakožto formálního zakladatele nauky o determinantech (Augustin Cauchy als formaler Begründer der Determinanten Theorie, v Praze, 1876), přihlíží jak v úvodu svého spisu, tak i na mnohých jiných místech bedlivě k historické stránce předmětu, čímž čtenáře důkladně seznamuje s příslušnou literaturou učební. Bohatost materialu, zahrnujícího mnohé vlastní výzkumy, hlavně evaluační, páně auktorovy, směstnaného na poměrně nevelkém počtu stran, jakož i jasnost výkladů, zvýšená četnými příklady, zároveň s vytknutými již hojnými poukazy literarně-historickými činí z knihy té vzácnou rukověť pro každého, kdo se hodlá seznámiti s naukou, dnes již nepostrádatelnou při studiu moderních spisů mathematických. O hojnosti materialu v knize umístěném lze se přesvědčiti z obsahu, jejž tuto klademe:

Předmluva, Úvod: O historickém původu pojmu determinantního. Část I. O determinantech všeobecných: § 1. O vyznačení determinantů, § 2. O rozkladu determinantů, § 3. O vlastnostech determinantů, § 4. O násobení determinantů, § 5. O přidružených determinantech. Část II. O determinantech zvláštních: § 6. O determinantech mocninných a sestavných, § 7. O determinantech kyklických čili kružných, § 8. O determinantech souměrných a protiměrných, § 9. O determinantech soujemných vůbec a protidružných zvlášť, § 10. O determinantech derivačních. Část III. O upotřebení determinantů: § 11. O řešení lineárních rovnic a lineární substituci, § 12. O eliminaci pomocí determinantův, § 13. O upotřebení determinantů v theorii a praksi rovnic algebraických, § 14. O upotřebení determinantů v analytické geometrii. Dodatek: O determinantech nekonečných a krychlových.

Weyr.

Arithmetika pro III. třídu škol realných. *Sepsal František Tůma,* c. k. školní rada. Cena 1 *K*, váz. 1 *K* 50 *h*. V Praze, 1900. Nakladatel *I. L. Kobr*, knihkupectví. Vážený pan autor dokončil tímto třetím dílem vydání své Arithmetiky pro školy realné, zpracované dle vydání pro gymnasia. Poukazujíce ku zprávě, kterou přinesl Časopis v roč. 28. na str. 46. a 355. o obou prvých dílech této učebnice, v níž přednosti této práce po stránce methodické oceněny byly, rádi konstatujeme, že i třetí díl jest velmi pečlivě vypraven. Nehledaná prostota u výkladu, jakož i z dlouholeté prakse učitelské vybraný nejjednodušší a spolu nejjasnější postup, kterým se uvádějí počátky počítání čísly obecnými, zasluhují neomezeného uznání a ocenění. S klidem zkušeného paedagoga postupuje p. spisovatel od jednoduchého k složitějšímu, od pojmů známých k neznámým, provázeje theorii příklady a úlohami. Látka co do rozsahu náležitě jest vymezena, za to však velkým množstvím vhodně volených a spořádaných příkladů všestranně jest propracována. Výklad základních výkonů s čísly obecnými založen jest na počítání s čísly zvláštními, k nimž naopak od čísel obecných stále a stále se vrací. Přes míru složených výrazů algebraických tu nenalézáme. Druhá a třetí část knihy věnována jest výkladu, jak se zdvojmocňuje a ztrojmocňuje, a jak se odmocňuje dvěma a třemi. V části čtvrté zahrnuty jsou některé počty k cvičení v počítání s čísly zvláštními, počet spolkový, průměrový, směšovací a vypočítávání zúročené jistiny z úrokového počtu složeného. Část tato zakončena jest 140 „úlohami z praktického života“ a 42 úlohami k řešení z paměti, které poskytují hojný výběr k procvičení učiva na prvém stupni probraného. Soudíme-li dle obliby, které se těší Tůmova Arithmetika pro gymnasia, lze očekávati, že také vydání pro reálky dojde hojného užívání, jak toho plnou měrou zasluhuje. Škoda, že nízká cena 1 *K* za exemplář nevázaný doznala vazbou nepoměrného zvýšení o 50 *h*, čehož tím více jest litovati, poněvadž obdržeti lze knihu toliko vázanou.

Prof. *J. Pour.*

Leçons sur la Théorie analytique des Equations différentielles professées à Stockholm (septembre, octobre, novembre 1895) sur l'invitation de S. M. le roi de Suède et de Norwège par M. *P. Painlevé*, professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Paris, professeur suppléant au Collège de France. Paris, Librairie scientifique A. Hermann, 1897. (Cena 20 franků).

Tyto výklady, zaujímající 550 kvartových lithografovaných stran, podávají novější výsledky, jichž se mathematikové dodělali v analytické theorii rovnic differenciálných. Přestávám na vřelém doporučení znamenitého díla vynikajícího auktora, jehož vlastní práce nemálo přispěly k vybudování moderní theorie rovnic differenciálných.

Weyr.

Hlídka programů.

A. za školní rok 1898—99.

Jevíčko, zemská reálka. *Krágl Josef*: Všeobecný návod ku kreslení, dle kterého jest studovati a zobrazovati předmět.

Náchod, obecní reálka. *Procházka Bedřich*: Příspěvek ku plochám rozvinutelným.

Plzeň, státní reálka. *Chloupek Jan*, dr.: Fresnelův zrcadlový pokus. (Dokončení.)

Praha, státní reálka na Malé Straně. *Pithardt Josef*: Jaké místo zaujímá deskriptiva v mathematice?

Prostějov, zemská reálka. *Navrátil Bartoloměj*: O jednoduchém zařízení rozváděcího rheostatu pro konstantní vysoké napjetí. *Bažant Jan*: Theorie elliptického paraboloidu.

Přerov, státní gymnasium. *Kupec Josef*: Obecné integrály lomených funkcí racionálných.

B. za školní rok 1899—1900.

Král. Vinohrady, státní gymnasium. *Nušl Fr.*: Určování času slunečními hodinami.

Přerov, státní gymnasium. *Janků Vladimír*, dr.: Ohyb povstávající působením kruhového otvoru a theorie čar Talbotových.

O zkoušení fotografického objektivu.

Napsal

Dr. **Vladimír Novák**,
docent české university v Praze.

(Dokončení.)

Pošinutím desky fotografické na místo I nastává neostrost obrázku úměrna při clonce C veličině A'A", zacloněním objektivu menší clonkou D, zúží se kužel paprsků, tak že neostrost jeví se pouze vzdáleností A' A"', tedy veličinou menší.

Podobně jest tomu při postavení desky matné do polohy II. Tato aberrace „v hloubce" není vadou objektivu jako předešlé vady sférická a chromatická, odstraniti ji znamená požadavek, kterému čočka apriori nemůže vyhověti. Proto také nemění se tato aberrace *různou soustavou objektivů*, záležejíc pouze na vzdálenosti předmětu fotografovaného, ohniskové dálce a velikosti clonky. Fotografujeme-li tedy týž předmět z určité vzdálenosti různými objektivy *téže* ohniskové vzdálenosti, bude při všech, stejně-li je zacloníme, obrázek do téže „hloubky" stejně ostrým.

Při fotografii interierů, kde obyčejně hloubka předmětu fotografovaného je značnou, lépe jest užiti objektivu s menší ohniskovou dálkou a silně jej zacloniti. Fotografujeme-li na proti tomu osobu nějakou nebo skupinu, kde na okolí nezáleží, a kde by spíše určitost okolí nepříznivě působila, s výhodou užijeme clonky větší. Obrázky takové, zvláště při některých druzích reprodukce (na papíru bromostříbrnatém nebo při platinotypii) mají pak ráz uměleckých maleb.

Následující tabulka ukazuje vzdálenost v metrech, ve které obdržíme fotografovaný předmět ostrý i v hloubce — ostrostí je tu míněno rozptýlení paprsků z bodu vycházejících na plošku 0·1*mm* v průměru — při užití objektivu určité ohniskové dálky (od 5 do 40 *cm*) a určitém jeho zaclonění (od *f*: 5 až k *f*: 50).

Dle toho nutno zacloniti objektiv ohniskové dálky 20 *cm* při fotografii interieru (v pokoji na př.), kde je k disposici 6—7 metrů, clonkou *f*/30, to jest otvor clonky má míti $^{20}/_{30}$*cm* čili asi 6 *mm* v průměru.

Clonka	Ohnisková dálka										
	5	7·5	10	12·5	15	17·5	20	25	30	35	40
f: 5	2·5	5·6	10·0	15·5	22·5	30·7	40·0	62·0	90·0	122·0	160·0
f: 10	1·3	2·8	5·0	8·0	11·0	15·0	20·0	31·0	45·0	61·0	80·0
f: 15	0·8	1·9	3·3	5·1	8·0	10·0	13·0	21·0	30·0	41·0	53·0
f: 20	0·7	1·4	2·5	4·0	5·5	7·5	10·0	15·0	22·0	31·0	40·0
f: 25	0·5	1·1	2·0	3·0	4·5	6·0	8·0	12·0	18·0	24·0	32·0
f: 30	0·4	0·9	1·6	2·5	4·0	5·0	6·5	10·0	15·0	20·0	26·0
f: 40	0·3	0·7	1·2	2·0	2·5	3·5	5·0	7·5	11·0	15·5	20·0
f: 50	0·2	0·6	1·0	1·5	2·5	3·0	4·0	6·0	9·0	12·0	16·0

III.

Vady objektivů, které jsme dosud popsali, jeví se na hlavní ose čočky. Vady tyto lze, jak z uvedeného patrno, tak zmenšiti, že se při fotografii rušivě neobjeví. Pro objektiv fotografický mnohem důležitější jsou vady, které se ukazují jako průvodci těch vlastností objektivu, které jej činí nejdůležitějším přístrojem fotografickým. Vlastnostmi, které jsou tu míněny, liší se objektiv fotografický od objektivu dalekohledu nebo mikroskopu velmi značně. Objektiv *astronomický* tak se upravuje, aby *malý* obrázek, který blízko *kolem osy* dalekohledu vzniká, byl co možná správný (tedy ostrý a věrný), tak aby velkého zvětšení byl schopen. Při tom ovšem rozhodují nejlépe viditelné paprsky, žluté a zelenožluté, pro které musí býti objektiv achromatisován. Fotografický objektiv má úkolem vytvořiti obrázek *velký*, kolem osy daleko rozložený, správný, to jest ostrý a věrný tak, aby mezi předmětem a obrazem byla dokonalá podoba. Při objektivu astronomickém vyloučeny jsou paprsky šikmo na objektiv dopadající, nikoliv tak při objektivu fotografickém.

Kdežto u dalekohledu dopadají na objektiv paprsky nejvýše několik *málo* stupňů s osou stroje svírající, dopadají na objektiv fotografický paprsky nejzazší, které *mnoho* stupňů s osou objektivu svírají. Objektiv astronomický odstraňuje proto vady na ose co možná úplně. K tomu -- jak z uvedeného patrno — postačí úplně sestaviti objektiv ze dvou čoček. Více se jich nesestavuje proto, poněvadž záleží při dalekohledu měrou velmi značnou na tom, aby osy obou čoček splývaly v jedinou. Požadavku tomuto lze snadněji vyhověti při čočkách dvou než při počtu větším.

Objektiv fotografický odstraniti má ještě celé množství vad, vznikajících šikmo dopadajícími paprsky, proto se skládá z většího počtu čoček.

Neméně důležitým rozdílem jest také okolnost, kterou se řídí různá úprava obou objektivů, která v tom záleží, že účinek světla fotografický na desku citlivou se delším trváním exposice sesiluje, kdežto účinek světla fysiologický objeví se jen tehdy, když dostoupí určité intensity. Malými apparaty fotografickými lze fotografovati nepatrná tělesa nebeská, kterých nelze spatřiti ani ohromnými dalekohledy.

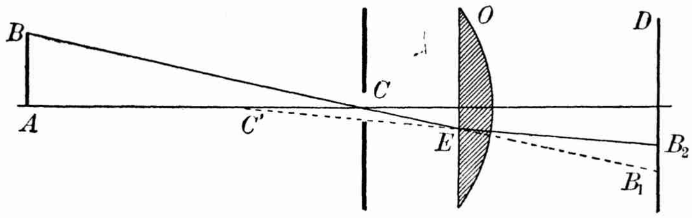
Vady objektivu fotografického vznikající šikmým dopadem jsou *skreslení předmětu*, *astigmatismus s komou* a *skřivení obrazu*.

Předmět AB (viz obr. 11.) má býti fotografován plankonvexním objektivem O.

Dopadají-li paprsky z AB na clonku C a teprve touto na objektiv O, uchýlí se paprsek BE lomem od svého směru BB_1 do směru EB_2, tak že v B_2 vznikne obrázek bodu B.

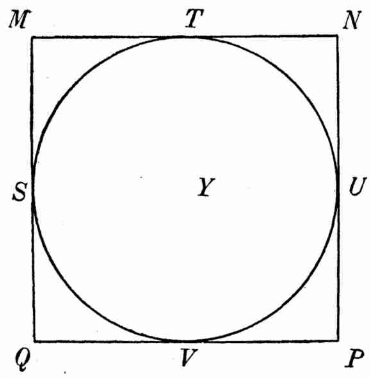
Obrázek je správným, je-li předmětu podoben, to jest, může-li býti obrázek sestrojen jako centralní průmět předmětu.

Obraz sestávající z bodů B_1 byl by podobný předmětu, vznikáť centralní projekcí předmětu středem C. Skutečný obraz B_2 vzniká jakoby projekcí z jiného centra C′. Toto centrum však



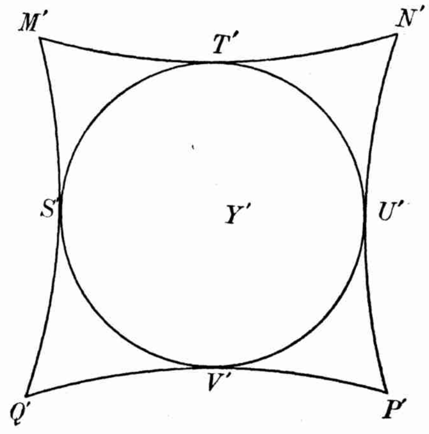
Obr. 11.

změní svou polohu, přibližuje-li se bod B k ose, tak že pro body předmětu k ose bližší leží onen bod C′ blíže ku A, obrázek příslušného bodu leží *poměrně* blíže k ose nežli obrázek bodu, který je na předmětu vzdálenější a jehož centrum projekce C′ padá blíže k C. Fotografujme tímto způsobem čtverec, do něhož jest vepsán kruh a to tak, aby rovina obrazce byla kolmou k ose objektivu, jakož aby jeho osa procházela středem obrazce. (Viz obr. 12.)



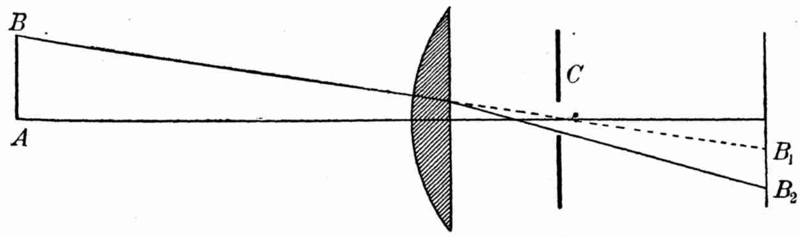
Obr. 12.

Body ležící na obvodu kruhu vepsaného (na př. S, T, U, V) jsou stejně daleko od osy objektivu, zobrazí se tedy zase na kruhu. Podobně stejně vzdálené body M, N, P, Q zobrazí se od osy stejně daleko. Tyto body jsou však na předmětu dále od osy Y než body na kruhu a proto se zobrazí poměrně dále než bližší body S, T, U, V, tak že obrázek fotografovaný ukáže skreslení naznačené na obr. 13.



Obr. 13.

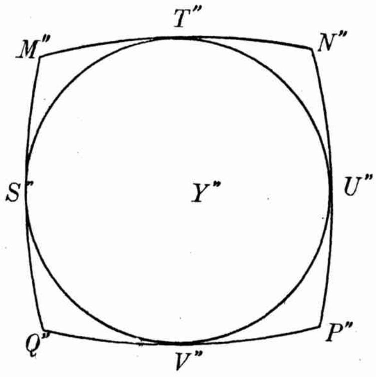
Skreslení opačného způsobu nastane, když proti předmětu obrátíme čočku povrchem konvexním a teprve za čočkou umístíme diafragma. (Viz obr. 14.) Obraz bodu B vzniká v B_2, *dále*



Obr. 14.

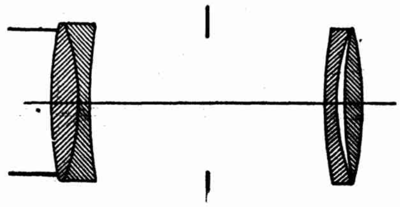
od osy nežli bod B_1 centralní projekcí sestrojený. Fotografie obrazce v obr. 12. naznačeného dává výsledek znázorněný obr. 15. Oboje skreslení je v obr. 13. a 15. schválně silně přehnáno.

Skreslení prvého případu nastává při krajinových objektivech jednoduchých, při nichž paprsky od předmětu vycházející dopadají diafragmatem na rovinnou část plankonvexní čočky.



Obr. 15.

Velikost skreslení záleží jednak na formě čočky, indexu lomu skla a na její tloušťce, jednak též na vzdálenosti clonky od čočky. Skreslení nejlépe odstraní se kompensací *positivního skreslení* s negativním, tedy sestrojením *symmetrického* objektivu, v jehož středu nalézá se clonka. Tak povstávají *symmetrické*



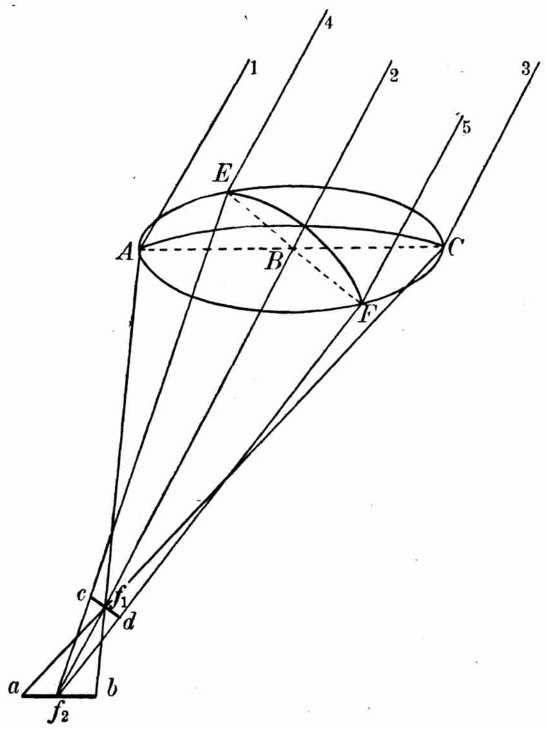
Obr. 16.

aplanaty. I nesymmetrickým spojením čoček lze skreslení úplně anebo téměř odstraniti, jak se zajímavě ukázalo na prvním dokonalejším objektivu portretním, který r. 1840 sestrojil *Josef Petzval* *).

*) *Josef Petzval* (*1807 v Uhrách, †1891 ve Vídni) byl professorem vyšší mathematiky na universitě vídeňské, později dvorním radou. K vý-

Portretní objektiv Petzvalův skládá se z achromatické čočky přední a ze dvou čoček flintové konvexkonkavní a korunové bikonvexní, které *nejsou slepeny*, nýbrž pouze okrajem k sobě přitisknuty, tak že mezi nimi zůstává prostor vzduchem vyplněný. Mezi oběma částmi objektivu nalezá se clonka. (Viz obr. 16.)

Skreslení netřeba zkoušeti u objektivů symmetrických. U objektivů jiných zkoušíme skreslení tímto jednoduchým způsobem.



Obr. 17.

U kraje matné desky nakreslíme tužkou jemnou přímku, rovnoběžnou s hranou desky. Jako předmětu užijeme černého rovného drátu, který závažím napneme do polohy svislé před

---

počtům dokonalého objektivu vybídnut byl vídeňským *A. Ettinghausenem*, jenž v osobním styku s *Daguerrem* a *Chevalierem* v Paříži fotografii poznal.

bílé pozadí. Apparat fotografický zařídíme tak, aby obrázek drátu splýval s přímkou naznačenou. Větší skreslení ukáže se tu přímo. Při důkladnějším zkoumání, chceme-li se přesvědčiti jak daleko od středu desky skreslení se ukazuje, napneme do téže roviny vertikalní několik drátů v rovných vzdálenostech a provedeme fotografii. Na negativu, díváme-li se naň proti světlu a to při značném sklonu, objeví se skreslení velmi dobře. Čáry, které pravítkem porovnávány jeví se býti přímkami, ukáží se tu jako mírné obloučky.

Nechť na čočku (viz obr. 17.) dopadají rovnoběžné paprsky 1, 2, 3, atd.). Některé z nich (1, 2, 3) leží v rovině, která prochází osou čočky a osou válcovitého svazku dopadajících paprsků. Takový svazek paprsků si zjednáme, propustíme-li paprsky na čočku clonkou kruhovou. Pokud by paprsky dopadaly rovnoběžně s osou objektivu, byla by kontura osvětlené části objektivu *kruhová*; při šikmém dopadu jest však *elliptická*. Paprsky 1, 2, 3 jdou hlavní osou této ellipsy, krajovými body hlavní osy a středem ellipsy. K těmto paprskům jest povrch čočky v obloučku AC *téže křivosti* jako při dopadu paprsků rovnoběžných s osou objektivu. Za to však paprsky 4, 5, které procházejí koncovými body vedlejší osy oné ellipsy, dopadají na čočku tak, že o jich lomu rozhoduje křivost obloučku EF.

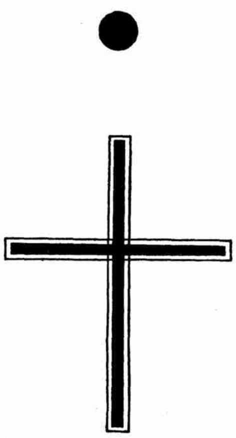
Jest patrno, že oblouček EF má větší křivost než oblouček AC. Následkem toho neprotnou se všecky paprsky (1 až 5) po lomu čočkou *v jednom bodě*, nýbrž vzniknou *ohniska dvě* f_1 a f_2. V f_1 protínají se paprsky 1, 2, 3, v f_2 paprsky 4 a 5.

Paprsky z určitého bodu vycházející nedávají tudíž obraz bodový, *stigmatický*, ale *astigmatický*. Tato vada objektivů fotografických sluje *astigmatismus*. Jak se astigmatismus ve skutečnosti objevuje, o tom poučuje obr. 17.

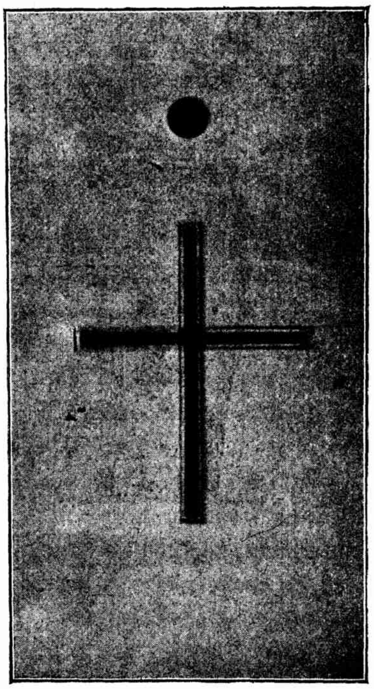
V f_1 protínají se paprsky 1, 2, 3 buďtež to na př. paprsky v rovině vodorovné, vycházející od vodorovné přímky.

Každý bod zobrazí se v této rovině ne jako bod ale jako ploška protáhlá ve směru $c\ d$ — který jest k rovině nákresné kolmým, tudíž v našem případě ve směru vertikalním. Pošineme-li matnou desku apparatu do roviny f_2, zobrazí se bod ploškou $a\ b$, vodorovnou. Nalezá-li se deska fotografická mezi ohnisky f_1 f_2 zobrazuje se bod ploškou křížové podoby.

K pozorování astigmatismu objektivu hodí se za objekt kříž na bílém papíře tuší nakreslený (viz obr. 18a), který postavíme tak, aby se zobrazoval docela na kraji matné desky. Zaostřujeme-li postavením desky matné do ohniska f_1, zobrazí



Obr. 18a.

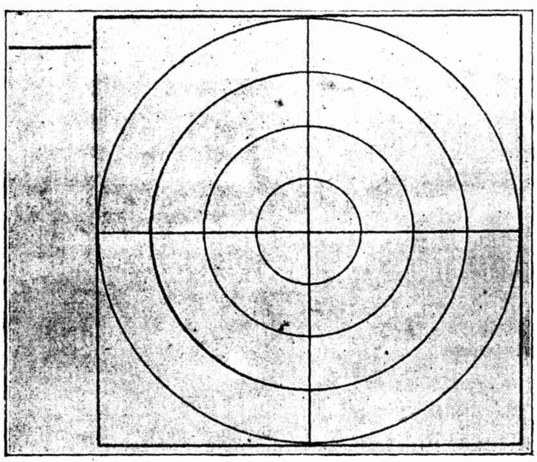


Obr. 18b.

se všechny body předmětu jako plošky protáhlé ve směru svislém, tak že na obrázku kříže bude rameno svislé ostře vystupovati, kdežto rameno horizontalní bude rozmyto.

Pošineme-li desku do druhého ohniska f_2, zobrazí se všechny body onoho kříže jako plošky horizontalní a objeví se na desce křížek, jehož vodorovné rameno svislé jest rozmazáno. Oba případy ukazuje velmi poučně horizontalní rameno kříže v obr. 18b dle fotografie reprodukovaného.

Astigmatismus souvisí s jinou vadou objektivů, která záleží v tom, že objektiv nekreslí obrázek předmětu *rovinného* v rovině, ale *v křivé ploše*. Zařizujme apparat na nějaký obrazec geometrický, kreslený na desce kartonu, kterou tak postavíme, aby rovina její byla kolmou k ose objektivu. Na obrazci, kterým může býti na př. čtverec s vepsaným kruhem (viz obr. 12.), nechť vyznačen jest střed, třeba černou tečkou. Zařídíme-li matnou desku na tuto tečku, ukáže se kontura čtverce neurčitou, zařídíme-li pošinutím matné desky k objektivu, aby strany čtverce byly ostrými, stane se střed neurčitým.



Obr. 19.

Velikost pošinutí matné desky měří největší úchylku křivé plochy, na níž se obrázek skutečně tvoří od roviny, na které jej zachycujeme. Toto skřivení obrázku můžeme také tak posouditi, že před onen rovinný předmět zapneme do stativku kousek kartonu, na němž jest ostře naznačena přímka.

Když jest pak apparat na střed obrazce zařízen, pošinujeme stativek s kouskem kartonu tak dlouho, až se ona přímka ostře na mdlé desce zobrazuje. Odlehlost přímky od roviny obrazce měří také — ovšem v jiné míře — velikost skřivení obrazu daným objektivem.

Obr. 19. ukazuje reprodukci fotografie rovinného obrazce (soustředné kruhy do čtverce vepsané) objektivem „rectigraf“ od f. Lancaster Birmingham a to při plném otvoru (f : 6) na desku 13 $\times$ 18 *cm*. Ohnisková dálka tohoto objektivu jest 22·5 *cm*. Obrázek byl fotografován ze vzdálenosti 67·5 *cm*. (od clonky objektivu) při tom se strany k předmětu s jeho rovinou rovnoběžně posunut kousek kartonu s vyznačenou přímkou. Karton posunován tak dlouho, až se objevil obrázek přímky na kraji desky ostrým. Pošinutí od roviny činilo 4 *cm*, v souhlase s tím bylo pošinutí matné desky, byla-li zařizována také na kraj předmětu. Toto pošinutí obnášelo 2 *cm* (obrázek měl poloviční velikost předmětu).

Abychom souvislost astigmatismu se skřivením obrazu lépe posoudili, představme si symmetrický aplanat, jehož obě polovice lze k sobě přibližovati, nebo navzájem vzdalovati. Vzdálenost obou částí objektivu budiž z počátku menší než při objektivu definitivně upraveném. V tom případě pozorujeme značné skřivení obrazu, ale mizící téměř astigmatismus. Zařídíme-li apparat, takovým objektivem opatřený, na předmět rovinný, jest na př. střed obrazu ostrý, kraje však rozmazány. Pošinutím matné desky lze zaostřiti na kraj obrázku, který se objevuje býti prostým všeho astigmatismu, za to jest však střed skřivením obrazu neostrým. Změníme-li vzájemné postavení obou polovin aplanatu, vzdálíme-li je poněkud od sebe, napraví se poněkud vada skřivení obrazu, skřivení bude menší, na krajích desky však vystoupí vada druhá, astigmatismus objektivu.

Objektiv lze tak upraviti, aby obraz pokud možno rovinný spadal svou polohou mezi obě ohniska f_1 f_2 paprsků šikmých. Když v tomto případě jest rozdíl obou ohniskových dálek f_2—f_1 *nejmenší*, a rovina obrazová symmetricky k oběma ohniskům položena, dosahuje se nejlepšího *„anastigmatu“*.

V posledním desetiletí nejen důmyslnými výpočty theoretickými ale též praktickým vynálezem *nových druhů* skla optického zdokonaleny anastigmaty měrou podivuhodnou.

Starší druhy skla jest možno seřaditi tak, že druh menší lamavosti, menšího indexu lomu, má také menší rozptyl, jak patrno z tabulky následující.

	čára D	čára C	čára F	Rozptyl F-C	ϱ
Korunové sklo měkké	1·515	1·513	1·521	0·008	64·4
tvrdé	1·534	1·527	1·537	0·010	53·4
Flintové lehké	1·587	1·583	1·597	0·014	41·9
střední	1·612	1·607	1·623	0·016	38·2
těžké	1·704	1·697	1·721	0·024	29·2
nejtěžší	1·751	1·743	1·772	0·029	25·9

V tabulce udány jsou indexy lomu pro čáry Fraunhoferovy C, D, F a pro význačné starší druhy skel.

Koefficient rozptylu jest vypočten v sloupci posledním.

Užiti těchto druhů skla k odstranění astigmatismu nebylo možno, poněvadž požadavek theoretický zněl, nalézti prostředí lámavé, jehož *index lomu* by byl sice *značný*, *rozptyl* však *poměrně malý*.

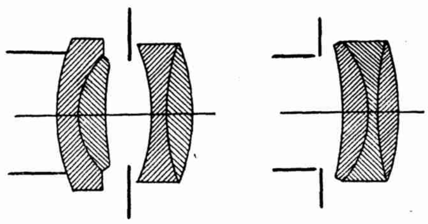
Veliké zásluhy o nalezení druhu skla těchto optických vlastností dobyli sobě *E. Abbe* a *O. Schott v Jeně*. Sklo ideálních vlastností fotografických mělo by míti index lomu 1·637 a rozptyl 0·0145. Takovýto druh připraviti se nepodařilo, ovšem že pak druhy tomuto dosti blízké, na př. sklo *barytové* indexu 1·611 a rozptylu 0·0138.

Výpočty anastigmatu provedli *P. Rudolf* (pro firmu C. Zeiss v Jeně) *E. Hoëgh* (pro firmu C. P. Görz v Berlíně) a *Kämpfer* (pro f. Voigtländer v Brunšvíku.)

Původní anastigmat byl objektiv dvojitý (dublet); jeho části skládaly se ze dvou neb i ze tří čoček. Obě části byly pro sebe sféricky korrigovány (po případě i achromatisovány); spojka v jedné části zvolena ze skla menšího indexu lomu nežli příslušná (připojená) rozptylka, v druhé části pak měla spojka větší index lomu než připojená část rozptylná. Skládá se tedy anastigmat na př. z části přední, která obsahuje čočku korunovou malého indexu lomu a čočku flintovou velkého indexu lomu, za to zadní část složena jest z čočky korunové velkého indexu a ze slabě lámavé čočky flintové. Nejsou-li obě části pro sebe achromatisovány, opraví se aberrace chromatická vhodným spojením těchto částí v dublet.

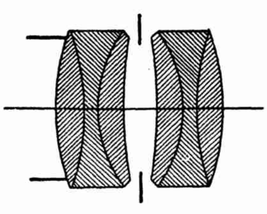
Anastigmaty symmetrické skládají se ze dvou symmetrických částí, z nichž každá je jakoby sraženým dubletem původním.

Obr. 20. ukazuje, jak z původního dubletu povstává jediná čočka anastigmatická, jež vnitřní dvě čočky dubletu v jedinou spojuje. Z takovýchto čoček trojitých (po případě čtyřnásobných) symmetrickou úpravou vznikají symmetrické anastigmaty.

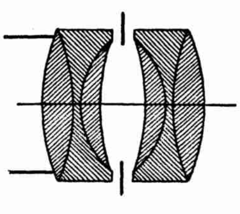


Obr. 20.

Na obr. 21. naznačen jest *anastigmat Zeissův*, od něhož se jen nepatrně liší *„dvojitý“ anastigmat* Görzův (viz obr. 22.)

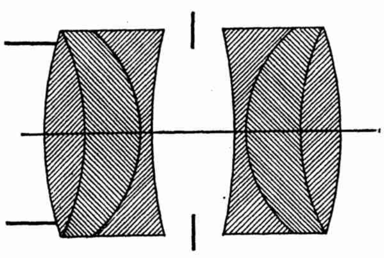


Obr. 21.



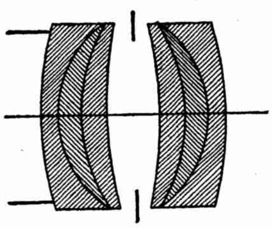
Obr. 22.

V jiném pořádku sestaveny jsou čočky *„orthostigmatu“* Steinheilova (viz obr. 23.), a ze tří čoček formy meniskové sestaven



Obr. 23.

jest *kollinear* Voigtländrův. (Viz obr. 24.) Anastigmaty uvedené hodí se jak pro portrety a fotografování skupin, tak také pro obrázky krajin a architektur. Proto jim do jisté míry právem patří název objektivů *universalních*. Jakkoliv objektiv symmetrický odstraňuje některé vady objektivů zcela hravě, přece jest zajímavo zmíniti se o jiném způsobu odstranění astigmatismu, které navrhl *Steinheil*. Při symmetrické úpravě — jak již uvedeno bylo — souvisí vždy astigmatismus se skřivením obrazu



Obr. 24.

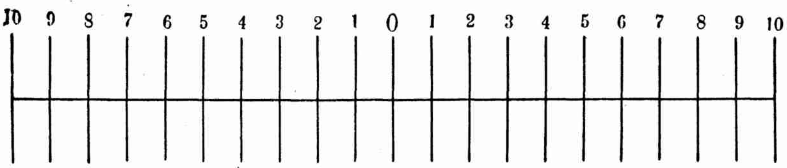
a to tak, že *nelze obě vady zároveň* odstraniti. Naproti tomu při objektivech assymetrických podobné *úzké* souvislosti není, a lze sestrojiti — jak Steinheil dokázal — objektivy, které při značném otvoru ($f:5$) obrazu neskřivují a astigmatismu neukazují. Assymetrické tyto objektivy nazval Steinheil *antiplanety*. Skládají se ze dvou párů čoček, z nichž každý pár *nekorriguje* vady své *pro sebe*, ale teprve oba páry korrigují se *vzájemně*.

Zkoušení astigmatismu nutno vždy prováděti zároveň se zkouškou skřivení obrazu, neboť dvě tyto vady stejně hlasují o jakosti objektivu.

K pozorování hodí se velmi dobře na velkém archu kreslicího papíru silnými přímkami nakreslená škála. (Viz obr. 25.)

Apparat postavíme tak, aby osa jeho mířila k nullovému dílci na škále, aby pak zároveň byla kolmou k rovině škály.

Zařídíme-li na střední dílec, neukáží se všechny vertikalní přímky dělení stejně ostře. Objektiv astigmatický ukáže na krajích na př. jak čáru vertikalní, tak i horizontalní, neostře. Pošinutím desky matné v jednom směru zostří se obraz na př. čáry vertikalní, za to obraz čáry horizontalní bude neostrým, naopak pošinutím desky matné ve druhém směru ukáže se obraz čáry vertikalní neostrým, za to se zostří obraz přímky horizontalní. K měření astigmatismu jakož i skřivení pole obrazového zařídíme



Obr. 25.

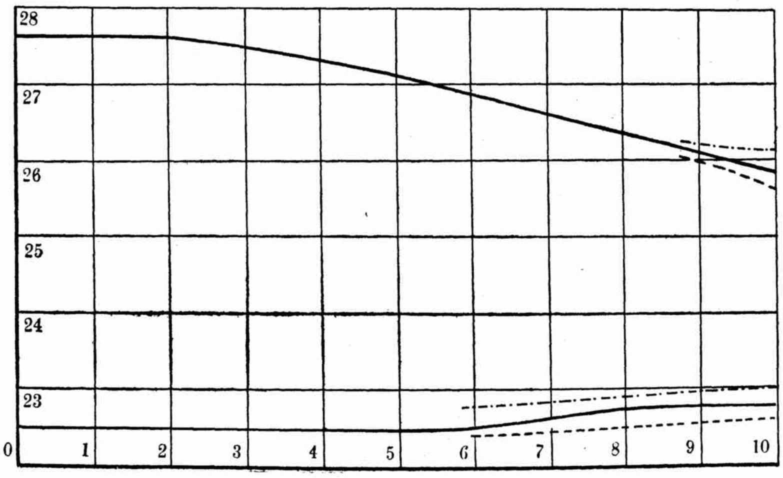
si komoru apparatu tak, aby délka výtahu, t. j. vzdálenost matné desky od objektivu mohla býti měřena, a odečítáme pak pro různě vzdálené části obrazu od středu (pro různé vertikaly 1, 2, 3, ...) všechna tři postavení, především pro zaostření středu — idealní to rovinu obrazovou, zaostření na ohnisko f_1 a konečně zařízení na ohnisko f_2.

Jak rozdíl $f_2 - f_1$ vyjádřený jako zlomek $\frac{f}{f_2 - f_1}$, kde f značí ohniskovou dálku zkoumaného objektivu, tak také odlehlost f_1 a f_2 od idealní roviny obrazové určují hodnotu objektivu.

Za příklad uvedena buďtež měření autorova provedená na objektivech: „Rectigraf“ (firmy Lancaster Birmingham) a Anastigmat (f. Rochester & Comp. v New Yorku).

Zaostřeno na dílec škály	Lancaster Rectigraf $f = 22{\cdot}3$ *cm*				Rochester Anastigmat $f = 18{\cdot}4$ *cm*			
	b	$f_1 - f_2$	$\frac{f}{f_1 - f_2}$	α	b	$f_1 - f_2$	$\frac{f}{f_1 - f_2}$	α
	cm				*cm*			
0, 1, 2	27·60				22·50			
3	27·45			7·5°	22·50			
4	27·28			9·9	22·50			
5	27·12			12·3	22·48			14·4°
6	26·85				22·58			
6 |				14·7	22·79	0·38	49	17·1
6—					22·41			
7	26·60				22·58			
7 |				17·0	22·86	0·43	43	19·8
7—					22·43			
8	26·31				22·78			
8 |				19·3	22·90	0·60	45	22·3
8—					22·50			
9	26·08				22·78			
9 |	26·20	0·23	97	21·5	22·99	0·42	44	24·8
9—	25·97				22·57			
10	25·87				22·78			
10 |	26·10	0·48	46	23·6	23·02	0·44	42	27·2
10—	25·62				22·58			

Jak patrno z uvedených čísel, má „rectigraf“ značnou vadu skřivení obrazu, naproti tomu ukazuje velmi nepatrný astigmatismus. Astigmatismus jeho jest pouze na kraji pole, pro paprsky svírající s osou úhel 24°, takový jako astigmatismus objektivu druhého. Ještě přehledněji než uvedená čísla charakterisují se oba objektivy křivkami, jež jsou z čísel pozorovaných sestrojeny na diagramu (obr. 26.).



Obr. 26.

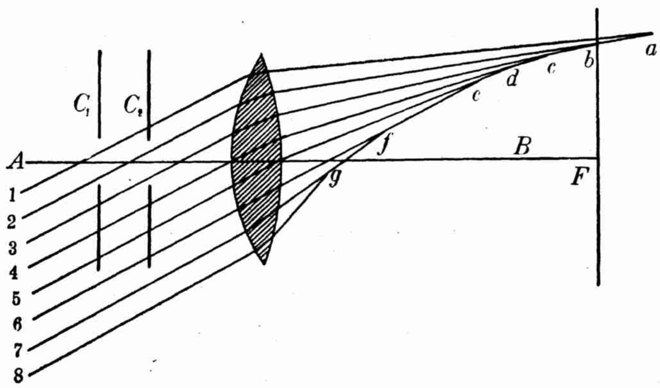
Křivky plně vytažené značí takové postavení desky matné, při němž obrázek škály jest co nejostřejší. Křivky čárkované a čerchované značí zaostření na obrázek vertikalní (f_1) a zaostření na obrázek horizontalný (f_2).

Značné skřivení obrazu při objektivu „rectigraf" jeví se prudkým sklonem křivky k ose úseček. Objektiv „anastigmat" ukazuje jen nepatrné skřivení pole, za to však větší astigmatismus.

Při objektivech assymmetrických, čočkách krajinových a některých objektivech portretních vyskytuje se vedle astigmatismu vada, která se *komou* nazývá.

Nechť dopadá na čočku (viz obr. 27.) svazek paprsků rovnoběžných k ose silně skloněných 1, 2, 3, 4, atd. Všechny tyto paprsky neprotínají se v jediném bodě, nýbrž v řadě bodů, které průsekem dvou sousedních paprsků určeny, dány jsou body *a*, *b*, *c*, atd.

Umístíme-li před čočkou clonku do polohy C_1, pak z šikmých oněch paprsků clonkou projdou a na čočku dopadnou pouze paprsky sousední 1 a 2, které se protnou v bodě *a*. Když by bod F značil ohnisko čočky, pak neleží bod *a* v rovině ohniskové a nastalo by skřivení obrazu. Pošinutím clonky do polohy C_2 propustily by se paprsky 2 a 3, které se lámou tak, že se protínají v bodě *b*, jenž leží právě v ohniskové rovině. V tom případě nenastalo by skřivení obrazu. Z uvedeného patrno, jak mnoho záleží na postavení clonky vzhledem k objektivu krajinovému. Zároveň jasno, že clonka nesmí býti velikého průřezu, jinak by neprocházely jí pouze paprsky sousední, ale svazek paprsků, který by vedle ostrého obrazu v *b* způsobil osvětlení

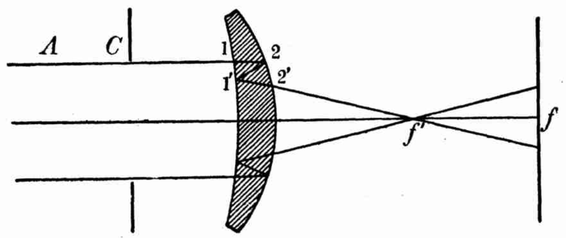


Obr. 27.

na ploše od *b* se rozkládající v podobě rozplynulé záře. Rozplývání v hořejším případě nastalo by ve směru od osy objektivu. Tato vada sluje *komou*. Přichází ve spojení s astigmatismem tak že oba zjevy se pozorují současně. Zařídíme-li komoru s objektivem, jenž jest astigmatický a má *komu*, na obrázek slunce zrcadlící se v kouli skleněné, otočíme-li pak komorou na stativu, tak aby obrázek padl na kraj desky matné, uzříme nejen místo světlého bodu protáhlou čárku (horizontalní nebo vertikalní) nebo plošku křížovitou, ale též světlý proužek, jehož intensity k jedné straně ubývá, při čemž se zároveň onen proužek rozšiřuje.

Koma odstraňuje se — alespoň z větší části — zároveň s astigmatismem vhodným zakřivením čoček a volbou příhodného druhu skla. Úplně odstraní se kompensací při objektivu symmetrickém.

Uvedenou řadou vad objektivů fotografických nejsou ještě všechny vyčerpány. U dokonalého objektivu — totiž u takového, který nemá uvedených dosud vad — může se státi, že obrázek jím exponovaný pozorovatele velice sklame. Na desce objeví se „závoj", ačkoliv kassetta je dobrá, komora nikde světlo nepropouští atd. Závoj jest jen na některých místech v podobě skvrn. Takovéto skvrny povstávají odrazem světla na křivých plochách objektivu.



Obr. 28.

Dopadá-li clonkou C (viz obr. 28.) na objektiv paprsek A, projde u rozhraní 1 do čočky, lomí se na rozhraní 2 a vytvořuje obraz v *f*.

Jest však známo, že při dopadu paprsku na dvě rozhraní část světla se vždycky odráží. Proto se vrací část světla od rozhraní 2 na rozhraní 1′ a může odtud novým odrazem a průchodem plochou 2′ dopadati na desku fotografickou. Dvojnásobným vnitřním odrazem *změní* se však původní směr paprsků, a následkem toho vytvoří se paprskem 1′2′ nový obraz v bodě *f′*.

Je-li objektiv složen z několika čoček, zvláště, je-li to dublet nebo triplet, mohou nastati velmi četné odrazy, které způsobí pak na některých místech desky fotografické skvrny. Velikost skvrn takových záleží na velikosti clonky, zmenší se, zmenšíme-li clonku. Světlost skvrn se tím však *nezmenší*. Proto se tyto skvrny, vzniklé zrcadlením křivých ploch objektivu, objeví spíše při užití malých clonek — tedy při delší exposici, kdy slabé světlo odražené může účinek fotografický způsobiti.

Skvrny zrcadlením nalezneme obyčejně na fotografiích interrierů, kde jest nějaký zvláště světlý předmět, okno, rozžatá lampa a pod. Tato vada objektivů odstraňuje se při jich hotovení takovou volbou zakřivení příslušných ploch objektivu, aby obraz f' vznikal co možná daleko od f, tím se intensita skvrny tak zmenší, že se — zvláště při kratší exposici — vůbec neukáže.

Zrcadlení složených objektivů způsobuje, i když jen v nepatrné míře se vyskytuje, obrázky *málo živé*, ploché, proti nimž plasticky vynikají obrázky fotografované často jednoduchými objektivy.

Století galvanického článku.

Referuje

dr. **Jiří Guth**, professor v Praze.

Není dojista třeba vykládati o významu elektrické síly, jakého nabyla za století svého trvání vůbec a v letech posledních zejména. Dnes, kdy síla elektrická už dávno se přestěhovala z badatelova kabinetu fysikálního a z učebných síní do života praktického a na ulici, každé dítě dovede chápati její význam. Ale význam ten ještě větší jest, uvážíme-li, že tomu teprv nedlouhých sto let a právě sto let, co síla elektrická článkem stala se přístupnější praxi mnohem více než před tím. Ba článek býval kdysi jediným praktickým zdrojem elektrického proudu. Arci, od těch dob, co nalezeny proudy indukční a co stroje dynamoelektrické byly zdokonaleny, důležitost článků valně klesla — nemohouť čeliti strojům ani se stanoviska hospodářského, aniž jsou pohodlnější, jde-li o proudy intensivní, a jenom ještě pro proudy slabé a pravidelné, pak pro přerušované užívání proudů poskytují jistých výhod. Ale přes to historická důležitost článku galvanického proto nejen že není menší, než naopak jen roste s rozvojem applikace síly elektrické. A tak jako vloni slavili jsme svým referátem století metru, tak letos vzpomínáme opět sta let galvanického článku, který otevřel vědeckému badání hned na prahu století devatenáctého netušené obzory, ku kterým pak dospěli vědci let následujících, stále zase otevírajíce nové a nové výhledy do budoucna.

Kolébkou metru byla Francie — kolébkou článku galvanického sesterská její země Italie. Jako kdysi humanismus odtamtud se šířil, tak teď důležitý objev fysikální obracel snažení lidské na nové dráhy.

Arciže vynález Voltova článku nespadl s nebe, nýbrž měl svoje předchůdce právě tak jako všecky vynálezy, předchůdce a myšlénky obyčejně nepatrné a neuvědomělé, jež tvoří celý soubor temné práce tak asi jako podzemní ty rozruchy, neviděné a nepoznané, které předcházejí výbuchu sopky. Slovutný Vlach hrabě Alexandr Volta (1745—1827) sám už příliš dlouho a usilovně pracoval na poli elektřiny, než aby jeho myšlénka nebyla připravována náležitě. Už r. 1771 sestrojil elektrofor a elektroskop, kterýmiž přístroji upevnil theorii elektřiny. Po té roku 1782 následoval kondensator. A tu upoutal jeho pozornost obecně známý případ bolognského professora Luigi Galvaniho (1737—1798), který r. 1789 pozoroval, že čerstvě praeparované žabí nožky, zavěšené měděnými drátky na železném zábradlí pavlače, sebou trhly, kdykoli dotekly se zábradlí. Ani tady nebyla to jen čirá náhoda, která na úkaz upozornila, třeba že škubání žabích nožek opravdu namátkou první uznamenala prý manželka učencova: vnímavost Galvaniova pro něj byla připravena již jinými pokusy a okolnostmi, jako zejména zjevem pozorovaným již r. 1780 při pokusech se žabím stehénkem na stole, na němž současně děly se pokusy s elektrikou. Žabí stehénko pohnulo se, kdykoli Galvani dotekl se ho nožem a v tomže okamžiku přeskočila jiskra z elektriky. Galvani potom vyšetřoval, má-li stejné účinky také elektřina v ovzduší a shledal, že žabí stehénka sebou trhla nejen při záblesku, ale i jindy. Dalším šetřením poznal, že stehénka na onom zábradlí škubla sebou pokaždé, když dotekla se železného zábradlí. Proto vykládal si Galvani úkaz tento nikoli elektřinou atmosferickou ani elektřinou z elektriky vyvinovanou, nýbrž dotekem různých kovů. Později však změnil svůj náhled maje za to, že příčinou úkazu jest elektřina životní, která budí se processem životním poutajíc se ve svalu tak asi jako v lahvi leydenské elektřina se poutá. Kdykoli nastane spojení svalového povrchu vnějšího s vnitřním, jako se stalo, když stehénko doteklo se zábradlí, sval se vybíjí a tím vznikne i účinek fysiologický.

Po tomto pokusu Galvaniově domnívala se většina tehdejších fysiologů, že tím pramen života je nalezen. Avšak Volta nespokojil se tímto výkladem dosti temným a tajemným, který přibíral ku vysvětlení záhady záhadu novou a poznal záhy, že příčinou zjevu je dotek různých kovů. Oba náhledy měly tehda svoje přívržence, v obou směrech pracováno se zdarem dosti značným a Du Bois-Reymond vhodně přirovnává objev Galvaniho ku „rovnici o dvou neznámých, z nichž jedna dalšími pokusy Voltovými, druhá pokusy Galvaniho blíže byla určena".

Volta svým kondensatorem a elektroskopem ukázal již r. 1794, že dotekem dvou kovů elektřina se vyvinuje a výsledky svého pozorování zaslal akademii pařížské ku prozkoumání. Jiný učenec, Fabroni, přičítal vznik elektřiny při pokusu Galvaniově účinkům chemickým vykládaje, že kovy jsou více méně dotčeny kyselinou organismu, a tak byly tu proti sobě vlastně theorie tři. Nejde zde o to vykládati pokud ta která ukázala se býti pravdivou, jen tolik podotknouti možno, že nejlepším výsledkem diskusse tím vzniklé bylo další badání Voltovo, kterým chtěl podepříti svoji theorii, a vynalezení galvanického článku. Zásluhou Galvaniho při tom zůstává nepopíratelnou, že stanovil, že úkaz jím pozorovaný je zjevem elektrickým. Byly tě již před tím známy úkazy různé, které vysvětlujeme si teď proudem galvanickým, o nichž však nevědělo se, že jsou původu elektrického, jako na příklad pozorování prof. Caldaniho v Bologni, který uznamenal, že čerstvě zabité žáby působením elektřiny sebou škubají, nebo známý úkaz, jejž r. 1760 popisoval Sulzer ve svém pojednání o příjemných a nepříjemných pocitech: „Dotýká-li se stříbro a olovo a položíme-li je na jazyk, znamenáme zvláštní pocit, který se neobjevuje, položíme-li kovy ty na jazyk jednotlivě." Sulzer vysvětloval úkaz ten chemicky maje za to, že když kovy ty jsou spojeny, rozpouštějí se na jazyku vzbuzujíce onen pocit. Volta šel trochu daleko popíraje vůbec všecky zjevy elektrické v těle zvířecím, ale přes to jeho nález o elektřině vzbuzované dotykem dvou různých kovů a že dotykem tím jeden kov stává se kladně, druhý záporně elektrickým, nepozbývá tím nijak na své důležitosti.

Základní pokus Voltův, kterým toho dokázal, tvoří východisko demonstrací galvanismu se týkajících a netřeba o něm šířiti se, jakož vůbec rádi doznáváme, že uvádíme tuto věci známé, ale činíme tak jenom pokud toho s naší vzpomínkou na století článku nezbytně je potřebí.

Volta se domníval, že jenom dotekem kovu s kovem elektřina vzniká, ale nikoli dotekem kovu s kapalinou. Ačkoli pracoval velmi horlivě se svým sloupem, neměl přece tušení, že chemická energie zde buzená je příčinou a jedinou podmínkou elektrických nábojů a že jen jí proud elektrický jest udržován a to nikoli do nekonečna, jak se domníval, ale jen potud, dokud chemická energie se nespotřebuje, t. j. pokud sama trvá. Pozdějšími pokusy se však dokázalo, že kovy kapalinou, která chemicky na ně působí, mnohem silněji stanou se elektrickými než dotekem opět kovů a že tento stav elektrický je tím silnější, čím více kapalina na kov reaguje.

Volta však první má o to zásluhu, aniž sám si toho dobře byl vědom, že jeho sloupem byl učiněn první počátek k přeměně energie chemické na elektrickou.

Budiž mimochodem podotčeno, že objevem Voltovým stanoveno jest faktum, které zdánlivě odporovalo všem dosavadním zkušenostem o elektřině: dvě vodivé hmoty, které se dotýkají a tudíž vodivě jsou spojeny, nabíjí se prvotnými elektřinami, které přese všecko vzájemné přitahování se nevyrovnají, nýbrž za dotyku setrvávají v nezměněném napjetí. Působí zde tedy síla, která obě elektřiny dělí, jich spojení zabraňuje — síla elektromotorická. Nezáleží zde na tom, že Volta nesprávně hledal sídlo této síly tam, kde oba kovy se dotýkají, místo aby je byl stanovil na celém povrchu kovu, který se vzduchem je ve styku, více zajímá nás tady okolnost, že pokusy Voltovy dařily se lépe, když oba kovy — zinek a stříbro, později zinek a měď — nedotýkaly se přímo, nýbrž když mezi mimi ležel kotouč navlhčeného papíru nebo sukna. Úkazy elektrické objevily se silnějšími — a článek v podstatě byl hotov.

Volta, aby sesílil účinky, kladl několik takových „článků" na sebe a tak vznikl přístroj, který do dnes na čest svého vynálezce slove sloupem Voltovým. Spojí-li se konce čili poly tohoto sloupu drátem polárním, probíhá tímto elektrický čili galvanický proud, který nejen v proudovodu, ale i mimo něj vzbuzuje účinky stejně známé jako stále podivuhodné. Na počest toho, kdo k těmto úkazům brány poznání otevřel, zove se všechen jich soubor, jakož známo, galvanismem.

Volta učinil oznámení o svém vynálezu listem datovaným dne 20. března 1800 siru Josefu Banksovi, presidentovi královské vědecké společnosti Londýnské. V týž čas vyšly Voltovy Memoiry v Comu a vydány také ve Francii ve Philosophical Transactions. Původní články, jichž Volta k pokusům svým užíval, dva jeho sloupy a jiný apparát o čtyřicíti článcích sestavených ve sloup vystaveny byly jakožto vzácné památky na výstavě v Comu, kam půjčila je lombardská akademie pro vědy a umění. Bohužel, historicky drahocenné, byť i jinak primitivní tyto přístroje zničeny byly požárem, který zahubil r. 1899 na téže výstavě ještě mnoho jiných vzácných věcí. Jenom fotografie apparátů těch se dochovaly.

Jakmile se rozhlásila pověst objevu Voltova po Evropě, všecky laboratoře a kabinety fysikální byly nemálo rozrušeny, skládajíce podobné sloupy a konajíce jimi pokusy.

První byli Carlisle a Nicholson v Londýně, kterým se podařilo 2. května 1800 sloupem Voltovým rozložiti vodu. O půl roku později činil podobné pokusy H. Davy, který silnou batterií r. 1807. vyloučil z hydratu draselnatého a sodnatého prvky před tím neznámé: draslík a sodík.

Volta sám přišel do Paříže a ve slavnostním shromáždění v akademii věd, za přítomnosti prvního konsula Bonaparta 16. Frimairu r. XI. (6. prosince 1802) demonstroval svůj apparát. Výjev ten zvěčnil italský malíř Giuseppe Bertini pěkným obrazem, který náležel lombardské společnosti věd a umění v Miláně a zmíněným již požárem rovněž byl zničen. Napoleon velkým svým duchem dobře dovedl oceniti vynález Voltův a jakožto císař povýšil Voltu do stavu hraběcího a jmenoval jej senátorem království Italského.

Zatím také Vassali-Endi, Giulio a Rossi docílili proudů tak silných, že mohli jimi demonstrovati, kterak srdce a svaly mrtvol jich působením se stahují. Význačný v té příčině je pokus Giorgia Aldiniho (1762—1834), provedený v Londýně na mrtvém těle odsouzencově 17. ledna r. 1803, kterýž pokus způsobil tehda sensaci. Aldini spojil drátem polárním Voltova sloupu buď sval ramenný a míchu, jindy zase různé svaly, nebo dával do ruky mrtvoly různé předměty, na příklad železné kleště. Když pak zavedl proud „ruka se zvedla a prsty se ohýbaly jakoby chtěly kleště stisknouti; ale když ruka se zvedla co nejvýše, stahování svalů přestalo a kleště upadly“; po té uříznutou hlavu přidali ke trupu a pustili jí proud. „Trup silně sebou škubl, bylo viděti, kterak ramena se patrně zvedají, ruce sebou trhají, tlukouce do stolu, na němž mrtvola ležela, krátce, tělo jakoby žilo.“

Voltovým sloupem docílilo se proudu elektrického o nepoměrně větší intensitě než dosud bylo možno docíliti elektrikou a jím otevřely se brány všem možným pokusům a zkoumány účinky chemické, magnetické, elektrodynamické, tepelné i světelné. Dělo se to již dříve pomocí elektriky, ale s výsledkem podobné pokusy mohly se setkati teprve nyní.

Pak nastávala mravenčí práce zdokonalování nalezeného apparátu, při čemž fysikové předem snažili se upraviti články s proudy co možna silnými a stálými a při tom přec články laciné, tak aby mohly vyhovovati i potřebě praktické. Daleko by nás vedlo, kdybychom chtěli uváděti všecku práci lidí vynikajících i těch drobných, jichž snahy nesetkaly se sice s velkým výsledkem, ale jsou přece článkem ve dlouhém řetěze, který táhne se už po celé století, co galvanického elementu se užívá. Pravili jsme, že vynález Voltův měl svoje předchůdce, kteří cestu mu upravovali — tak také zdokonalení jeho jest zásluhou celé řady činitelů, některých snad zdánlivě nepatrných, ale o věc samu stejně zasloužilých, jako drobná okolnost předcházející jest přímou příčinou nějakého velikého účinku.

Theoreticky skládá se galvanický článek ze dvou různých hmot vodivých ponořených do kapaliny rovněž vodivé. Spojí-li se tyto dvě hmoty s elektrometrem, možno konstatovati rozdíl elektrického napjetí, rozdíl potencialů mezi oběma poly. Jestliže naopak, místo abychom spojili poly s konduktory isolovanými, spojíme je drátem polárním, vznikne, jakož bylo řečeno, proud elektrický, jehož intensita záleží na různosti napjetí elektrického na obou polech, to jest na síle elektromotorické článku, na velikosti odporu článku i proudovodu. Proud tím způsobem vzniklý projde totiž nejen drátem, jímž spojeny jsou oba poly, ale také článkem samým. Tento je sídlem úkazů chemických, jež jsou příčinou energie vzniklého proudu. Tyto reakce chemické modifikují tělesa, z nichž článek se skládá, zvláště však kapalinu, v níž jsou hmoty ponořeny; když však kapalina i tělesa článku se mění, mění se i síla elektromotorická a intensita proudu. Přeruší-li se tedy spojení mezi oběma poly, proud přestane: produkty chemické vzniklé při kontaktu polů se rozptýlí a kapalina přibliží se opět svému původnímu složení; pakli po jistém „odpočinku“ znova se poly článku spojí, znamenáme, že intensita proudu bližší jest intensitě počáteční než právě předcházející konečné.

Při článku je tedy mnoho faktorů, jichž dlužno dbáti: předem toho, co zoveme konstantami článku, elektromotorické síly a vnitřního odporu jeho. Síla elektromotorická záleží jedině na hmotách článku, charakterisuje jeho typus, vnitřní odpor na povrchu polů a jich vzdálenosti a platí jen pro určitý, daný článek, individium. Tak jako lze mluviti o elektromotorické síle článku Bunsenova, Daniellova a j. vůbec, ať článek jest jakkoli veliký a jakkoli upraven, tak zase uvažujeme o vnitřním odporu jen jistého článku daného, rozměrů určitých a určitého tvaru.

Různé tyto faktory mění se všelijak s podstatou a povahou článku, — jejich důležitost praktická mění se mimo to také dle účelu, jemuž slouží: někdy třeba proudů silných pro pokus krátký, jindy proudů stálých pro pokusy dlouho trvající; jindy opět článek má sloužiti jenom v intervallech — odtud tedy hned po Voltově objevu ty nesčetné snahy a konstrukce článků, jichž typy základní ovšem jsou obecně známy. Tuto jen ještě několik slov ku historii článku a význačné její momenty.

Již roku 1801 pozorovalo se, že elektromotorická síla článku sloupového časem slábne a domnívali se, že příčinou toho jest okolnost, že vlhké soukenné kotouče časem vyschnou. Volta hleděl této vadě odpomoci tím, že desky zinku a mědi postavil do nádoby naplněné vodou okyselenou a zinek páru jednoho spojil vodivě s mědí páru druhého, čímž dostal galvanickou batterii. Cruikshank užíval k této batterii místo nádob jednotlivých kádě, tak že tato nebyla než sloupem položeným vodorovně: dřevěný žlab byl vycementován isolujícím tmelem a naplněn rozředěnou kyselinou sírovou. Roku 1816 Hyde Wollaston (1766—1828) vrátil se ke článkům jednotlivým, složeným z desky zinkové, položené do desky měděné, zahnuté do U; kousky korku na zinku bránily přímému doteku obou kovů a každý pár byl ponořen do sklenice s rozředěnou kyselinou sírovou. Desky byly připevněny na dřevěné tyči a tam vodivě spojeny, tak že zvednutím tyče bylo lze všecky desky pozvednouti nebo ponořiti. Podobně Offershaus, který roku 1821 našel článek, v němž desky nebyly rovné, nýbrž točené a kousky sukna od sebe isolované.

August Arthur de la Rive, učenec genevský (1801—1875), první poukázal na zmíněnou polarisaci článku a vymýšleny mnohé prostředky, jak ji odstraniti. Rozeznáváme obecně trojí druhy článků bez polarisace dle toho, je-li opatření proti polarisaci mechanické (jako stírání vrstvy vodíku, který při rozkladu kyseliny sírové se vyvozuje a usazuje na elektrodě nikoliv zinkové, nýbrž kovu druhého, tak že tím zvýšuje se vnitřní odpor a vzniká nová elektromotorická síla protivná té, která má svůj základ v oxydování elektrody zinkové; nebo míchání kyselinou; nebo zvláštní úprava povrchu elektrody); — nebo chemické, při čemž vodík se oxyduje hned, jak se vyvinuje, zvláštními okysličovadly nebo zastoupí se kovem, který se na místě jeho vylučuje na elektrodě nikoliv zinkové, nýbrž konduktivní.

Články druhu prvního, jako na příklad Smeeův z r. 1840, neosvědčují se valně, za to spíše články druhu druhého, jako Groveův (1858), Bunsenův (1842), Leclanchéův (1868), Grenetův (1855) a třetího jako článek Daniellův (1836), vesměs obecně známé. Známy jsou výhody i vady jednotlivých těchto typů, jakož i četné jejich modifikace*).

---

*) Jich přesný výčet nepatří sem, kdo chceš, snadno o nich se poučíš, na př. ve knize „Traité élémentaire de la pile électrique“ od

Články jiné než galvanické jako thermoelektrické, suché a p. dílem nepatří do této kategorie, dílem nemají daleko toho významu a jen uvésti zde dlužno akkumulátory, jakožto výsledky nálezu Voltova, přístroje to, jimiž energie elektrická přechází v energii chemickou, kterouž opět, hned či později možno přeměniti v energii elektrickou. Zakládají se na úkaze, jejž pozorovali již r. 1802 Gautherot a Richter: když vedeme proud voltametrem na vodu, přerušíme jej a spojíme pak rychle elektrody voltametru s galvanoskopem, uznamenáme proud proudu dřívějšímu protivný, jehož intensita zneenáhla se zmenšuje. Energie elektrická jakoby se byla na elektrodách utajovala, nahromadila. První Snisteden r. 1854 užil desk olověných, stříbrných neb niklových k takovýmto článkům sekundárným, jimiž dovedl rozžhavovati kovové dráty. Však teprve roku 1859 věc vstoupila do stadia rozvoje, když Gaston Planté, tehda praeparator fysiky při Conservatoire des arts et métiers v Paříži, demonstroval před Akademií věd akkumulátory z desek olověných, jež byly odděleny vložkami gummovými, spirálně stočeny a vloženy do nádoby s kyselinou sírovou.

Když vynalezením stroje dynamoelektrického byly buzeny elektrické proudy laciněji než dosud, vynikla důležitost akkumulátorů a Planté snažil se r. 1879 znovu zdokonaliti svůj vynález tím, že přihlížel zejmena k tomu aby při malém objemu i nevelké váze přece podržel veliký povrch.

Ale akkumulátory Plantéovy a všecky toho druhu jako Encausseovy a Canésiovy, Méritensovy a Tamineovy dlouhým, několik měsíců trvajícím pochodem zkypřovacím bylo třeba upra-

---

Alfr. Niaudeta, 1880; do němčiny přel. W. Ph. Hauck: „Die galvanischen Elemente von Volta bis heute.“ Brunšvik, 1881., neb „Die galvanischen Batterien, Accumulatoren und Thermosäulen. Eine Beschreibung der hydro- und thermoelektrischen Stromquellen mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Praxis von W. Ph. Hauck, Wien, Pest, Leipzig, 1883 nebo: A Cazin & A. Angot: „Piles électriques“ (Paříž, 1881.); posléze: W. S. Hankel: „Die galvanische Kette“ (1889) a Zacharias: „Galvanische Elemente der Neuzeit (1899). Při této příčině podotýkám, že vzhledem ku rázu svého článku, který jest jen pouhým referátem, neuváděl jsem citátů žádných. Data tuto uváděná nejsou odborníku novinkou.

vovati a teprve francouzský ingenieur Camille Faure našel roku 1881 typ akkumulátorů, který výborně se hodí k účelům praktickým, kde se akkumulatory neotřásají. Faure nanesl na obě elektrody suříku, minia, Pb_3O_4 i jiného kysličníku olova neb takovou sůl olověnou, která není v kapalině akkumulátoru rozpustná, a aby desky učinil vnímavějšími, obalil je plstí po způsobu Plantéově, svinul spirálně a vložil do nádoby s kyselinou sírovou. V tomto přístroji nabíjení děje se během čtyř nebo pěti dnů. Veliký počet akkumulátorů nyní užívaných vesměs hotoví se dle tohoto vzoru, a všecky jiné pokusy, na tomto principu se nezakládající, selhaly. Snahy vynálezců nesou se jen k tomu, aby suřík lépe tkvěl na deskách a aby specifická vnímavost a trvanlivost desek se zvýšila.

Z novějších změn na akkumulátorech provedených uvádíme jen ty, jež provedl především Volkmar, který upustil od pokrývání plné desky olověné kysličníkem olovičitým PbO_2 a užil místo plné desky olověné mříže, jejíž otvory vyplnil houbovitým olovem. Výplň ta byla pevně s olovem spojena a nebylo třeba kysličník upevňovati na desky suknem. Při akkumulátorech, jež sestrojili Farbaky a Schenek, mění se jen náplň mříží.

Kladná elektroda plní se směsí suříku a klejtu čili kysličníku olovnatého (PbO), co do váhy v rovných poměrech; deska záporná plní se pouze kysličníkem olovnatým (klejtem). Zlepšení akkumulátorů docílil také prof. Domalíp a elektrotechnik Křižík v Praze. (kterak, viz podrobnost v knize: Zařízení a užívání akkumulátorů, naps. prof. Vác. Leandr. Praha, Kober, 1900).

Akkumulátorů užívá se prakticky velmi hojně, zvláště při elektrickém osvětlování a jako síly motorické pro pohybování lodic a vozů, a zdá se, že akkumulátorům kyne budoucnost ještě větší.

A tak během sta let článek Voltův může vykázati se historií velmi slavnou a dobře prorokoval Arago, řka o článku, že „jest nejpodivuhodnějším nástrojem, který kdy člověk vynašel". Nejen, že článek Voltův otevřel daleké výhledy výzkumům fysikálním, — všecky vědy bezmála jsou mu povinny za přerozmanité pokroky a různé vynálezy, proud galvanický šíří se po celém světě účinky blahodárnými. Bez článku nebylo by celého toho rozsáhlého odvětví průmyslu elektrotechnického, který se všemi vedlejšími větvemi svými nikoli už jen tisícům, ale millionům lidí poskytuje chleba vezdejšího.

Úlohy.

Úloha 26.

Řešiti rovnici

$$1 - \frac{2x}{x^2 + x - 2} + \frac{2x}{x^2 - x - 6} + \frac{2x}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= \frac{10x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 27.

Nad stranou $\overline{ab} = a$ *sestrojen rovnostranný trojúhelník abc a trojúhelník abd tak, že obvod i obsah tohoto rovná se dvojnásobnému obvodu i obsahu trojúhelníka prvého.*

a) *Které jsou strany* $\overline{ad}$, $\overline{bd}$ *trojúhelníka abd?*

b) *V kterém poměru jsou poloměry kružnice opsané a vepsané trojúhelníku abd?*

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Úloha 28.

Sestrojiti jest rovnoramenný trojúhelník, dán-li rozdíl půdice a ramene, jakož i rozdíl příslušných výšek.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 29.

Jsou-li u, v výšky rovnoramenného trojúhelníka příslušné k rameni a a půdici b, budiž řešen trojúhelník, dáno-li

$$a - b = 17, \; v - u = 15.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 30.

Příčky spojující středy protějších stran čtyrúhelníka $ABCD$ protínají se v bodě S.

Budiž dokázáno, že jest

$$\triangle ABS + \triangle CDS = \triangle BCS + \triangle DAS.$$

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Úloha 31.

V harmonickém čtyrúhelníku $ABCD$ dány jsou úhly

$$\sphericalangle DAB = \alpha, \quad \sphericalangle ABC = \beta.$$

Který úhel svírají úhlopříčky?

[Harmonickým slove čtyrúhelník do kruhu vepsaný, v němž součiny protějších stran jsou stejné].

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Úloha 32.

Kterou odchylku má rovina kruhu od průmětny, je-li průmětem jeho ellipsa o parametru rovném polovici poloměru? Jaká jest pak číselná výstřednost ellipsy?

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Úloha 33.

Dva jehlany, jichž základny jsou $Z_1 = 15$, $Z_2 = 20$ a výšky $v_1 = 6$, $v_2 = 4$, stojí na téže rovině; ve které vzdálenosti jest vésti k této rovinu rovnoběžnou, *a) aby vznikly na jehlanech řezy obsahem stejné,*

b) aby vznikly komolé jehlany obsahem stejné.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 34.

Dána jest ellipsa, na jejíž hlavní poloose $\overline{oa}$ *jest ohnisko* f, *na prodloužené vedlejší poloose* $\overline{ob}$ *pak bod* g *tak, že* $\overline{fg} \perp \overline{bf}$.

Je-li m *libovolný bod ellipsy a vedeme li* $\overline{mh} \parallel \overline{oa}$, $\overline{hi} \parallel \overline{bg}$, $\overline{il} \parallel \overline{oa}$, *kdež leží bod* h *na* $\overline{bf}$, i *na* $\overline{fg}$, l *na* $\overline{bg}$, *jest* $\overline{ml}$ *normalou ellipsy v bodě* m. *Budiž podán důkaz této konstrukce.*

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 35.

Dány jsou v pravoúhlé soustavě body

$$a_1\,(2, 0),\quad b_1\,(6, 0);\quad a_2\,(0, 4),\quad b_2\,(0, 1).$$

Jest ustanoviti bod c *tak, aby trojúhelníky* $a_1 b_1 c$, $a_2 b_2 c$ *byly sobě podobný.*

Řed. *A. Strnad.*

O pokroku pyrometrie.

Napsal

Dr. **Vladimír Novák**,
docent české university v Praze.

Velmi mnohé zjevy chemické a fysikalní závisly jsou na temperatuře. Závislost tato vchází do vztahů mezi jednotlivými veličinami a tak nalézáme ve mnohých vzorcích fysikalních a chemických temperaturu jako veličinu velmi důležitou. Odtud vysvětluje se všestranná snaha měřiti temperaturu s přesností co možná největší. Základem takového určení může býti kterákoliv známá a vhodná souvislost temperatury a jiné veličiny (resp. jiných veličin). Pokud se jedná o měření relativní, vystačíme s takovým vztahem, jinak nutno vyjádřiti temperaturu jednotkou všeobecně uznanou, t. j. ve stupních Celsiových.

Příkladem souvislosti temperatury a jiných veličin fysikalních jsou závislost objemu těles na temperatuře, tepelného obsahu na temperatuře, odporu galvanického, thermoelektromotorické síly, intensity záření a pod.

Definice temperatury odvozena jest ze závislosti tepelného stavu a tlaku vodíka, při stálém objemu. Dva tepelné stavy, temperatura tajícího čistého ledu a temperatura vařící se čisté vody při tlaku 76 *cm* Hg, 0°/zvoleny za základní.

Stupeň Celsiův definován pak jako stý díl difference temperaturní obou základních bodů, úměrné relativní změně tlaku vodíka, která nastala převedením téhož objemu vodíka z tajícího ledu do par vařící se vody. Původní tlak vodíka, od něhož se vychází, stanoven na 100 *cm* Hg, 0° při normalní intensitě tíže. Tím se zároveň prohlašuje za teploměr normalný *teploměr vodíkový* zařízený na měření změn tlakových při stálém objemu.

Poněvadž se též někdy užívá teploměrů na stálý tlak, nutno znáti příslušné koefficienty α a α' pro vodík ve vztazích

$$p_t = p_0 (1 + \alpha' t), \qquad v_t = v_0 (1 + \alpha t).$$

*Chappuis**) uvádí jich hodnoty

$$\alpha' = 0{\cdot}0036624, \qquad \alpha = 0{\cdot}0036600.$$

Oba koefficienty blíží se v limitě téže hodnotě, zmenšujeme-li tlak postupně k nulle; jest

$$\alpha_{\text{lim}} = 0{\cdot}0036625, \qquad \alpha'_{\text{lim}} = 0{\cdot}0036624$$

a dle toho absolutní bod nullový

$$-\,273{\cdot}04^0\ \mathrm{C.}^{**})$$

V následujícím pojednati chci o pokroku při měření vysokých temperatur. Vysokou temperaturou míněna tu temperatura vyšší 400° C.

Vysoká temperatura neměří se vždy teploměrem vodíkovým, normálným, poněvadž se tento způsob vždycky nehodí. Z rozmanitých těch závislostí temperatury a veličiny jiné, kterou lze pohodlně měřiti povstaly četné methody pyrometrické, o kterých v dalším podrobněji bude pojednáno. Všeobecně budiž připomenuto již předem, že všechny tyto methody, při nichž se užívá temploměru normálného, jsou *nepřímé* a že je nutno příslušné závislosti temperatury a veličiny měřené znáti na základě srovnání s teploměrem vodíkovým.

Předložený úkol rozděliti lze dle způsobu měření vysokých temperatur na tři části. V prvé pojednáno bude o měření tem-

---

*) *P. Chappuis* ve článku „L'Échelle thermométrique normale et les échelles pratiques pour la mesure des temperatures" v „Rapports présentés au Congrès International des Physiques". Paris 1900, pg. 133.

**) Číslo toto udává též Berthelot (Compt. Rend. *128*, pg. 498, 1900) jako výsledek měření, jež provedli Chappuis, Amagat, Leduc a Sacerdote.

peratury na základě změny objemu těles, ve druhé o methodách optických a konečně ve třetí o methodách elektrických.

I.

1. Měření pyrometrická zakládající se na změně objemu těles teplem vyžadují látek vysokou temperaturou se neměnících. Relativní srovnávání vysokých temperatur provedl již roku 1782 *Wedgwood* svým pyrometrem. Na desce mosazné upravil dvě mosazné příčky v mírném úhlu se sbíhající a linearným dělením opatřené. K srovnávání vysokých temperatur užíval hliněných válečků as 12 *mm* v průřezu, které zapadaly mezi příčky na určité místo. Byl-li váleček vložen pak do pece zmenšil svůj objem, tak že mezi příčkami do užšího místa zapadal. Dle pošinutí tohoto místa proti dřívějšímu posuzována temperatura pece.

Kovového teploměru k vysokým temperaturám užil roku 1750 Muschenbroek, slavný fysik holandský. Pohyb roztahující se tyče kovové přenášen tu ozubenými kolečky a rafií na dělenou škálu.

Dle myšlenky, kterou již *Borda* vyslovil, sestrojili *Dulong* a *Petit* kovový pyrometr, který se skládá ze dvou 120 *cm* dlouhých tyčí, průřezu $2{\cdot}5 \times 0{\cdot}4\ cm^2$, jež na jednom konci pevně k sobě jsou přinýtovány; druhé konce zahnuty jsou vzhůru a pak vodorovně, tak že se při roztahování jeden podél druhého mohou posunovati. Na těchto koncích jsou obě tyče dělené a to tak, že dělení na jedné tyči představuje nonius pro dělení tyče druhé. Je-li znám koefficient roztaživosti tyče, pak lze z odečtení na pyrometru posuzovati temperaturu.

2. Přímým měřením dilatace proužku platinového stanoví se vysoká temperatura *meldometrem Jollyho.**)

Proužek platinový, jehož délka určí se mikrometrickým šroubem, zahřívá se silným proudem elektrickým, jejž lze vloženým rheostatem regulovati. Na proužek kladou se malá zrnka kovů nebo látek, jichž bod. tavení má býti stanoven. Pozorování děje se pak drobnohledem.

*) *Jolly*, Rep. Britt. Assoc. 1888, p. 564; Proc. Royal Irish Acad. II. p. 38, 1891.

Četná pozorování bodu tavení a bodů varu *meldometrem* provedli *W. Ramsay* a *N. Eumorfopoulos.**) Platinový pásek meldometru byl 10 *cm* dlouhý a 1 *mm* široký, ve vzdálenosti 6 *cm* nalezaly se dvě súženiny, tak aby v prostoru mezi nimi pásek měl tutéž temperaturu.

Výhodou tohoto přístroje jest *malé množství* látky, kterého jest k určení bodu tavení potřebí. Malé toto množství může býti připraveno velmi *čistě*. Graduace mikrometrické škály meldometru provedena na základě známých temperatur vzduchu okolního (temperatura síně),

temperatury tajícího dusičnanu draselnatého . 339^0
a temperatury tajícího síranu draselnatého . . 1052^0.

Poněvadž se některé kovy slévají s platinou (na př. zlato) poprášen při určování bodu tavení těchto kovů proužek platinový talkem.

3. Roztaživosti *kapalin* k měření temperatur vysokých užili *Baly* a *Chorley.***) Místo rtuti, která se v evakuovaných teploměrech vaří již při 300^0, naplnili teploměr slitinou sodíku a draslíku, která při -8^0 tuhne, při 700^0 se vaří. Teploměry tyto začínají teprvé od 200^0, před dělením ustalují se, ponechány byvše ve vysoké temperatuře po 30 hodin.

Nad slitinou nalézá se v nich dusík, který při vysokých temperaturách dosahuje obyčejného tlaku vzduchu.

U teploměrů skleněných mění se během času poloha obou základních bodů; i když pak teploměr skleněný po delší době jest ustálen, ukazuje se tak zvaná *depresse* bodu mrazu po každém větším zahřátí teploměru. Tyto vady teploměrů skleněných mají svou příčinu v nedokonalé pružnosti skla. Skleněná nádobka teploměru, která teplem objem svůj zvětšila, nestahuje se, byvši ochlazena, na objem původní, nýbrž poněkud méně, tím se ovšem bod mrazu snižuje.

Vadě této hledí se odpomoci v době poslední hotovením teploměrů z křemene.

---

*) *W. Ramsay* a *N. Eumorfopoulos* „On the Determination of High Temperatures with the Meldometr.“ Phil. Mag. *41*. pg. 360, 1896.

**) *Baly* a *Chorley*, Bericht. d. d. chem. Gesell. *27*. pg. 470, 1894.

Takový teploměr naplněný cínem, určený k měření vysokých teplot až do 1000^0 sestrojil *Dufour*.*) Nedá se však křemene upotřebiti tak, jak by to znamenitá pružnost tohoto materialu doporučovala. Objevil totiž *Villard*,**) že křemen (podobně jako platina) v červeném žáru *propouští vodík*.

4. Základní teploty, z nichž odvozena definice 1^0 Celsia, totiž temperatura varu vody a tání ledu udávají poměrně velmi úzký intervall teploty a nepostačí k extrapolaci nějaké závislosti na temperatuře, postupujeme-li k teplotám příliš nízkým nebo vysokým. Proto jest pro pyrometrii velmi důležito znáti stálé stavy tepelné, jako jsou body tavení kovů a body varů některých látek.

Roku 1828 určil *Prinsep* teploměrem vzduchovým, jehož nádoba byla ze zlata, body tavení některých slitin zlata, stříbra a platiny. Upravil potom směsi křemene, vápence, kaolinu a živce tající při stejných temperaturách jako ony slitiny, tak že vzorky těchto směsí sestavené dle postupujících bodů tání mohly býti použity k praktickému stanovení vysokých temperatur v peci.

Podobná měření obšírnější a přesnější vykonal r. 1863 *Becquerel* a v letech 1877—79 *Violle*,***) jenž stanovil u některých čistých kovů body tání, které se pak všeobecně v tabulkách uváděly.

Jak se asi srovnávají výsledky pozorování různých pozorovatelů, lze snadno přehlédnouti z tabulky následující, kde vedle starších dat připojena jsou měření fysiků doby nejnovější. K vůli úplnosti přidány jsou v tabulku i kovy, které tají při nižší temperatuře než 400^0.

---

*) *A. Dufour*, Compt. Rend. *130*. pg. 775, 1900.

**) *P. Villard*, Compt. Rend. *130*. pg. 1752, 1900.

***) *Violle*, Compt. Rend. *85*. pg. 543, 1877; *87*. pg. 981, 1878; *89*. pg. 702, 1879.

Kov	Prinsep	Pouillet	Person	Rudberg	Silbermann a Jacquelain	E. Becquerel	Violle	Ehrhardt a Schertel	Ledebur	Van der Weyde	Callendar a Griffiths	Holborn a Wien	Heycock a Neville	D. Berthelot	Stansfield
	1828	1836	1848	1848	1853	1863	1879	1879	1881	1879	1891	1892	1895	1898	1898
Cín . . .	—	—	232·7	228·5	236	—	—	—	230	—	231·7	—	231·9	—	232·1
Vizmut .	—	—	266·8	268·3	266	—	—	—	260	—	269·2	—	—	—	268·4
Kadmium	—	—	321	320	—	—	—	—	—	—	320·7	—	—	—	—
Olovo . .	—	—	326·2	326	321	—	—	—	326	—	327·7	—	—	—	325·9
Zinek . .	—	—	415·3	—	—	—	—	—	412	—	417·6	—	419·0	—	418·2
Antimon .	—	—	—	—	630	—	—	—	432?	—	—	—	629·5	—	—
Aluminium	—	—	—	—	—	—	—	—	—	850	—	—	654·5	—	649·2
Stříbro .	999	1000	—	—	—	960	954	954	960	—	961	971	961	962	961·5
Zlato . .	—	1200	—	—	—	1092	1045	1075	—	1250	1061	1072	1062	1064	1062·7
Měď . .	—	1100	—	—	—	1157	1054	—	—	1093	1100	1082	—	—	1083·0
Nikl . . .	—	—	—	—	—	—	—	1400	—	1600	—	1484	—	—	—
Palladium	—	—	—	—	—	1370	1500	—	—	—	—	1587	—	—	—
Platina .	—	—	—	—	—	1470	1775	—	—	2200	—	1780	—	—	—
Iridium .	—	—	—	—	—	—	1950	—	—	2200	—	—	—	—	—

5. Větší obtíže způsobovalo určení vysokých bodů varu. Pro graduaci teploměrů elektrických důležity jsou body varu rtuti, síry, kadmia a zinku.

K vůli přehledu jsou sestaveny nalezené hodnoty bodů varu oněch látek tabelárně:

	Regnault	Becquerel	Deville a Troost	Violle	Crafts	Callendar a Griffiths	Berthelot	Holborn a Day	Chappuis a Harker
	1862	1863	1880	1882	1883	1891	1900	1900	1900
Rtuť	357·25	—	—	—	357	356·7	—	—	—
Síra	448·38	—	—	—	—	444·53	—	—	445·20
Kadmium . .	—	746	860	—	—	—	—	—	—
Zinek . . .	—	891	1040 920	929·6	—	916	920	910—930	—

Udané body varu platí pro normalný tlak 76 *cm* Hg, 0°. Změna bodu varu způsobená tlakem jest

u rtuti . 0·075 (b — 760) dle Regnaulta,
u síry . 0·082 (b — 760) dle Griffithse,
u síry . 0·088 (b — 760) dle Chappuise a Harkera.

6. Značí-li M hmotu tělesa, jehož specifické teplo S jest známo a ochladíme-li těleso to z původní vysoké temperatury T na známou temperaturu t, jest množství vydaného tepla

$$Q = MS\,(T - t).$$

Toto množství Q lze kalorimetricky ustanoviti, tak že lze pak z hořejší rovnice neznámou vysokou temperaturu T určiti.

Na této myšlence zakládá se kalorimetrické měření vysokých temperatur. Podmínkou jest tu znáti specifické teplo S. Veličina tato jest však sama na temperatuře závislou, tak že nutno závislost tu vzíti v úvahu. Obyčejně se užívá koule železné nebo platinové, kterou se vysoká temperatura měří.

Dle pokusů Pouilletových jest střední specifické teplo platiny

mezi	kalorií
0 — 100°	0·03350
0 — 500°	0·03434
0 — 700°	0·03602
0 — 1000°	0·03728
0 — 1200°	0·03818.

Kalorimetrické methody k určení vysokých temperatur v *peci elektrické* použil *Moissan.* *) Poněvadž se při tomto způsobu pyrometrie obyčejně daleko extrapoluje známá závislost specifického tepla na temperatuře, nejsou výsledky při temperaturách nad 1400° spolehlivy.

Opomenouti nelze zmínku o práci *Fliegnerově*,**) který ukázal, že také specifické teplo *vzdušin* jest závislo na teplotě při temperaturách vysokých (nad 2000°).

7. Teploměru vzduchového k stanovení temperatur vysokých užil první *Prinsep* (1829). Uspořádání bylo na stálý objem, teploměrná nádobka byla zlatá, manometrickou kapalinou olivový olej. *Pouillet* a po něm *Regnault* sestrojili vzduchový teploměr s nádobkou platinovou. Tehdy byla ještě neznámou osmosa plynů rozžhavenou platinou, proto jsou výsledky Pouilletovy čísla poněkud velká. *Deville* a *Troost* zavedli teploměrnou nádobku *z polévaného porcelanu*, která se dobře osvědčila i ve vysokých žárech. Nešťastnou náhodou místo vzduchu užili par iodových, jehož hustotu pokládali i při vysokých temperaturách za konstantní. *Viktor Meyer****) ukázal však, že se molekula iodu ve vysokých temperaturách dissociuje a s tím že souvisí změna v hustotě páry.

Proto jsou hodnoty bodů varu zinku a kadmia, jak je Deville a Troost původně nalezli, 1040° a 860° příliš vysoky.

Roku 1863 uveřejnili Deville a Troost novou řadu pozorování pyrometrických provedených zdokonaleným teploměrem vzduchovým. Poněvadž polévání vnitřního povrchu porcelánové

---

*) *Moissan* „Le four electrique" Paris, 1898.

**) *Fliegner*, Beib. z. W. Ann. *23.* pg. 964, 1899.

***) *V.* a *C. Meyer*, Berl. Ber. *12.* pg. 1426, 1879.

nádobky glazurou působilo veliké obtíže, Deville a Troost zhotovili jednak nádobky kulové s trubicí kapillarní z jednoho kusu, polévané pouze zevně, jednak sestávala porcelánová část teploměru ze dvou kusů, z nádobky a trubice, které, když byly oboustranně glazurou opatřeny, byly staveny v plamenu třaskavého plynu.

Při teploměru vzduchovém nemá veškerý objem plynu teploměrného tutéž temperaturu. Do vysoké temperatury vkládá se pouze hlavní teploměrná nádobka, trubička kapillarní obsahuje pak plyn temperatury nižší. Poněvadž je nesnadno střední temperaturu plynu v kapillaře určiti, Deville a Troost hleděli chybu kapillarou vznikající kompensovati. K teploměru připojili totiž ještě jednu kapillaru, stejného objemu jako kapillara vedoucí k teploměrné nádobce. Připojená kapillara nemající nádobky teploměrné v téchže poměrech temperaturních udávala zároveň chybu, která by opomenutím vlivu kapillary vznikla.

Velmi důležitou úlohou, která se přirozeně zavedením porcelánu jako materialu pro nádobku teploměrnou vyskytla, bylo stanovení změn objemu porcelánu s temperaturou čili určení jeho koefficientu roztažnosti. Určení toto nelze provésti s velikou přesností, neboť složitá struktura porcelánu způsobuje, že se nádobka po silném zahřátí k původnímu objemu *nevrátí*. Velikou výhodou jest malá číselná hodnota koefficientu roztaživosti porcelanu proti koefficientu roztaživosti vzduchu. Onen jest dán číslem 0·000017, tento 0·00367.

Pro porcelán berlínský nalezli *Holborn* a *Wien* číslo ještě menší totiž 0·0000132.

Měření vysokých temperatur teploměrem vzduchovým učiněno předmětem rozsáhlých prací, které provedeny byly jednak v laboratoři U. S. Geological Survey ve Washingtoně (1882—1887), jednak ve fysikalně technickém říšském ústavu v Charlottenburku od *Holborna, Wiena* a *Daye.*

Holborn a *Wien**) poukázali na některé vady porculánových nádobek teploměru vzduchového. Glazura porcelánu taje již při

---

*) *L. Holborn* a *W. Wien* „Ueber die Messung hoher Temperaturen“ Wied. Ann. *47.* pg. 107, 1892; *56.* pg. 360, 1895.

1100° a mění se v páry, tak že vnitřní obsah teploměru se mění. Porcelán sám vydrží temperatury vyšší, tak že nádob pouze zevně polévaných dalo se použít až při temperatuře 1450°. Při této temperatuře nutno však udržovati tlak vnější a vnitřní téměř v rovnováze, neboť nádobka již měkne a většímu tlaku se poddává.

Po mnohých zkouškách vrátili se *Holborn* a *Day**) k nádobce kovové, zhotovené ze slitiny platiny a iridia, obsahující 20% iridia.**) Nádobka byla 17 *cm* dlouhá, 4 *cm* v průměru a 0·5 *mm* silná ve stěně. I při zahřátí na 1300° dosaženo úplného vakua. Teploměr naplněn dusíkem. Koefficient roztažívosti nádobky (20% slitiny platin-iridia) určen okrouhle na 0·000025.

Při vzduchovém teploměru užívá se dvojího uspořádání, teploměru při stálém objemu nebo při stálém tlaku. Poněvadž lze udržovati stálý objem snáze než stálý tlak, jest teploměr vzduchový pro stálý objem rozšířenější.

8. Pro teploměr vzduchový při *stálém objemu* zaveďme tato označení. Budiž b tlak plynu při nižší temperatuře t nádobky, při čemž vyčnívající část kapillary z lázně má temperaturu t', ostatní plyn v prostoru, kde se nalezá index, temperaturu t''.

Podobně budiž B tlak plynu při temperatuře T (vyšší), při čemž obdobné temperatury kapillary a ostatního prostoru jsou T′ a T″. Objem nádobky jest v, objem kapillary v', objem ostatního prostoru v''. Temperatura v kapillaře jest nižší než T, temperatura v ostatním prostoru velmi blízka temperatuře síně. Objemy v, v', v'' jsou míněny při temperatuře 0°.

Měření temperatury dáno jest vztahem

$$b\left\{\frac{1+\beta t}{1+\alpha t}+\cdot\frac{v'}{v}\frac{1+\beta t'}{1+\alpha t'}+\frac{v''}{v}\cdot\frac{1}{1+\alpha t''}\right\}$$

$$=B\left\{\frac{1+\beta T}{1+\alpha T}+\cdot\frac{v'}{v}\frac{1+\beta T'}{1+\alpha T'}+\frac{v''}{v}\cdot\frac{1}{1+\alpha T''}\right\},$$

*) *Holborn* a *Day* „Ueber das Luftthermometer bei hohen Temperaturen“ Wied. Ann. *68*. pg. 817, 1899.

**) Slitiny platiny s irridiem obsahující více irridia než 20% nelze již dobře mechanicky spracovati.

značí-li α koefficient roztaživosti plynu, β pak kubický koefficient roztaživosti látky, z níž jest nádobka teploměrná.

Aby bylo možná stanoviti vysokou temperaturu T s určitou přesností na př. jedné tisíciny, nutno určiti veličiny b, B, α, β, $\frac{v'}{v}$ a $\frac{v''}{v}$ s určitou přesností, již lze posouditi z rovnice

$$\partial x = \frac{dx}{d\mathrm{T}} \frac{\mathrm{T}}{1000}.^{*)}$$

Přibližně platí

$$\mathrm{B} = b \frac{1 + \alpha \mathrm{T}}{1 + \beta \mathrm{T}}$$

a odtud

$$\partial \mathrm{B} = b \frac{\alpha - \beta}{(1 + \beta \mathrm{T})^2} \frac{\mathrm{T}}{1000}.^{**)}$$

Podobně plyne pro

$$\partial b = -b \frac{(1 + \beta \mathrm{T})(\alpha - \beta)}{1 + \alpha \mathrm{T}} \frac{\mathrm{T}}{1000}$$

a pro

$$\partial \beta = \frac{\alpha - \beta}{1000 (1 + \alpha \mathrm{T})},$$

---

*) Označení ∂ chyby veličin ve vzorcích přicházejících přijato z referatu „*Rapport sur les Progrès de la Pyrométrie*“ od *C. Barusa* (Paris 1900).

**) Výsledky tyto liší se tvarem svým od veličin, které uvádí *C. Barus*, odkud tato úvaha o přesnosti teploměru vzduchového k určení vysokých temperatur vzata. Barus bezpochyby vyšel od rovnice dle T rozvinuté

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{B} - b}{b\alpha - \mathrm{B}\beta}$$

a do výsledku $\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{T}}$ dosazoval pro B hodnotu přibližnou $b(1 + \alpha \mathrm{T})$. Tím obdržel výsledek

$$\partial \mathrm{B} = b \frac{\{\alpha - \beta (1 + \alpha \mathrm{T})\}^2}{\alpha - \beta} \frac{\mathrm{T}}{1000},$$

který však by byl přešel v hořejší výraz jednodušší, kdyby za B býval dosažen výraz úplný. Podobně pozměněny jsou formy ostatních veličin ∂b a $\partial \beta$, ačkoliv výsledky číselné souhlasí na žádaný počet decimál úplně. Pro výpočet jsou shora uvedené vzorce však jednodušší než vzorce Barusovy.

$$\partial\left(\frac{v'}{v}\right)=\frac{1+\alpha\frac{T}{2}}{1+\beta\frac{T}{2}}\,\frac{1}{1000\,(1+\alpha T)}\ ^{*)}$$

$$\partial\left(\frac{v''}{v}\right)=\frac{1+\alpha T''}{(1+\alpha T)\,1000}.$$

V následující tabulce počítány jsou pro určitý případ jak absolutní chyby veličin B, b, β, $\frac{v'}{v}$, $\frac{v''}{v}$, tak také jich chyby relativné. Čísla platí pro teploměr Barusův. Jsou to:

$v = 300\ cm^3$ $\quad b = 16\ cm$

$v' = 0{\cdot}116\ cm^3$ $\quad \alpha = 0{\cdot}00367$ $\quad T'' = 20.$

$v'' = 1{\cdot}27\ cm^3$ $\quad \beta = 0{\cdot}000017$

T	∂B *cm*	∂b *cm*	$\partial b\,.\,10^6$	$\partial\left(\frac{v'}{v}\right).\,10^6$	$\partial\left(\frac{v''}{v}\right).\,10^6$	$\frac{\partial\beta}{\beta}$	$\frac{\partial\left(\frac{v'}{v}\right)}{\frac{v'}{v}}$	$\frac{\partial\left(\frac{v''}{v}\right)}{\frac{v''}{v}}$
100	0·006	— 0·004	2·67	860	780	0·157	2·2	0·184
500	0·029	— 0·010	1·29	680	380	0·076	1·7	0·089
1000	0·057	— 0·013	0·78	610	230	0·046	1·6	0·054
1500	0·083	— 0·014	0·56	580	170	0·033	1·5	0·039

Tabulka tato ukazuje velmi poučně, jak přesně třeba znáti konstanty teploměru vzduchového a jak bedlivě měření prováděti, aby se docílilo žádané přesnosti ve výsledku pro T totiž 1 : 1000. Při měření tlaku B nutno nádobku teploměrnou zvolna zahřívati, tak aby plyn kapillarou se pohybující a s rostoucí temperaturou stále většímu tření podlehající, byl všude téhož tlaku. Difference tlaková nesmí při vysokých temperaturách dosáhnouti 0·08 *cm*.

*) Poslední dva vzorce souhlasí s výrazy Barusovými.

Ze sloupce třetího hořejší tabulky vychází, že při každém měření nutno určiti b před zahřátím i po něm, neboť chyba při této veličině obnášející pouze 0·01 *cm* má již vliv na tisícinu T.

Poněvadž koefficient β sám sebou jest velmi malý, stačí určiti jej s přesností 3% úplně. Dle toho soudě, byl by porcelán látkou pro pyrometrii velmi výhodnou; ukazuje se však, že nové nádobky po zahřátí na vysokou temperaturu *nevracejí* se k původnímu objemu, nýbrž že nádobka poněkud zvětšenou zůstává.

Toto zvětšení není nepatrné a opakuje se při obnoveném zahřátí. Byla tak pozorována při šesti po sobě následujících zahřátích vždy změna *půl druhého* procenta v objemu.

Dle sloupců pro relativní chyby poměrů $\frac{v'}{v}$ a $\frac{v''}{v}$ jest patrno, že v' lze vždy určiti s dostatečnou přesností, naproti tomu vliv $\frac{v''}{v}$ roste při stoupající temperatuře, tak že nutno stanoviti poměr tento s přesností 4 procent.

Jakkoli již nesnadno jest splniti požadavky hořejší ze skutečného příkladu teploměru vzduchového počítané, aby se dosáhlo přesnosti $^1/_{1000}$ při určení vysoké temperatury, mnohé závažnější vady a zdroje chyb nad to se obyčejně vyskytují.

Tak nelze na př. s jistotou tvrditi, že temperatura uvnitř nádobky porcelánové, která jest velmi nedokonalým vodičem tepla, jest táž jako v prostoře pece nebo lázně, t. j. temperatura hledaná, i když pak by se té podmínky dosáhlo, nebude temperatura uvnitř nádobky všude stálou. Mimo to vystoupí při vysokém žáru vodní páry a jiné plyny v porcelánu absorbované do vnitřní nádobky, je-li pak uvnitř polévaná, taví se glazura její již málo nad 1000, není-li polévaná, mohou některé plyny z okolí vnějšího (plyny z pece při spalování vyvinuté) osmosou projíti do prostoru vnitřního. Při vysokých temperaturách měkne porcelán a podléhá pak rozdílu tlakovému — toť jen ve stručnosti ukázka všech těch nesnází a překážek, která s dostatek ukazuje nejen jak nesnadno jest měřiti vysoké temperatury s přesností jedné tisíciny, ale také vysvětluje nesouhlas v určení bodů tavení a pod.

9. Aby bylo lze rozhodnouti, zda-li teploměr vzduchový zařízený na stálý objem nebo teploměr na stálý tlak lépe se hodí pro určování temperatur vysokých, propočítejme dřívější příklad též pro teploměr pro stálý tlak.

Budiž zase jako dříve v objem nádobky (porcelánové) [při temperatuře 0°] v' objem části kapillarní trubice, mající jinou temperaturu než okolí, v_1 značiž pak změnu objemu, která se pozoruje při přechodu od temperatury t na T.

Značí-li T_1 temperaturu plynu v kapillaře, resp. v manometrické trubici, platí všeobecný, přesný vzorec:

$$b\left\{v\frac{1+\beta t}{1+\alpha t}+v'\frac{1+\beta t'}{1+\alpha t'}+w\frac{1+\beta t''}{1+\alpha t''}\right\}$$
$$=B\left\{v\frac{1+\beta T}{1+\alpha T}+v'\frac{1+\beta t_1}{1+\alpha t_1}+w'\frac{1+\beta T_1}{1+\alpha T_1}\right\},$$

ze kteréhož plynou příbližné vztahy:

$$v_1\frac{1+\beta T_1}{1+\alpha T_1}=v\frac{1+\beta T}{1+\alpha T}-v\frac{1+\beta t}{1+\alpha t},$$
$$\frac{B}{b}\frac{1+\beta T}{1+\alpha T}=\frac{1+\beta t}{1+\alpha t}-\frac{B}{b}\frac{v_1}{v}\frac{1+\beta T_1}{1+\alpha T_1}.$$

Zavedeme-li pro zjednodušení

$$f(t)=\frac{1+\beta t}{1+\alpha t}\quad \text{a}\quad M=f(t)-f(T_1)\frac{v_1}{v},\text{*)}$$

pak, má-li být T naměřeno s přesností jedné tisíciny, platí pro ostatní veličiny tyto podmínky **)

$$\partial M=-\frac{\alpha}{1000}\frac{T}{(1+\alpha T)^2},$$

$$\partial t=-\frac{(1+\alpha t)^2}{\alpha}\partial M,\qquad \partial T_1=\frac{v}{v_1}\frac{(1+\alpha T_1)^2}{\alpha},$$

*) Dle *Barus* l. c. Výsledky zde uvedené shodují se úplně s výrazy nalezenými Barusem; v posledním pouze vzorci ve francouzském překladu jest nedopatřením ve jmenovateli činitel $f(t)$ uveden dvakráte.

**) Ve výsledcích vynechány jsou veličiny proti ostatním malé, tedy na př. β proti α, t oproti T a pod.

$$\partial\left(\frac{v_1}{v}\right) = -\frac{1}{f(T_1)}\,\partial M, \qquad \partial v = \frac{v^2}{f(T_1)}\,\frac{\partial M}{v_1},$$

$$\partial\left(\frac{v'}{v}\right) = \frac{\alpha}{1000\,[f(T') - f(t')]}\,\frac{T}{(1+T)^2} = \frac{-1}{f(T') - f(t')}\,\partial M,$$

$$\partial\beta = \frac{\alpha}{1000}\,\frac{1}{1+\alpha T},$$

$$\partial\left(\frac{B}{b_0}\right) = \frac{\alpha T}{1000}\,\frac{\left[f(t) - \frac{B}{b_0}\frac{v_1}{v} f(T_1)\right]^2}{f(t)} = \frac{\alpha T f(t)}{1000}\left[1 - \frac{v_1}{v}\,\frac{f(T_1)}{f(t)}\right]^2.$$

Prvých pět vzorců odvozeno jest přímo z rovnice pro pomocnou veličinu M, ostatní z rovnice všeobecné, přiměřeně zjednodušené po provedené differenciaci. Výsledky číselné platící pro teploměr Barusův podává tabulka následující:

T	$\partial M \,.\, 10^6$	∂t	∂T_1	∂v_1	$\partial v'$	$\partial\beta \,.\, 10^6$	∂B
		^{0}	^{0}	cm^3	cm^3		cm^3
100	— 197	0·06	— 0·29	0·059	— 0·632	2·7	0·016
500	— 228	0·07	— 0·12	0·069	— 0·155	1·3	0·019
1000	— 168	0·05	— 0·07	0·051	— 0·081	0·8	0·014
1500	— 13 0	0·04	— 0·05	0·039	— 0·055	0·6	0·011

T	v_1	∂v	$\frac{\partial\beta}{\beta}$	$\partial\left(\frac{v_1}{v}\right).10^6$	$\partial\left(\frac{v'}{v}\right).10^3$	$\frac{\partial M}{M}.10^6$	$\partial\left(\frac{B}{b_0}\right).10^6$
^{0}	cm^3	cm^3					
100	59·9	— 0·276	0·17	211	— 2·25	— 268	211
500	173·9	— 0·111	0·08	245	— 0·56	— 647	245
1000	215·3	— 0·066	0·05	180	— 0·29	— 786	183
1500	233·6	— 0·047	0·04	140	— 0·20	— 846	141

Jak patrno z uvedených čísel pro ∂t a ∂v záleží přesnost měření vysokých temperatur vzduchovým teploměrem při stálém tlaku hlavně na přesném určení objemu teploměrné nádobky v a na stanovení nižší temperatury t. Objem má býti stanoven alespoň na 0·05 cm^3, počáteční temperatura asi na 0·05°. To jsou požadavky dosti nesnadno splnitelné.

K tomu přistupují podmínky neméně závažné, měření v_1, změny objemu na 0·05 cm^3, měření T_1 temperatury v trubici manometrické na 0·1° a stanovení tlaku na 0·01 *cm* přesně!

Na určení objemu kapillary v' dle hořejší tabulky mnoho nezáleží, ve skutečnosti však, poněvadž objemy v a v' souvisejí a v má býti stanoveno *velmi přesně*, nutno prováděti korrekci vzhledem k objemu kapillary. Methoda kompensační, o které dříve stala se zmínka, se tu odporučuje.

Ačkoli methoda, při níž se užívá teploměru vzduchového při stálém objemu jest rozšířenější, ukazuje srovnání obou způsobů v příkladech předvedených, že methoda druhá, při níž se zařizuje teploměr na stálý tlak, jest výhodnější.

Hlavním důvodem jest tu právě ona *rovnost tlaků* při vysokých temperaturách, tak že nádobka teploměrná zachová spíše svou formu než-li při tlaku nestejném, při methodě rovného objemu.

Vedle toho představuje teploměr při stálém tlaku velmi přesný *volumometr*, tak že lze přesně jím stanoviti objem teploměrné nádobky, koefficient roztažnosti nádobky a všecky změny objemu nádobky, které po případě po zahřátí na vysokou temperaturu trvale se ukáží.

10. K přibližnému ale velmi rychlému určení vysokých temperatur navrhl zajímavou methodu *Regnault* *). Methoda tato založena jest v zatlačení zahřatého vzduchu (neb jiného plynu) z nádobky teploměrné jiným plynem do trubice kalibrované. K měření vysokých temperatur použili methody Regnaultovy *Crafts* a *Meyer.* **) Známý přístroj *V. Meyera* k určení hustoty par byl tak modifikován, že použito bylo jeho nádobky (do níž se při určování hustoty par spouští daná látka) jako nádobky

---

*) *Regnault*, Ann. de Chim. et Phys. *63.* pg. 39, 1861.

**) *J. M. Crafts Fr. Meyer*, Compt. Rend. *90.* p. 606, 1881.

teploměrné. Vzduch zahřatý na temperaturu, jíž bylo určiti, vypuzen byl pak jiným plynem, který se dal snadno absorbovati na př. chlorovodíkem nebo kysličníkem uhličitým, do trubice kalibrované, kde objem jeho při obyčejné temperatuře určen. Teploměrná nádobka byla z ohnivzdorné hlíny s vnější i vnitřní stěnou z platinového plechu a opatřená dvěma trubicemi postranními, ku vpouštění plynu a vytlačování vzduchu.

11. Jiný způsob měření vysokých temperatur jest tak zvaná *transpirační pyrometrie.* Zakládá se na závislosti vnitřního tření vzdušin (viskositě) na temperatuře.

Značí-li η_0 a η koefficienty vnitřního tření při temperatuře 0^0 a T platí dle *Barusa* *) pro dvojatomový dokonalý plyn jaký jest vodík relace

$$\eta = \eta_0 (1 + \alpha T)^{\frac{2}{3}} .$$

Proudí-li kapillarou délky L kruhového řezu o poloměru R plyn, tak že na koncích kapillary jsou tlaky P a p, pak jest dle *D. E. Meyera* objem V plynu při tlaku za čas t kapillarou prošedšího vyjádřen vzorcem

$$V = \frac{\pi t}{16\eta} \frac{P^2 - p^2}{p} \frac{R^4}{L} (1 + 4 \frac{\zeta}{R}) .$$

Při tom značí η koefficient vnitřního tření a ζ koefficient tření o stěny.

Ze spojení obou udaných vztahů vyplývá způsob měření vysokých temperatur.

Výhodou této methody jest poměrně velmi malý „teploměr", to jest příslušná kapillara platinová, která se na vysokou temperaturu zahřívá. Methodu zdokonalil *Callendar* **) upraviv ji způsobem differencialným. Hlavní vada transpirační pyrometrie záleží v tom, že hořejší vzorec není docela přesným vyjádřením závislosti viskosity na temperatuře a že měření záleží na rozměrech teploměru.

*) *C. Barus* „Die Zähigheit der Gase bei hohen Temperaturen". W. Ann. *36.* p. 358, 1889.

**) *Callendar,* Nature. *49.* p. 494, 1899.

12. Posléze v odstavci tomto budiž uvedena methoda, kterou se ustanovuje vysoká temperatura v absolutní míře *libellou tlakovou.* Přístroj tento, kterým lze měřiti velmi nepatrné rozdíly tlakové ($2 . 10^{-8}$ atmosfery a méně) sestrojil *A. Töpler**); jest to trubička skleněná, mírně zahnutá a horizontalně postavená na podstavci s mikrometrickým šroubem, tak aby v ní umístěný sloupeček kapaliny (xylolu) nalezal se uprostřed. Oba konce trubičky spojeny jsou trubicemi s válci, které jsou v prostorech o temperaturách t a T. Pokud jsou temperatury t a T sobě rovny, jsou tlaky plynu trubice vyplňujícího na obou stranách tytéž a lze libellu tlakovou tak zaříditi (mikrometrickým šroubem), aby nitkový kříž mikroskopu kryl se právě s povrchem kapaliny v libelle. Zvýší-li se temperatura T nad t pak se změní tlaky plynu v trubicích a sloupeček kapaliny v libelle se pošine. Toto pošinutí lze kompensovati otočením šroubu mikrometrického, z něhož lze dále posouditi rozdíl T a t. *Töpler* upravil spojení trubic teploměrných s tlakovou libellou takovým způsobem, aby bylo možno pomocí kohoutů přeměniti spojení konců libelly s tlakovými trubicemi, tak že rozdíl tlakový určoval se na libelle oboustraně jako veličina dvojnásobná.**)

Přednosti tlakové libelly záleží jednak v tom, že nerozhoduje při měření tlaku kubický koefficient nádoby tlakové, nýbrž pouze linearný, že tedy nezáleží na podobě a objemu nádoby, a že není při tlakové libelle škodlivého prostoru, jakým jsou kapillary při teploměrech vzduchových a pod.

II. *Methody optické.*

13. Ke starší methodě optické pyrometrie, již navrhl *Le Chatelier****) a jež se zakládala na měření intensity záření roztaveného tělesa, přibyla v poslední době velmi zajímavá methoda

---

*) *A. Töpler* „Ueber absolute Temperaturbestimmung mittels Messung barometrischer Druckdifferenzen". W. Ann. *56.* pg. 609. 1895 viz též: *M. Töpler* „Zur Gas- und Dampfdichtebestimmung mittels der Drucklibelle". W. Ann. *57.* pg. 311, 1896.

**) Zařízení toto podobá se užití kommutatoru při galvanometrech nebo otočení celé libelly o 180°.

***) Viz *V. Strouhal* „O pokroku v oboru pyrometrie za posledních pět let". Věstník česk. akad. 1894, pg. 281.

interferenční, kterou zavedl *D. Berthelot.* *) Zakládá se na myšlence následující. Hustotu plynu lze zmenšiti dvojím způsobem, buďto zahřátím nebo zmenšením tlaku. Je-li v obou případech změna hustoty stejně veliká jest index lomu týž. Pokusy potvrdily tento závěr až k temperatuře 200° přímo; ukázalo se však, že lze větu hořejší předpokládati i při temperaturách vysokých, neboť na základě své myšlenky Berthelot změřil řadu bodů tavení kovů a nalezl tak čísla s výsledky jiných auktorů velmi dobře se shodující. **)

Při methodě Berthelotově užívá se interferenčního refraktometru. Jedna část paprsků prochází trubicí naplněnou plynem a zařízenou pro zahřívání, druhá část paprsků (z téhož zdroje vycházejících) jde druhou trubicí rovnoběžnou, v níž lze plyn zřeďovati.

Zahřátím plynu v prvé trubici nastane změna v indexu lomu, která se ukáže interferenčními proužky v poli refraktometru; zřeďuje-li se plyn v druhé trubici, dosáhneme snadno téhož indexu lomu, to jest proužky v poli refraktometru zmizí. Ze zmenšení tlakového v trubici druhé lze pak počítati temperaturu v trubici prvé.

Methoda Berthelotova vyniká nad teploměrem vzduchovým, kterého se obyčejně užívá k tomu, aby se graduoval jiný stroj vhodnější pro měření stálých vysokých teplot (bodu tavení, varu) *přímým pozorováním* těchto vysokých teplot. Na formě ani na velikosti teploměrné nádobky tu nezáleží a v tom je jiná důležitá přednost methody interferenční.

14. Jiná optická methoda, prakticky dosud neprovedená, zakládá se na závislosti optické *točivosti křemene* na temperatuře. Závislost optické točivosti křemene na vysokých temperaturách studoval *Joubert.* ***) Točivost desky křemenné kolmo k ose sbroušené a 46·172 *mm* tlusté byla při

temp. =	— 20°,	0°,	100°,	350°,	448°,	840°,	1500°
	997·3,	1000,	1014·9,	1063·8,	1083·4,	1166·2,	1173·7.

*) *D. Berthelot*, Compt. Rend. 1895, 1898.
**) Viz tabulku na str. 166.
***) *Joubert*, Compt. Rend. 87. p. 497, 1878.

Mimo křemen *Mallard* a *Le Chatelier**) podrobili podobnému zkoumání baryt a diothen a nalezli, že lze závislost cirkularní polarisace křemene na temperatuře jedinou formou vyjádřiti pouze do určité temperatury (570°), nad kterou nutno oné závislosti uděliti jiný tvar. U barytu s rostoucí temperaturou dvojlomu ubývá; celkem jeví se celá závislost tak složitou, že jí nelze dosti pohodlně použíti k praktickému stanovení vysokých temperatur.

III. *Methody elektrické.*

Elektrické methody pyrometrické jsou dvě; při prvé měří se temperatura měřením odporu platinového drátu, při druhé určuje se temperatura z elektromotorické síly článku thermoelektrického.

15. Závislost odporu kovových vodičů na temperatuře studovali *Müller* (1858), *Benoit* (1873), *Schleiermacher* (1885) a jiní. K praktickému měření vysokých temperatur použil této závislosti prvně *Siemens***) (1871). K prvním pyrometrům použito drátů platinových, měděných a železných, kalibrace provedena kalorimetricky. O zdokonalení teploměru platinového***) veliké zásluhy má *Callendar* a *Griffiths*,†) kteří srovnali udání tohoto teploměru s teploměrem vzduchovým až do 600°.

Teploměr platinový vyniká velikou citlivostí, která souvisí s velkou onou přesností, se kterou lze stanoviti galvanický odpor, resp. jeho změny. Pro měření temperatur až do 1000° hodí se znamenitě, při temperaturách vyšších nejsou udání jeho spolehlivá, neboť nelze dostatečně platinový drátek teploměrný isolovati. Platinovým teploměrem *Callendar* a *Griffiths*††) určili bod varu síry (viz pg. 167.) který se dosti značně liší od výsledku měření *Regnaultova*; nejnovější stanovení této veličiny, jež

---

*) *Mallard* a *Le Chatelier*, Ann. de Chim. et de Phys. *6*. pg. 90, 1895.

**) *Siemens*, Proc. Roy. Soc. London *19*. pg. 443, 1871.

***) O elektrickém teploměru viz referát v tomto časopise r. XXV. pg. 204, 1896.

†) *Callendar*, Phil. Trans. London, 1887. Phil. Mag. *32*. pg. 104, 1891, tamže *47*. pg. 191, 1899.

††) *Callendar* a *Griffiths*, Phil. Trans. London, 1891.

provedli *Chappuis* a *Harker* hodnotu nalezenou teploměrem platinovým potvrdilo.

Callendar přijal původně mezi temperaturou a odporem platinového teploměru vztah linearný, tak že temperatura určena vzorcem

$$p_t = 100 \frac{R_t - R_0}{R_{100} - R_0},$$

kde R_0, R_{100} a R_t značí odpory při temperaturách 0°, 100° a t^0. Temperatura p_t nesouhlasila úplně se stupni Celsiovými, tak že bylo potřebí připojiti korrekci D určenou výrazem

$$D = t - p_t = \alpha \left(\frac{t}{100} - 1 \right) \frac{t}{100},$$

kde α značí konstantu. K určení této konstanty bylo potřebí třetího měření, při němž by temperatura byla známa. To se stalo změřením odporu v páře vroucí síry.

*Dickson**) navrhoval zvláště pro temperatury velmi nízké jinou formuli mezi R (odporem) a t (temperaturou) a to

$$(R + a)^2 = p\,(t + b),$$

kde a, p a b značí veličiny stálé; ale *Callendar***) ukázal, že není tato formule jednodušší, aniž snad přesnější a pro praktické užívání teploměru platinového výhodnější.

*E. B. H. Wade****) pozměnil poněkud měření odporové při teploměru tlakovém a to tak, že měřící odpor záležel ze dvou vedle sebe spojených rheostatů, jichž úhrnný odpor udržován stálým, tím že kolíček z jednoho rheostatu vyňatý zastrčen byl do příslušného otvoru na rheostatu druhém. Součet odporů obou rheostatů byl tak volen, že údání jednoho rheostatu shodovalo se i číselně s příslušnou temperaturou. Tak temperatura beze všech počtů a redukcí přímo odečítána.

16. Thermoelektrické methody k stanovení vysokých temp. prvý užil *Pouillet* (1836). Jeho thermoelektrický článek skládal se z platiny a železa, což bylo příčinou, že se methoda neujala,

---

*) *Dickson*, Phil. Mag. *44*. pg. 445, 1897.
**) *Callendar*, Phil. Mag. *47*. pg. 191, 1899.
***) *E. B. H. Wade*, Proc. Camb. Soc. *9*. pg. 526, 1898.

neboť nebyla té doby známa anomalie, která nastává při železe v tmavočerveném žáru, kterou teprve nalezl a vysvětlil *Tait* r. 1872.

Myšlenky znovu se ujal *Becquerel* (r. 1863), jenž srovnával článek z platiny a palladia s jinými články platinu obsahující. Četný rozdíl a nesouhlas zaviněn byl nečistotou užitých kovů, tak že důležitým bylo oddělení jiných kovů od prodejné platiny, zvláště iridia a rhodia, které provedli *Deville* a *Debray.* *) *Tait* použil k methodě thermoelektrické článku z platiny a ze slitiny platiny a iridia, podobně *Knott* a *Mac Gregor*, **) kteří sestavili články ze slitin různě bohatých iridiem. Nejvýše bylo možná vytvořiti slitinu obsahující 20% iridia, slitiny s větším obsahem iridia nedaly se dobře mechanicky spracovati.

Le Chatelier ***) navrhl článek z platiny a ze slitiny platiny a rhodia. Článek tento srovnali s teploměrem vzduchovým *Holborn* a *Wien* r. 1892.

Podrobné zkoumání vhodnosti článků thermoelektrických z platiny a slitin platiny sestavených pro účely pyrometrické provedeno bylo v letech 1882 až 1887 ve Washingtonských laboratořích U. S. Geological Survey. Článek platina-platiniridium srovnáván s teploměrem vzduchovým až k temperatuře 1100°. Závislost elektromotorické síly na temperatuře okázala se býti velmi pravidelnou, citlivost jeho o něco málo vyšší v žáru jasně červeném než při žáru tmavém. Zároveň se ukázalo, že thermoelektrická mohutnost článku thermoelektrického se nemění po zahřátí na vysoké temperatury i když se místo spojené poněkud poruší vlivem žáru a poloroztopených látek místo to obalujících.

Le Chatelierův článek z platiny-platinrhodia zavedl do Anglie *Roberts-Austen* †) upraviv jej tak, že lze fotograficky zaznamenávati vysoké temperatury při tavení kovů a pod.

---

*) *Deville* a *Debray*, Compt Rend. *81.* pg. 839, 1875.

**) *Knott* a *Mac Gregor*, Trans. Roy. Soc. Edinb. *28.* pg. 321, 1876.

***) *Le Chatelier*, Journ. de Physique *6.* pg. 23, 1887, viz též *Le Chatelier* a *Boudouard* „Mesure des températures élevées". Paris 1900.

†) Viz *Alfred Stansfield* „On some Improvements in the Roberts-Austen Recording Pyrometr, with Notes on Thermo-Electric Pyrometry." Phil. Mag. *46.* pg. 59, 1898.

K měření vysokých temperatur hodí se thermoelektrické články: platina-palladium, platina-platiniridium a platina-platinrhodium. Prvého článku nelze užiti při temperaturách zvláště vysokých, z ostatních dvou nelze dáti jednomu nebo druhému přednost. Starší článek platina-platiniridium jest citlivější vzhledem ku druhému a to v poměru 100 : 76,*) článek platina-platinrhodium vydrží snad ještě vyšší žár než předešlý. Jinak jsou obě slitiny ohebné, vysokým žárům velmi dobře vzdorují a jich vlastnosti themoelekrické se nemění.

Bylo zkoušeno na 50 jiných slitin platiny, ale žádná se tak neosvědčila jako dvě zmíněné.

Uvažme vedle těchto výtečných vlastností jmenovaných slitin všechny výhody měření elektromotorické síly článku thermoelektrického proti měření odporu vůbec. Při článku thermoelektrickém nezáleží tolik na isolaci jeho, jako při teploměru platinovém. Nezáleží dále na připojovacích drátech, které vedou k vlastnímu článku, aniž také na rozměrech a tvaru článku.

Na článek thermoelektrický mají plyny v peci se vyvinující jen nepatrný vliv; měření provádí se velmi rychle jediným odečtením, při methodě nullové odstraňují se snadno zároveň všechny vlivy cizí. Souvislost měřené veličiny s temperaturou jest velmi jednoduchá a citlivost methody jest v různých tepelných výších téměř stálá.

Všecky tyto okolnosti činí článek thermoelektrický v té dvojí formě platina-platiniridium a platina-platinrhodium velice vhodným pro měření temperatur vysokých.

17. Přehlížejíce tyto pokroky, jež zaznamenává v pyrometrii doba moderní, můžeme konstatovati úspěch neobyčejný.

V Německu v říšském fysikálně-technickém ústavu zdokonalili vzduchový teploměr pro účely pyrometrické *Holborn, Wien* a *Day*; v Anglii *Callendar*, *Griffiths* a jiní ukázali, kterak lze s výhodou užiti teploměru platinového k přesnému určení temperatur až do 1000°, ve Francii prakticky řešena pyrometrie jednak *Le Chatelierem,* jednak *Dan. Berthelotem*, jehož optické methody lze použiti i při nejvyšších temperaturách.

*) Viz *Barus*, Mag. Phil. *34*. pg. 376, 1892.

O fysikálních vlastnostech hmoty za velmi nízkých teplot.

Referuje Dr. **Bohumil Kučera**,
assistent vysokých škol technických v Darmštatě.

Úvod. Realisace a měření nízkých teplot. Škála temperaturní má jistou zvláštnost: Kdežto směrem k teplotám vyšším zatím nemá theoretické meze, vedou nás úvahy thermodynamické k tomu, abychom přijali jakousi dolní mez pro teploty nízké — absolutní bod nullový. V době nejnovější podařilo se důmyslu vědy realisovati teploty, které se tomuto absolutnímu bodu nullovému velmi blíží. Ovšem byl do nedávna kruh učenců, kteří za těchto podmínek experimentovati mohli, velmi úzký. Ale na počátku druhé polovice posledního desítiletí sestrojený Lindeův stroj na zkapalnění vzduchu nachází se dnes již v mnoha vědeckých ústavech, tak že počet pracovníků v oboru nízkých temperatur značně se rozhojnil. Ač sice práce s nejnižšími nám známými teplotami, jichž lze pouze pomocí tekutého vodíka dosáhnouti, ještě asi na dlouho zůstane omezena na několik málo badatelů, disponujících mimořádnými materielními prostředky, jsou přece temperatury dosažitelné pomocí tekutého vzduchu dostatečně nízké, aby skýtaly velmi široké pole pro badání fysikální. Není tudíž bez zajímavosti přehlédnouti dosud nalezené výsledky, basis to pro nové další práce. Dříve však než k vlastní látce přikročíme, chceme krátce poukázati k obvyklým prostředkům, jimiž nízkých teplot docilujeme a k základním methodám, jak je měříme.

Společným charakteristikem všech způsobů realisace nízkých teplot jest okolnost, že vždy se užívá negativního tepla skupenského (vypařovacího) zkapalnělých nebo pevných plynů. Nejedná-li se o teploty příliš hluboké, stačí užiti směsi pevné kyseliny uhličité (CO_2) a aetheru, pomocí níž dá se udržeti po delší čas teplota na -78^0C (Cailletet a Colardeau, Journ. de phys. (2) 7, pg. 430, 1888.). Není to však negativní teplo rozpouštěcí, nýbrž skupenské teplo sublimační pevné CO_2, které teplotu na tak nízký stupeň sráží; aether koná úkol podružný, neslouže k rozpouštění kyseliny uhličité, nýbrž pouze k tomu, aby ji, ježto je velmi špatným vodičem tepla, proměnil v tekutou směs lépe vodivou a proto rychleji chladící. Nižších teplot docílíme, snížíme-li tlak sublimujících par; tak určili H. du Bois a Wills (Verh. d. deut. phys. Ges. 1., pg. 168, 1899) teplotu sublimace pro různé tlaky par, užívajíce čistého sněhu CO_2 bez aetheru. Našli

pro tlak par	5	40	110	225	510	638	760	885 *mm* rtuti
teplotu	—124°	—112°	—102°	—95°	—85°	—81,5°	—79,2°	—77° C.

Hodnota —124°C shoduje se velmi dobře s číslem dříve Villardem a Jarrym nalezeným. Z těchto dat vysvítá, že je nutno bráti ohled na stav barometrického tlaku, užívá-li se sněhu CO_2 ku kalibraci teploměru (na př. toluolového), jakožto bodu základního. Pro docílení poněkud nižších teplot užívá se často také vypařování tekutého aethylenu. Jest pak (Olszewski, Compt. Rend. 99, pg. 133, 1884)

při tlaku par	750 *mm* Hg	jeho teplota	—103,0° C
	107 „	„ „	—115,5° C
	31 „	„ „	—139,0° C
	9,8 „	„ „	—150,4° C.

Chladidlem nejčastěji užívaným jest však v poslední době tekutý vzduch, jehož značné množství lze nyní poměrně snadno obdržeti pomocí Lindeova stroje. Základní myšlenkou Lindeovou bylo, užiti v koloběhu vzduchu, vlastní expansí z vysokého tlaku na tlak nižší ochlazeného k ochlazení jiného množství vzduchu silně komprimovaného, který teprve expandovati má. Dle klassických pokusů Joule-Thomsonových z r. 1854 ochladí se totiž plyn, zmenší-li se náhodou expansí jeho tlak z p_1 na p_2 atmosfér o obnos úměrný tlakové differenci $p_1—p_2$ a obráceně úměrný čtverci absolutní teploty T. Toto ochlazení je tím menší, čím spíše odpovídá plyn představě plynu ideálního. Své výsledky vyjadřili Joule a Thomson (nyní lord Kelvin) vzorcem

$$t = A \,.\, (p_1 - p_2) \left(\frac{273}{T}\right)^2,$$

kdež t jest ochlazení ve stupních Celsiovy škály, A pak konstanta, jejíž hodnota pro vzduch je 0,276, pro kyselinu uhličitou 1,388. Ochlazení vzduchu je dle tohoto vzorce velmi malé, obnášejíc asi $\frac{1}{4}^{0}$ C pro tlakovou differenci jedné atmosféry. Účinek však kumuluje se dle „principu protiproudového (regenerativního)", svrchu krátce dotčeného, jehož účelné užití jest právě Lindeovou zásluhou. Zajímavou jest následující poznámka (Linde, Engineer, 82, pg. 509, 1897): Ochlazení dosažené expansí jest dle hořeního vzorce úměrno tlakové differenci $p_1 - p_2$, ale práce spotřebovaná při kompressi nezávisí na ní, nýbrž na poměru $\frac{p_1}{p_2}$. Proto jest výhodným pracovati s dosti vysokými tlaky tak, aby poměr $\frac{p_1}{p_2}$ byl pokud možno malý při velkém $p_1 - p_2$; u strojů nyní stavěných jest $p_1 = 200$, $p_2 = 16$ atmosférám. Prvý stroj Lindeův s úspěchem pracující datuje se z května r. 1895. Téměř současně sestrojil podobný stroj Hampson, později pak na týchž principech Tripler. Mezi Hampsonem a Lindem byl veden dlouhý spor prioritní, o němž se zde nelze rozepisovati. Popisy různých těchto konstrukcí najde čtenář v následujících knihách:

Julien Lefèvre: La liquéfaction des gaz et ses applications (Paris, Gauthier-Villars, Masson et Cie, 1900, 176 pp.), W. L. Hardin: The Rise and Development ot the Liquefaction of Gases (New York, Macmillan Co., 1899, VIII + 250 pp.). Německý překlad obstaral prof. J. Traube pod titulem: Die Verflüssigung der Gase (Stuttgart, Enke, 1900, VIII + 184 pp.). Menší a méně cenný spisek jest:

J. Cauro: La liquéfaction des gaz (Paris, Gauthier-Villars, 1899, 79 pp.). Pro práci s Lindeovým strojem najdou se důležité poznámky u O. Müllera, Zeitschr. für angew. Chemie, 1899, Heft 31 u. 32.

Užívajíce tekutého vzduchu jakožto chladidla nesmíme zapomínati, že není to jednoduchá homogenní látka, nýbrž směs sestávající hlavně ze dvou komponent, tekutého dusíku a kyslíku. Není tudíž teplota vypařovací jednoduchou funkcí tlaku; bod varu čistého tekutého dusíka leží totiž za normálního tlaku již při ca. — 194°C, bod varu kyslíku ale značně výše, při ca. — 182°C.

Proto vypařuje se ze směsi obou nejprve hlavně dusík, a zbývá nám tudíž tekutina stále na kyslík bohatší. Teplota směsi tedy s časem poněkud stoupá. Jako názorný příklad podáváme údaje, jedné z prací Holbornových a Wienových (Wied. Ann. 59, pg. 213, 1896). Tekutý vzduch nacházející se v Dewarově lahvi (viz později) měl počáteční teplotu —189,1°C; postupem času klesla

po	6	11	18	28	32	37 minutách
na	—188,5°	—187,8°	—186,0°	—185,7°	—185,3°	—184,0°C.

Tekutý vzduch, tak jak nám jej Lindeův stroj podává, má asi 23,1% kyslíku; zmenší-li se vypařováním jeho objem na polovici původního, obsahuje již 37,5% kyslíku; při objemech rovných

	$\frac{30}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{5}{100}$	původního
má	50%	60%	67,5%	77%	88%	kyslíku

(Ewing, Proc. Soc. of Arts 20. března 1898).

Ježto, jak vidno, je složení tekutého vzduchu funkcí objemu při vypařování zbývajícího, může dle tohoto býti přibližně odhadnuto. Aby pak týmž způsobem mohla býti temperatura směsi odhadnuta, studoval E. C. Baly (Phil. Mag. 49, pg. 517, 1900) bod varu tekutého vzduchu za obyčejného tlaku jakožto funkci jeho složení. Pro mnohá měření, jež vyžadují delšího času, jest však změna teploty, byť i pomalá, přece závadou. V těch případech neužívá se za temperaturní lázeň tekutého vzduchu, nýbrž tekutého kyslíku, kterýž jakožto látka jednoduchá má pro určitý tlak par též určitý bod varu. Změna jeho bodu varu s tlakem čili, jinak řečeno, napjetí jeho nasycených par jakožto funkce temperatury byla častěji již studována, a sice Wroblewskim (Wied. Ann. 25, pg. 371, 1885), Estreicherem (Phil. Mag. 40, pg. 454, 1895), Olszewskim (Nature 54, pg. 377, 1896) a nejnověji Balym (l. c.). Z měření Estreicherových uvádíme, že bod varu za obyčejného tlaku při — 182° C ležící, klesne snížením tlaku na 8 *mm* Hg až na — 211,2° C. Ale není toto nejnižší teplota, jíž lze dosíci; Dewarovi podařilo se r. 1898 zkapalniti vodík (Proc. Roy. Soc. 63, pg. 256, 1898) a brzo na to i určiti jeho normální bod varu (Chem. News. 77, pg. 261 a 282, 1898). Snížením tlaku dosáhl pak (Chem. News. 79, pg. 133, 1899 a C. R. 129, pg. 451, 1899) tak nízkých teplot, že mohl vodík a později i helium dokonce ztužiti (C. R. 129, pg. 434, 1899). Určil bod tání vodíka na ca. 16° až 17° absolutní škály, tedy asi na — 257° C. Nejnižší temperaturu, jíž dosáhl, udává na 14° až 15° abs. Ovšem potřeboval k pokusům těmto výjimečných materielních prostředků — všeobecně lze říci, že teploty, jež možno dnes studovati i v laboratořích menších bez velikých hmotných obětí, nepřesahují — 200° C.

Obrátíme se nyní krátce k druhé základní otázce, kterou nutno předeslati: Jak se měří velmi nízké teploty? Fundamentálním apparátem měřícím zůstává ovšem teploměr vodíkový; jedná se však o to, až ku kterým temperaturám můžeme sestoupiti, aniž by ukazoval anomalií, které oprávněně můžeme očekávati poblíže kritického bodu vodíku. Prvou odpovědí na tuto zásadní otázku byla práce Olszewskiho (Wied. Ann. 31, pg. 58, 1887), kterýž ukázal, že teploměry naplněné kyslíkem, dusíkem nebo kysličníkem dusičitým (NO) udávaly zcela blízko u svých bodů kritických teploty lišící se nejvýše o 1° C od oněch, které udával teploměr vodíkový, ovšem bylo-li množství plynu v teploměrech těch vhodně voleno. Totéž prokázal Chappuis (Trav. et Mém. du Bureau Intern. des Poids et Mes. 6, pg. 92, 1888) pro teploměr plněný kyselinou uhličitou. Z toho lze per analogiam souditi, že údaje teploměru vodíkového ještě při — 200° C jsou na 1° C správné. Ale Olszewski (Wied. Ann. 59, pg. 184, 1896) podal důkaz ještě direktnější: Srovnal totiž jeho údaje s údaji teploměru plněného heliem, kteréž má asi o 20° C nižší bod varu než vodík, a našel při — 210,6° C téměř úplně dokonalý (na 0·04°) souhlas. Usuzuje z toho, že lze bez závady teploměru vodíkového užiti až k — 230° C. Ale manipulace teploměrem plynovým není pohodlná a rovněž i jeho tvar a velikost, a proto užívá se ho i při nízkých teplotách téměř výhradně pouze ku kalibraci teploměrů jiných.

Z ostatních teploměrů, založených na pozorování roztažitosti látek, nehodí se teploměr lihový pro teploty nižší, protože líh značně adheruje na stěnách kapilláry a nestejnoměrně se roztahuje. Chappuisova teploměru toluolového lze užívati bez závady asi do —75° (Beibl. zu den Ann. 18, pg. 174, 1894). Ale podařilo se najíti tekutinu, která dostatečně vyhovuje požadavkům látce thermometrické kladeným i za teploty tekutého vzduchu. Jest to petrolaether, kterýž dle údajů F. Kohlrauschových (Wied. Ann. 60, pg. 463, 1897) počíná tuhnouti teprve při —190° C. Teploměru jím plněného lze však až k této teplotě užiti, chladí-li se poznenáhla z dola nahoru (t. j. ponořuje-li se na př. do tekutého vzduchu zcela volně). Při tom má petrolaether neobyčejně veliký koëfficient roztaživosti, největší z dosud známých u látek kapalných a pevných, tak že na př. objem za —190° C jest pouze $^4/_5$ objemu při 0° C a $^3/_4$ objemu při +30° C. (K snazšímu srovnání uvádíme, že objem rtuti při —40° C jest ještě $^{14}/_{15}$ objemu při +360° C). Koëfficient roztaživosti není však konstantní, nýbrž klesá s teplotou, tak že jeho střední hodnota mezi 0° C a —188° C je 0,00111, mezi 0° a +22,7° pak 0,00145. Kohlrausch vyslovil domněnku, že nízký bod tuhnutí petrolaetheru je zjevem obdobným snížení bodu mrazu u roztoků, neboť není to látka jednotná, nýbrž směs, což však má za následek také nemalou vadu, totiž, že není to směs dosti precisně a určitě definovaná.

Nejpohodlnějšími methodami pro měření nízkých teplot jsou však methody indirektní, založené na vlastnostech elektrických, totiž methoda thermoelektrická, a methoda založená na změně odporu kovového drátu s teplotou. Obě mají tu výhodu, že část apparátu, která nalézati se musí v místě, jehož teplota se má určiti, je relativně velmi malá a že odečtení koná se velmi pohodlně na galvanometru (jehož citlivost lze mimo to v dosti širokých mezích regulovati) a, což je velmi důležito, že „teploměr“ přijímá teplotu měřenou velmi rychle, téměř okamžitě.

Prvá methoda, jak bylo již řečeno, zakládá se na změně elektromotorické síly thermoelektrického článku, jehož jeden kontakt (místo stykové) má teplotu stálou (obyčejně tajícího ledu), kdežto teplota druhého kontaktu se mění. Wroblewski (Wied. Ann. 25, pg. 387, 1885) užil kombinace měď-argentan a kalibroval svůj článek (jeden kontakt byl stále na 0° C) teplotami varu vody, aethylenu za normálního tlaku (—103° C) a za tlaku asi 30 *mm* Hg (—139° C). Z těchto měření vypočetl interpolační vzorec pro teplotu, jakožto funkci elektromotorické síly. Srovnávaje pak údaje svého článku při — 193° C s údaji teploměru vodíkového, našel dobrý souhlas, což vlastně, uvážíme-li vzdálenost extrapolace, jest dosti podivno. Olszewski (Wied. Ann. 56, pg. 134, 1895) naopak dokazuje přesvědčivě, že tohoto článku lze užiti pouze pro teploty, při nichž přímo byl teploměrem vodíkovým kalibrován, kdežto každá extrapolace dává hodnoty zcela falešné. Holborn a Wien (Wied. Ann. 59, pg. 213, 1896) studovali vhodnost thermoelektrického měření nízkých teplot článkem železo-konstantan, kterýž kalibrovali pomocí pevné kyseliny uhličité a tekutého vzduchu. Našli pak pro vztah mezi teplotou t a elektromotorickou sílou x (Mikrovoll) vzorec

$$t = -0{,}0178\,x - 0{,}0000008784\,x^2.$$

Ladenburg a Krügel (Chem. Ber. 31, pg. 1818, 1898, ibid. 32, pg. 637, 1899, Zeitschr. für compr. u. flüss. Gase 3, pg. 61, 1899) vytýkají však, že vliv quadratického členu je příliš veliký, obnášeje až 40%, a proto použivše ještě teploty varu aethylenu ku kalibraci, vypočetli vzorec kubický

$$t = -24{,}948\,x + 1{,}6744\,x^2 - 0{,}2248\,x^3,$$

kterýž zkoušen za různých teplot dával dobrý souhlas (na 1° C). Cailletet a Colardeau (Journ. de phys. 17, pg. 286, 1888 a C. R. 106, pg. 1489, 1899) shledali dobrou shodu údajů článků platina-platinrhodium a železo-měď s teploměrem vodíkovým, ale ovšem užili jako nejnižší temperatury pouze — 102° C. Velice důležity pro thermoelektrické měření nízkých teplot jsou poznámky ředitele kryogenického laboratoria v Leidenu prof. H. Kamerlingh-Onnesa (Comm. Phys. Lab. Leiden No. 27 a 51; Zeitschr. f. compr. u. flüss. Gase 2, pg. 45, 1898), který vrací se ku kombinaci měď-argentan, protože se odpor argentanu relativně velmi málo teplotou mění.

Udává, jakých kautel (hlavně vzhledem k jakosti drátu argentanového) dlužno dbáti, aby údaje byly spolehlivé, jakož i sestrojení elementu, jenž celý chráněn jest obalem kaučukovým a sklem, a jehož kontakt přiletován je k massivnímu kousku mědi, který jedině přijde nechráněn do místa, kde teplota se měří. Sestrojil také zvláštní kommutátory, které vylučují vznik podružných thermoelektromotorických sil, ježto pouze rtuť se rtutí se stýká. U všech uvedených kombinací stává se však měření nejistým, jakmile se blížíme neutrálnímu bodu, a u všech musí se časem prováděti nová kontrolla pro časové změny elektromotorické síly.

Druhý způsob elektrického měření nízkých teplot zakládá se, jak bylo již řečeno, na změně galvanického odporu kovů teplotou. Měření k tomu zjevu se vztahující konali už r. 1885 Cailletet a Bouty (C. R. 100, pg. 1188, 1885), kteří určili střední koefficient temperaturní při nízkých teplotách pro spec. odpor některých kovů (Ag, Al, Mg, Sn, Fe, Cu) a Wroblewski (Wied. Ann. 26, pg. 27, 1885), který měřil pouze odpor mědi ale užil nižších teplot.

Našel pro relativní vodivosti

za teplot	0°	—103°	—146°	—193°	—200°
čísla	1	1,743	2,657	6,231	8,729.

Stoupá tudíž vodivost daleko rychleji, nežli klesá temperatura, tak že při stejném dalším vzrůstu dosáhla by hodnoty nekonečné ještě před absolutním bodem nullovým. Všeobecně dá se vyjádřit závislost odporu na teplotě nebo naopak funkcí druhého stupně a ježto odpor snadno a přesně se dá měřiti, může drát pomocí vodíkového teploměru kalibrovaný sloužiti za pohodlný teploměr pro nízké teploty. Jedná se jen o vhodnou volbu kovu, neboť musí užitý drát splňovati velice důležitou podmínku „stálosti bodu nullového", to znamená, že i po náhlých změnách temperaturních se musí odpor vždy vraceti pro tutéž teplotu k téže hodnotě. Již Cailletet a Colardeau (Journ. de phys. 17, pg. 286, 1888), Guillaume (Arch. de Genève, 1888) a později Witkowski (Bull. int. de l'Acad. des Scien. Cracovie květen 1891, pg. 188) užili platiny, která důležitou onu podmínku splňuje a mimo to má tu velikou výhodu, že křivka znázorňující vztah teploty a odporu velmi se blíží přímce. To je patrno na př. z měření Olszewskiho (Wied. Ann. 56, pg. 134, 1895), který našel

pro teploty	0°	—78,2°	—182,5°	—208,5° C
relativní odpory	1000	800	523	453,

tak že předpoklad lineární závislosti nevnáší do měření větší chybu než $0,5^0$ až 1^0 C. Totéž potvrzuje se velice pečlivým srovnáním teploměru platinového s vodíkovým až k teplotě tekutého vzduchu sahajícím, jež provedli Holborn a Wien (Wied. Ann. 59, pg. 213, 1896), kteří našli pro závislost teploty t na odporu R vzorec o malém členu quadratickém

$$t = -258,3 + 5,0567 . R + 0,005855 . R^2.$$

Právě uvedeného fakta, že vztah mezi odporem a temperaturou jest téměř lineární, užil Callendar, který navrhl, aby k měření vysokých teplot užívalo se t. zv. teplot platinových, což později Dewar rozšířil i na teploty nízké.

Jest pak princip tohoto zavedení následující: „Změna teploty odpovídající střední změně odporu platinového drátu pro 1^0 C mezi 0^0 a $+100^0$ C budiž přijata za „stupeň platinový“, jímž teplota i pod 0^0 a nad 100^0 budiž měřena.“ V grafickém znázornění znamená toto ustanovení — za „graf“ vztahu mezi teplotou a odporem budiž považována přímka, probíhající skutečnými, pokusem zjištěnými body u teplot 0^0 a 100^0 C. Jest tudíž „platinová teplota“, již Callendar na rozdíl od škály Celsiusovy označuje symbolem pt, určena odporem R, je-li odpor při 0^0 a 100^0 C R_0 a R_{100}, jakožto

$$pt = 100 . \frac{R - R_0}{R_{100} - R_0}.$$

Rozdíl mezi platinovou teplotou pt a údaji teploměru vodíkového t jest velmi přesně dán parabolickou funkcí (Griffiths, Phil. Mag. (5), 34, pg. 515, 1892)

$$t - pt = \delta \left\{ \left(\frac{t}{100}\right)^2 - \frac{t}{100} \right\};$$

δ jest individuellní konstanta, pro různé dráty různá (obyčejně kolem 1,5), kteráž určiti se musí ze srovnání obou teploměrů, platinového a vodíkového při nějaké třetí teplotě, pokud možno od 0^0 i 100^0 vzdálené, aby křivost dostatečně vešla v počet. Za tuto volili Callendar a Griffiths (Proc. Roy. Soc. 49, pg. 56, 1891) teplotu vroucí síry, danou při barometrickém tlaku h vzorcem

$$t = 444,53 + 0,082 (h - 760)$$

a pro teploty nízké bod varu tekutého kyslíka, kterýž jest dle Callendara (Phil. Mag. 47, pg. 191 a 519, 1899)

$$t = -182{,}5 + 0{,}82\,(h - 760).$$

Griffiths a Clark (Proc. Cambrigde Phil. Soc. 8, pg. 2, 1893) vypočetli extrapolací pro několik různých platinových teploměrů teplotu, při níž odpor platiny stává se nullou, a našli jakožto střed $-273{,}9^0$ C. Dickson (Phil. Mag. 44, pg. 445, 1897) udává pro vztah mezi odporem R a teplotou t vzorec se třemi konstantami a, b, c

$$(R + a)^2 = c\,(t + b),$$

dle něhož (Phil. Mag. 45, pg. 528, 1899) vypočítal tabulku pro převod Dewarových údajů na teploty vodíkové. Pro konstanty Dewarova teploměru našel hodnoty $a = 20{,}529023$, $b = 1048{,}4396$ a $c = 0{,}53270015$. Udává současně práce, pro něž jeho redukční tabulka platí. Odpor thermometrického drátu měří se z pravidla methodou Wheatstoneova mostu, kterouž lze (Wade, Proc. Cambr. Soc. 9, pg. 526, 1898) modifikovati tak, že odpor rheostatu udává přímo teplotu.

Jen k vůli úplnosti zmíniti se sluší o návrhu nové magnetické methody pro měření temperaturní, pocházejícím od G. W. Meyera (Elektrochem. Zeitsch. 5, pg. 6, 1898), kterýž používati chce k měření teplot vysokých i nízkých známé vlastnosti železa a kobaltu, že ztrácí při vysoké teplotě schopnost magnetisace, jak remanentní tak indukované, ale při následujícím ochlazení opět dřívější susceptibility nabývají; udává dokonce i uspořádání celého měření, ač sám pokusů žádných, alespoň dosud, nekonal.

Mechanika a akustika. Po předběžných úvahách minulého oddílu můžeme přikročiti k vlastnímu thematu našeho referátu a tu, pokračujíce dle obvyklého rozdělení fysiky, počínáme mechanickými vlastnostmi hmoty za velmi nízkých teplot. V oboru tomto nebylo mnoho pracováno, zvláště schází namnoze přesná měření. Údajů obecných najde se více, jako na př., že kaučuk ponořený do tekutého vzduchu stane se tak tvrdým, že jej lze úderem kladiva roztříštiti jako kus skla (Warburg, Zeitschr. f. compr. u. flüss. Gase 2, pg. 47, 1898), že pevnost kovů proti zlomení s klesající teplotou velmi značně roste (Dewar, Roy. Inst.

Great Britain, 19. ledna 1894) a p. v. Měrné pokusy o pevnosti kovů konal Dewar (Chem. News. 71, pg. 192 a 199, 1895), kterýž našel pro nosivost kovových drátů, průměru 0,098 angl. palce za teploty obyčejné (+ 15° C) a tekutého vzduchu (ca. — 182° C) následující hodnoty, vyjádřené v angl. librách: Pro ocel 420 ℔. při 15° a 700 ℔. při — 182° C, měkké železo 320 a 700, měď 200 a 300, mosaz 310 a 440, argentan 470 a 600, zlato 255 a 340, stříbro 330 a 420. Jest tedy pevnost těchto kovů značně větší při teplotě tekutého vzduchu (u železa více než dvakráte), ale nedoznává trvalých změn; vrátíme-li se k původní teplotě, vrací se též dřívější hodnota pevnosti. Daleko přesnější než uvedená měření Dewarova jsou nejnovější měření vlivu teploty na pružnost kovů, která provedl Cl. Schaefer (Verh. d. deut. Phys. Ges. 2, pg. 122, 1900). Užil dvou nízkých teplot — tající kyseliny uhličité a tekutého vzduchu, a určil temperaturní koëfficient pro modul pružnosti a torse, jakož i absolutní hodnoty těchto modulů pomocí obvyklých tří method, měřením prodloužení, methodou torsních kyvů a statickou torsí. Výsledky jeho jsou zajímavé: Zjistil, že v intervallu + 20° C a — 186° C je modul pružnosti E i torse F lineární funkcí temperatury, tak že E_t a F_t dají se vyjádřiti vzorci

$$E_1 = E_{20}\,[1 - \alpha\,(t - 20)]$$
$$F_1 = F_{20}\,[1 - \beta\,(t - 20)]\,.$$

Temperaturní koëfficient β je větší než α, tak že μ koëfficient příčné kontrakce (Poissonův, viz Strouhal, Mechanika, Praha 1901, pg. 591 a 595) roste s temperaturou, což se dá z kinetické theorie hmoty předvídati. Ježto pak, jak známo,

$$2\,(1 + \mu_t) = \frac{E_1}{F_1} = \frac{E_{20}\,[1 - \alpha\,(t - 20)]}{F_{20}\,[1 - \beta\,(t - 20)]}\,,$$

plyne

$$1 + \mu_t = (1 + \mu_{20})\,\frac{1 - \alpha\,(t - 20)}{1 - \beta\,(t - 20)}\,.$$

Vypočítáme-li z tohoto vzorce teplotu patřící k hodnotě $\mu_t = {}^1/_2$, obdržíme číslo velmi blízké teplotě tání dotyčného kovu. Tak na př. pro platinu je to 1741° C, kdežto teplota tání pozorovaná obnáší 1761° C; podobný souhlas jeví se i u niklu

(1391° a 1400°), stříbra (990° a 970°), mědi (1169° a 1100°) a železa (1470° a 1500°). U palladia je největší rozdíl hodnoty počítané a opravdu pozorované (1724° a 1587°). O koefficientech α a β platí, že jsou tím větší, čím větší je koefficient tepelné roztaživosti, neboli čím nižší je teplota tání kovu. Tak na př. je pro těžko tavitelnou platinu vzrůst modulu torsního ΔF pro 100° C v procentech vyjádřený roven 1,78%, vzrůst modulu pružnosti $\Delta E = 0{,}732\%$, pro snadno tavitelné aluminium $\Delta F = 24{,}72\%$ a $\Delta E = 21{,}32\%$, pro olovo dokonce $\Delta F = 78{,}67\%$. Dále pozoroval Schaefer, že mez pružnosti značným ochlazením silně stoupla, a což je velice zajímavo, že při teplotě — 186° úplně mizí dopružování.

Z mechaniky kapalin lze uvésti pouze jedinou práci, totiž E. C. de Vriesova měření vlivu nízké teploty na kapillární elevaci aetheru (Arch. Néerl. Scienc. 28, pg. 210, 1894 a referát o inaugurální dissertaci téhož v Beibl. 18, pg. 643, 1894). Tento badatel upevnil kapillární trubičku v ose širší roury skleněné (8,3 *mm* průměru) a naplniv tuto přiměřeným množstvím aetheru, zatavil ji po evakuaci; tento apparát pak vystavil různým teplotám počínaje — 102° až ku kritické teplotě aetheru (ca. + 193,6° C). Pro intervall — 102° až + 160° našel lineární závislost elevace h na teplotě, vyjádřenou vzorcem

$$h = h_0\,(1 - 0{,}00496 \,.\, t).$$

Určil také závislost kapillární konstanty za určité teploty na poměru této teploty vyjádřené v absolutní škále k absol. kritické teplotě aetheru čili na $\vartheta = \dfrac{273 + t}{273 + 193{,}6}$ a našel

pro $\vartheta =$	1	0,9772	0,9265	0,8542	0,7540	0,6270	0,3660
kapillární konstanty	0	4,52	20,44	47,63	91,48	152,41	291,06.

Stoupá tedy kapillární konstanta, kteráž za kritické teploty je rovna 0 (meniskus mizí), značně s klesající teplotou. O kapillárních konstantách a p. tekutých plynů samých je dosud publikováno jediné měření Forchovo (Phys. Zeitschr. 1, pg. 177, 1900), který našel methodou kapillárních trubic pro povrchové napjetí tekutého vzduchu hodnoty od 12,07 do 12,65 $\frac{dyn}{cm}$, dle různého jeho složení. Celkem jsou hodnoty ty asi 6,6kráte menší než u vody; mimo toto měření najdeme pouze qualitativní poznámky, jako na př., že kapillární konstanta tekutého kyslíka je sice značná, ale nedosahuje oné čisté vody (Dewar, Electrician 29, pg. 169, 1892), že tekutý fluor nestoupá v kapilláře tak vysoko, jako tekutý kyslík (Moissan a Dewar, C. R. 125, pg. 505, 1897) a p. v. Forch (l. c.) měřil také vnitřní tření tekutého vzduchu pomocí rychlosti výtoku kapillarou; našel pro tekutinu hustoty asi 0,93 až 0,97 koëfficient vnitřního tření 0,0033, asi 4kráte menší než u vody.

Do mechaniky spadají vlastně též měření hustot (spec. hmot) tekutých plynů, kteréž však uvedeme později ve spojení s ostatními údaji v celkovém referátě o tepelných vlastnostech tekutých plynů. Zde chceme se pouze ještě zmíniti o novější práci Witkowskiho (Bull. de l'Acad. des Scienc. Cracovie, 1899, pg. 138), který za účelem určení poměru specifických tepel vzduchu při různých poměrech tlakových a temperaturních měřil rychlost zvuku pomocí Kundtových trubic. Užil dvou tónů (o 6200 a 3600 kmitech) a dvou různých trubic (průměru 20,8 *mm* a 8,6 *mm*), aby mohl applikovati na své výsledky známé korrekční vzorce Kirchhoffovy; tlak měnil od 1 do 120 atmosfér a teploty od 0^0 do -140^0 C. Našel, že za teploty 0^0 roste rychlost zvuku s rostoucím tlakem, a sice do 100 atm asi o $7^0/_0$ původní hodnoty; ale při $-78,5^0$ C pomalu klesá asi do tlaku 40 atm. (o ca. $1^0/_0$) a odtud pak do tlaku 100 atm. rychle roste (asi o $7^0/_0$). Za teplot ještě nižších nejeví už tento obrat, nýbrž klesá stále s rostoucím tlakem, a to za -103^0 C pomalu, za -140^0 C velmi rychle.

Relativní hodnoty Witkowskim nalezené jsou

za teploty . . .	0	-35^0	$-78,5^0$	$-103,5^0$	-130^0	-140^0
a tlaku 1 atm.	1,000	0,932	0,844	0,785	0,721	0,683
tlaku 30 atm. .	1,001	0,927	0,824	0,749	0,598	0,444.

Z jeho dat pro poměr spec. tepel vypočítané hodnoty stoupají od

1,43 při 10 atm. a 0° C a 1,48 při 10 atm. a — 78,5° C
až ku 1,64 „ 100 „ „ 0° C „ 2,30 „ 100 „ „ — 78,5° C.

Tyto údaje jsou však o 4 až 5% větší, než čísla dříve jím odvozená; zdá se také, že svrchu uvedené rychlosti zvuku jsou asi o 2% větší než skutečné. Důvod sluší hledati v tom, že výchvěje byly příliš prudké, tak že nemohou se považovati za nekonečně malé; z téhož důvodu nesouhlasí vliv výšky tónu a průměru roury se vzorci Kirchhoffovými.

Chceme se ještě zmíniti o pěkných qualitativních pokusech akustických, které Bleekrode (Phil. Mag. 38, pg. 81, 1894) konal s pevnou kyselinou uhličitou; stlačil totiž sníh CO_2 do tvaru maléhoválečku a postavil tento na resonanční desku, podloživ pod něj kovovou misku. Tím vznikl velmi jasný ton. Podobného znění docílil, položil-li měděnou kouli na pevnou kyselinu uhličitou, nebo nalil-li do jamky v ní vyhloubené rtuti, která ovšem okamžitě ztuhla. Bleekrode sám vysvětluje vznik chvění a tónu tím, že na ploše dotykové se tvořící páry vyzdvihují ztuhlou rtuť, event. měděnou kuličku či váleček CO_2 periodicky do výše; dle náhledu referentova mohlo by se také jednati o analogon pokusu Trevelyanova.

Nauka o teple. Dříve než přikročíme k referátu o pracích z vlastního oboru thermiky, zmíníme se krátce o určení hustoty tekutých plynů, poněvadž úzce souvisí se studiem „kritického stavu“. Hned od dob, kdy podařila se příprava snadno ztužitelných plynů, datují se prvá měření hustot jejich Faradayem, Thilorierem, Bussym, Andrejevem a j. Tři měřící methody leží na snadě: Především můžeme si připraviti řadu tělísek, na př. skelných, které v tekutině určité hustoty právě ještě plovou; pomocí nich můžeme hledanou hustotu uzavříti mezi dvě mezní hodnoty. Této staré methody užili v novější době Moissan a Dewar (C. R. 125, pg. 505, 1897), kteří našli, že tekutý fluor má hustotu velice blízkou oné jantaru, čímž určili ji na 1,14 Druhá methoda spočívá na měření vzájemně si odpovídajících objemů plynu a tekutiny, buď, že zkapalníme známé množství plynu, nebo vypaříme známé množství kapaliny. Tak Ansdell (Proc. Roy. Soc. 29, pg. 209, 1879) měřil objem tekutiny vzniklé z plynu známé váhy a určil tím hustotu chlorovodíku na 0,854 ři 10^0 C a acetylenu na 0,459 za 0^0 C; Bleekrode týmž způsobem Journ. de phys. 4, pg. 109, 1885) našel pro hustotu aethylenu při 6^0 C číslo 0,361. Třetí methoda je obvyklý způsob měření hustoty tekutiny pomocí hydrostatických vah.

Druhou methodou měřil Wroblewski (Wied. Ann. 20, pg. 860, 1883) hustotu kyslíku a našel 0,899 při — 130^0 C; číslo to není však dosti zaručeno, neboť nebyl při měření zkapalněn veškerý plyn, nýbrž pouze jedna jeho část, kdežto druhá zůstala ve stavu plynném — a nebylo lze určiti poměr hmot obou částí, kapalné a plynné. Odvolávání se Wroblewskiho na výsledky Pictetovy (Ann. Chim. Phys. [5], 13, pg. 145, 1878) nemá ceny vzhledem k námitkám Offretovým (Ann. Chim. Phys. [5], 19, pg. 271, 1880). Později určil Wroblewski (C. R. 102, pg. 1010, 1886) hustotu kyslíku za absolutní teploty T na

$$d = 1{,}212 + 0{,}00428\, T - 0{,}000052\, T^2.$$

Tento vzorec platí mezi — 118^0 C a — 200^0 C. Na první pohled zaráží vysoká hodnota temper. koëfficientu, faktoru u T; důvod zvíme později. Hustota dusíku má hodnoty mezi 0,44 za kritické teploty (— 146^0 C) a 0,9 poblíže bodu tuhnutí (— 203^0 C). Hustota tekutého vzduchu není určitě definovanou hodnotou, měníc se s jeho složením; v blízkosti kritického bodu za — $146{,}6^0$ C a tlaku 45 atm. byla určena na 0,59, kdežto výpočtem dle pravidla směsí plyne 0,6.

Olszewski (Jour. de phys. [2], 4, pg. 184, 1885) našel pro hustotu kyslíku měřením objemu plynu, který ve stavu tekutém naplňoval nádobku skleněnou (objemu 1,4 cm^3) za tlaku 40 atm. a při — 139^0 hodnotu 0,8787; současně měřený koefficient roztaživosti byl 0,01706, tedy asi pětkráte větší než za stavu plynného. Podobným způsobem určil později (Wied. Ann. 31, pg. 58, 1887) hustoty při normálním bodu varu (za tlaku jedné atmosféry) pro kyslík 1,124, dusík 0,885 a methan 0,415.

Byl tudíž tekutý methan nejřidčí tenkráte známou kapapnou. Měřením objemu známého množství kapaliny za různých eplot určil Lange (Zeitschr. f. compr. u. flüss. Gase 4, pg. 39, 1900) hustotu chloru. Z údajů jeho vyjímáme:

za — 50^0 C je hustota chloru 1,5950 a koefficient roztaživosti 0,00151 za $+ 100^0$ C je hustota chloru 1,1134 a koefficient roztaživosti 0,00430.

Stoupá tudíž koefficient roztaživosti značně s teplotou.

Třetí methody k určení hustoty užil poprvé Dewar (Roy. Inst. Great Britain, 27. března 1896, ref. dle Journ. de phys. [3] 6, pg. 135, 1897) měře váhu určitého objemu tekutého plynu vztlakem ponorných tělísek z různých látek. Určil tím způsobem hustotu kyslíku při -183^0 C a tlaku 766,5 *mm* Hg na 1,1373; pro tytéž poměry plynou z měření Wroblewskiho a Olszewskiho čísla 1,168 a 1,124. Hustotu dusíku při bodu varu stanovil na 0,850, hustotu tekutého vzduchu 0,910; číslu poslednímu nelze přikládati žádné váhy, ježto Dewar neudává složení vzduchu. Závislost hustoty na tomto faktoru studovali Ladenburg a Krügel (Chem. Ber. 32, pg. 1415, 1899) pomocí stříbrného tělíska ponorného, pro něž supponovali koefficient roztaživosti 0,00005185. Našli pro vzduch

při	53,6%	72,15%	94,4% kyslíku
hustoty	1,015	1,068	1,133,

kteréž výsledky dají se vyjádřiti lineárným vztahem

$$d = 0{,}86 + 0{,}00289 \,.\, x,$$

kdež x jest množství kyslíku ve vzduchu obsaženého v procentech. Tíž badatelé stanovili také hustotu ozonu (Chem. Ber. 31, pg. 2508, 1898) vztaženou na kyslík a našli číslo 1,456, kdežto theorie žádá dle poměru O_2 a O_3 číslo 1,5. Konečně sluší uvésti Dewarowo (C. R. 129, pg. 451, 1899) přibližné stanovení hustoty tekutého vodíku vykonané methodou druhou; obdržel při bodu varu hodnotu ca. 0,07, kdežto jako hustotu maximální uvádí 0,086. Jest tedy tekutý vodík nejřidší dosud známou kapalinou, jsa ještě asi 6kráte řidší než tekutý methan; jest dosti nápadno, že je při tom dobře viditelný a ukazuje zřejmý meniskus. Vodík v palladiu okkludovaný má hustotu 0,62, tedy téměř 9kráte větší, a nemůže tudíž býti ve stavu tekutém.

Dříve, než ukončíme tento oddíl, chceme se ještě krátce zmíniti o starších, ale vysoce zajímavých měřeních, která provedli Cailletet a Mathias (Journ. de phys. [2] 5, pg. 549, 1886, ibid. [2] 6, pg. 414, 1887). Tito stanovili hustotu tekutých plynů methodou jinou než dosavad byly uvedeny, totiž methodou spojitých nádob. Podstatnou částí jejich apparátu byla vertikální skleněná trubice tvaru velmi prodloužené písmeny O, jež v hořením ohybu byla spojena trubicí sloužící k přivádění plynu s reservoirem objemu asi 600 cm^3. Na obou vertikálních ramenech trubice, asi 50 *cm* dlouhých, bylo naneseno millimetrové dělení; v dolením ohybu nalézalo se něco rtuti. Bylo-li jedno rameno ochlazeno a současně plyn stlačen, zkondensoval se v něm na sloupec kapaliny na sloupci rtuťovém spočívající. Něco málo kapaliny bylo též zkondensováno na druhém menisku rtuťovém, aby měření bylo zbaveno chyb následkem kapillarity Nazveme-li h differenci výšek v obou ramenech kondensované kapaliny hustoty x, h' a d' denivellaci rtuti a její hustotu, a konečně d hustotu nasycených par za teploty pokusu, platí patrně relace

$$hx = h'd' + (h - h')\, d.$$

Z ní můžeme určiti x, známe-li d, hustotu nasycených par. Za účelem jejího stanovení zkapalnili uvedení badatelé tlakem známé množství plynu v přesně kalibrované trubici udržované na určité stálé teplotě, a potom velmi pozvolna umenšovali tlak, až právě poslední kapka kapaliny se proměnila v páry, jichž objem potom změřili. Tak obdrželi na př. pro hustotu nasycených par kysličníku dusnatého (N_2O) mezi -28^0 a $+34^0$ výraz

$$d = 0{,}5099 - 0{,}00361\,.\,t - 0{,}0714\,\sqrt{36{,}4 - t}\,,$$

pomocí jehož plyne pro hustotu tekutého kysličníku dusnatého mezi $-20{,}06^0$ a $+34^0$

$$x = 0{,}342 + 0{,}00166\,t + 0{,}0922\,\sqrt{36{,}4 - t}\,.$$

Amagat (Journ. de phys. [3] 1, pg. 288, 1892 a C. R. 114, pg. 1093 a 1322, 1892) učinil jim však oprávněnou výtku, že jejich určení hustoty nasycených par nejsou dosti přesná, ježto velice těžko lze stanoviti okamžik, kdy právě kapalina mizí nebo se objevuje. Navrhl methodu poněkud jinou, při níž vždy kapalina a nasycené páry její se nachází v rovnovážném stavu: Měřil totiž objem kapaliny a pak při částečném zkapalnění a potom za této teploty zkapalnil zmenšením celkového objemu více par, a měřil poznovu oba objemy. Jsou-li v a v' zvětšení objemu tekutiny a zmenšení objemu par když přejde se z prvého rovnovážného stavu k druhému a D a D' hustoty kapaliny a par, pak patrně platí

$$v D = v' D'.$$

Jsou-li dále V a V' objemy kapaliny a par v jednom rovnovážném stavu a P veškerá hmota plynu, pak

$$V . D + V' . D' = P.$$

Z těchto dvou vztahů lze vypočísti hustoty D a D'. Znázorníme-li výsledky Cailletet-Mathiasovy, Amagatovy a novější Mathiasovy (Journ. de phys. (3) 2, pg. 5, 1893) graficky, nanášejíce teploty jakožto abscissy a příslušné hustoty par a tekutin jakožto ordinaty, obdržíme výsledek velice zajímavý: Celek představuje parabolické křivky obrácené konkávní stranou k ose ordinat, jichž vrcholy leží při teplotě kritické. V sousedství této teploty blíží se hustoty plynů v stavu tekutém a plynném velmi rychle k téže hodnotě, které dosahují právě při temperatuře kritické, při níž tudíž má plyn a kapalina tutéž hustotu. Středy tetiv rovnoběžných k ose ordinat leží na přímce (diametru), poněkud k ose absciss směrem k teplotám vyšším skloněné; bod, kde diametr křivku seče, je bod stejných hmot kapaliny a plynu — teplota kritická. Pokusy uvedených badatelů vztahovaly se pouze ke kyselině uhličité, kysličníku dusnatému a aethylenu. Ale na základě pokusů Sidney Youngových (Phil. Mag. 33, pg. 153, 1892) vztahujících se k dvanácti různým látkám, potvrzují se hoření konkluse, zejmena mohl Mathias ukázati, že zmíněný diametr křivek je přísně přímkou, nikoliv pouze v approximaci. Sklon její vede nás k poznání, že roztažitost plynů ve stavu tekutém je větší než ve stavu plynném, nač již na svém místě bylo poukázáno. Bylo by si velmi přáti, aby měření podobná vykonána byla také pro plyny t. zv. permanentní, to jest mající nízké teploty kritické, protože vnesla by mnoho světla do končin dosud nám jen nedokonale známých.

Dalším krokem v poznání tepelných vlastností tekutých plynů jest práce U. Behnova (Drudés Ann. 1. pg. 270, 1900) o sublimačním teple kyseliny uhličité a teple vypařování tekutého vzduchu. Methoda jeho byla velmi prostá; vytčené látce bylo dodáno známé množství tepelné pomocí zahřátého tělíska aluminiového a určeno množství látky následkem toho vypařené. Tím způsobem našel pro sublimační teplo kyseliny uhličité 142,4 Cal., pro teplo vypařování tekutého vzduchu 50,8 Cal. Ze známé formule Clapeyronovy

$$J \,.\, r = T \frac{dP}{dT} (s - \sigma),$$

kdež J jest mech. aequivalent tepla, r teplo vypařovací (resp. sublimační), T absol. temperatura, $\frac{dP}{dT}$ temperaturní koëfficient bodu varu (resp. sublimace), s spec. objem plynu a σ spec. objem tekutiny, plyne, zanedbáme-li σ proti s, což v dostatečné vzdálenosti od bodu kritického je dovoleno, pro spec. objem plynu při teplotě, za níž měřeno bylo r,

$$s = \frac{J \,.\, r}{T \,.\, \frac{dP}{dT}}.$$

Dosazením hodnoty $\frac{dP}{dT}$ pro CO_2 z pozorování du Bois-Willsových (viz úvod) jakožto 55 *mm* Hg pro 1° C plyne $s_{CO_2} = \frac{1}{0{,}00237}$, kdežto extrapolací z pozorování Amagatových (Ann. Chim. Phys. (4) 29, pg. 252, 1873), kterýž určil hustotu CO_2 až po 0°C, vychází $\frac{1}{0{,}0025}$.

Pro vzduch jde dosazením $\frac{dP}{dT}$ dle Holborn-Wiena 50 *mm* Hg pro 1°C hodnota $s = \frac{1}{0{,}00280}$, kdežto ze zákona Boyle-Gay-Lussacova by vycházela hodnota daleko větší $\frac{1}{0{,}00237}$. Pro vypařovácí teplo kyslíku uvádí Dewar (Roy. Inst. Great. Britain, 19. ledna 1894. refer. dle Beibl, 19, pg. 555, 1895) hodnotu daleko větší než je ona pro vzduch, totiž ca. 80

Cal. Všimneme-li si vzorce Clapeyronova, vidíme, že teplo vypařovací je rovno nulle, je-li $s = \sigma$. Dle uvedených již pokusů Cailletet-Mathiasových je hustota a tedy i spec. objem plynu týž jako kapaliny za teploty kritické; aby tudíž hoření konklusi experimentálně verifikoval, měřil Mathias (C. R. 109, pg. 470, 1889, Journ. de phys. (2) 9. pg. 449, 1890) teplo vypařovací za různých teplot a našel pro kyselinu uhličitou

$$r^2 = 118,485\,(31 - t) - 0,4707\,(31 - t)^2$$

a pro kysličník dusnatý

$$r^2 = 131,75\,(36,4 - t) - 0,928\,(36,4 - t)^2,$$

kteréžto vzorce opravdu vyhovují hoření podmínce. I zde bylo by si přáti, aby práce o plynech méně snadno ztužitelných objímaly větší temperaturní intervall, z něhož by na stav kritický se dalo souditi.

Z dalších měření tepelných na tekutých plynech konaných uvádíme, že Dewar (Beibl. 19, pg. 555, 1895) stanovil pro spec. teplo kyslíku mezi -180^0 a -190^0 hodnotu 0,39. Měření spec. tepel v širokém intervallu přineslo by rovněž mnoho materialu pro otázku stavu kritického, neboť dle thermodynamických vzorců má se spec. teplo plynů při stálém tlaku státi v kritickém bodě nekonečně velikým. (Srov. Linde o spec. teple vzduchu Münch. Ber. 1897, pg. 485 ref. dle Zeitschr. f. compr. u. flüss. Gase 2, pg. 48, 1898, a práce Mathiasovy, Journ. de phys. (3) 4, pg. 497, 1895, C. R. 119, pg. 404 a 849, 1894). Vedlo by nás příliš daleko a překračovalo by rámec tohoto referátu, kdybychom chtěli uvésti veškerá měření kritických hodnot, bodů varu atd. v novějších dobách konaných. Uvádíme proto pouze malou tabulku s nejdůležitějšími údaji pro hlavní plyny částečně dle citované již knížky Lefèvreovy. Úplnou literaturu předmětu do r. 1893 najde čtenář ve známých tabulkách Landolt-Börnsteinových — nejdůležitější pojednání novější byla namnoze již dotčena.

Plyn	Kritická teplota v stupních Celsia	Kritický tlak v atmosférách	Bod varu v stupních Celsia	Bod mrazu (tuhnutí) v stupních Celsia	Příslušný tlak v milimetrech rtuti	Hustota kapaliny	Příslušná teplota v stupních Celsia	Barva kapaliny
Vodík	— 234,0	20	— 243,0	—	—	ca. 0,07	— 243,0	čirá
Kyslík	— 118,0	50,0	— 181,5	—	—	1,124	— 181,4	azurově modrá
Ozon	—	—	— 125	—	—	—	—	indigově modrá
Dusík	— 146,0	35,0	— 191,4	— 214	60	0,885	— 194,4	čirá
Argon	— 121,0	50,6	— 187,0	— 189,6	—	ca. 1,5	— 187,0	„
Vzduch	— 140,0	39,0	— 191,4	—	—	0,933	— 191,4	namodralá
Kysličník dusičitý (NO) .	— 93,5	71,2	— 153,6	— 167,0	138	—	—	čirá
Methan (CH_4)	— 82	55	— 164	— 186	80	0,415	— 164	„
Kysličník uhelnatý (CO)	— 141	35	— 190	— 207	100	—	—	„
Kysličník uhličitý (CO_2) .	+ 30,9	77	— 79	—	—	—	—	„
Chlor	+ 141	83,9	— 33,6	—	—	—	—	žlutá
Fluor	+ 120?	—40?	— 187	—	—	—	—	„
Kysličník dusnatý (N_2O) .	+ 36,4	75	— 87,9	—	—	—	—	čirá
Ammoniak (NH_3)	+ 131,0	113	— 38,5	—	—	—	—	„
Chlorovodík (HCl) . . .	+ 51,5	96	— 35,0	—	—	—	—	„
Sírovodík (H_2S)	+ 100,2	92	— 61,8	—	—	—	—	„
Ethylen (C_2H_4)	+ 9,3	58	— 105,0	—	—	—	—	„
Acetylen (C_2H_2) . . .	+ 37	68	—	—	—	—	—	„

(Dokončení.)

Věstník literární.

Mechanika. Sepsal Dr. Čeněk Strouhal. Sborníku Jednoty českých mathematiků čís. IV. V Praze 1901. Nákladem Jednoty českých mathematiků (670 stran).

Uvedeným číslem „Sborníku" zahájeno jest vydávání mnohosvazkové experimentální fysiky, v jejížto sepsání se uvázal se vzácnou obětavostí odborník k tomu v prvé řadě povolaný, pan universitní professor dvorní rada *Dr. Č. Strouhal*. Počátek učiněn, jak zvykem bývá, mechanikou. Referent předem se přiznává, že kniha *Strouhalova* způsobila mu již svou zevnější úpravou radostné překvapení, neboť bohatostí obsahu, správností a jasností výkladů řadí se k nejlepším cizojazyčným dílům tohoto druhu, přesností a zevrubností detailů se jí málo která vyrovná. Pan autor neváhal na př. i při věcech dle obecného mínění s dostatek známých obrátiti se k původním historickým pramenům a vyvážiti odtud četné překvapující a málo známé podrobnosti, které dovedou upoutati i čtenáře, který se ex professo fysikou nezabývá. Uvádím na př. kapitolu o vzniku metrické soustavy, o měření času a hmoty, o gravitaci, o střední hustotě zemské, o vývěvách atd.

Se zvláštní zálibou pojednává pan spisovatel o věcech souvisících s astronomií a meteorologií, jimiž se ve svém mládí zanášel. Odtud si přinesl do svého pozdějšího povolání onen živý smysl pro precisní měření a kritiku jeho, kterýžto se všude v jeho díle obráží a je tak vzácným činí. Nemalé ceny dodává knize uvádění co nejpřesnějších hodnot rozličných konstant geofysických, astronomických a fysikalních, tak že pracující fysik není nucen obraceti se mnohdy k několika knihám, nežli najde, čeho potřebuje. Jen znalec dovede oceniti, kolik vytrvalosti a práce vyžaduje výkon podobný.

Kniha jest v prvé řadě určena studujícím a učitelům fysiky, jimžto má býti vodítkem při provádění pokusů zejmena měřických. Svůj úkol splňuje dokonale, neboť pan autor sděluje mnohdy i intimní detaily své dlouholeté zkušenosti experimentační, poukazuje k pramenům chyb, učí jak a v které dosažitelné míře možná je odstraniti a vše illustruje příklady skutečnými, vzatými přímo z praxe fysikální.

Celku napomáhá veliká řada originálních obrazů, pořízených dle strojů fysikálního ústavu Pražské university a dle pokusů, jimi skutečně vykonaných.

V druhé řadě dovede způsob, jakým kniha sepsána jest, vzbuditi interes i kruhů širších. Jest v ní sestaveno mnoho vědomostí, které za nynějších dob tvoří nemalou část toho, co se zove vzděláním všeobecným.

Více proto, abych nastínil nežli vyčerpal bohatý obsah knihy *Strouhalovy*, uvádím třeba jen kursoricky některé vynikající podrobnosti.

V § 15. poučuje se čtenář, v těchto věcech často málo obeznalý, jak má zacházeti s libellou a jak ji rektifikovati.

Paragrafy následující pojednávají o historickém vzniku soustavy metrické, o původním prototypu metru, jeho realisaci, o triangulační síti, o internacionální organisaci, o prototypech nových a o rozměrech zeměkoule.

Měřicí stroje délkové se probírají do podrobna.

V § 39. a následujících jedná se o měření času, tedy o dni hvězdném, pravém a středním dni slunečním, o čase pásmovém, o chodu a opravě hodin, o registrování malých intervalů časových, o roku siderickém, tropickém a anomalistickém. Vítána jsou číselná data zde uvedená.

S touže zevrubností jako o měření prostoru a času pojednává pan autor o měření hmoty. Zajímavé jsou zejmena detaily uvedené v § 56. až 59. o definici a realisaci kilogramu, o původních a nových prototypech. I odstavec IV. věnovaný absolutní soustavě měr obsahuje mnohé důležité poznámky.

Vážení věnována jest celá stať X., obsahující vše, co se říci dá. Zevrubnost vážení, kontrola závaží, korrekce při vážení — vše to jest doloženo skutečnými příklady, které ukazují, jak daleko sáhá jistota tohoto výkonu, šetří-li se všeho, co na správnost jeho vliv má.

Stať XI. jedná o všeobecné tíži, napřed po stránce historické, pak po theoretické, zejmena o gravitačním poli uvnitř země a mimo ni, o jeho deformaci vlivem vyvýšenin, o pravděpodobném rozdělení teploty v nitru zemském, o gravitačním poli kolem slunce a měsíce, o přílivu a odlivu a to velmi zevrubně. Methodám, jimiž se ustanovuje střední hustota zeměkoule, věnováno jest celých pět paragrafů, tak že o tomto zajímavém geofysickém problemu zřídka najdeme výkladů širších a lepších. Celá kapitola obsahuje mnoho cenného číselného materialu.

V § 343. vrací se autor znova k zjevům gravitačním, pokud je modifikuje síla odstředivá a to nejen hledíc k zemi, nýbrž i k planetám silněji zploštěným. Vítaným bude čtenáři precisní rozlišování šířky geografické a geocentrické.

Kapitola XV. jednající o zákonech oběhu těles nebeských kolem slunce jest dle povahy díla psána elementárně, ale obsahuje mimo zajímavý úvod historický mnoho cenného materialu číselného.

Jen úryvkovitě budiž ještě vzpomenuto partií, ve kterých se jedná o měření accelerace zemské, zejmena pomocí Katerova kyvadla. Obyčejně postrádáme i ve velikých dílech přesného k tomu návodu. Krásně jsou psány kapitoly o určování hustoty, o redukci tlaku geometrického; zejmena obšírnou a poučnou jest stať o barometrickém měření výšek. Totéž platí o statích jednajících o vývěvách, kapillaritě atd.

Ku konci se zmiňme, že autor zavádí proti obyčejnému dosti konservativnímu zvyku i do mechaniky všude míru absolutní. Jde-li o největší (ve fysice obvyklou) exaktnost, jeví se tento pokus, jehož nutnost v dobách pozdějších zajisté uznána bude, naprosto oprávněným. Uvažme jen, jak ostřeji by na př. vynikla nezbytnost korrektur při měření tlaku barometrického, kdyby jednotka tlaku předem již byla definována v míře absolutní.

Přeji panu autorovi zdraví a vytrvalosti, aby celé dílo přivedl k zdárnému konci tak, jak je byl začal.

Prof. Frant. Koláček.

Zprávy z výboru Jednoty českých mathematiků.

Ve valné schůzi dne 5. prosince 1900 vykonány doplňovací volby výboru. Hned po valné schůzi ustavil se nově zvolený výbor takto: Předseda p. c. k. dvorní rada Dr. Č. Strouhal, prof české university; místopředseda p. Aug. Pánek, m. prof. čes. techniky; stálý tajemník p. c. k. dvorní rada Dr. Ed. Weyr, prof. české techniky; ředitel p. Dr. J. Čečka, prof. c. k. real. a vyš. gymnasia v Křemencové ulici; pokladník p. J. Pour, prof. c. k. vyšší realky na Malé Straně; jednatel p. V. Jung, prof. stát. prům. školy; knihovníci: pp. Dr. V. Felix, docent české techniky, Dr. V. Posejpal, s. prof. c. k. realky na Starém Městě, J. Kaván, kand. prof.; účetní: pp. J. Šrůtek, prof. c. k. real. a vyš. gymn. v Křemencové ulici a Rud. Hruša, posl. filosofie; archivář p. J. Klobouček, prof. c. k. vyš. realky v Karlíně; pořadatel přednášek p. Dr. Vlad. Novák, docent české university; zapisovatel p. Jos. Tille, posluchač české techniky; zpravodaj p. R. Tereba, posl. čes. university; bez zvláštní funkce p. V. Starý, ředitel c. k. vyšší realky na Král. Vinohradech. V téže schůzi mimo jiné usneseno, požádati p. prof. dra F. Koláčka, aby napsal pro „Sborník“ Kompendium theoretické fysiky.

Ve schůzi konané dne 11. ledna 1901 přijati za členy zakládající s příspěvkem 100 K: pp. Dr. Em. Taftl, c. k. okr. školní inspektor v Klatovech a p. Jos. Kašpr, prof. c. k. real.

a vyš. gymnasia na Smíchově; dále přijato 20 nových členů skutečných a 67 členů činných. Ředitel podává zprávu o odbytu „Časopisu“ i „Přílohy“, o „Sborníku“ a učebnicích nákladem Jednoty vydávaných. Potěšitelné jest faktum, že „Mechaniky“ Dra Č. Strouhala (IV. čísla „Sborníku“) prodáno za necelé 3 měsíce 267 výtisků, nepočítaje v to prodej v knihkupectvích, což jest patrným důkazem, jaké obliby uvedená kniha v příslušných kruzích došla. Na další část experimentalní fysiky téhož spisovatele, „Akustiku“, jež vyjde letos jako VI. číslo „Sborníku“ — kdežto V. číslem bude „Differencialný počet“ prof. Ed. Weyra — věnovala slav. Česká akademie pro vědy, umění a slovesnost cís. Frant. Josefa subvenci 600 K. Již dříve bylo zadáno ke schválení 4. vydání V. Jarolímek, Geometrie pro nižší třídy škol realných, 5. vydání Dr. Em. Taftl-Soldát, Algebra pro vyšší gymnasia, 5. vydání Dr. Em. Taftl-Soldát, Algebra pro vyšší realky, 3. vydání Reiss-Theurer, Fysika pro vyšší realky a 3. vydání Reiss-Theurer, Fysika pro vyšší gymnasia, všecka upravená dle nových osnov učebných pro realky a pro gymnasia. Nyní bylo zadáno 4. vydání V. Jarolímek, Nauka pro 1. třídu škol realných, zcela nově přepracované. Vyjednává se o vydání „Fysiky pro nižší třídy realek a gymnasií“.

Z dalších zpráv vyjímáme: Protektor Jednoty p. dvorní rada Dr. F. J. Studnička daroval Jednotě 100 výt. svého spisu „Bohatýrové ducha“ a 58 výt. spisu „Bis an's Ende der Welt“. Pan J. Valenta, inž. zem. výboru, daroval z pozůstalosti svého otce, býv. člena Jednoty, řed. gymn. J. Valenty, 20 knih pro knihovnu. Dárcům vysloveny díky písemně. Usneseno, aby rejstřík obsahu 30 ročníků „Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky“ vydán byl zároveň s 1. číslem ročníku XXXI. Určeny znova terminy pro vycházení „Časopisu“. Usneseno vypsání obvyklých cen za řešení úloh v „Příloze“. Koncem správního roku bude vydán doplněk „Katalogu knihovny“ za poslední 3 léta. Uvažováno o vypsání cen za nejlepší přednášky, v týdenních schůzích přednesené a zvoleno komité k vypracování a podání určitého návrhu. Konečně přijato, aby o výborových a týdenních schůzích byly v „Časopise“ podávány občasné zprávy.

Č.

Tycho Brahe v české literatuře.

Podává

Ladislav Peprný,

assistent mathematiky při vysoké škole technické v Praze.

Třístaletou památku úmrtí slavného učence dánského Tychona Brahe (zemřel 24. října 1601) slaviti budou s krajany jeho též Čechové, vzpomínajíce jeho součinnosti při vědeckém a uměleckém snažení na dvoře Rudolfa II. v Praze. Povolané péro asi ujme se také u nás pragmatického vylíčení činnosti Tychona Brahe tak, jak toho zasluhuje význam jeho a jak možná dnes po vydání jeho korrespondence a četných monografií o něm psáti na základech pevných. *)

Tato stať nečiní nijakých nároků podobných, ani nároků na úplnost, aby všecko bylo tu vyčerpáno. Podepsaný sbírá delší dobu material k dějinám věd mathematických v Čechách. Ze zásoby té dovoluje si podati ukázkou přehled prací, jež u nás byly věnovány posud ocenění života a zásluh Tychona Brahe. S tohoto stanoviska, prosím, aby pokus tento byl shovívavě posuzován a vlídně přijat jakožto prvotiny dalších snad a důkladnějších prací příštích.

* * *

Nenadálá, tragická smrt Tychona Brahe vzrušila mocně vědecké kruhy souvěké v Praze. Ani při pohřbu nejslavnějších

*) Na počest Tychona Brahe byla ražena stříbrná medaile, jejíž vyobrazení tu přidáváme. Srov. dále str. 216. Čteme na líci nápis: Efigies Tychonis Brahe: O: F: anno Domini 1595, aet(atis) 49. Rub: Arma: genus: fundi: pereunt: durabile: virtus. Et: doctrina: decus: nobilitatis: habent. (Podoba Tychona Brahe r. 1595, ve věku 49 let.)

velmožů neviděla Praha takové nádhery a takového účastenství všech stavů, jako když tělo astronoma dánského za všeobecné lítosti bylo ukládáno ku věčnému odpočinku v chrámě Panny Marie před Týnem dne 4. listopadu 1601. Srv. dále zvláštní článek o pohřbu od Ferd. Mikovce.

Při pohřbu promluvil první anatom český *Jan Jesenský z Jesena* dojemnou řeč, vydanou pak pod názvem: *De vita et morte illustris et generosi viri, domini Tychonis Brahei, equitis Dani, domini in Kundstrup, Huenue Hellesponti Danici insulae praefecti, astronomorum hoc saeculo principis, die 24. Octobris anni 1601 Pragae desiderati, 4. Novembris in templo Veteris Urbis primario, ritu equestri, honorificentissime tumulati. Oratio funebris Johanis Jessenii a Jessen*, Pragae, typis Georgii Nigrini, anno 1601, 4°, 8 stran. Tato pohřební řeč, pronesená od Jesenského nad rovem Brahovým, jest prvním spolehlivým zdrojem zpráv o činnosti a zásluhách zvěčnělého. Skladeb básnických nad jeho smrtí, truchlozpěvů, Keplerových a jiných snad není třeba obšírně tu uváděti.

Nekrolog Jesenského poskytl látku ke spisu nyní již asi zastaralému, ale na svou dobu znamenité knize, kterou vydal *Petr Gassendi*, pod názvem: *Tychonis Brahei, equitis Dani, astronomorum coryphei vita*, Parisiae, 1654. Spis nebyl sice vydán od Čecha nebo v české zemi, ale pojednávaje důkladně mimo jiné též o činnosti a životě i smrti Tychona Brahe, stal se pak základním kamenem životopisů pozdějších, zejmena též českých nebo v Praze vydaných*).

Sluší uvésti na tomto místě cizí sice, ale obyčejně v literatuře opomenutý příspěvek životopisný, jejž vydal *Godefr. Bernh. Casseburg*, *Tychonis Brahe Relatio de statu suo post discessum ex patria in Germaniam et Bohemiam ad M. Andr. Velleium ex manuscripto edita*, Jenae, 1730. Obsah jasně naznačen jest titulem: Tycho Brahe za pobytu v Německu i v Čechách.

Z domácích našich spisovatelů zmiňuje se o badání Tychona Brahe a jeho pobytu u mecenáše Rudolfa II. v Praze *Bohuslav*

*) Ottův Slovník IV. str. 539 má patrně tiskovým nedopatřením „Ganendi“ místo správného: Gassendi.

Balbín v známém díle *Miscellanea historica Regni Bohemiae, Decadis I. lib. VII. regalis seu de ducibus ac regibus Bohemiae*, Pragae, 1687, str. 255.

Pro úplnost budiž dále uveden *Faustin Procházka, De saecularibus liberalium artium in Bohemia et Moravia fatis commentarius*, Pragae, 1782, str. 308. Krátká zmínka při líčení vědecké a umělecké činnosti na dvoře Rudolfa II. v Praze.

Životopis delší na základě původního studia napsal *Fr. Mart. Pelzel* ve sbírce: *Abbildungen Böhmischer und Mährischer Gelehrten und Künstler, nebst kurzen Nachrichten von ihren Leben und Werken*, IV. Theil, Prag, 1782, str. 36—42, s 2 rytinami (vyobrazení Brahovo a jeho náhrobku): Tycho Brahe. Tento životopis býval pak pramenem (udaným i zatajeným) ke statím a článkům o Tychonovi Brahe. Na konci připojen jest výčet spisů slavného astronoma, jenž rovněž pak v této upravě a v tomto skupení často byl otiskován.

K odborným studiím cizím o vědeckých výzkumech Brahových řadí se práce českého astronoma *Aloisa Davida*, vydaná od Královské České Společnosti Náuk v Praze: *Geographische Breite und Länge von Benatek, wo Tycho Brahe vor 203 Jahren beobachtet hat.* Für die Abhandlungen der Kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, Neue (III.) Folge, 2. Band, Prag 1802, str. 32. Spisovatel dokazuje, jak je důležité zjistiti zeměpisnou polohu místa, kde děje se astronomické pozorování, v tomto případě polohu Benátek, kdež Brahe konal studia o hvězdnaté obloze.

Záhy též širší kruhy se zajímaly o osobu Brahovu. Snad pravdy nechybíme, hádáme-li, že památka jeho jména, přístupná každému Pražanu a příchozímu v chrámě Týnském, kde upoutá jeho náhrobek hned pozornost, budila onen zájem o jeho osobu. Vyprávělo se o neblahé příčině jeho smrti (že byv pozván na hodokvas u Petra Voka z Rožmberka, z nemístného studu nechtěl od tabule se vzdáliti a tím přivodil si záhubu). Širší kruhy bavila rozprávka o tom, jak v souboji soupeř usekl mu kus nosu a jak potom míval nos umělý, natíraje si jej barvičkou a podobně.

Tyto a podobné zprávy sebral a v článek sestavil *J. Linda, Tycho Brahe* v časopise: *Vlastenský Zvěstovatel,* v Praze, 1821

18. června č. 25., Rozličnosti, str. 197 — 8., s vyobrazením Brahovým. V populární stati nepodává ovšem nic nového a zvláštního. V málo známém starém časopise snad docela již zapomenutý článek vhodně obnovil památku Brahovu. Slohem tenkráte obvyklým seznamuje s jeho životem a smrtí. Časopis jest poměrně dosti již vzácný a tedy snad se zavděčíme ukázkou prvního českého životopisu Brahova: „Bylo r. 1599, hned po velikonoci, když Tycho Brahe do Prahy přišel. Císař přijal jej velmi laskavě, dal mu hned darem vyplatit 2000 dukátů, a ročně mu ustanovil služby 4000 duk. Také císař ten odkoupil Sentstejnově vdově ten dům na Hradčanech za 20,000 tolarů, a daroval ho Tychovi. Dům ten na Hradčanech měl velikou zahradu u zámeckého příkopa. Tycho se v něm usadil a opět počal po obloze pátrat. Ale přečasté navštěvování, hluk dvora, nejvíce a nejmrzutěji blízcí kapucíni v Loretě znepokojovali jej svým nočním zvoněním a křiklavým modlením. Rudolf dal Tychovi jiné místo pokojné na vůli, který chce z hradů královských buď Brandeis neb Lisou nebo Benátky. On zvolil Benátky. Tam se odebral v srpnu s celou svou rodinou, a tak jej spořádal, že se mu to místo zdálo druhý hrad Bràniin. Však také zde dlouho nepobyl: snad chtěl jej císař míti u sebe, nebo bylo tam samotno jeho vyrostlým dcerám a synům; odebralť se tedy zas do Prahy na své bývalé místo. Císař nyní zapověděl kapucínům v noci zvonit. Ale ti na odpor tomu vyšli po páru z kláštera chtíce ho opustit. Nejvyšší kancléř Popel z Lobkovic, pospíšil k císaři a představoval mu důrazně, co z toho může pojíti. Kapucíni opět se vrátili, ale musili přejinačiti hodiny k svému modlení a na večer, než hvězdy vyjdou, odbejvat si svůj kůr. Tycho nyní provozoval v pokojnosti umění své. Kepler, Longomontanus, Mollerus, Barvický, Hájek, Bachač, Stehlík pracovali s ním, a množství studentů, mezi nimiž mnoho Dánův, jeho krajanů vyučovalo se u něho. Ale netrvalo to dlouho. Umřel t. r. 1601 dne 24. října, stár 54 let, 9 měsíců a 14 dní. Pohřben byl velmi slavně do chrámu tejnského, a potom také mu postaven kamenný památník, jenž ještě dosavád stojí".

Pěkně, populárně psaný článek uveřejnil *Jakub B. Malý*, *Galerie slavných mužů všech národů: Tycho Brahe. Dennice, Spis zábavný a ponaučný*, v Praze, díl I., 1840, svazek 4., str. 238

— 243. Na konci výčet spisů Brahových. Na základě prací již jmenovaných (hlavně článku Pelclova) vyličuje Jak. Malý život Brahův do vypuzení z vlasti a pak druhou část života jeho v cizině a v Čechách. Vhodně zahajuje svůj výklad všeobecnou úvahou: „Tohoto velikého hvězdáře s pýchou v jistém ohledu počítati můžeme mezi našince, a Pelcel ne bez práva dopřál mu místa v svých vyobrazeních Českých učenců. Základ totiž k jeho napotomní velikosti položil učitel jeho ve hvězdářství, Čech, a když nevděčná vlast jej, svého nejslavnějšího syna, vyvrhla, outočiště nalezl v Praze u dvora Císaře Rudolfa II., jenž byl shromáždištěm učených. Přízeň císařova a mnohé milosti, kterými jej daroval, vynahradily mu, pokud možná, to, co ve vlasti opustiti musel, a uznávání i slavení jeho učenosti, jakož i obcování s mnohými z nejznamenitějších učených svého věku, na větším díle Čechy, které z části již od mladických let znal, příjemným činily mu byt jeho v Čechách, kdežto poslední čas svého života v tichosti a pokoji, zcela vědě své odevzdán, ztrávil a věčnou památku po sobě zanechal. V této druhé jeho vlasti spočívají i jeho kosti“.

Z Pelclova a z tohoto článku vybírány byly pak citáty básní oslavných, posudkův o činnosti Brahově, kratší vyňatky atd. Z rozmanitých těchto více méně významných přetisků uvádím aspoň na př. *Antonín Fähnrich: Pallas Athene. Ein aphoristisches Taschenbuch für das Jahr* 1841, Prag und Gitschin II. Jahrgang str. 37*) Přetištěno pak: „Prag“, Beiblätter zu „Ost und West“, Prag 1841, Nr. 95, 16. Juni str. 398 a j. v.

Podobné články rázu kompilačního byly psány u příležitosti třístaleté památky narození Brahova (14. prosince 1546). Viz

*) Fähnrich píše vzletně: „Zu den Feststernen des wissenschaftlichen Himmels, die auch eine Zeitlang über unsern vaterländischen Horizont hellstrahlend leuchteten, gehört der grosse Sternforscher *Tycho de Brahe*, der selbst nach seinem Untergange in seinen Lichtträgern, ich meine in seinen Schülern Kepler und Nevton immer noch fort glänzt. Seine Asche, auf die auch eine Kaiserthräne fiel, ruht in der altehrwürdigen Theinkirche Prag's, besucht und beehrt von jedem Fremdling der Hauptstadt. Sein stettes Absehen von dieser Erde und seiner Aufblick zu Gott und jener Leuchtschrift seiner Allmacht epitaphirte einer seiner vielen Verehrer in folgendem Verspaar: „Iam diu sursum, nunc demum specto deorsum, despiciens mundum, suspiciensque Deum“.

na př. *Tycho Brahe. Ost und West* IV. Prag, 1846, str. 237, 241, 246. Zde uvádíme jubilejní spisek, jejž vydal jinými literárními studiemi známý *Jan M. Druchsa* (*Jan z Prahy*), *Erinnerung an den 300. jährigen Geburtstag des berühmten Astronomen Tycho Brahe*, Prag, 1846.

Studie o Rudolfově „zlatém věku" uvedly svědomitého *Ferd. B. Mikovce* na studium života Brahova. Napsal (zejmena na základě Gassendovy knihy a ostatních, již tu uvedených pramenů) svižně načrtnutou studii: *Tycho Brahe, životopisný nástin. Ke třistaleté památce narození Tychona.* Praha 1847, str. 43. Je to vlastně otisk (jen s nepatrnými změnami) z časopisu Květy XIII. v Praze, 1846, str. 585, 589, 592, 597, 601, 609, 614, 618, 629. Historik Mikovec všímal si ovšem jen životních osudů Brahových, nepouštěje se snad do rozboru jeho stanoviska a významu v dějinách vědy mathematické i astronomické. Zajímá ho způsob života, zevnějšek, jeho vyobrazení a pod. Pozoruhodná jest charakteristika těmito slovy: „Tycho Brahe byl postavy dosti vysoké, silný a složitý, a v posledních letech jevil náchylnosť k tloustnutí. Obličej jeho byl přísný, ano zamračený, vysoké jeho čelo vráskami rozvoráno. Světlé, naryšavělé vlasy nosil prosto a krátce přistřižené, od hořejšího pysku visely mu mocné kníry, dosahující až na okruží okolo krku, brada pak jeho byla jen řídko porostlá. Zlatý jeho nos, jakkoli uměle byl dělán, nemálo znetvořoval jeho obličej; mívalť obyčej nositi při sobě v zlatém pouzdře líčidlo životní barvy, jímž jej natíral. Oblek jeho byl obyčejně jednoduchý: hladký, žlutý živůtek, plundry, vlněné punčochy a střevíce s pentlemi, navrch pak nosil šedivou, kožešinami podšitou řízu. Hlavu přikrýval biretem z černého aksamitu, ozdobenou dvěma pštrosíma péroma, v dílně užíval obyčejně šedivé kukly. Bez čestného řetězu krále Kristiana nikam nevycházel, slonovým však řádem řídko se ozdoboval. Nejlepší podobizna Tychonova byla prý ona, již Gemperlein vymaloval na jedné stěně musea Uranienburského. Mezi četnými rytinami zasluhuje největšího povšimnutí ta, jenž nachází se v jeho Progymnasmatis. I ta jest zdařilá, již učinil Filip Kilian. Praha dle mého vědomí chová jedinou původní podobiznu jeho, jenž malována jest životními barvami na foliovém listu a přivázána k exempláři jeho ve Vandesburgu vyšlého spisu: „Astronomiae instauratae mechanica". Vlastně byla určena za dar pro pana Jana Zajíce z Hasenburku, a Tycho sám napsal pod ní své věnování. Nyní nachází se tato vzácnost v knihovně kláštera Strahovského. Jakkoli zevnitřnost Tychonova byla nepřívětivá, nicméně duše jeho byla čistá a ryzá. Vzdor neveselému svému pohledu byl nejlaskavější učitel, a všem, jenž okolo něho byli, v pravdě otcovský přítel, miloval hru a žert a nepohrdal vínem".

Studii tuto Ferd. Mikovec později doplnil zevrubným vylíčením, s jakou slávou byl Tycho Brahe pohřben do chrámu Týnského: *Pohřeb Tychona de Brahe, Lumír, belletristický týdenník.* III. ročník. V Praze, 1853, 2. díl, str. 1220—1221. a str. 1245—1246.

K solidním pracím dalším o Brahovi čítáme článek *Pavla Aloisa Klara*, ozdobený rytinkou, představující náhrobek v chrámu Týnském, pod názvem: *Leben und Wirken Tycho de Brahe's in Böhmen, Libussa, Jahrbuch für 1850. Herausgegeben von Paul Alois Klar.* IX. Jahrgang, Prag, str. 426—436. Z práce této přinášely časopisy české i německé ukázky. Schvalovati dlužno, že autor uvádí pod čarou prameny svoje, doslovně cituje důležitější doklady a pod. Líbil se patrně tento životopis, když uznal za vhodné proslulý lékař v Karlových Varech, vydavatel rozšířené ročenky Karlovarské, přeložiti jej do řeči francouzské a vydati s titulem: *Séjour et travaux de Tycho Brahe en Bohème. Almanach de Carlsbad, ou mélanges médicaux, scientifiques et littéraires relatifs a ces Thermes et au pays. Par le Chevalier Jean de Carro.* XX. Année, Carlsbad, 1850, str. 196—211.

Julius Max Schottky podal ve své výtečné knize o Praze též příspěvky, některé původní, k životopisu Brahově: *Prag wie es war und wie es ist, nach Aktenstücken und den besten Quellenschriften geschildert*, Prag 1851, I. Band, str. 273—6: Životopis a popis náhrobku v kostele Týnském v Praze. Životopis podán podle Ersch-Gruber, Allgemeine Encyklopädie der Wissenschaften und Künste, Leipzig 1823, Theil XI., str. 206. Na str. 275 v poznámce otištěn výpisek z pamětní knihy Týnské. — II. Band, 1852, str. 135: Das Czernin'sche Palais. Zmínka, že na tomto místě stávala hvězdárna Tychona Brahe. Str. 291—4: Tycho Brahe's Sternwarte.*)

Stručný životopis Brahův podán jest též v publikaci *Miltner-Neumann, Beschreibung der bisher bekannten Böhmischen Privatmünzen und Medaillen, Herausgegeben von dem Vereine für Numismatik zu Prag*, Prag, I. 1852, str. 16—17. Vypsán z Pelclova díla a z Historisches Lexikon, Leipzig, 1709. (Z publikace té vybíráme tuto připojené vyobrazení.)


Pamětní mince, ražená na počest Tychona Brahe r. 1595.

Mládež českou seznamoval s životem Brahovým *P. J. Š.(tulc), Tycho de Brahe. Zlaté Klasy, Časopis obrázkový ku vzdělání a zábavě mládeže, red. Jos. V. Houška*, Ročník II., díl 2, v Praze 1855, str. 290—2. Pramenem jest autorovi hlavně Mikovec. Praví mimo jiné: „Znamenitý tento hvězdář zasluhuje právem, abychom blíže s ním seznámili se, nebo ačkoliv cizinec, byl přece jednou z největších ozdob vlasti naší v tom věku, kdež ona v nejkrásnějším rozkvětu duševních sil se nalezala, a který podnes věkem zlatým slove. K poddaným svým choval se velmi šlechetně a jsa výborným lékařem i v nejchatrnější chalupě u lože nemocného se dostavoval."

*) Z originalů otištěny jsou materialy k životopisu Tychona Brahe: 1. Die böhmische Statthalterei schreibt an den Hauptmann zu Brandeis, Brahe's Gehalt betreffend, den 25. Februar 1600. 2. Der kaiserliche Kanzler Johann Barvitius beauftragt die böhmische Hofkammer, Tycho Brahe's Erben zu befriedigen.

Jen jako kuriosum budiž tu uveden přepodivný historický obraz v rámci povídky „*Johannes Kepler, Historische Erzählung von Julie Burow (Frau Pfannenschmidt)*", I.—III. B., Prag, 1857—8, kdež vystupuje též v ovzduší překresleného romantismu Rudolfinské doby jako hlavní osoba Tycho Brahe.

Vědeckého ocenění z péra odborníkova dostalo se Brahovi v článku *Josefa Smolíka, Mathematikové v Čechách od založení university Pražské až do počátku tohoto století. Vyňato z časopisu „Živa"*. Praha 1864, str. 86—95. Spisovatel první u nás pročetl větší díl Brahových spisů, ano i velikou část jeho „Astronomiae instauratae progymnasmata", zvlášť úsudky jeho tamtéž o všech čelnějších hvězdářích, kteří psali o známé nové hvězdě v souhvězdí Kasiopeje, prostudoval, avšak přiznává se, že seznav z jeho důležitého díla „De mundi etherei recentioribus phaenomenis" novou jeho soustavu sluneční, poměrně nejvíce obíral se řešením otázky: Proč tak důmyslný a duchaplný hvězdář znaje přece dokonale soustavu Koprníkovu a vynášeje tohoto i ve zvláštní ódě nade všecky hvězdáře před ním, nicméně pohnuta se viděl jinou soustavu vymysliti, kterou sám za složitější než Koprníkova uznati musil. Píše: „Ačkoliv důmyslný tento hvězdář pouze něco déle nežli dvě léta, poslední svého života, v naší vlasti trávil, zasluhuje nicméně místa v dílku tomto zvláště ze dvou důležitých příčin. Jednak dá se snadno mysliti, že měl Tycho nemalý vliv na současné hvězdáře Čechy, zejmena na Tadeáše Hájka, Martina Bacháčka a Basila z Deutschenberka, je příkladem svým k pilnému pozorování těles nebeských pobádaje, jednak ale neposlední byl příčinou, že tyto a jiné, třeba jen na krátký čas, důmyslem svým připoutal k své soustavě, jíž oni nepochybně i v širších kruzích platnosti zjednávali. Ačkoliv soustava ta nedostihla ani z daleka jednoduché soustavy Koprníkovy (jak dále podávám), nicméně za jisto se míti může, že žádný hvězdář vůbec a současný hvězdář český zvláště, poznav ji dokonale, nikdy více se nevrátil k soustavě Ptolomeově, což toho času pro všeobecný pokrok ve hvězdářství nemalou bylo ovšem výhodou. Za tou příčinou chci v pojednání tomto zvláště zřetel bráti na jeho náhledy a spisy, zmiňuje se pouze stručně o jeho životě, vyjma některé události, jež se mu přihodily za jeho trvání v Praze." Konečný úsudek Smolíkův zní takto:

„Dějepis odsoudí vždy odpadlictví důmyslného Tychona od soustavy Koprníkovy, a bude mu vždy vytýkati, že složitá jeho soustava byla dílem neštěstím pro hvězdářství, jelikož na dlouho podporovala ještě onu temnotu, která jest znakem soustavy Ptolomeovy. Omluviti může jej pouze to, že ji založil na mathematicky možných základech a na svobodě náhledů, která se ve vědě vůbec žádnému odejmouti nesmí, jakož i, že z konců protivné náhledy současníků svých, buď kteří velebili Koprníka, buď kterým Aristoteles byl vzorem učenosti a nepopíratelné pravdy, v souhlas uvésti chtěl, zvoliv cestu prostřední. Před Koprníkem byla by soustava jeho značila veliký pokrok ve hvězdářství tvoříc jaksi přechod k soustavě onoho, po Koprníkovi však byla zbytečnou, ano škodlivou. Tychonova sláva nezakládá se také na této jeho soustavě, nýbrž na jiných velmi důkladných dílech hvězdářských zejména na jeho „Astronomiae instauratae mechanica; Astronomiae instauratae progymnasmata“ a „Tabulae Rudolphi astronomicae,“ které dokončil a vydal Kepler.“

Drobné zprávičky z Mikovcova životopisu a z archivu místodržitelského vybíral a otiskoval ve svých studiích o době Rudolfově *Josef Svátek*. Na př.: *Hvězdářské nástroje Tychona Braheho, Besídka pro zábavu a poučení, Příloha k „Pražskému Denníku,“* k číslu 79, 2. července 1871; *Knihovna Tychona de Brahe,* tamtéž, k č. 17. 1. května 1881.

Podobných výpisů a přepisů tuto nezapíšeme. Nemají žádné zvláštní ceny. Dále uvádíme německou studii, ve které spisovatel srovnává činnost Brahovu a Keplerovu. Jen nemile působí, že spisovatel použiv s úspěchem netištěných dosud pramenů, zajímavých nových zpráv z příčin nepochopitelných pramenů těch podle požadavků vědecké práce přesně neuvádí a tím trochu rušivě celý dojem z monografie jest zakalen. Viz *Josef von Hasner, Tycho Brahe und J. Kepler in Prag. Eine Studie,* Prag 1872. 8°, str. 47. Obsah: I. Einleitung, II. Tycho, III. Tycho und Kepler, IV. Kepler nach Brahe's Tode. Srv. kritiku Mittheil. des Vereines für Geschichte der Deutschen in Böhmen. XI. 1872, str. 3.

Za to překvapil odborné kruhy *František Dvorský*, nynější ředitel král. zemského archivu českého v Praze, řadou původních, zevrubně uvedených příspěvků k životopisu Brahovu a jeho dědiců. Použil materialu z archivu zemského, Chomutovského, Rakovnického, Jindřicho-Hradeckého a arcibiskupství Pražského. Výsledky pilného badání uložil v rozpravě: *Nové zprávy o Tychonu Brahovi a jeho rodině. Časopis Musea království českého.* 1883, roč. LVII., Praha, str. 60—77. Tklivě působí osud rodiny Brahovy. Vnuk slavného hvězdáře, Otto Tycho Brahe, vstoupil jako voják do služby císařské. Oženil se v Čechách s Kateřinou Ludmilou Kapříkovou z Lesovic. Z původní jistiny (20.000 tol.) za prodané knihy a hvězdářské nástroje dědicům Brahovým nedoplacených 15.000 tol. vzrostlo s úroky na velikou sumu. Však čím větší byl dluh, tím menší a menší měli dědicové naději, že něco dostanou. Taková beznadějnost byla snad příčinou, že Žofie, dcera hvězdáře Tychona de Brahe, někdy okolo l. 1642 na ni vypadající pretensí z toho dluhu sumu 15.000 zl. odkázala klášteru Františkánskému v Kadani. Téhož roku (1642) Rudolf Gansneb Tengnagel postoupil pořádnou cessí konventu Dominikánskému u sv. Jiří v Starém městě Pražském, dlužný úpis císařský na 17.500 zl., kteréž jemu jako dědictví po matce jeho Alžbětě rozené Brahové komora královská dlužna zůstávala. A Ferdinand III. zavázal se l. 1643 dne 14. března, že témuž klášteru suma taková z peněz konfiskačních, pokut nebo jiných zaplacena a 6% zúrokována bude.

Konečnou zprávu o zvyupomínání dluhu, komorou královskou dědicům Brahovým povinného, máme ze dne 10. února l. 1652. Reformační komisaři Mikuláš ze Schönfeldu a Rudolf Roder z Feldburgu, probošt Staroboleslavský, oznamují místodržícím českým, jaký pokrok učinila reformací na panství Brandýském (nad Orlicí): „Dne 7. t. m. rozmlouvali jsme v Těchlovicích s panem Ottou de Brahe, proč jeho sestra, paní Kristina Barbora ze Solhauzů, proti rozkazu císařskému po celých šest let v království Českém se zdržuje a na častá napomínání osob duchovních ničeho dáti nechce? Odpověděl: že paní sestra jeho přišla do Čech s průvodčím listem kurfiršta Saského, aby dluh jí povinný na komoře královské si dobývala; jakmile peníze obdrží, že z Čech odejde.“

Zmínky o vědeckém působení Tychona Brahe v Praze uveřejňuje také náš neunavný kulturní historik Dr. *Z. Winter,* *O životě na vysokých školách pražských knihy dvoje*, v Praze, 1899, str. 338, 381, 528.

* * *

Přiblížili jsme se k jubilejnímu roku 1901, kdy nastává oslava památky Tychona Brahe. Některé naše listy uveřejnily novinku, že se chystá nebo snad již přijíždí do Prahy, do Čech učená kommisse švédská nebo dánská, aby pátrala ve vlasti naší po památkách slavného Dána. Snad to bylo přetiskováno z cizích listů. Neumíme přece vysvětliti, proč listy naše o příchodu kommisse té, (kterou rádi uvítáme), věděly a proč neoznámily raději zároveň čtenářstvu českému, že práci tu vlastně již vykonal, seznam památek po Tychonovi Brahe v Praze sestavil s osvědčenou bedlivostí svou a v krásné úpravě, opatřený názornými obrázky vydal nákladem Královské České Společnosti Náuk dvorní rada p. prof. Dr. *Frant. J. Studnička*, jenž věnoval vždy ve svých vědeckých i populárních pracích činnosti Tychona Brahe pozornost.

Zásluhy *Studničkovy* kromě jiného o popularisaci věd mathematických, astronomických a přírodních methodou Verneovskou bohužel nejsou ještě stále oceněny tak, jak by horlivá na tomto poli činnost úctyhodného Nestora mezi mathematiky českými zasluhovala. Budiž tuto důrazně vytčeno, že právě dvorní rada prof. Dr. *Studnička*, kde se jen příležitost namanula, kruhům odborným i nejširším vrstvám čtenářstva dokazoval, jak Praha jest kolébkou moderní astronomie a vedle jiných důvodův uváděl za hlavní a první to, že zde působil a bádal Tycho Brahe.

V knize svojí *Až na konec světa! Hvězdářské hovory zábavné*, v Praze 1895, str. 62 píše: Praha jest kolébkou moderní astronomie. V Praze chová se neocenitelný rukopis nesmrtelného Koprníka „de revolutionibus orbium coelestium“ (1573), jímž odvěký klam smyslů našich odstraněn a slunce postaveno co svítilna světová do středu všehomíra; v Praze dovršil (1601) svá planetární pozorování bystrozraký Tycho Brahe vystopováním záhadných pohybů Marsových, jimiž konkretně bylo poukázáno ku klamnosti starého názoru světového; v Praze vyzpytoval (1609) geniální Kepler své nejdůležitější zákony, jimiž se řídí soustava sluneční a celý svět oběžnic hvězditých. Srv. Dr. *F. Studnička*, *Bis an's Ende der Welt*, *Erinnerung an Karlsbad*, *Astronomische Causerie*, Prag 1891 a *téhož* stať *„Astronomie a metereologie,“ Památník na oslavu padesátiletého panovnického jubilea Františka Josefa I.*, vydala Česká Akademie, v Praze 1898, jakož i studii: *O mathematickém učení na universitě pražské od jejího založení až do počátku našeho století*, v Praze, 1888, 8°, str. 20.

Dv. rada Dr. *Studnička* staral se o zjištění, kam se poděly rukopisy Brahovy a knihy z bibliotheky Brahovy, rozmetané po světě. Osudy knihovny té obíral se též v studii o starých knihovnách ztracených *Ign. Kampmiller*, *Bibliothecae veteres deperditae*, Viennae 1729, II., 119, podle něhož část bibliotheky Brahovy přišla do dvorní knihovny vídeňské.*)

Podle exempláře, chovaného v universitní knihovně pražské, vydal dv. rada Dr. *Studnička* věrnou reprodukci Brahovy učebnice rovinné a sférické trigonometrie *„Triangulorum planorum et sphaericorum praxis arithmetica, qua maximus eorum, praesertim in astronomicis usus compendiose explicatur,“* v Praze, 1886, 4°, 20 listů.

Nedávno seznámil týž pěstitel studií o Tychonovi Brahe kruhy odborné s novým objevem v universitní knihovně pražské: *Bericht über vom Custos J. Truhlář in der prager Universitätsbibliothek entdeckte Sinus-Tafel Tycho Brahes,* Věstník Královské České Společnosti Náuk. Třída mathematicko-přírodovědecká. Roč. 1899. Praha 1900. Č. XXXIX., str. 4.

Jubilejní *Studničkova* práce o Tychonovi Brahe má název: *Prager Tychoniana, zur bevorstehenden Säcularfeier der Erinnerung an das vor 300 Jahren erfolgte Ableben des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho Brahe*, Prag, 1901, 8°, 69 str. Vedle textu, psaného rukou zkušenou, vedle zajímavých zpráv vloženy jsou do textu illustrace. K titulnímu listu přiložena barevná reprodukce vyobrazení Tychona Brahe, pečlivě podle

---

*) Srv. Tabulae codicum manu scriptorum in Bibliotheca Palatina Vindobonensi asservatorum, VII. Vindobonae, 1875, č. 13619, (str. 240): „De nova stella ex litteris quattuor excerpta, quae litterae datae fuerunt 16. Decembris 1572, 4. Januarii, 6. Februarii et 9. Februarii 1573. Fol. 26. Tycho Brahe notulam inscripsit de Hannibalis Raymundi Vicecomitis iudicio, eandem novam stellam seu cometam ortum a. 1572, die 5. Octobris nec novam esse nec planetam nec cometam“ etc.

mody ke konci XVI. století vyšňořeného, ze „štambuchu", památníku syna Tychona Brahe. Památník ten jest vyložen k veřejnému prohlédnutí návštěvníkům Musea království Českého. Z téhož památníku jsou dále dvě ještě reprodukce: poučné věnování otcovo synovi a znak šlechtického rodu Brahova. Dále reprodukovány jsou titule a ukázky z rukopisů Brahových. Na str. 46. vyobrazena podoba Tychona Brahe ze Strahovské knihovny na desce knihy vytlačená a vyobrazení Tychona Brahe, připojené ku věnování knihy „Astronomiae instauratae mecanica" Janovi svobodnému pánu z Hazmburka. Na str. 58. vyobrazen sextant Tychona Brahe ve hvězdárně v Klementinu v Praze (srv. vyobrazení sextantu Brahova, Čechy III. 2., v Praze, na str. 183.) a na str. 59. vyobrazen Tycho Brahe v celé postavě, třímaje pravicí sextant, nástroj, jehož užíval při svých astronomických studiích. Na str. 62. vyobrazen Letohrádek královny Anny (Belvedere), kde Brahe svoje nástroje hvězdářské choval. Na str. 65. náhrobek Brahův z chrámu Týnského v reprodukci světlotiskové.*)

Kniha dv. rady Dra *Studničky* bude šířiti památku Tychona Brahe a zároveň šířiti chvalnou pověst královského města Prahy, jež se honosí stkvosty tak vynikajícími, jejichž cena a význam právě nyní, kdy se blíží oslava památky Brahovy, nabývají zvláštní důležitosti. Do chrámu Týnského k náhrobku, pod nímž zetlely kosti slavného učence, zavítají vedle Čechů asi z ciziny ctitelé jeho ... Tři sta let je starý nápis kolem kamene, jeho hluboký smysl však nezastaral a hlásal i hlásá potomkům pravdu skálopevnou:

„Ni lesk, ni poklady,
umění toliko žezlo věčně trvá!"

V Praze dne 1. ledna 1901.

---

*) Text: Vorwort. Einleitung. A. Schriftwerke: 1. Stammbuch des Tycho Brahe iun. 2. Triangulorum praxis arithmetica. 3. Tabulae sinuum. 4. Sinnspruch im Stammbuch des Siebold Plan. B. Druckwerke: 1. Cl. Ptolomaei opera. 2. N. Copernici de revolutionibus. 3. Astronomiae instauratae Mecanica. 4. P. Rami Dialectica. 5. M. Moestlini „Alterum Examen." 6. Jos. Scaligeri „Cyclometrica." C. Kunstwerke: 1. Sextant. 2. Provisorisches Observatorium „Belvedere". 3. Epitaph. Schlusswort.

O látkách radioaktivných.

Napsal

Dr. **Vladimír Novák,**
docent české university v Praze.

Vynález Roentgenův učiněný ke konci roku 1895, vzbudil všeobecný zájem nejvíce zajímavou absorpcí paprsků X-ových různými látkami, která se zvláště pěkně jeví v účinku fotografickém. Paprsky Roentgenovy, neviditelné to „černé světlo" pronikají látkami, které obyčejné světlo nepropouštějí, naopak jsou zase jinými látkami průhlednými z veliké části zadržovány. Vycházejíce z malého místa lampy vakuové šíří se přímočaře a za tělesem pro paprsky tyto neprostupným povstává „stín" podobně jako povstane na stěně stín předmětu, který držíme tak, aby světlo svíčky směrem ke stěně naň dopadalo.

Neviditelné paprsky Roentgenovy stanou se viditelnými přeměnou, která nastane při dopadu paprsků X-ových na nějakou látku fluoreskující. Zvláště dobře k účelům těmto vhodné jest stínitko pokryté vrstvou drobných krystallů kyanidu platičitobarnatého nebo wolframanu vápenatého. Toto stínitko nahradí do jisté míry fotografickou desku, stín předmětu „osvětleného" paprsky X-ovými objeví se tu viditelně s tím rozdílem proti obyčejnému stínu, že dle povahy stinícího předmětu pole stínové ukazuje různou intensitou různou absorpci stinících předmětů.

Známý radiogram (stínokresba) ruky, způsobený větší absorpcí paprsků X-ových kostmi nežli masem, zjednal Roentgenovi slávu všeobecnou, neboť širšímu obecenstvu připadala tato část objevu Roentgenova nejvíce podivuhodnou. Přirozeně kladli si pak mnozí pozorovatelé otázku, zdali neexistují jiné druhy podobného záření, jehož paprsky by podobně jako Roentgenovy pronikaly látkami obyčejnému světlu neprostupnými. *G. Le Bon**) měl za to, že i v obyčejném bílém světle (denním) jsou obsaženy paprsky podobného účinku paprsků Roentgenových. Do rámu kopirovacího vložil na citlivou desku hotový negativ, otvor rámu pak pokryl tenkou deskou železného plechu a pak delší dobu (několik hodin) při denním světle exponoval. Po dlouhém

---

*) *G. Le Bon,* Beib. z. Ann. 20 pg. 476. 1896.

vyvolávání objevil se na desce slabý sice ale přece zřetelný obrázek.

Pozdější pozorování ukázala, že se nejedná o zvláštní nový druh záření a že lze pokus *Le Bon*-ův vysvětliti, buďto jednoduše pronikáním světla slabou vrstvou plechu, *) anebo tím, že vzniká obrázek na desce citlivé stykem vrstvy se stříbrem negativu.

Toto působení kovů na desku fotografickou zkoumal v poslední době *Béla v. Léngyel*, **) tím že kladl uhlazené kousky kovu na desku fotografickou zabalenou do černého papíru a obklopoval kovy určitým plynným ústředím. Ukázalo se, že plyny, které lze snadno okysličiti, působí na desku fotografickou podobně jako světlo, kovy pak ukazují podobné působení pouze nepřímo, to jest tehdy, když nalézajíce se v atmosféře vlhké vylučují vodík, jenž na desce vyvolává účinek podobný exposici světelné.***)

1. *Základní úkazy.*

Při opakování pokusů Roentgenových v první době, kdy lampy vakuové nebyly dokonalé, vysílajíce pouze malé množství X-ových paprsků, pozorovatelé snažili se sesíliti účinek fotografický látkami fluoreskujícími, které neviditelné X-paprsky mění na viditelné.

Pokusy tyto vedly k odkrytí záření nového.

Dne 17. února 1896 nalezl *Niewenglowski*,†) že fosforeskující sirník vápenatý vydává paprsky, které pronikají černým papírem.

Niewenglowski zabalil pečlivě citlivý papír a vložil naň dva peníze, jež zase pokryl deskou skleněnou. Jedna polovice této desky kryjící jeden z penízů potřena byla sirníkem vápenatým. Exponováno bylo po té 4 až 5 hodin při světle slunečním. Vý-

*) Velmi tenké vrstvy kovu jsou průsvitny.

**) *Béla v. Léngyel*, Wied. Ann. 66. pg. 1162. 1898.

***) Na základě tohoto účinku možno v temné komoře tyčinkou zinkovou „napsati" cokoliv na citlivou vrstvu desky. Podobně objeví se zcela zřetelně místa, kde mezi deskami fotografickými k citlivé vrstvě přilehal kousek tuhého papíru, který se při balení desek vkládá k zamezení přímého kontaktu.

†) *G. H. Niewenglowski*, Beibl. z. Ann. 20. pg. 477. 1896.

sledek pokusu byl překvapující; papír citlivý, nad nímž nalézala se část desky pokrytá látkou fosforeskující, ukázal kopii peníze, kdežto na druhé části papíru otisk se vůbec neobjevil.

Týden po tom ukázal *Becquerel**) podobnou a ještě zajímavější vlastnost *solí uranových*. Kousek síranu uranylo-draselnatého (SO_4 (UO) $K+H_2O$) položený na desku fotografickou v obálce černého papíru před světlem obyčejným chráněnou, vyvolal účinek fotografický i tenkráte, když mezi praeparátem a vrstvou citlivou mimo obalující papír nalezala se tenká destička skleněná.

V případě tomto nejedná se o přímé chemické působení praeparatu na vrstvu citlivou ani o účinek fosforescence, která při daném síranu mizí již po 0·01 vteřiny po osvětlení; sůl uranová vydává tmavé, neviditelné paprsky, které podobně paprskům Roentgenovým tenkými destičkami kovovými (i skleněnou) postupují a způsobují účinek fotografický.

Ukázala se však ještě jiná, důležitá vlastnost paprsků Becquerelových, která byla již seznána při paprscích Roentgenových.

Suchý vzduch je isolatorem; udělíme-li elektroskopu pozlátkovému určitý náboj, rozstoupí se lístky a jich rozstup jest stálý, pokud vzduch v elektroskopu a kolem dobře isoluje Dopadají-li však na lístky nabitého elektroskopu paprsky Roentgenovy, rozstup lístku se zmenšuje až se elektroskop úplně vybije. Podobnou vlastnost objevil Becquerel při paprscích uranových a naskytla se tak přirozeně *dvojí* cesta ke zkoumání tohoto nového druhu záření, jednak methoda *fotografická*, jednak methoda *elektrická*.

Prvá z nich vyniká velikou jemností, poskytujíc mnoho podrobností, jest však zdlouhavá a pracná, vyžadujíc dlouhých exposicí (až kolik dní) a dlouhého pomalého vyvolávání, druhá v tom má svou přednost, že dovoluje posouditi vlastnosti paprsků Becquerelových velmi rychle.

2. *Methoda fotografická*.

Při methodě fotografické zabalena byla deska fotografická do černého papíru, nebo vložena do skřínky s víčkem aluminiovým; na vrch kladen pak přímo praeparát uranový nebo vklá-

*) *H. Becquerel*, Beibl. z. Ann. 20. pg. 469. 1896.

dány destičky či předměty, kterými paprsky Becquerelovy měly pronikati.

Provedenými fotografiemi ukázalo se především, že záření síranu a jiných solí uranových šíří se *přímočaře*. Stínový obraz mince vložené mezi desku fotografickou a praeparát uranový ukázal podobu raženého reliefu po exposici patnáct dní trvající.

Nové záření objevilo se jak při solích uranových tak i uraničitých.

Ačkoliv tyto fosforeskují, ony pak nikoli, nebylo znamenati v jich vlastním záření patrného rozdílu. Ukázalo se také, že nezáleží na osvětlení předběžném. Soli rozpuštěné a po tmě krystallované, projevily se býti radioaktivnými, tak že zdálo se býti oprávněným připsati záření Becquerelovo jako specifickou vlastnost *uranu*.

Velice překvapujícím jest *trvalost* záření uranového. Becquerel uzavřel některé praeparaty do skřínek olověných tak zařízených, že mohla býti snadno vsunuta deska fotografická, na kterou záření dopadalo skrze kryt aluminiový. V různých dobách během 4 uplynulých let exponovány tak desky fotografické vždy po 48 hodin záření uranovému. Stejnou dobu vyvolávány ukázaly, týž účinek fotografický. Nedalo se tedy během 4 let konstatovati úbytek záření uranového, ačkoliv každé působení na desku fotografickou předpokládá úbytek zářivé energie praeparatu.

Že by uranové soli energii nějak z vnějšku přijímaly, nedalo se také potvrditi, neboť i když schvalně praeparat podroben účinku paprsků ultračervených, nebo ultrafialových aneb i dokonce účinku paprsků Roentgenových — v mnohém ohledu tak podobných — neukázalo se patrné zvětšení intensity uranového záření. Pouze při osvětlení jiskrou elektrickou, anebo světlem lampy obloukové objevilo se zvětšení intensity záření ale velmi nepatrné a rychle mizící. Záření uranové děje se stejně při temperatuře — 20 nebo 100°. Všechna tato pozorování jsou velmi zajímavá ze stanoviska principu zachování energie.

Odkud se béře a v čem záleží energie zářivá solí uranových? Proč neubývá neustálým tímto zářením energie původní? Čím se úbytek nahrazuje? Toť jsou otázky, které nelze do dnešního dne dostatečně zodpověděti. Jak si úkazy tyto hledí vysvětliti různí pozorovatelé, udáno bude ke konci tohoto článku, až čtenář pozná ostatní zajímavé vlastnosti paprsků Becquerelových.

Dalšími pokusy fotografickými se ukázalo, že se paprsky Becquerelovy *nelámou* ani *neodrážejí*, že se také *nepolarisují*.

Lom zkoušen při tomto uspořádání. Do silné desky olověné učiněn hluboký, přímý zářez, do něhož vloženo něco kysličníku uranového.*)

Podobalo se tedy uspořádání toto sviticímu rozžhavenému drátku platinovému, proti němuž rovnoběžně umístěna jest štěrbina. Hranoly ze skla, aluminia, paraffinu položeny na zářez v desce olověné.

Na vyvolaných deskách neobjevilo se pošinutí štěrbiny hranolem, nelámou se tudíž paprsky Becquerelovy.

Při zkoušení odrazu ukázal se na desce fotografické nikoli obraz zářícího praeparatu ale obrys zrcadla, způsobený fosforescencí zrcadla, tedy úkazem sekundarným.

Polarisace zkoušena na zmíněné desce olověné se zářezem naplněným látkou radioaktivnou. Štěrbina pokryta byla tenkou destičkou turmalinovou, která byla kryta částečně jednou skříženou, částečně jednou rovnoběžně položenou destičkou turmalinovou. Na to na vrch položena deska fotografická. Při vyvolání objevila se obě obrazová pole, jak pod skříženými destičkami turmalínovými tak pod rovnoběžnými zcela stejně tmavými.

3. *Methoda elektrická.*

Původní methoda elektrická zkoumání záření látek radioaktivných záležela v časovém pozorování klesání rozstupu lístků nabitého elektroskopu, když na elektroskop účinkovalo záření.

V obr. 1. znázorněno jest sestavení, kterého užil *Behrendsen.***)

V kovové nádobě *A*, opatřené dvěma protilehlými okénky *D*, nalézá se pozlátkový elektroskop *E*, jehož kovová kulička *C* na drátku poněkud stranou zahnutém míří proti otvoru *O*.

Rozstup lístků lze měřiti na škále skleněné, která se pozoruje lupou. Aby byl elektroskop původně vždy na určitý potencial nabit, spojuje se se sloupem Zamboniho. Látka radioak-

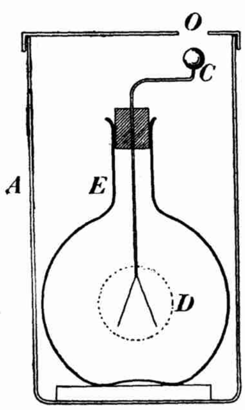
---

*) *Rutherford*, Phil. Mag. 47. pg. 109. 1899.

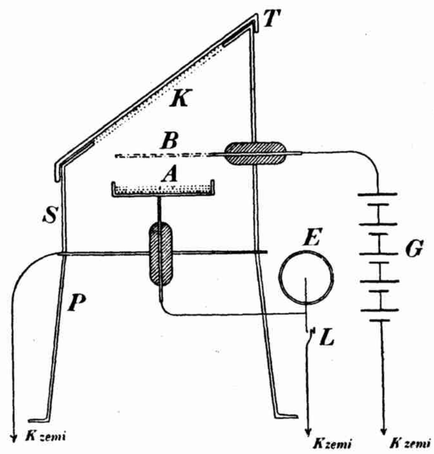
**) *Behrendsen*, Wied. Ann. 69. pg. 220. 1899.

tivná kladena na otvor O, který po případě byl zmenšen příslušným diafragmatem.

Pozorování záleželo v určení doby, za kterou od vložení látky působivé na otvor O, rozstup lístků zmenšil se na určitou hodnotu.



Obr. 1.



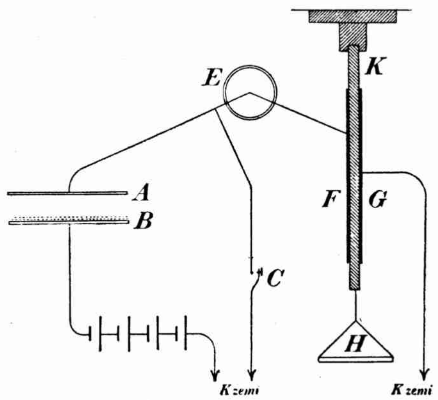
Obr. 2.

Jiná methoda elektrická a to citlivější, užívá místo elektroskopu elektrometru quadrantního. Uspořádání*) její patrno z obrazce 2. Na podstavci P umístěna jest dřevěná staniolem polepená skřínka S, jejíž šikmá stěna K opatřena jest křemenovým okénkem, které lze přikrývkou T pokrýti. Do skřínky S vcházejí dvě pečetním voskem dobře isolované tyčinky ocelové, z nichž jedna zakončena jest železnou miskou A, pro látku radioaktivnou, druhá pak železnou sítkou B. Skřínka S spojena jest vodivě se zemí. Sítku B lze spojením s mnohočlennou batterií nabiti na potencial 140 volt. Miska A spojena jest s citlivým elektrometrem E, jejž lze klíčem L k zemi odvésti.

*) Uspořádání tohoto užili poprvé *Elster* a *Geitel* (Wied. Ann. 44. pg. 722. 1891) při studiu fotoelektrických mineralů, to jest takových látek, které osvětleny slunečním (nebo elektrickým) světlem vybíjejí vodič, na jehož povrchu jsou umístěny.

Měření provedeno tímto způsobem. Především spojena miska A se zemí a síťka B nabita na potencial 140 volt, na to spojení se zemí otevřením klíče přerušeno. Poněvadž zářením látky radioaktivné vzduch mezi A a B stává se vodivým, přejde náboj z B na A a tudíž také na jehlu elektrometru, která se tím z původní polohy odchýlí. Úchylka měří patrně množství elektrické, které v určitém čase prošlo vrstvou vzduchu mezi A a B.

Okénkem K bylo možno látku radioaktivnou osvětliti a studovati tak vliv světla na záření Becquerelovo. Měření taková provedl se sloučeninami *thoria* *G. C. Schmidt* *) a ukázal, že látky tyto, ačkoliv jsou radioaktivné, nepodléhají působení světelnému.



Obr. 3.

Zvláště zajímavě pozměnili methodu předešlou manželé *Curie-ovi* proslavení vynálezem nových látek neobyčejně mohutného záření.

Uspořádání předvádí obr. 3.

Látka radioaktivná vkládá se na kovovou desku B spojenou s jedním pólem mnohočlenné batterie, jejíž druhý pól jest odveden k zemi. Proti desce B umístěna jest podobná deska A

---

*) *G. C. Schmidt,* Wied. Ann. 65. pg. 141. 1898.

spojená jednak s elektrometrem *E*, jednak, uzavře-li se klíč u *C*, spojená se zemí.

Přeruší-li se spojení se zemí u *C*, nabije se deska *A* a jehla elektrometru se uchýlí. Náboj desky *A* jest velmi nepatrný, místo, aby byl měřen úchylkou, kompensuje se tato úchylka *piezoelektrickým* nábojem*) křemene *K*, jehož jeden polep spojen jest s elektrometrem, druhý pak se zemí. Náboj piezoelektrický měří se *zatížením H*, které se tak dlouho zvětšuje, až elektrometr neukazuje žádné úchylky.

Těmito a podobnými methodami elektrickými nalezeny velmi zajímavé vlastnosti paprsků uranových.

4. *Absorpce paprsků Becquerelových.*

Methodou elektrickou bylo možná sledovati absorpci paprsků uranových různými látkami, daleko citlivěji než-li methodou fotografickou. Na látku radioaktivnou, umístěnou na desce jedné, kladeny různé destičky tenkého plechu; při tom se ukázalo, že vedení elektrického vrstvou vzduchovou ubývá, až konečně se vodivost na jisté hodnotě ustaluje. Byla-li látka radioaktivná po té pokryta deskou značné tloušťky, nastalo další zmenšení vodivosti. Zajímavé tyto výsledky experimentalní vysvětliti lze hypothesou o *dvojím druhu* paprsků uranových.

Uranové „α-paprsky" jsou ty, které, ačkoliv s velkou intensitou vystupují, se přece látkami snadno absorbují oproti „β-paprskům", které, ač daleko slabší intensity, i silnější vrstvy pronikají.

Všechny sloučeniny uranu vysílají oba druhy paprsků, ale v nestejné intensitě. Aluminium propouští stokráte více β-paprsky než-li α-paprsky. Absorpce β-paprsků různými kovy podobá se absorpci paprsků Roentgenových; **) jako při těchto

*) Planparallelní deska křemene seříznuta jest tak, že rovnoběžné stěny její jsou kolmo k elektrické ose krystallu. Stěny tyto jsou polepeny staniolem. Spojíme-li jeden polep ze zemí a zatížíme-li desku ve směru, který je kolmý k rovině dané osou elektrickou a optickou krystallu, nabije se druhý polep. Potencial tohoto polepu přímo jest úměrný prodloužení desky.

**) O absorpci paprsků Roentgenových různými látkami viz Dr. *V. Novák* a Dr. *O. Šulc*, Věstník česk. akad. V. pg. 87. 1896.

souvisí s atomovou hmotou, t. j. má tím menší hodnotu, čím menší je atomová hmota příslušného kovu.

Značnou měrou absorbují se α-paprsky různými plyny. Tak zmenší se intensita záření na polovinu vrstvou kysličníku uhličitého 3 *mm* silnou, vrstvou vzduchu 4·3 *mm*, vrstvou methanu 7·5 *mm* a vrstvou vodíku 16 *mm* silnou. Absorpce záleží na tlaku plynu.

Vodivost plynů, povstalou zářením látek radioaktivných, *Rutherford* vysvětluje — podobně jako J. J. Thomson při paprscích Roentgenových —, *ionisací* plynu.

Pojmu „ionisace" snadno porozumíme z příkladu následujícího. Chlorovodík jako plyn chová se jako isolator, podobně také čistá voda. Rozpustí-li se však chlorovodík ve vodě, povstane roztok, který je poměrně *vodivým*. Abychom si tuto vodivost vysvětlili, předpokládáme, že chlorovodík v roztoku jest ve zvláštním stavu molekulovém, při němž alespoň část molekul je rozložena, dissociována na H a Cl.

Částice molekuly, v tomto případě atomy vodíku a chloru, slují ionty. Rozkládá-li se chlorovodík ve vodním roztoku proudem elektrickým, jsou tyto ionty nosiči nábojů elektrických, vodík positivního, chlor negativního. Počet dissociovaných molekul souvisí s koncentrací roztoku, při roztocích velmi zředěných nutno předpokládati, že všechny molekuly látky rozpuštěné jsou dissociovány v ionty.

Při elektrolysi a vodivosti elektrické mluvíme o *dissociaci elektrické*, kterou sluší rozeznávati od pouhého *rozkladu chemického*. Při dissociaci elektrické rozpadá se neutrálná molekula v ionty positivné a negativné, kdežto při pouhé chemické dissociaci jsou produkty rozkladu zase *neutrálné*; vedle toho ionty elektrické dissociace *neshodují* se často s látkami, na které se ta neb ona sloučenina chemicky rozkládá.

Zářením látek radioaktivných proměňují se molekuly plynu mezi oběma deskami v ionty, které přenášejí náboje positivné nebo negativné tak, že mezi deskami vzniká proud. Čím mohutnější je radiace, tím větší jest ionisace, stupeň ionisace úměrný jest tlaku a proto jest absorpce paprsků plynem úměrna tlaku, jak pokusy ukázaly. Závislost záření uranového na temperatuře nemohla býti ani elektrickými methodami dokázána. Shodují se v té příčině paprsky Becquerelovy s paprsky X-ovými, jimž jsou — jak již jednou řečeno — ve mnohém ohledu podobny. Dopadají-li paprsky X-ové na kovové předměty, vysílají tyto paprsky zcela shodných vlastností s α-paprsky uranovými. Ostatní část záření uranového, β-paprsky, podobá se přímo paprskům Roentgenovým, líšíc se pouze menší absorpcí předměty kovovými.

5. *Látky radioaktivné.*

Nežli přejdeme k líčení ostatních zajímavých vlastností paprsků Becquerelových, nutno ještě připomenouti, že objevena vlastnost tmavého záření na mnohých látkách, a to v mnohem větší míře, než-li na uranu a jeho sloučeninách. Tak ukázal *G. C. Schmidt**) a nezávisle na jeho práci paní *Sklodowska Curie*,**) že thorium a sloučeniny jeho jsou radioaktivné. Vlastnosti paprsků thoriových shodují se s uvedenými vlastnostmi paprsků uranových, záření jich jest právě tak nehomogenní jako paprsků uranových a Roentgenových.

Následující tabulka udává mineraly radioaktivné a jich poměrné záření, měřené methodou elektrickou.

Uranová ruda***) z Johanngeorgenstadtu	8·3
„ „ z Jachymova	7·0
„ „ z Příbrami	6·5
„ „ z Cornwallisu	1·6
Carnotit	6 2
Chalcolit	5·2
Antinite	2·7
Orangit	2·0
Cleveit	1·4
Thorit	1·4
Aeschynit	0·7
Monazit	0·5
Fergusonit	0·4
Niobit	0·3

Všechny tyto mineraly obsahují uran a thorium; zajímavo

*) *G. C. Schmidt*, Wied. Ann. 65. pg. 141. 1898.
**) *Sklodowska Curie*, Compt. Rend. 126. pg. 1101. 1898.
***) Smolinec nedělivý.

jest však, že vynikají některé *značnou* mohutností zářivou, která *předčí* na př. *uran*. Zmíněné rudy z Čech pocházející jsou až *4kráte* aktivnější kovového uranu! Okolnost tato nasvědčovala tomu, že nelze přičítati mohutnost zářivou pouhému uranu a thoriu, spíše, že látkám těmto a sloučeninám jich přimísena jest, byť ve velmi nepatrném množství, látka jiná, prvek neznámý, který jest vlastní látkou radioaktivnou. Z uvedených mineralů nejspíše bylo lze hledati neznámou látku radioaktivnou v českých rudách uranových, a to způsobem velmi obtížným. Rudy uranové obsahují velkou řadu rozmanitých kovů, které bylo třeba oddělovati, jednotlivé oddělené částky pak zkoumati co do mohutnosti zářivé. Ve zbytcích nebo částech poměrně vyšší mohutnosti zářivé pátráno dále po látce neznámé. Pálením rudy uranové získán byl plyn, který uzavřen v trubičce skleněné jevil vlastnosti látek radioaktivných. Během času však mohutnosti zářivé ubývalo, až konečně úplně zmizela.

Rozkladem uranové rudy na mokré cestě nalezeny pak tři látky radioaktivné, veliké mohutnosti zářivé a to *polonium*, *radium* a *aktinium*.

Polonium objevili manželé *Curieovi* a to jako látku, která provází *vismut* v rudě uranové.

Sirník tohoto kovu oddělený od ostatních látek v rudě uranové obsažených, zahříván byl v tyglíku opatřeném víčkem, jež se chladilo vodou. Na víčku sublimoval sirník větší mohutnosti zářivé nežli byl zbytek v tyglíku.

Roztoky dusičnanů byly sráženy vodou, praecipitaty objevily se radioaktivnějšími nežli zbylé soli rozpuštěné.

Roztoky v kyselině chlorovodíkové, značně kyselé, sráženy byly sírovodíkem. Sražené sirníky byly zase mnohem aktivnější nežli soli rozpuštěné.

Radium objevili manželé *Curieovy* spolu s *Bémontem*.*) Jest to látka, jež provází baryum vyloučené z rud uranových. Odlučována byla jako chlorid, který se méně rozpouští ve vodě okyselené kyselinou solnou než chlorid barnatý.

Aktinium nalezl *Debierne***) v látkách skupiny železa

---

*) *Bemont*, Compt. Rend. *127*. pg 1215. 1898.

**) *Debierne*, Compt. Rend. *129*. pg. 593. 1898; *130*. pg. 906. 1900.

oddělených při rozkladu uranové rudy. Podobá se thoriu, dosud však se nepodařilo od ostatních látek je odděliti.

Všechny tři jmenované látky radioaktivné, polonium, radium a aktinium nalézají se v rudě uranové ve velmi nepatrném množství. Příprava několika decigramů těchto podivuhodných látek vyžadovala zpracování několika *tun* zbytků rudy uranové. Prvá tuna věnována vládou rakouskou z hutí Jachymovských v Čechách.

Ze tří jmenovaných látek, polonia, aktinia a radia, lze nejspíše za skutečnou novou látku považovati radium. Spektrálně zkoumáno totiž, ukázalo radium nové čáry, ve spektru barya neznámé.

Demarçay určil délku vln těchto čar, z nichž nejintensivněji vystupují

$10^6 \lambda =$	482·63 *mm*	10
	468·30 *mm*	14
	434·06 *mm*	12
	381·47 *mm*	16
	364·96 *mm*	12.

Čísla v pravo udávají poměrnou intensitu, čára (381·47) jest pro radium nejvýznačnější.

Spektrum má všeobecně ráz spekter kovů alkalických zemin.

Spektra vismutu obsahujícího polonium a thoria obsahujícího aktinium nejevila patrného rozdílu od spekter obyčejného vismutu a thoria.

Ačkoliv analysa spektralná náleží mezi nejjemnější methody, kterými určité látky v množství nepatrném bezpečně poznáváme, přece jest mohutnost zářivá látek radioaktivných daleko bezpečnějším zkoumadlem jich přítomnosti než fotografie jich spektra.

Dle této zkušenosti, pokusy stvrzené, lze pak za to míti, že uran a sloučeniny uranové obsahují malé stopy radia nebo aktinia, které pak jsou zdrojem tmavého záření. Myšlence této nasvědčují také pokusy, které byly provedeny s různými praeparaty uranu. Čím bedlivěji a čistěji byl uran připraven, tím slabší bylo jeho záření.

Manželé Curieovi hleděli zjistiti *atomovou hmotu* radia, ačkoliv bylo k disposici pouze málo této vzácné látky. Nalezené číslo 174 považují za nízké, ale přece charakterisující novou látku z řady kovů alkalických zemin.

6. Vlastnosti radia, polonia, aktinia. Záření nových látek radioaktivných předčí daleko dříve uvedené záření uranové. Jest při nejmenším 100 000kráte intensivnějším, ačkoliv nelze dobře methodou elektrickou různá záření srovnávati již z toho důvodu, že část paprsků radia a aktinia proniká deskami kovovými a neúčastní se ionisace plynů.

Paprsky polonia jsou velice intensivní, ale silně se látkami absorbují.

Část paprsků radia proniká i deskami několik *cm* silnými a působí ve vzduchu do vzdálenosti větší jednoho metru. Pouze olovo a platina paprsky tyto zachycují, aluminium, sklo a paraffin jsou pro ně látkami průhlednými.

Stínové obrazy na deskách fotografických vznikají paprsky radia velmi rychle při malých vzdálenostech; radiografie tobolky s mincemi provedena byla při vzdálenosti 20 *cm* několika centigrammy aktinického chloridu barnatého exposicí několika hodin. Při vzdálenosti 1 metru trvala exposice několik dní.

Radiové soli barnaté od chvíle, kdy byly připraveny, ukazovaly stále *rostoucí* mohutnost zářivou, která se na jisté *mezní* hodnotě konečně *ustálila.**)

Koncentrovaný vodní roztok chloridu barnatého, obsahujícího radium, jest z prvu právě takové mohutnosti zářivé jako látka tuhá. Mohutnosti však časem ubývá až konečně úplně zmizí.

Všechny soli barnaté dávají nejúčinnější praeparaty při první krystallisaci. Látky obsahující polonium ztrácejí časem mohutnost zářivou, které nenabudou, i když byly rozpuštěny a znovu připraveny.

Na výboj elektrický mezi dvěma konduktory kovovými působí záření radia tak, že se při určité vzdálenosti elektrod jiskrový výboj mění ve výboj tichý. Zvětší-li se povrch kathody, jest uspořádání tak citlivé, že lze konstatovati záření radia i ze vzdálenosti větší jednoho metru.**)

---

*) Viz *F. Giesel*, Wied. Ann. *69.* pg. 91. 1899.

**) Viz *J. Elster* a *H. Geitel*, Wied. Ann. *69.* pg. 673. 1899.

Neviditelné paprsky nových látek zářivých proměňují se ve viditelné dopadem na některé látky fluoreskující, na př. na stínítko pokryté kyanidem platičito-barnatým. *Bary**) ukázal, že soli kovů alkalických zemin, které jeví fosforescenci při dopadu paprsků světelných a Roentgenových, fluoreskují též ozářeny jsouce paprsky radia.

Radiové sloučeniny barnaté vysílají též paprsky viditelné, fosforeskují, jak ve tmě neb silně stlumeném světle plynovém lze pozorovati. Od obyčejné fosforescence liší se tato luminiscence tím, že radioaktivná látka fosforeskuje vesměs v každé části, kdežto obyčejná fosforescence jeví se jen na povrchu látek, který byl před tím osvětlen.

Ve vlhkém vzduchu ubývá této luminiscence radioaktivných hmot, vysušením zase se vrací.

Látky radioaktivné působí na některé látky je obklopující *chemicky*.

Tak na př. barví se účinkem jich sklo a porcelán.

Nejpatrněji jeví se účinek tento hnědým neb nafialovělým zbarvením skleněných nádobek látky radiové obsahujících, úkaz tento připomíná zabarvení lamp Roentgenových, jichž se k radiogramům delší dobu používalo.

Také papír působením paprsků Becquerelových se mění v barvě a za jistých okolností jest cítiti *ozon* v blízkosti látek velice aktivných.

Sloučeniny radiové mění se během času od chvíle, kdy byly připraveny, ve svém zabarvení, aniž by však změna tato souvisela se změnami v mohutnosti zářivé. Čerstvě připravené krystally radiového chloridu barnatého jsou bezbarvé, během času však žloutnou nebo růžovatí, rozpustíme-li je, krystallují nové krystally zase bez barvy. Radioaktivný chlorid barnatý páchne chlornatanem draselnatým, radioaktivný bromid bromem.

Paprsky radiové pozměňují barvu kyanidu platičito-barnatého, kterýž sám může — jak Giesel ukázal — státi se radioaktivným.

Radioaktivita nových látek zdá se býti nezávisla na temperatuře. Radioaktivný uran roztavený v peci elektrické a schla-

*) *Bary*, Compt. Rend. *130*. pg. 776. 1900.

zený objevil se býti zase aktivným, podobně radiový chlorid barnatý tavený (při 800°) nepozbyl zajímavé této vlastnosti. Temperatury nízké nepozměňují mohutnosti zářivé, radium v temperatuře stuženého vzduchu způsobuje zřejmou fluorescenci síranu uranylodraselnatého.

7. *Radiové paprsky magnetickým polem se odchylující a neodchylující.*

Jak patrno z dosavadního, podobny jsou paprsky Becquerelovy ve velmi mnohém ohledu paprskům Roentgenovým. Tím není ovšem řečeno, že by obojí druh paprsků byl téže vnitřní podstaty. Jsou na př. mnohé podobnosti mezi paprsky kathodovými a Roentgenovými a přece paprsky tyto sluší rozeznávati. Jeden z důležitých rozdílů posléze jmenovaných paprsků záleží v tom, že paprsky kathodové se v poli magnetickém z původního směru uchylují, paprsky Roentgenovy však nikoli.

Při zkoumání paprsků radiových v poli magnetickém ukázalo se, že *část* těchto paprsků se *uchyluje, část ostatní neuchyluje.*

Paprsky, které se polem magnetickým *uchylují*, jsou právě ty, které látkami snadno *pronikají.* V souhlasu s tím paprsky polonia, které se snadno látkami *obsorbují*, polem magnetickým se *neodchylují.* Pouze *Giesel* uvádí, že se mu zdařilo připraviti polonium, jež krátce po své přípravě vydávalo paprsky, které se magnetem odchylovaly. Aktinium chová se v této příčině podobně jako radium.

Celkem jeví se býti záření radia velmi složitým a lze při něm rozeznávati nejméně tři druhy paprsků a to

1. paprsky, které se magnetickým polem neodchylují, které se však látkami snadno absorbují,

2. paprsky, které se magnetickým polem neodchylují, ale velmi mocně hmotami pronikají. Těchto jest v celém záření *jen nepatrná část*,

3. paprsky, které se polem magnetickým odchylují a které, dle Becquerela, tím více látkami pronikají, čím méně se odchylují.

Zkoušení absorpce paprsků radiových methodou elektrickou prováděno kondensatorem, jehož jedna (dolejší) deska opatřena byla okénkem, pod kterým nalézala se malá krabička s látkou radioaktivnou Obě kovové desky kondensatoru stály horizontalně, dolejší byla spojena s elektrometrem, hořejší se zdrojem konstantního potencialu. Kondensator byl tak zařízen, že bylo lze obě desky jeho blížiti neb vzdalovati, podobně bylo možná v určitých mezích přibližovati látku aktivnou k okénku, pokrytému destičkou z látky absorbující.

Methodou touto shledáno, že paprsky, jež magnetické pole neodchyluje, (1) absorbují se již *vrstvou vzduchovou,* tedy při větší vzdálenosti desek kondensatoru. Jinak bylo možná paprsky tyto odstraniti vsunutím aluminiového lístku 0·01 *mm* silného. Absorpce paprsků magnetem se odchylujících (3) a neodchylujících (1) děje se dle různých zákonů.*) Pro paprsky (3) platí podobný zákon jako pro paprsky Roentgenovy, koefficient absorpce s rostoucí vrstvou látky absorbující *ubývá* nebo jest alespoň stálý; pro paprsky (1) koefficientu absorpce při silnějších vrstvách *přibývá*, tak že na př. čím větší vrstvou vzduchu tyto paprsky procházejí, tím mohutněji je destička aluminiová absorbuje.

Becquerel **) zkoumal uchýlení paprsků radiových magnetem fluorescencí a fotograficky. Především postavil póly elektromagnetu do jedné svislé přímky, na jednom pólu položena byla látka aktivná, na druhém stínítko fluoreskující neb zabalená deska fotografická.

Pokud elektromagnety proud neprocházel, objevilo se na stínitku světlé místo, neurčitě ohraničené; když byl proud zaveden, ono světlé místo se zúžilo a přesněji ohraničilo. Tento účinek siločar magnetických *rovnoběžných* s paprsky zářivé látky se nezměnil, byl-li proud kommutován, tudíž póly magnetické vyměněny.

V druhém případě nalézaly se póly elektromagnetu v rovině vodorovné, látka působivá položena byla buďto mezi póly nebo na jeden pól. V obou případech ukázala exponovaná a po té vyvolaná deska fotografická, že se paprsky jdoucí vzhůru stočily směrem dolů.

Aby výsledky právě uvedené byly nepochybnými, bylo

---

*) *Paní Sklodowska Curie,* Wied. Beibl. z. Ann. *24.* pg. 578. 1900.

**) *H. Becquerel,* Beibl. z. Ann. 24. pg. 577. 1900.

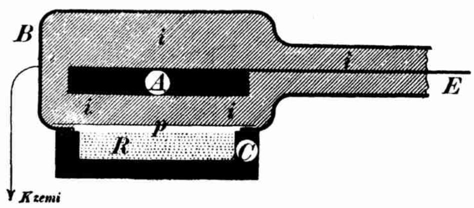
potřebí pokusem dokázati, že nové látky radioaktivné vydávají přímočaré paprsky, totiž že se záření z jich povrchu šíří přímočaře.

Látka aktivná umístěna byla v přímočarém zářezu, proti němuž postaven kovový drát a deska fotografická. Na desce ukázal se zcela přesný geometrický stín drátu na důkaz přímočarého šíření se paprsků radiových.

8. *Elektrický náboj radiových paprsků* (3).

Paprsky, které se pólem magnetickým uchylují (3), podobají se v následující vlastnosti paprskům *kathodovým*. Kathodové paprsky unáší sebou negativný náboj elektrický*) a to, i když procházejí isolatorem nebo kovem se zemí spojeným. Jinými slovy, absorbují-li se tyto paprsky, nastane uvolnění negativného náboje. Podobný úkaz pozorován byl při radiových paprscích (3).

Uspořádání pokusu ukazuje obr. 4.



Obr. 4.

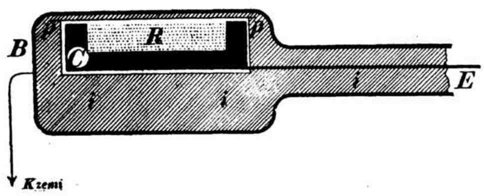
Kovová deska A spojena byla připojenou kovovou tyčinkou E a vedením k elektrometru. Deska i tyčinka uvnitř vyplněny byly isolatorem i, který je odděloval od vnějšího kovového obalu B, spojeného se zemí. Obal tento opatřen byl na dolejší části okénkem zakrytým tenkou destičkou p isolovanou proti A. Proti destičce p přiléhala olověná nádobka C s radioaktivnou látkou R.

Isolatoru i užito místo vzduchu nebo nějakého jiného plynu proto, aby se deska A nemohla nabíjeti přímo vedením plynů, které způsobují paprsky látek zářivých. Tenká destička p odstraňovala absorpcí paprsky, které se magnetem neodchylují (1).

*) Úkaz tento pozorovali *Perrin* a *Lenard*, viz Wied. Ann. *64*. pg. 279. 1898.

Ostatní paprsky (3) pronikají deskou p a isolatorem i, absorbujíce se teprve deskou A. Při této absorpci uvolňuje se jich negativný náboj, jak lze úchylkou na elektrometru konstatovati.

Výsledek tohoto pokusu se nezměnil, byla-li deska A olověná nebo zinková anebo měděná, podobně mohlo býti na místě i užito různého isolatoru, paraffinu nebo ebonitu.



Obr. 5.

Pro kontrolu učiněn též pokus obrácený (viz obr. 5.), kdy totiž kovová nádobka C, radium (R) obsahující, obklopena byla úplně isolatorem i tak, že paprsky (3) pronikající isolací i a kovovou stěnou B k zemi odvedenou odváděly sebou náboj negativný. Na potvrzení toho ukázala se úchylka na elektrometru ve smyslu náboje positivního.

Právě tak jako magnetické pole uchyluje některé paprsky Becquerelovy, tak také činí pole elektrické, jak *Dorn**) ukázal, když paprsky dopadají kolmo na siločáry elektrické. Procházejí-li paprsky ve směru siločar, zmenší se jich intensita, jdou-li proti siločarám, pak se jich jasnost zvýšuje.

9. *Indukovaná radioaktivita.*

Velmi zajímavým úkazem jest mohutnost zářivá *sdělená* tělesům, která sama o sobě nejsou radioaktivnými. Všechny tuhé látky (pokud byly zkoumány) stávají se aktivnými, když nějakou dobu se nalézaly v blízkosti praeparatů radiových, nebo poloniových nebo sloučenin thoria. Radioaktivita látky takové stoupá tím více, čím déle látka je v sousedství radia, až k jisté hodnotě největší.

Vzdálíme-li radium, nastane ubývání mohutnosti záření,

*) *E. Dorn,* Beibl. z. d. Ann. *24.* pg. 579. 1900.

z počátku prudké, pak volnější, až po několika hodinách indukovaná radioaktivita se úplně ztrácí. Největší hodnota indukované radioaktivity jakož i pravidelné klesání její při odstranění radia shledány stejnými pro zinek, mosaz, vizmut, nikl, aluminium i olovo.

Aktivný chlorid barnatý, jehož intensita zářivá jest 2000krát větší než záření uranu, indukuje v kovech největší intensitu zářivou 20krát větší než záření uranu, která asi ve 2 hodinách zmenšuje se na intensitu 8krát větší než záření uranu.

Látky, které po nějakou dobu byly ozářeny paprsky radia, chovají se tak, jako by povrch jejich byl pokryt hmotou aktivnou. Proto by se zdálo nejpřirozenějším vysvětlení této indukce výronem prášku aktinického z radia, jenž se na předmětech blízkých usazuje. Hypothesu tuto nelze však přijati, neboť indukce radioaktivná nastane i tenkráte, když působivá látka je v skleněném neb kovovém obalu; aktivita vzbuzená potrvá i na látkách, které jsou ve vodě rozpustny, když povrch těchto látek bedlivě omyjeme.

K indukci radioaktivné hodí se radiový chlorid barnatý lépe než uhličitan.

Sloučeniny thoria studoval Rutherford.*) Všechna tuhá tělesa neelektrická, nebo záporně elektrická, přijímala v sousedství sloučenin thoria vlastnosti látek radioaktivných.

Tato aktivita indukovaná ukázala se býti touž ve vzduchu, kysličníku uhličitém a ve vodíku. Také na tlaku je nezávislou, pouze při velkém zředění přibývá jí; na vodičích záporně elektrovaných aktivity ubývá.

Hmota látky, v níž aktivita byla indukována, se tím nezměnila. Drát platinový indukcí aktivný nepozbyl této vlastnosti ani v plamenu, ani ve studené neb vřelé vodě, ani v kyselině dusičné. Za to zmizela vlastnost tato při ponoření do kyseliny sírové neb solné, vrátila se však, byl-li povrch drátu zase očistěn.

Na základě indukce radioaktivické *Debierne***) připravil mohutně zářivý chlorid barnatý. Látku obsahující aktinium rozpustil v roztoku chloridu barnatého a ponechal tento roztok

*) *E. Rutherford*, Phil. Mag. *49*. pg. 161. 1900.
**) *A. Debierne*, Beibl. z. Ann. *24*. pg. 1206. 1900.

delší dobu o sobě. Sražením kyselinou sírovou připravil zvláště aktivný praeparat.

Čím déle bylo aktinium v roztoku ve styku s chloridem, tím účinnější byl praeparat. Praeparaty tyto jevily veškeré vlastnosti látek aktivných, ve spektru jich nebylo však význačných čar radia, aktivity jich pak po přípravě rychle ubývalo.

Zjev indukované radioaktivity ukazuje, kterak opatrně nutno prováděti všechna měření týkající se záření látek aktivných. Indukcí touto stává se prach v laboratoři, předměty, které béřeme do rukou, šaty atd., vše stává se radioaktivným.

Vzduch laboratoře působením záření přímého i indukovaného *není již isolatorem*, nýbrž vodičem! Z toho následuje, že měření v takovýchto místnostech vůbec není možno. Příprava látek aktivných musí se tudíž díti ve zvláštní místnosti, při přenášení praeparatů a vkládání do skřínek třeba největší opatrnosti.

Pouhá isolace vzduchem nestačí, vodivé dráty při pokusech elektrostatických nutno vésti osami kovových trubic odvedených k zemi, jichž vnitřek vyplněn jest paraffinem — elektrometr vůbec musí nalézati se ve zvláštní místnosti neb skříni, kterou nelze ani dosti uzavříti.

Zároveň patrno, jak nutno bedlivě a kriticky posuzovati výsledky měření o radioaktivitě.

10. *Povaha paprsků Becquerelových.*

Dle uvedeného jsou paprsky Becquerelovy velmi složitým zjevem záření, na němž můžeme rozeznávati hlavně dvojí druh paprsků. Jedna část paprsků unáší sebou náboj elektrický; paprsky tyto odchylují se ze svého směru magnetickým polem a podobají se v obou zmíněných vlastnostech paprskům kathodovým. Druhá část paprsků Becquerelových neodchyluje se polem magnetickým a podobá se ve mnohém paprskům Roentgenovým.

Paprsky Roentgenovy povstávají na stěnách lampy vakuové, na něž dopadají paprsky kathodové; paprsky Roentgenovy dopadající na tělesa vzbudí v těchto paprsky sekundarné (paprsky Sagnacovy) a v těchto paprscích lze také rozeznati *dvojí* druh, totiž paprsků magnetem se neodchylujících a paprsků, které unášejíce náboje elektrické podobají se paprskům kathodovým. Ukazují se tedy paprsky Becquerelovy značně podobny těmto sekundarným paprskům Roentgenovým.

Kdežto však zářivou energii paprsků Roentgenových (byť i sekundarných) můžeme hledati v energii elektrického výboje lampy vakuové, nelze tak učiniti při výkladu o původu paprsků Becquerelových.

Kde jest zdroj tohoto tajemného záření, které působí na desky fotografické a činí plyny vodivými? Odkud se nahrazuje vyzářená energie?

Na otázky tyto není dosud uspokojivé odpovědi. Záhada paprsků Becquerelových hledí se „vysvětliti" přijímáním záhad nových. Tak na př. jsou prý paprsky Becquerelovy sekundárným úkazem, který vzniká tmavým zářením všechny látky vůbec prostupujícím. Toto tmavé záření podobné paprskům Roentgenovým se však nevysvětluje.

K výkladu vlastností paprsků kathodových použili *W. Crookes* a *J. J. Thomson* zvláštní hypothesy, dle které záleží paprsky kathodové v pohybu velmi jemných částic hmotných. Domněnky této použito též při výkladu záření Becquerelova.

Radiace látek aktivných vysvětluje *Crookes* *) strukturou těchto látek, které pozvolna se pohybující molekuly atmosféry odrážejí, zatím co rychle se pohybující molekuly při svém povrchu rozkládají. Tím vzrůstá potencialná energie radioaktivné látky, která působí jednak dissociaci okolního plynu, tím jeho vodivost, jednak projevuje se zářením.

Elster a *Geitel***) předpokládají, že v látce aktivné jsou molekuly radia nebo aktinia, které se časem v atomy rozpadají, při této dissociaci objevuje se uvolněná energie co energie zářivá.

*Rutherford****) předpokládá též velmi pozvolné chemické změny látek radioaktivných za příčinu radiace.

Nejlépe lze snad, jak činí Becquerel a jiní, porovnati látku radioaktivnou s magnetem.

---

*) *W. Crookes*, Beibl. z. d. Ann. *23.* pg 296. 1899.
**) *J. Elster* a *H. Geitel*, Beibl. z. d. Ann. *23.* pg 443. 1899.
***) *E. Rutherford*, Phil. Mag. *47.* pg 109. 1899.

Studium podivuhodných látek těchto a četných vlastností tmavého tohoto záření není daleko ještě ukončeno, možná že se průběhem dalších prací podaří vysvětliti původ energie záření Becquerelova, tato otázka „nejpalčivější“, jejíž zodpovědění přinese jistě mnoho nového jak po stránce fysikalní, tak i chemické.

Vypsání cen za řešení úloh.

Výbor Jednoty českých mathematiků usnesl se, aby za správná řešení úloh v „*Příloze*“ uveřejněných uděleny byly ceny tyto:

1. Ceny první:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. V.
Briot-Pšenička: Mechanická theorie tepla.
Strouhal: Ocel a její vlastnosti galvanické a magnetické.
Studnička: Bohatýrové ducha.

2. Ceny druhé:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. V.
Bellavitis-Zahradník: Methoda equipollencí.
Studnička: Bohatýrové ducha.
Studnička: Výklady o funkcích monoperiodických.

3. Ceny třetí:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. V.
Čubr: O měření země.
Studnička: Bohatýrové ducha.
Šolín: Počátkové arithmografie.

Ti, kteří rozřeší správně *všechny* úlohy, obdrží ceny *první*; z ostatních řešitelů obdrží dle počtu a dokonalosti řešení 10 řešitelů ceny *druhé* a dalších 20 řešitelů ceny *třetí*.

Řešení prvních 25 úloh buďtež zaslána nejdéle *do konce února*, ostatní *do 15. dubna* r. 1901.

O fysikálních vlastnostech hmoty za velmi nízkých teplot.

Referuje Dr. **Bohumil Kučera**,
assistent vysokých škol technických v Darmštatě.

(Dokončení).

K tepelným vlastnostem plynů za velmi nízkých teplot vztahuje se ještě nejnovější práce P. Eckerleinova (Drudes Ann. 3, pg. 120, 1900) o tepelné vodivosti plynů a její závislosti na temperatuře. Pracoval methodou Winkelmannovou (Wied. Ann. 19, pg. 656, 1883), dle níž se měří ochlazení teploměru, jehož nádobka se nalézá v centru kulovitého obalu. Užil teploměru petrolaetherového, jehož velmi tenkostěnná kulička měla poloměr 0,480 *cm* a nacházela se postupně v skleněných kulovitých obalech poloměrů 1,641 *cm* a 2,929 *cm;* vyčnívající kapillára měla milimetrové dělení a byla přesně rtutí kalibrována. K určení absolutních obnosů tepelných je ovšem potřebí znáti hustotu a spec. teplo petrolaetheru a závislost obou na temperatuře. Pro hustotu stanovil vzorec

$$d = 0,6444 - 0,000472 \,.\, t + 0,0000024 \,.\, t^2.$$

K měření spec. tepla methodou směšovací užil lázně s olejem terpentinovým; petrolaether uzavřel v tenkostěnnou kulovitou nádobku z pozlacené mosazi. Proto musel stanoviti také specifické teplo této mosazi a pro stanovení vodní hodnoty teploměru také specifické teplo skla.

Našel pak mezi $+10^0$ a -190^0 C

spec. teplo skla		$c_t = 0{,}1614 + 0{,}000763 \,.\, t + 0{,}00000294 \,.\, t^2$
	mosazi	$c_t = 0{,}0820 + 0{,}000316 \,.\, t + 0{,}00000103 \,.\, t^2$
	petrolaetheru	$c_t = 0{,}4194 - 0{,}000395 \,.\, t - 0{,}00000143 \,.\, t^2$.

Okolnost, že specifické teplo petrolaetheru značně roste s klesající teplotou dá se vysvětliti theorií Sohnckeovou (Wied. Ann. 66, pg. 111, 1898), kterýž rozeznává při vnitřní práci v hmotě dvě komponenty: vnější práci disgregační, konanou proti přítažlivým silám mezi molekulami jakožto celky, a vnitřní práci disgregační sloužící k zvýšení pohybů atomových uvnitř jednotlivých molekul samých. Petrolaether roztahuje se velice značně se vzrůstající teplotou, proto roste značně střední vzdálenost molekul a tím se zmenšuje přítažlivá síla, kterou na sebe navzájem působí. Proto je vnější práce disgregační za nízkých teplot značně větší a totéž nutně platí o jejím aequivalentu — specifickém teple. Teploty měřil Eckerlein thermoelementem železo-konstantan. Výsledky, kterých došel, jsou: Tepelná vodivost k_t

vzduchu
při -59^0 C je 0,00003678, při -150^0 C je 0,00002146,

vodíku
při -59^0 C je 0,0002393, při -150^0 C je 0,0001175,

kyseliny uhličité
při -59^0 C je 0,00002645, při $-50{,}5^0$ C je 0,00002824,
při $-73{,}5^0$ C je 0,00002546.

Výpočtem těchto hodnot plyne pro tepelné vodivosti k_0 při 0^0 C, a temperaturní koëfficienty γ, [definované rovnicí $k_t = k_0 \,(1 + \gamma \,.\, t)$]

pro vzduch	$k_0 = 0{,}00004677$	$\gamma = 0{,}00362$,
pro vodík	0,0003186	0,00422,
pro kyselinu uhličitou	0,00003434	0,00352.

Hodnoty k_0 pro vodík a kyselinu uhličitou přimykají se dobře k direktním měřením dřívějších badatelů, méně dobře hodnota k_0 pro vzduch, která ale za to lépeu odpovídá čísla theoreticky vyžadovanému (0,0000455).

Z Maxwellovy theorie plynů následuje, že vodivost tepelná má býti úměrna absolutní temperatuře, to jest, že γ má býti 0,000367. Tomuto požadavku vyhovuje dle měření vzduch (mezi 0° a — 180°) a kyselina uhličitá (mezi 0° a — 80°) dosti dobře; výsledky pro vodík pak nejsou tak zajištěny, ježto pro velikou jeho vodivost ochlazování teploměru se dálo příliš rychle, tak že petrolaether se nepravidelně stahoval a častěji se stávalo, že se sloupec jeho v kapilláře přetrhl, tvoře prázdné bubliny. Relativní, na vzduch vztažené hodnoty vodivostí při 0° C jsou dle pozorování a požadavků theorie

pro vzduch	pozorována	1,	theorie žádá	1,
pro vodík	„	6,8,	„ „	7,1,
pro kyselinu uhličitou	„	0,73,	„ „	0,70.

Dle starších pozorování pro teploty nad 0° (Winkelmann, Wied. Ann. 44, pg. 177, 1891, Graetz. ibid. 45, pg. 298, 1892) hoví změna vodivosti tepelné spíše zákonu Clausiovu (Pogg. Ann. 115, pg. 32, 1862), dle něhož děje se sice lineárně, ale pomaleji než úměrně s absolutnítemperaturou. Proto se zdá, že změna vodivosti není prostou lineární funkcí teploty, jak obě theorie žádají, nýbrž že za nízkých teplot je rychlejší, za vyšších (nad 0°) pomalejší. Příčinu snad hledati dlužno v molek. změnách v plynech samých (associaci mol. za nízkých teplot, dissociaci za vyšších, a p.).

Obrátíme se nyní krátce k thermickým vlastnostem za nízkých teplot u ostatních látek mimo plyny. Velmi pečlivě právě v poslední době bylo studováno specifické teplo kovů Trowbridgem (Science 8, pg. 6, 1898 ref. dle Zeitschr. für compr. u. flüss. Gase 2, pg. 95, 1898), U. Behnem (Wied. Ann. 66, pg. 237, 1898 a Drudes Ann. 1, pg. 257, 1900) a Tildenem (Proc. Roy. Soc. 66, pg. 244, 1900). Všichni užili methody směšovací a teplot tající kyseliny uhličité a vroucího tekutého vzduchu. Nejrozsáhlejší jsou měření Behnova a proto uvedeme jeho výsledky tabellárně.

Prvek	Střední teplo specifické			Váha atomová	Střední teplo atomové		
	mezi $+100^0$ a $+18^0$	mezi $+18^0$ a -79^0	mezi -79^0 a -186^0		mezi $+100^0$ a $+18^0$	mezi $+18^0$ a -79^0	mezi -79^0 a -186^0
Pb	0,0310	0,0300	0,0291	207	6,4	6,2	6,0
Pt	0,0324	0,0311	0,0277	195	6,3	6,1	5,4
Ir	0,0323	0,0303	0,0263	193	6,2	5,8	5,1
Sb	0,050	0,0484	0,0462	120	6,0	5,8	5,5
Sn	0,055	0,0518	0,0486	118,5	6,5	6,1	5,8
Cd	0,056	0,0537	0,0498	112	6,3	6,0	5,6
Ag	0,056	0,0544	0,0496	107,9	6,0	5,9	5,4
Pd	0,059	0,0567	0,0491	106	6,3	6,0	5,2
Zn	0,094	0,0893	0,0798	65,4	6,1	5,8	5,2
Cu	0,093	0,0883	0,0716	63,6	6,0	5,6	4,5
Ni	0,109	0,0983	0,0743	58,7	6,4	5,8	4,3
Fe	0,113	0,0999	0,0721	56,0	6,3	5,6	4,0
Al	0,22	0,195	0,153	27,1	6,0	5,3	4,2
Mg	0,25	0,233	0,189	24,4	6,1	5,7	4,6
C	0,197	0,141	0,075	12,0	2,4	1,7	0,9

Trowbridge, který zkoumal pouze železo, měď a aluminium, našel hodnoty poněkud málo větší, což však dá se vysvětliti tím, že ponořoval kovy direktně do tekutého vzduchu, pro jehož teplotu „po delším varu“ supponuje —181,4° C. Ostatně nebyly kovy žádného z badatelů absolutně chemicky čisté. Tilden zkoumal pouze kobalt (atom. váha 58,7) a nikl (atom. v. 58,6) a našel následující čísla:*)

Pro interval	$+100^0$	až	$+15^0$	Co 0,10303	Ni 0,10842
	$+15^0$	„	$-78,4^0$	0,0939	0,0975
	$+15^0$	„	$-182,4^0$	0,0822	0,0838
	$-78,4^0$	„	$-182,4^0$	0,0712	0,0719.

Specifická tepla a tedy i tepla atomová blíží se za nízkých teplot téže hodnotě. Ale úsudek, že limitní hodnota všech atomových tepel jest táž, není dle Tildenova mínění správný, což ostatně velmi zřejmě ukazují měření Behnova. Ale velmi zajímavé jest, srovnati výsledky Behnovy s theorií Richarzovou (Wied. Ann. 48, pg. 708, 1893), dle níž ony prvky, které za obyčejných teplot nevyhovují pravidlu Dulong-Petitovu, jeví značnou závislost spec. tepla od temperatury. Důvodem jest, že elongace kmitů atomových, kteréž představují právě dle kinetické theorie hmoty pohyb tepelný, nemohou býti považovány za nekonečně malé proti vzájemným vzdálenostem atomů.

To pak nastává nejsnáze ve dvou případech: Buď, že jsou vzdálenosti atomů malé (malá atomová volumina), nebo že jsou elongace kmitů veliké, což nejsnadněji nastati může při malých vahách atomových, ježto lehčí atomy nabývají větších rychlostí a tudíž i větších elongací. Největší budou pak úchylky od zákona Dulong-Petitova a tudíž i variace spec. tepel, když obě uvedené podmínky se setkají u téhož prvku — malá atomová váha při malém atomovém objemu. Závěry svých theoretických úvah zkoušel s úspěchem Richarz sám na prvcích do atomové váhy 40; theorie jeho dochází touto prací Behnovou nového potvrzení. Vidíme především značné změny atomového tepla u prvků malých atomových vah C, Mg, Al, Fe. Ale možné konkluse jdou ještě dále: Uspořádáme-li prvky dle stoupajících vah atomových a nanášíme tyto graficky jakožto abscissy, příslušné atomové

*) Uvedeno pro nepřístupnost origin. pramene dle článku B. Dessauova (Physik. Zeitschr. 2, pg. 37, 1900), kterýž vyšel v čase, kdy referát tento byl větším dílem již napsán a jedná o témže předmětě, ovšem za poněkud jiným účelem; nedbá také vždy úplnosti literatury.

objemy jakožto ordinaty, obdržíme graf nepravidelně vlnitý; minima tvoří prvky poměrně malých atomových objemů, vedle nichž na obou stranách stojí prvky at. objemů větších (Viz na př. Ostwald, Grundlinien der anorg. Chemie, 1900, pg. 774). Ony prvky budou tudíž dle Richarzovy theorie jeviti větší variaci atom. tepel s teplotou, než tyto. A vskutku je tomu tak, jak plyne z pozorování čísel pro Fe, Ni, Cu proti Zn; pro Pd a Ag proti Cd, Sn, Sb; pro Ir a Pt proti Pb. Daleko frappantněji musely by rozdíly tyto vystoupiti, kdybychom mohli experimentovati s prvky tvořícími maxima zmíněné křivky — Na, Ka, Rb, Cs, Th; u těchto musela by změna atom. tepla s temperaturou býti minimální.

Velice důležité jsou Pictetovy pokusy o tepelném záření a diathermansii za nízkých teplot, a to jak pro theorii, tak i pro praxi kryogenní (C. R. 118, pg. 1245, 1893, ibid. 119, pg. 554, 1894, Arch. de Genève (3). 32, pg. 233, 465 a 561, 1894, Zeitschr. für phys. Chemie 16, pg. 417, 1895). Pozoroval, že na —165° ochlazený teploměr, uzavřený v měděné nádobě s dvojitými stěnami, mezi nimiž nacházela se zimotvorná látka, nabýval z venčí stejného množství tepla, nechť byla chladící nádoba chráněna isolujícím obalem různé tloušťky nebo nechráněna vůbec. Sledováním tohoto zjevu zjistil, že obaly z vlny, korku, písku, dřevěných pilin, uhelného prášku, křídy, cellulosy, skelné vlny, slámy, rašeliny, hedvábí a j. v. mezi —165° a —100° C proti tepelnému záření účinkují docela stejně — totiž neúčinkují vůbec. Teprve touto teplotou počínaje začaly se znenáhla lišiti dle povahy isolačního materiálu a jeho tloušťky křivky, znázorňující množství vniklého tepla, jakožto funkci času; rozlišení značnější nastává asi od —50°, a mezi —20° a + 10° dosahuje svého maxima. Tu také teprve je isolační účinek úměrný tloušťce isolačního materiálu. Pictet usuzuje ze svých pokusů, že látky známé jakožto špatné vodiče tepla při velmi nízkých teplotách se stávají diathermanními a bez závady propouští paprsky tepelné o veliké délce vlny. Totéž soudí i o tekutinách a jejich krystallech pod — 70° a vysvětluje tím zjev, často jím pozorovaný, že totiž při ztuhnutí tekutin, jako alkoholu nebo chloroformu, je-li okolí na velmi nízké teplotě, přesahuje teplota tekutiny obklopené vznikajícími a již vzniklými krystally daleko bod tuhnutí (mrazu) a to tím více, čím je teplota okolí nižší. Práce tyto mají značný vliv na praxi kryogenickou, ježto by dle nich netvořily látky, obyčejně k tepelné isolaci užívané, ochrany pražádné. Wroblewski a Olszewski uchovávali proto tekuté plyny v otevřených nádobách o několika stěnách, aby studené páry z tekutiny vystupující padajíce podél stěn nádoby dolů, tuto z venčí ochlazovaly. Dewar sestrojil pro uchovávání tekutých plynů zvláštní dvojstěnné nádoby, u nichž byl vzduch z prostoru mezi oběma stěnami pokud možno dokonale vyčerpán; po případě byla ještě vnitřní stěna postříbřena. Místo toho vpravil později do tohoto prostoru trochu rtuti, jejíž páry se okamžitě kondensovaly na vnitřní stěně, jakmile tekutý plyn do nádoby byl nalit, tvoříce tak rtuťové zrcadlo. Ovšem závisí isolační účinnost těchto nádob v míře velmi značné od quality vakua, jakž ukázal W. Hempel (Chem. Ber. 31, pg. 2993, 1898), jenž měřil rychlost stoupání teploty teploměru uzavřeného v nádobě různými látkami chráněné. Z výsledků jeho vyjímáme následující čísla:

	byla teplota po			
Při isolaci pomocí:	5	32	58	88 minutách
čisté vlny při $+100^0$ sušené	— 74	— 63	— 61	— 50
hedvábí	— 76	— 65	— 58	— 48
prachového peří	— 78	— 76	— 67	— 66
Dewarovy nádoby se špatným vakuem	— 70	— 47	— 23	— 5
s dobrým vakuem	— 78	— 54	— 31	— 9
od Bender-Hobeina v Mnichově	— 77	— 65	— 54	— 38.

Odpadky vlněné nebo prachové peří tvoří tedy do — 70° C stejnou ne-li lepší ochranu, než velmi drahé Dewarovy nádoby. Bylo by pro účely praxe záhodno studovati tyto poměry i za teplot nižších (tekutého vzduchu). Vzhledem k propustnosti tepelného záření sluší ještě uvésti relativní data Dewarova (Roy. Inst. Great Britain 19. ledna 1894), který našel pro diathermansii tekutého chloroformu 1, sirouhlíku 1,6, kyslíku 0,9, kysličníku dusnatého 0,93, aethylenu 0,60 a aetheru 0,50. Dle těchto čísel vykazují tekutiny týž pořad jako plyny.

V nauce o teple chceme se ještě krátce zmíniti o Lindeových pokusech o zjevech při spalování v tekutém vzduchu (Sitzb. d. Akad. Wiss., München, 1899, pg. 65, Naturw. Rundschau 14, pg. 409, 1899). Doutnající tříštka zhasne nad hladinou čerstvě připraveného tekutého vzduchu, ježto se z prvu hlavně vypařuje dusík; v pozdějším stadiu vypařování, nebo byvši direktně ponořena do tekutiny, počne jasným plamenem hořeti. Tak lze ostatně dle Schaefera (Naturw. Rundschau 14, pg. 395, 1899) ukázati i spálení do červena rozžhaveného ocelového péra. Necháme-li do korkového uhlí vsáknouti něco petroleje a mimo to dostatečné quantum tekutého vzduchu na kyslík bohatého, detonuje tento praeparat při každém způsobu zapálení (i bez počáteční impulsivní explose); patrony touto směsí plněné přenášejí detonační effekt na jiné ve vzdálenosti až 25 *cm* ležící. Vůbec převyšuje účinek ten svou brisancí veškeré dosud známé praeparáty, tak že se zdá, že spálení této směsi, jakkoli je teploty úžasně nízké (-180^0 C), nastává rychleji než u kterékoli jiné pevné nebo tekuté látky dosud známé. Patron podobných bylo dle denních novin s úspěchem užito při trhacích pracích v Mnichově.

Na konec uvádíme pěkný pokus demonstrační (Dewar, Roy. Inst. Great Britain 27. března 1896): Malý plamen vodíkový hoří i pod hladinou tekutého vzduchu a voda, jakožto produkt oxydace vznikající hned mrzne v malé vločky a v tekutině se vznáší. Jiný pěkný pokus dá se provésti s acetylenem (Ladenburg, Chem. Ber. 31, pg. 1968, 1898), který v tekutém vzduchu okamžitě tuhne a vyňat dá se zapáliti jako svíčka. Tekutý vzduch nalit na hladinu vodní ukazuje znamenitě zjev Leidenfrostův.

Optika. Optická měření a pozorování za nízkých teplot vztahovala se hlavně ke čtyřem otázkám: Určení refrakce tekutých plynů, pozorování jejich absorpčního spektra a vlivu nízké teploty na fosforescenci a fotochemické účinky světla.

Prvá měření refrakce tekutého kyslíku vykonali Olszewski a Witkowski (Bull. de l'Acad. des Scien. Cracovie 1891, pg. 340), a to methodou totální reflexe na ponořené dvojdesce skleněné (Wiedemann, Pogg. Ann. 158, pg. 375, 1876). Jejich výsledky jsou:

Pro délku vlny

670,5 (Lithium)	589,3 (Natrium)	535,1 (Thallium)

byl index lomu

1,2213	1,2227	1,2236.

Pátrali také specielně po anomální dispersi, leč výsledek byl pro tekutý kyslík negativní (Phil. Mag. 39, pg. 208, 1895).

K podobným výsledkům došli Liveing a Dewar (Phil. Mag. 34, pg. 205, 1892, ibid. 36, pg. 328, 1893, ibid. 40, pg. 268, 1895), kteří mimo tekutý kyslík, u něhož našli hodnoty poněkud větší, zkoumali také jiné tekuté plyny, zvláště důkladně kysličník dusičitý (NO). Našli u tohoto

pro délku vlny	670,5	656,3	589,2	486,1	451,0	430,7
index lomu	1,3257	1,3290	1,3305	1,3345	1,3368	1,3378.

U aethylenu nalezli index lomu pro natriové světlo $n = 1{,}3632$, u dusíku $n = 1{,}2053$ a u tekutého vzduchu $n = 1{,}2062$.

Vypočítáme-li dle starého vzorce Beerova specifickou lomivost pro natriové světlo $\frac{n-1}{d}$, (kdež d jest hustota látky) a z ní molekulární refrakci, obdržíme

pro kyslík
($d = 1{,}124$ při -182^0) spec. lomivost 0,1989 a mol. refrakci 3,182

pro dusík
($d = 0{,}89$ při -190^0) spec. lomivost 0,225 a mol. refrakci 3,153

pro kysličník dusičitý
($d = 1{,}255$ při -90^0) spec. lomivost 0,2634 a mol. refrakci 7,903

a pro aethylen
($d = 0{,}56$ při -100^0) spec. lomivost 0,627.

Pro molekulárnou refrakci kyslíku našel Landolt z řady organických sloučenin střední hodnotu 3,00; pro plynný kyslík je rovna 3,0316. Hodnota pro tekutý kyslík je tedy poněkud větší, než bychom čekali dle pravidla o stálosti spec. lomivosti. Na údaji pro kysličník dusičitý můžeme zkoušeti pravidlo Landolt-Brühlovo o molekulární refrakci — odečtením mol. refrakce kyslíku obdržíme pro dusík číslo 4,721, kdežto direktní měření dává pouze 3,153. Ostatně nelze zatím činiti definitivních závěrů, ježto údaje hustoty tekutého dusíku a kysličníku dusičnatého jsou zatím pouze approximativní. Liveing a Dewar v citované práci též zjistili, že světlo odražené při dopadovém úhlu $50^0 45'$ od klidné hladiny tekutého kyslíku (které docílili snížením teploty na -200^0 C) je skoro úplně lineárně polarisováno.

Absorpční spektrum tekutého kyslíku zkoumal poprvé Olszewski (Wied. Ann. 33, pg. 570, 1888); používaje Vierordtova spektroskopu našel čtyři charakteristické pruhy, z nichž nejvýznačnější nacházel se v oranžově-žluté části spektra mezi vlnovými délkami 634 až 622, poněkud slabší v žluté mezi 581 až 573, velice slabý v zelené u 535 a zase poněkud silnější v modré mezi 481 až 478. V absorpčním spektru tekutého vzduchu nebylo nových pruhů, nýbrž naopak byly i oba nejsilnější 628 a 577 z počátku velice nezřetelné a vystupovaly teprve silněji, když postupným vypařováním se stala tekutina na kyslík bohatší, ač i potom ani zdaleka nedosáhly intensity pruhů u kyslíka čistého. Pruhy 628 a 577 odpovídají Ångströmovým čarám α a δ a jsou původu tellurického; Ångström usoudil, že nemohou náležeti vodním parám. Že se pruhy 523 a 480 nedají zjistiti ve spektru slunečním, není divno, ježto jsou i ve spektru tekutého kyslíku velice slabé a málo zřetelné. Egoroff (C. R. 101, pg. 1143, 1885) pozoroval absorpční spektrum kyslíku na 6 atmosfer v rouře 60 *m* dlouhé komprimovaného a usoudil, že čáry slunečního spektra A, B a α patří asi kyslíku. Janssen (C. R. 101, pg. 649, 1885 a ibid. 102, pg. 1352, 1886) stlačil kyslík v stejně dlouhé rouře na 60 atmosfer a potvrdil výsledky Egorovovy, přidav některé pruhy mezi A a B, pak mezi B a C, jeden v červené části spektra u α, jeden v žlutozelené u D a jeden v modré. Olszewski nemohl pro slabou dispersi v červené části obdobných pruhů zjistiti; ale Liveing a Dewar (Phil. Mag. 26, pg. 286, 1888) našli u kyslíku velmi silně v ocelové rouře komprimovaného pruhy analogické A a B. Proto opakoval Olszewski (Wied. Ann. 42, pg. 663, 1891) svoje měření uživ silnější vrstvy kapaliny (30 *mm*) a universálního spektroskopu Krüssova s Rutherfordovým hranolem a našel mimo popsané čtyři pruhy ještě jeden v nejzazší části červené, sice slabší než 628, 577 a 480, ale přece poněkud silnější než 535. Tento pruh odpovídá čáře A, pruh odpovídající B nemohl býti nalezen. K určení absorpční mohutnosti jednotlivých pruhů užil Olszewski s Witkowskim (Bull. Ac. des Scien. Cracovie říjen, 1891, pg. 340) Glanova spektrofotometru, jímž stanovil, že světlo propuštěné vrstvou kyslíku 1 *mm* tlustou nejintensivnější části žlutozeleného pruhu ($\lambda = 577$ až 570) obnáší 84% až 89%, a že odpovídá množství u červeného pruhu ($\lambda = 630$ a 638) 88%.

Liveing a Dewar (Phil. Mag. 34, pg. 205, 1892) pozorovali v absorpčním spektru kyslíku mimo pruh A i pruh B, ale s jistou zvláštní vlastností. Kdežto je totiž pruh A ve slunečním spektru ostře ohraničen na straně k lomivější části spektra, jest týž ve spektru tekutého kyslíku ostře ohraničen na straně opačné, méně lomivé, kdežto na straně lomivější pomalu se odstiňuje. Zcela podobně je tomu u pruhu B. Vysvětlení tohoto zjevu, jak je spisovatelé podávají, postrádá zatím exaktnosti. Oba uvedení badatelé zjistili také, že tekutý ozon v slabém roztoku kyslíkovém ničeho nemění na jeho absorpčním spektru; nepochází od něho tudíž také krásně modravá barva tekutého kyslíku, kterou již Olszewski pozoroval, a jíž chtěl vysvětlovati modř oblohy. Koncentrovanější roztok ozonu v kyslíku nepodařilo se jim připraviti, ježto tvoří směs velice snadno výbušnou, která oběma badatelům vždy nádobu „na prach rozdrtila". Týž zkoumali také (C. R. 121, pg. 162, 1895) vliv teploty na spektrum tek. kyslíku a našli, že s klesající temperaturou absorpce roste a oranžový a žlutý pruh se rozšiřují k straně lomivé. Absorpce pevného a tekutého kyslíku je však téměř stejná, kdežto vrstva tekutého vzduchu tloušťky 1,9 *cm* daleko slaběji absorbuje než vrstva kyslíku tloušťky 0,4 *cm*. Leveing a Dewar konali též předběžné pokusy (Phil. Mag. 38, pg. 235, 1894) o spektru elektrického výboje v tekutém kyslíku, dusíku a vzduchu, při čemž byly buď obě elektrody pod hladinou tekutiny, nebo jedna pod a druhá nad ní, nebo konečně obě nad ní. Vedle silného spektra spojitého pozorovali množství čar patřících jednak kovu elektrod, jednak plynu. Zajímavým bylo by, kdyby se měla potvrditi domněnka, že jedna z čar u kyslíku pozorovaných ($\lambda = 557$) spadá v jedno se známou zelenou čarou severní záře, původu dosud záhadného.

Ponořením zatavené roury naplněné kyslíkem nebo dusíkem do tekutého vodíku docílil Dewar (Proc. Roy. Soc. 64, pg. 231, 1899) ohromných, před tím nedosažitelných zředění, ježto plyn okamžitě ztuhl; ovšem, že výboj elektrický při tomto zředění rourkou neprocházel. Byla-li však naplněna vzduchem, procházel výboj a spektrální rozklad ukazoval „dle okolností" čáry nově odkrytých plynů zemské atmosféry — helia, argonu, xeonu, kryptonu. Tekutý vodík (Dewar, Proc. Roy. Soc. 63, pg. 256, 1898) a tekutý fluor (Moissau a Dewar, C. R. 125, pg. 505, 1897) vůbec absorpčního spektra nemají. Za to se zdá, že se mění absorpční spektrum barevných látek (na př. dvojchromanu draselnatého), ochladíme-li je na teplotu velmi nízkou. Dle Schwalbeho a Dewara mění se totiž v tom případě jejich barva, stávajíc se za teploty —190°, jak Dewar se vyjadřuje, špinavě bělavě šedivou. Přesných měření kolorimetrických o faktu tomto dosud nestává.

Za to častěji byl zkoumán účinek nízkých teplot na zjevy fosforescenční; priorita v tomto oboru náleží bez odporu G. A. Bardetscherovi (Inang. Dissert. Bern 1889, obšírný referát v Beibl. 16, pg. 742, 1892). Týž našel, že intensita fosforescence, klesá s temperaturou, při čemž se mění též barva světla ve smyslu pošinutí k červené části spektra. Fosforescence mizí vůbec pro různé látky za různých teplot, dle Picteta (C. R. 119, pg. 359, 1899), který Bardetscherovy resultáty potvrdil, pro látky za obyčejné teploty vzbuzené asi mezi —60° až —70° C. A. a L. Lumièreové (C. R. 128, pg. 549, 1899) ukázali však, že tato teplota je velice různá, obnášejíc na př. pro některé sirníky —10°, pro jiné ale až —190°. Ostatně jest účinek osvětlení na fosforeskující látky stejný za nízkých teplot, jako za teplot obyčejných, jen že fosforeskují teprve při zahřátí. Schopnost světelnou energii kummulovati tedy nízkou teplotou neztrácí, ba spíše se zdá, že schopnost tato roste. (A. a L. Lumièreové C. R. 128, pg. 359, 1899). Také Röntgenovy paprsky vzbuzují fosforescenci i za —200° C — ovšem i tu fosforeskuje látka teprve byvši zahřáta na vyšší teploty. Za to fluorescence, (též je-li Röntgenovými paprsky vzbuzena) jeví se i při —200°. Dewar (Chem. News 70, pg. 252, 1894) a Trowbridge [Science (2), 10, pg. 244, 1899] našli množství látek, které za obyčejné teploty nefosforeskují vůbec anebo velmi slabě, ale za to za velmi nízkých teplot daleko silněji; při —180° svítí na př. kaučuk, gummi arabicum, roh, slonovina, parafin, vosk, papír, celluloid a gelatina modravým nebo zelenavým světlem, skořápky z vajec a peří krásně červeně. Warbug (Sitz. d. deut. Phys. Ges. 10. května 1898, referát v Zeitsch. f. compr. u. flüss. Gase 2, pg. 47, 1898) soudí, že nejedná se zde o zvýšení intensity fosforescence, jako spíše o značné prodloužení doby, během kteréž intensity světélkovací stále ubývá. Mezi fosforeskující praeparaty sluší dle pokusů W. Königových (Verh. deut. Naturf. u. Ärzte 1897, pg. 68) zařaditi také sníh připravený z tekuté kys. uhličité, jak v bombách se prodává. Ten fosforeskuje po několik sekund bledě zeleně, ale Röntgenovými nebo Lenardovými paprsky vzbuditi se nedá. Ježto čistá pevná kyselina uhličitá zjevu toho neukazuje, pochází od nějaké přimíseniny, jejíž povaha však dosud není zjištěna.

Obdobně jako praeparaty fosforeskující chová se i „radium", jehož vlastnosti za nízkých teplot zkoumal Behrendsen (Wied. Ann. 69, pg, 220, 1896 a Drudés Ann. 2, pg. 335, 1900). Jeho aktivita klesá při ochlazení tekutým vzduchem asi na $^1/_3$ původní, ale stoupá opětným zahřátím na staré hodnoty; také radioaktivita kovového uranu a polonia klesá značně s temperaturou. Uspokojivé vysvětlení pro tyto zjevy dosud neexistuje.

Ježto za velmi nízkých teplot úplně selhávají mnohé, jinak velice intensivní chemické reakce, jak na mnoha příkladech ukázali nověji zejmena Thilo (Verh. deut. Naturf. Nürnberg 1894, pg. 99) a Pictet (Chem. Zeitschr. 19, pg. 425, 1895), dá se již z předu očekávati, že bude též značně seslaben, ne-li zničen, fotochemický účinek světla. Veden tímto závěrem zkoušel Dewar (Chem. News 70, pg. 252, 1894) účinek světla na fotografickou desku při —200° a zjistil, že fotochemický process přece se dostavil, ač v míře nepoměrně slabší. Tento výsledek potvrdil J. Joly (Proc. Roy. Dublin Soc. 8, pg. 222, 1896), který ovšem pracoval s teplotami daleko vyššími (—80°); rozdíl v účinku jevil se značněji na desce isochromatické, než na obyčejné. Týž ukázal též, že za obyčejných teplot sahá fotografický účinek dále do červené části spektra něž za teplot nízkých; za těchto chovaly se orthochromatické desky jako desky obyčejné — citlivost pro paprsky žlutozelené zmizela úplně. Nejnověji opětovali pokusy podobné bratří A. a L. Lumièreové (C. R. 128, pg. 359, 1899) pomocí bromostříbrnaté desky želatinové, do polovice v tekutém vzduchu ponořené. Našli, že k docílení téhož účinku jako na části vyčnívající a teplé je potřebí 350 až 400 kráte delší exposice u části ponořené; současně dokázali, že nepochází tato malá citlivost ani od chemické změny desky, ani od absorpce účinných paprsků tekutým vzduchem, nýbrž jedině od snížení teploty. U jiných fotografických praeparátů nejevil se za podobných podmínek vůbec účinek žádný; Lumièreové soudí z toho, že účinek světla na desku fotografickou je povahy čistě chemické.

Nauka o magnetismu. O magnetických vlastnostech látek za nízkých temperatur existuje sice několik prací, ale přece nedopouští dosavádní výsledky definitivních závěrů, protože vliv složení a tvrdosti jednotlivých druhů železa a oceli na zjevy ty je velmi veliký, a právě tyto faktory nejsou od jednotlivých badatelů dosti přesně udány. Velmi zajímavy jsou pokusy Flemingovy a Dewarovy (Roy. Inst. Great Britain, 19. ledna 1894 a Proc. Roy. Soc. 60, pg. 57, 1896), které ukazují, že lze u permanentních magnetů i pomocí nízkých teplot docíliti podobně stabilních stavů, jako „napouštěním" za teplot vyšších (Srov. Strouhal: Ocel a její vlastnosti etc. Praha). Uvedení badatelé měřili totiž magnetický moment malých permanentních magnetů úchylkou magnetky, a našli, že prvým snížením teploty na ca.—186° byl magnetický moment značně zmenšen; následující návrat k teplotě obyčejné způsobil další zmenšení. Opakovalo-li se však toto střídavé ochlazování a oteplování několikráte, nastal stav stabilní, při němž zvětšilo každé ochlazení na —186° magnetický moment o 30 až 50%, oteplení na obyčejnou teplotu (+ 15°) pak jej o týž obnos zmenšilo. Tak chovaly se magnety jak z velmi tvrdé, tak i z vyžíhané oceli. Jest zajímavo, že ocel niklová (asi s 19% niklu) ukazovala v stabilním stavu chování právě opačné, totiž zmenšení magn. momentu ochlazením, zvětšení oteplením. Tento druh oceli ztrácí značným zvýšením teploty stejně jako ostatní veškerou magnetisaci, jejíž maximum leží mezi + 30° a + 50° C. U ocele chromové nenastalo prvým ochlazením zmenšení, nýbrž zvětšení magn. momentu. Pictet (C. R. 120, pg. 263, 1895) měřil nosivost permanentních magnetů za různých teplot, a našel při + 30° hodnotu 57,31 g, při — 105° pak 76, 64 g. Osmond (C. R. 124, pg. 1395, 1899) našel při některých druzích ocele, že ponořením do tekutého vzduchu staly se magnetickými. Tak experimentoval s tyčinkou ocelovou (0,59% uhlíku, 5,9% manganu, 3,77% niklu) délky 38 *mm* a váhy 11,945 g, kterou elektromagnet, jehož užil, při proudu 5,5 Ampère neunesl. V magnetometru způsobila výchylku 4,1 *mm* a její spec. váha byla 7,848 při 17° C. Byla-li však ponořena na 5 minut do tekutého vzduchu stala se magnetickou, tak že týž elektromagnet, stejně vzbuzený, ji přitahoval silou asi 1 *kg*; v magnetometru působila výchylku 104 *mm*, a hustota její klesla na 7,624. Tento stav magnetický ztratila teprve zahřátím na + 650° C. Mimo to sděluje Osmond podobná pozorování u dvou jiných druhů oceli. Jak vidíme, jsou tyto poměry velice zajímavé, a při tom nepříliš přesně prozkoumané, tak že by zde našly velice vděčné pole definitivní práce dle vzoru Strouhal-Barusových pro teploty obyčejné a vyšší; při tom ovšem jako tam, musí se klásti váha na precisnou charakterisaci materiálu, což právě většinou v pracích uvedených bylo opomíjeno.

Fleming a Dewar (Proc. Roy. Soc. 60, pg. 81, 1896) měřili také vliv teploty na permeabilitu a hysteresi železa; pro měkké švédské železo našli, že magnetisační křivka při — 186° po dosažení stabilního stavu pro všechny síly magnetisační jevila téměř stálou differenci proti křivce odpovídající teplotě obyčejné, a sice byla magnetisace za nízké teploty nižší; permeabilita byla ovšem též menší. Indukce nedosahovala vyšších hodnot než asi 14500 CGS jednotek při magnetisační síle 25 jedn. Dále zjistili, že permeabilita při stálém magn. poli za změny teploty od — 200° do 0° vzrostla o několik percent, a to téměř lineárně s teplotou. Změnu hysterese s temperaturou nebylo lze pro indukce od 0 do 12000 jednotek konstatovati. Nebylo-li ale železo dobře vyžíháno, rostla naopak permeabilita s klesající teplotou; výsledků konstantních nebylo však lze docíliti, ještě méně pak u železa tvrdého. Naproti tomu chovala se ocelová klavírní struna jako měkké železo. Novější práce o permeabilitě a hysteresi, Claudeova (C. R. 129, pg. 409, 1899) a Thiessenova (Phys. Review, 8, pg. 65, 1899) ukazují, že obě tyto veličiny pro vysoké indukce se mnoho nemění snížením teploty na —186°;

při malých indukcích nastává snížením teploty dosti značné zmenšení obou. Magnetická susceptibilita paramagnetických látek mění se dle pokusů Fleming-Dewarových (Proc. Roy. Soc. 63, pg. 311, 1898) přímo úměrně s hustotou jejich a obráceně úměrně s absolutní teplotou; totéž platí také o tekutém kyslíku, pro jehož susceptibilitu nalezli experimentem číslo, které plyne výpočtem na základě zmíněných předpokladů z hodnoty její pro kyslík plynný. V jedné z dřívějších prací (Proc. Roy. Soc. 60, pg. 283, 1896) udávají jakožto poměr permeability tekutého kyslíku k oné plynného číslo 1,00286 při magnetisační síle asi 166 až 220 jednotek. U tekutého vzduchu nejsou výsledky tak stálé pro změnu jeho složení, leč jakožto střední hodnota plyne z obdobných pozorování poměr 1,00240. Na tomto místě vsunujeme krátkou poznámku o Dewarově pokuse, jímž lze snadno značnou permeabilitu tekutého vzduchu demonstrovati: Namočíme-li v něm totiž kousek vaty, přitahuje jej elektromagnet i prostřední velikosti silou velmi značnou. Dáleko effektnější jest však demonstrační pokus, kterýž referent v literatuře popsaný nenašel, ale o jehož působnosti se sám několikráte přesvědčil: Mezi póly vzbuzeného elektromagnetu vychrstneme z Dewarovy nádoby něco tekutého vzduchu; náhlým vypařováním klesne jeho teplota tak, že okamžitě ztuhne, tvoře mezi oběma póly most obdobný onomu ze železných pilin.

Ještě sluší se zmíniti o krátké theoretické práci, v níž H. du Bois (Verh. d. Phys. Ges. Berlin, 17, pg. 148, 1898) dokazuje, že paramagnetická tekutina doznává v magnetickém poli zvýšení (diamagnetická snížení) teploty bodu varu, a to tím větší, čím větší jest její susceptibilita, a čím menší je skupenské teplo vypařování a hustota dotyčné kapaliny; totéž platí mutatis mutandis i o sublimačním teple pevných látek. Tím ovšem posunují se křivky pro tlak par jak pevné tak tekuté fase a tudíž musí i teplota tuhnutí jejich průsekem určená doznávati magnetických variací. Z výpočtů Boisem provedených plyne pro tuto změnu u tekutého kyslíku $+0{,}01^0$ C, u vody $-0{,}000015^0$ C, aethylaetheru $-0{,}0001^0$ C, u železného amalgamu $+0{,}05^0$ C. Dosavadními prostředky nelze tyto theoretické konsequence experimentálně verifikovati, ale není vyloučeno, že zdokonalením a zjemněním thermometrických method i tato možnost jednou bude dána.

Nauka o elektřině. H. Ebert a B. Hoffmann (Sitzb. d. kgl. Bay. Akad. ref. dle Zeitschr. f. compr. u. flüss. Gase 4, pg 49, 1900) pozorovali velmi zajímavý zjev: Ponoříme-li kousek kovu na kokonu zavěšený do tekutého vzduchu, můžeme, vytáhnuvše jej ven, pomocí elektroskopu konstatovati silný negativní náboj. Tento zjev pozorovali nejen u nejrůznějších kovů (Al, Zn, Cu, Ag, Au, Pt, Pd, Sn, mosazi), ale i u různých isolátorů (pečetního vosku, skla, kaučuku, dřeva). Co je příčinou tohoto náboje? Kontaktní potenciální difference jest příliš slabá, než aby způsobila výchylku elektroskopu. Okolnost, že kov, jakmile byl vytažen z lázně tekutého vzduchu, okamžitě se pokryje jíním (sněhem) z vlhkosti atmosfery kondensovaným, nemůže také býti příčinou, protože, bylo-li k ochlazení užito pevné kyseliny uhličité, elektrisace nenastala, ač ojínění bylo stejné. Ostatně elektrisace nastala i když bylo experimentováno pod exsikatorem, kdež ojínění nenastalo. První pokyn k vysvětlení podává však okolnost, že elektrisace nenastala, bylo-li užito čistého, t. j. filtrovaného tekutého vzduchu.

Tím dokázána je platnost věty, vyslovené již Faradayem, „že tření čistého vzduchu nemůže ani u skla, aniž kterého kovu vzbuditi stav elektrický“ — i pro teploty —186°. Jedná se tudíž o to, která přimísenina v tekutém vzduchu elektrisaci způsobuje. Oba badatelé, dokázavše především, že není to pevná kyselina uhličitá, došli mnohými pokusy výsledku, že jest to led v tekutém vzduchu obsažený, jehož tření negativní elektrisaci ponořené látky působí; led sám stává se při tom positivně elektrickým.

Proto též je pevný zbytek po vypaření veškerého tekutého vzduchu zbývající velice silně positivně elektrickým. Na silnou positivitu ledu ukázal již Faraday, Sohncke (Wied. Ann. 28, pg. 550, 1886), pak to znovu potvrdil a rozšířil. Faraday uvádí tři výjimky, — látky, které třením ledem se nestaly negativně elektrickými — slonovinu, brky z peří a medvědí srsť. I tento výsledek byl potvrzen svrchu uvedenými badateli pro prvé dvě látky — ponořením do tekutého vzduchu buď náboje vůbec nenabyly, nebo se staly negativně, jindy positivně, ale vždy velice slabě elektrickými. Výsledek celé práce lze shrnouti ve větu: „Třením úplně suchým ledem stávají se veškerá tělesa a látky, obzvláště kovy silně negativně elektrickými; to platí i pro teplotu tekutého vzduchu."

Přicházíme nyní k předmětu, jemuž bylo věnováno poměrně velice mnoho publikací, totiž k určení dielektrických konstant za nízkých teplot. Dewar a Fleming měřili dielektrické konstanty (specifické induktivní kapacity) čistého a znečistěného ledu, elektrolytů v pevném stavu aggregátním, mnoha organických sloučenin, které za obyčejných teplot jsouce kapalné nacházejí se ve stavu pevném za teplot při měření užitých a konečně i zkapalnělých plynů.

Ve většině svých pokusů nabíjeli a vybíjeli střídavě konstantní elektromotorickou silou kondensator, sestávající ze dvou komolých dutých kuželů jakožto armatur, mezi nimiž se látka zkoušená nalézala. Přerušovaný proud nabíjecí i vybíjecí procházely týmž galvanometrem, kommutator i přerušovač zastupovala elektromagnetická ladička o 124 kmitech za sekundu. Faktum, že výchylka galvanometru byla pro náboj i výboj táž, sloužilo jim za důkaz, že v dielektriku nestává znatelné vodivosti; jakmile došli k teplotám, při nichž podmínka ta nebyla splněna, byly pokusy přerušeny.

Dielektrická konstanta ledu byla dříve již častěji měřena, leč výsledky značně differují, ležíce mezi 78, bylo-li užito proudu malé frekvence (malého počtu period za sekundu, a mezi ca 2, bylo-li užito frekvence velmi vysoké (elektr. oscillací). Prvé číslo odpovídá blízce dielektrické konstantě vody. Fleming a Dewar (Proc. Roy. Soc., 61, pg. 316, 1897) našli

pro (plat.) teploty

-206^0	$-197{,}0^0$	-175^0	-149^0	$-144{,}7^0$	-120^0
	$-106{,}2^0$	$-72{,}4^0$	$-24{,}5^0$ pt		

hodnoty

2,43	2,42	2,43	3,43	3,94	7,38
	13,9	41,8	59,1.		

Další hodnoty až ku 70,8 při $-7{,}5^0$ označují za nejisté pro vystupování vodivosti. Pro glycerin našli při $-198{,}2^0$ pt hodnotu 3,01, pro $-52{,}5^0$ pt 59,0. Ježto dielektrická konstanta vody nad 0° C stoupá s teplotou, musí míti při jisté teplotě maximum; obdobně platí totéž i u glycerinu. Pro led připravený z obyčejné destillované vody (Proc. Roy. Soc. 61, pg. 2, 1897), jehož dielektrická konstanta je o něco větší než jsou uvedená čísla, (stoupá od 2,83 při — 198,0° pt na 116, při — 130,7° pt.) podařilo se uvedeným badatelům toto maximum direktně stanoviti při — 65°.

U zmrzlých elektrolytů (Proc. Roy. Soc. 61, pg. 380, 1897) sluší rozeznávati tři třídy: Některé látky i v roztocích značné koncentrace (5 až 50%) nepůsobí téměř žádnou změnu dielektrické konstanty ledu; ta obnáší za teploty tekutého vzduchu asi 2 až 3. Druhá třída látek, kamž zařaditi dlužno téměř všechny soli, kyslíkem velmi bohaté, působí v stejně koncentrovaných roztocích malé zvýšení dielektrické konstanty ledu za velmi nízkých teplot, na hodnotu kolísající mezi 3 až 10. Třetí třída mění ji však velmi značně, zvyšujíc ji na hodnoty 30 až 70, tedy na velikost téhož řádu, jako je dielektr. konstanta ledu za bodu tání. O druhém a třetím druhu elektrolytů soudí sice Fleming a Dewar, že by vliv jejich dalším snížením teploty zmizel a dielektrická konstanta klesla na hodnotu mezi 2 a 3, ale direktní důkazy zatím podány nejsou. Odpor zmrzlých elektrolytů (Proc. Roy. Soc. 61, pg. 299, 1897) jest tak veliký, že chovají se jako dielektrika bez vodivosti, byť i za teplot obyčejných byly vodiči velmi dobrými, ale odpor jejich klesá se stoupající teplotou, a při jisté teplotě, ležící ještě hluboko pod jejich bodem tání, klesne velmi náhle na hodnotu malou. Spisovatelé vyslovují domněnku, že při absolutním bodu nullovém stávají se zmrzlé elektrolyty absolutními isolátory.

Podobně jako soli působí na dielektrickou konstantu ledu také jiné látky ve vodě rozpuštěné nebo suspendované (oxydy a hydráty); některé ji téměř nemění, jiné však třeba v roztoku velmi zředěném působí veliké její zvětšení i za teploty tekutého vzduchu. Avšak i o tomto vlivu soudí spisovatelé, že při temperaturách ještě nižších mizí.

Fleming a Dewar zkoumali také dielektrické konstanty mnoha organických kapalin (Proc. Roy. Soc. 61, pg. 358, 1897, tabulka též Beibl. 22, pg. 40, 1898), kteréž teprve za velmi nízkých teplot tuhnou. Potvrdili známou zkušenost, že skupina atomová HO, CO nebo COOH v molekule podmiňuje značnou hodnotu dielektrické konstanty, pokud dotyčná kapalina zůstává tekutou, nebo není ochlazena daleko pod bod tuhnutí. Při teplotách velmi nízkých se vliv tento ztrácí, a dielektrické konstanty nabývají vesměs hodnot mezi 2 a 3.

Uvedené práce Fleming-Dewarovy podrobil obšírné kritice Abegg (Wied. Ann. 62, pg. 249, 1897). Namítá jim, že i u zmrzlých elektrolytů vystupuje polarisace; když pak dobrovolná depolarisace velmi pomalu pokračuje, to jest, když polarisace vzniklá jedním nárazem proudovým zůstane uchována až do výboje kondensatoru, kterýž za přerušení nabíjejícího proudu se děje, pak působí, že kapacita jeví se zdánlivě býti značně větší a sesiluje značně proud výbojový proudem depolarisačním, a to v tom případě, že polarisace zůstane v celém svém obnosu zachována, až k intensitě proudu nábojového. Depolarisace bude se omezovati na zjev podobný diffusi, a jak známo, klesá rychlost této rapidně s teplotou. Malý spád polarisace za polarisujících sil do 1,45 Volt ukazuje Abegg na směsi koncentrované kyseliny solné a alkoholu, kteráž při -80^0 ještě netuhne. Jakožto příklad uvedeme: Při polarisující síle 0,9 Volt bylo zmenšení polarisace za $+15^0$ C během $^1/_4$ minuty 0,2 Volt a za -87^0 C během 4 minut jen 0,03 Volt, tedy více než 112kráte menší; a fortiori musí totéž platiti o teplotě tekutého vzduchu. Proto ukazuje Abegg, že měření i výsledky Fleming-Dewarovy nejsou nesprávné.

Na základě této kritiky opětovali Fleming a Dewar (Proc. Roy. Soc, 62, pg. 250, 1898) svoje měření methodou Nernstovou (Zeitschr. f. phys. Chem. 14, pg. 622, 1894), při níž se vodivost kompensuje. Obdrželi pro organické látky hodnoty tytéž jako dříve, pro elektrolyty ale hodnoty značně differující (na př. pro hydrát draselnatý 7,12 proti dřívějšímu 123,0; pro hydrát rubidia 3,55 proti 81,6; pro obyčejný led 3,6). Přičítají však toto zmenšení nalezených hodnot tomu, že užili proudu daleko vyšší frekvence (350 period za sekundu proti dřívějším 124). Že Abeggova výtka o polarisaci není správná, chtějí dokázati tím, že obdrželi, uživše značně větších napjetí, výsledky stejné jako při napjetích nízkých.

Leč Abegg (Wied. Ann. 65, pg. 229 a 923, 1898) myslí, že ani tyto pokusy neřeší docela uspokojivě otázku diel. konstanty ledu, ježto od dřívějších měření tak značně se liší. Uznává sice, že rozdíly lze částečně připsati na účet různé frekvence proudu, ale nechce přece této přiznati vliv tak ohromný. Plausibilnějším nachází svoje vysvětlení, že totiž všechny přimíseniny (na př. soli) při mrznutí vody znečistěné (to jest roztoku) se shromažďují na jistých místech, tak že tvoří roztok nasycený, a jako takovýto zůstávají tekutými až ku své kryohydratické temperatuře (která možná leží tuze hluboko), pronikajíce ostatní čirý led jakožto síť vodivých kanálků, které dle svého náhodného rozvětvení a tvaru mají podstatný vliv na zdánlivou kapacitu kondensatoru. Z tohoto stručného referátu je viděti, že k definitivnímu rozhodnutí je potřebí dalších měření.

Abegg sám (Wied. Ann. 60, pg. 54, 1897) měřil diel. konstanty některých kapalin, chtěje se přesvědčiti, zdali dosáhnou hodnot tak vysokých, jako je diel. konstanta vody. Temperaturní koefficient diel. konstant jest totiž negativní, t. j. rostou s klesající teplotou, a všeobecně tím větší, čím větší je diel. konstanta sama, či jinak řečeno, čím větší je úchylka látky od zákona Maxwellova, že index lomu (pro vlny délky ∞) se rovná druhé odmocnině z diel. konstanty. Konal měření na toluolu, aetheru, amylalkoholu, acetonu, aethylalkoholu a směsi 10 dílů aethylalkoholu s 1 dílem vody; užil methody Nernstovy a temperaturní lázně pevné kyseliny uhličité s aetherem. U toluolu, který přibližně vyhovuje zákonu Maxwellovu klesá temper. koefficient diel. konstanty $\frac{dD}{dT}$ poněkud s teplotou, tak že diel. konstanta se sama velmi málo mění (z 2,33 při $+16{,}5^0$ C na 2,51 při -83^0 C). Za to u aetheru aethylalkoholu a amylalkoholu tento temper. koefficient s klesající teplotou značně stoupá; je přibližně úměrný diel. konstantě samé, tak že se dá vyjádřiti rovnicí

$$-\frac{dD}{dT}=\frac{D}{190},$$

z které plyne pro diel. konstantu

$$D = c \cdot e^{-\frac{T}{190}},$$

kdež ovšem hodnota konstanty c závisí na volbě nullového bodu škály temperaturní. Užijeme-li škály absolutní je pro aether $c = 19{,}5$, pro amylalkohol $c = 71$, pro aethylalkohol (99,8%ní) $c = 120$ a pro vytčenou směs s vodou $c = 145$. Souhlas je všude dosti dobrý, nejméně u amylalkoholu, kterýž však velmi záhy se stává značně konsistentním, hustým. Extremní hodnoty diel. konstant a jejich temp. koefficientů Abeggem pozorované jsou:

aether

4,45 při $+10{,}8^0$ C a 6,86 při $-75{,}2^0$ C; $-\frac{dD}{dT}$ 0,011 a 0,035,

amylalkohol

15,7 při $+14{,}2^0$ C a 29,1 při $-86{,}2^0$ C; „ 0,10 a 0,14,

aethylalkohol

26,4 při $+14{,}8^0$ C a 44,3 při $-86{,}6^0$ C; „ 0,13 a 0,29,

udaná směs

36,7 při -12^0 C a 53,6 při -83^0 C; „ 0,16 a 0,31,

aceton

ca. 25 při $+18{,}8^0$ C a 34,5 při $-87{,}4^0$ C; „ 0,086 a 0,070.

Dostatečným snížením teploty můžeme si tedy připraviti kapaliny, jichž diel. konstanta je téhož řádu, jako u vody; ježto pak tato veličina dle Nernsta (Zeitschr. f. phys. Chem. 13, pg. 531, 1894) velmi úzce souvisí s dissociační mohutností kapaliny, bylo by zajímavým srovnati tuto mohutnost oněch kapalin za nízké teploty s onou vody za teplot obyčejných. Svrchu uvedený vzorec pro diel. konstantu zkoušeli Abegg a Seitz (Zeitschr. f. phys. Chem. 29, pg. 242, 1899) pro amylalkohol, isobutylalkohol propylalkohol, aethylalkohol, methylalkohol a nitrobenzol též při nižších teplotách, a našli, že dostatečně dobře vyjadřuje hodnoty pozorované, pokud látka zůstává ve stavu tekutém. Ale při přechodu do stavu tuhé sklovité hmoty, který děje se u vyšších alkoholů na oko docela spojitě, jeví se v chodu diel. konstanty ohromný skok, na př. u amylalkoholu při -117^0 C z 32,85 na 2,4, u methylalkoholu při -113^0 dokonce ze 64,2 na 3,07. Při značném ochlazení (tekutým vzduchem) změnil se isobutylalkohol s hlasitým praskotem náhle z pevné sklovité hmoty na sněhový krystallinický prášek, aniž by však současně bylo lze pozorovati změnu diel. konstanty. Výsledky měření byly jak již řečeno dobře vyjádřeny svrchu uvedeným vzorcem Abeggovým, kdežto z analogie s optikou odvozené vzorce (Mosotti-Clausiovy)

$$\frac{\sqrt{D}-1}{d} = const.$$

nebo

$$\frac{D-1}{D+2} \cdot \frac{1}{d} = const.,$$

kdež d jest hustota látky, naprosto selhaly.

Dewar a Fleming (Proc. Roy. Soc. 60, pg. 358, 1896) byli první, kteří určili diel. konstanty tekutých plynů za velmi nízkých teplot, a to methodou velice jednoduchou, ovšem ale také nepříliš přesnou. Nabíjeli totiž malý kovový kondensator (ze 17 aluminiových destiček 5×15 *cm*) kapacity asi 0,001 mikrofarad vždy na 100 Volt, a vybivše jej 10krát do většího kondensatoru (0,5 mikrofarad) měřili ballistickou výchylku při jeho výboji. Tak našli pro diel. konstantu tekutého kyslíku číslo 1,495, z něhož plyne, že tekutý kyslík dostatečně hoví zákonu Maxwellovu. V nejnovější době měřil tutéž veličinu Hasenoehrl (Comm. from the Phys. Lab. Leiden No. 52, ref. dle Zeitschr. f. compr. u. flüss. Gase 3, pg. 148, 1900) methodou Gordonovou a našel číslo 1,465, pro dielektrickou konstantu kysličníka dusnatého pak 1,933. Při vyšších teplotách měřil dříve již Linde (Wied. Ann. 56, pg. 546, 1895) diel. konstanty methodou Nernstovou a Schillerovou a našel

pro kyselinu uhličitou

meth. Nernstovou při $-7{,}5^0$C $D = 1{,}621$, při $15{,}5^0$C $D = 1{,}530$
meth. Schillerovou při $-7{,}5^0$C $D = 1{,}621$, při $15{,}5^0$C $D = 1{,}530$,

pro kysličník dusnatý (N_2O)

meth. Nernstovou při -6^0C $D = 1{,}643$, při $+14{,}5^0$C $D = 1{,}522$, pro chlor

meth. Nernstovou při

— 60^0 až 70^0C D = 2,164, při + 8^0C D = 1,948.

Měření diel. konstanty tekutého ammoniaku nevedlo k cíli pro jeho značnou vodivost; později určili ji Goodwin a de Kay Thompson (Phys. Review, 8, pg. 38, 1899) methodou Drudeovou na ca. 22.

Vzhledem k zmíněnému již vztahu mezi diel. konstantou a dissociační mohutností nabývá toto číslo zajímavosti tím větší, jelikož v tekutém ammoniaku se rozpouští řada solí a roztoky ty mají značnou elektr. vodivost, z čehož plyne, že rozpuštěné soli sou značně dissociovány. Pro vodivost tekutého ammoniaku udává Cady (Journ. of Phys Chem. 1, pg. 707, 1897, ref. dle Beibl. 22, pg. 331, 1898) hodnotu $71 \cdot 10^{-7}$, Goodwin a Thompson v práci citované hodnoty mezi $1{,}688 \cdot 10^{-4}$ při — $13{,}0^0$ C a $1{,}392 \cdot 10^{-4}$ při — $29{,}5^0$ C (střední koefficient temperaturní $0{,}0108 \cdot 10^{-4}$). Frenzel (Zeitschr. f. Elektrochemie 6, pg. 477, 485 a 493, 1900) určil nejnověji pro praeparat zvláště pečlivě čištěný $1{,}33 \cdot 10^{-7}$ při — $79{,}3^0$ a $1{,}47 \cdot 10^{-7}$ při — $74{,}6^0$ C, tedy čísla daleko menší než Cadyova, ale při tom přece čtyři až pětkráte větší než je vodivost čisté vody dle Kohlrausche; střední temp. koefficient jest 1,9%. Přimísení malého quanta vody nemění vodivost značněji; jiné znečištění působí, podobně jako u vody, že temp. koefficient v témž poměru klesá, ve kterém vodivost stoupá. Frenzel vysvětluje vodivost ammoniaku tím, že je částečně na N a H dissociován. Franklin a Kraus (Amer. Chem. Journ. 20, pg. 820, 1898, ibid. 21, pg. 1 a 8, 1899, ref. dle Beibl. 23, pg. 216, 1899) měřili rozpustnost mnoha solí v tekutém ammoniaku methodou Kohlrauschovou, t. j. změnou elektrické vodivosti, a našli u mnohých, že při — 38^0 jest vodivost téměř taková jako při + 18^0 v roztoku vodním; polarisace nezjistili. Rovněž měřili molekulární zvýšení bodu varu (ca. 3,4), vypařovací teplo za norm. bodu varu (326 až 332 cal.), jakož i mnohé vlastnosti chemické, o nichž tuto referovati nemůžeme. Ale tolik je jisto, že podobná měření systematicky provedená s jinými plyny, které nejsou chemickými prvky, byla by důležita a zajímava jak pro chemika, tak i pro fysika.

O thermoelektrických vlastnostech kovů za nízkých teplot existuje mimo výzkumy uvedené v kapitole o měření teplot pouze jediná práce Dewar-Flemingova (Phil. Mag. 40, pg. 95, 1895). Tito badatelé měřili thermoelektromotorické síly článků utvořených ze dvou drátů olověných, mezi jichž konce byl přiletován drát z materiálu, který měl býti zkoumán; jeden kontakt byl stále udržován na teplotě tajícího ledu, teplota druhého byla měněna mezi $+100^0$ a -200^0. Z grafického znázornění vztahu mezi elektromotorickými silami (E) a rozdílem teplot obou kontaktů je vidno, že mnohé z nalezených křivek naprosto nejsou parabolami, nýbrž namnoze mají dvojí zakřivení (na př. u antimonu), což svědčí o tom, že pro kombinaci s olovem mají více bodů neutrálních než jeden; z toho plyne, že čáry Taitova diagramu (znázorňující vztah „thermoelektrické mohutnosti" (Kelvin) $\frac{dE}{dT}$ a teploty) nejsou všeobecně přímkami jako tomu je z veliké části u teplot vyšších. Čára antimonu na př. protíná přímku olova (základní) na dvou místech. Čáry pro železo a ocelovou klavírní strunu také jeví značné změny křivosti, kteréž odpovídají změnám znamení pro Thomsonův zjev a tudíž pravděpodobně i značným změnám molekulárným. Wismut vykazuje křivky velice různé odpovídající malým znečištěním a přimíseninám, leč všechny mají povahu podobnou a jeví asi při -80^0 diskontinuitu. Ostatně Dewar a Fleming sami označují své pokusy v tomto směru za nedefinitivní, předběžné.

Dospěli jsme nyní k poslednímu bodu svého referátu, předmětu již jednou dotčenému — totiž elektrické vodivosti (spec. odporu) kovů za nízkých teplot. Starší data Cailletet-Boutyova a Wroblewskiho uvedli jsme v odstavci o thermometrii; později konali rozsáhlá měření v tomto oboru hlavně Dewar a Fleming (Phil. Mag. 34, pg. 326, 1892, ibid. 36, pg. 271, 1893, tabulka s výsledky též Beibl. 17, pg. 214, 1893). Znázornili své výsledky graficky, nanášejíce teploty jakožto abscissy, spec. odpory jakožto ordinaty; mezi křivkami tak povstávajícími lze rozeznávati trojí charakteristický druh: Jedny jsou vyduté k ose úseček (Fe, Ni, Sn, Cu), jiné vypuklé (Au, Pt, Pd, nejspíše též Ag) a konečně graf aluminia je téměř přímkou. U kovů prvé kategorie jest tudíž temp. koefficient odporu za nižších teplot větší než za vyšších, u druhé jest tomu naopak. Společnou je vlastnost, že odpor všech kovů s klesající teplotou značně klesá, ač ovšem ne u všech stejně rychle. Zvláště zajímavo je, že temp. koefficient mědi je poněkud větší než stříbra, tak že měď se stává při velmi nízkých teplotách lepším vodičem než stříbro. Nejrychleji klesá mezi 100^0 a 0^0 odpor magnetických kovů, železa a niklu ($\frac{dR}{dt}$ je 0,00622 a 0,00625) a tato značná změna trvá i při teplotách nižších než 0^0. Na změnu odporu u niklu ale velmi značně působí jakékoli znečistění, činíc ji daleko menší, než je u niklu dokonale čistého. U směsi dvou kovů jsou grafy téměř přímkami, jsou-li komponentami směsi kovy chemicky velmi různé (na př. Pt a Ag) a temp. koefficient je poměrně velmi malý; jsou-li ve směsi zastoupeny kovy chemicky si podobné, je spád odporu větší, ale co je zajímavo, nebudí dojmu, že by odpor při absol. bodu nullovém se rovnal nulle, kteráž domněnka jinak pro všechny jednoduché kovy se zdá býti oprávněnou. Ostatně ukazuje nám bližší rozbor, že teplota, za níž jednotlivé kovy dle extrapolace se mají státi absolutními vodiči, je pro různé kovy různá a leží namnoze již před absol. bodem nullovým, na př. u platiny při -258^0, u stříbra při $-248{,}4^0$ a u mědi a železa dokonce již při -223^0. Toto poslední číslo je nejzajímavější proto, že je schopno direktní experimentální verifikace, ač ovšem je spojeno s velikými methodickými obtížemi určiti okamžik, kdy stává se odpor jedné části proudového kruhu nullou. Odpor uhlí roste s klesající teplotou a Dewar a Fleming vyslovují domněnku, že stává se při abs. bodu nullovém nekonečně velikým, jako prý vůbec odpor všech isolátorů. Títéž badatelé zkoumali později (Proc. Roy. Soc. 60, pg. 76, 1896) odpor rtuti při nejnižších teplotách, a našli, že se chová zcela obdobně jako ostatní kovy; při přechodu ze stavu kapalného v pevný vzroste vodivost náhle o značný obnos. Podobný skok našel Gressmann (Phys. Review 9, pg. 20, 1899) také u amalgamu olova různé koncentrace, a určoval dle něho teploty mrazu (tuhnutí) různých amalgamů (4,2% Pb $-37{,}7^0$ C; 7% $-37{,}0^0$ C; 11% $-30{,}1^0$ C). Při opačném chodu od teplot nižších k vyšším není tento skok tak markantní, přechod děje se více znenáhla; u amalgamu s 4,2% Pb na př. vzrůstal odpor pomalu až na

0,25 Ω za —50° C, odtud velmi rychle na 0,98 Ω při —37° C, a dále zase velice pomalu na 1,0 Ω při +30° C. Bod tání nedá se tudíž tak precisně stanoviti.

Během svých pokusů shledali Dewar a Fleming, že wismut chová se odchylně od kovů jiných. Opětujíce svá měření na dvou „zvláště čistých" praeparátech (Phil. Mag. 40, pg. 303, 1895) našli, že odpor od +100° až ku —60° (resp. —80°) klesal, ale odtud počal stoupati, tak že při —170° byl skoro týž jako při +100°. Koupený wismut choval se podobně, leč odpor počal kolem —180° po druhé klesati. Tyto anomalie vysvětlily se jim teprve, když k měření užili abs. čistého elektrolytického materiálu (Proc. Roy. Soc. 60, pg. 72, 1896); bylyť způsobeny znečistěním, které má u spec. wismutu vliv přímo ohromný. Opravdu čistý wismut netvoří žádné výjimky proti kovům ostatním, jeho odpor konverguje rovněž jako u ostatních kovů k nulle za nejnižších teplot. Ale zcela opačně chová se při transversální magnetisaci (wism. spirala kolmo na směr magnetického pole); tu roste totiž jeho odpor jednak s magnetisací, ale též s klesající teplotou. Vyjímáme z měření jejich (Electrician 37, pg. 267, 1896) následující data:

Za teploty 0° a magn. pole 0 jedn. byl odpor 1,46 Ω, za magn. pole 14150 jedn. 2,34 Ω.

Za teploty —186° a magn. pole 0 jedn. byl odpor 0,53 Ω, za magn. pole 14150 jedn. 22,4 Ω.

Čísla tato nejsou nikterak extrémní; Dewar a Fleming (Proc. Roy. Soc. 60, pg. 425, 1896) uvádí případ, že za pole asi 22000 jedn. a při —203° pt byl odpor wismutové spirály 150kráte větší v magn. poli, než mimo ně. Dle smělé extrapolace jejich byl by tudíž wismut látkou, která za téže, ovšem nesmírně nízké teploty by byla dle okolností buď absolutním vodičem elektrickým nebo absolutním isolátorem.

D a r m š t a t, v listopadu 1900.

Věstník literární.

Recherches sur les gaz volumes moléculaires et états correspondants. Par *A. Leduc.* Paris. Gauthier-Villars et fils. 1898 (116 pg.)

Nouvelles recherches sur les gaz, applications (volumes spécifiques, dissociation, chaleurs spécifiques, équivalent mécanique de la calorie etc.) Par *A. Leduc.* Paris. Gauthier-Villars et fils. 1899. (54 pg.)

Obě knížky jsou snůškou theoretických úvah a prací experimentalných, kterými se auktor již delší dobu zabýval, aby stanovil s přesností co možná největší konstanty plynů a nahradil starší zákony pro plyny a páry novějšími, které by co možná s pokusem souhlasily.

Po úvodu, ve kterém vyložil účel svých prací, přistupuje spisovatel v kap. I. k řešení otázky o složení vzduchu atmosferického. Kritisuje měřicí methody starší (Dumas-Bousingaultovu a Regnault-Reisetovu) a uvádí novou methodu svou, která záleží v zdokonalení methody Brunnerovy, tím že místo přímého měření objemu určuje objem vážením. Nejprve váží se ballon (před tím dusíkem naplněný), do něhož vloženo několik tyčinek fosforu a který byl až na 0·1 *mm* Hg vyčerpán, pak váží se tento ballon naplněný zvolna atmosferickým vzduchem a konečně, když veškeren kyslík sloučil se s fosforem, váží se ballon opětně vyčerpaný. Rozdíl prvých dvou vážení poskytuje hmotu vzduchu, rozdíl druhých dvou vážení hmotu kyslíku ve vzduchu onom obsaženého. Poměr obou hodnot souhlasí při měřeních auktorových na 0·05%.

Auktor analysoval atmosferický vzduch z rozmanitých míst, položených v různých výškách; vzduch letní i zimní. Procentový obsah kyslíku kolísá mezi 23·25—23·05%.*)

Vzduch v prostorách uzavřených jest daleko chudší na kyslík, obsahuje pouze 21·8%.

Hustoty plynů (kap. II.) určuje spisovatel methodou Regnaultovou. Mají-li čísla udávající hustotu plynu býti zcela určita, nutno stanoviti jakost vzduchu, s jehož specifickou hmotou porovnáváme specifickou hmotu plynu za týchž poměrů tlakových a temperaturních. Auktor stanoví tento vzduch procentovým obsahem kyslíku *23·2*%. Hmota jednoho litru tohoto vzduchu při 0^0 a tlaku 76 *cm* (Hg 0^0 a $981 \frac{cm}{sec^2}$ urychl.) jest $1{\cdot}2932\,g$**) čili při 0^0 a tlaku 1 megadyny $1{\cdot}27573 \pm 0{\cdot}00005$.

*) Číslo 23·05 platí pro letní vzduch alpský z výšky 2060 *m*.
**) Regnault nalezl 1·293187.

Připraviv plyny co možná chemicky čisté nalezl auktor čísla uvedená v tabulce následující:

	A. Leduc	L. Rayleigh	Regnault
vodík	0·06948	0·06960	0·06949
kyslík	1·10523	1·10535	1·10561
dusík atmosferický	0·97203	0·97209	0·97137
dusík	0·96717	0·96737	—
kysličník uhelnatý	0·96702	0·96716	—
kysličník uhličitý	1·5288	1·52909	1·5290
kysličník dusnatý	1·5301	1·52951	—

V kap. III. jedná se o kritické temperatuře a tlaku plynů. Auktor společnými pracemi se *Sacerdotem* stanovil tyto veličiny pro některé plyny a to

	kritická temperatura Θ	kritický tlak π
chlorovodík	52°	83 atmosfer
fosforovodík	52·8	64 „
sírovodík	100	90 „
alkohol aethyl.	129·6	59 „

V kapitole IV. zabývá se auktor stanovením atomových hmot některých prvků, jichž pro další úvahy své potřebuje.

Z poměru hustoty kyslíku a vodíku $\frac{1 \cdot 10523}{0 \cdot 06948}$ vychází číslo 15·907, které se vzhledem k analysám jeví býti značně větším. Auktor vysvětluje neshodu tuto porovnáváním hustot za stejných poměrů temperaturních a tlakových. Správné číslo by vyšlo, kdyby se srovnání dálo při *korrespondujících stavech* plynů.*) Má-li vodík temperaturu 0° (absolutně 273) při tlaku 30 *cm* Hg, jest temperatura redukovaná $\frac{273}{38 \cdot 5} \doteq 7$, redukovaný tlak

$$\frac{30}{76.20} \doteq 0 \cdot 02.$$

Aby byl kyslík ve stavu korrespondujícím, musil by míti temperaturu $7 \times 155 = 1085$ (abs.) čili okrouhle 800°, při tlaku $0 \cdot 02 \times 50 = 1$, jedné atmosféry. Z úvahy této vychází, že atomová hmota kyslíku jest jistě menší nežli uvedený poměr hustot, neboť pro stavy korrespondující byl by jmenovatel poměru onoho větší než 0·06948 a čitatel menší než 1·10523.

*) Korrespondujícími stavy dvou plynů jsou takové stavy, při nichž redukované tlaky, redukované temperatury a redukované objemy jsou stejné. Tlak, temperaturu nebo objem plynu redukujeme, dělíme-li jej příslušnou veličinou kritickou.

V souhlase s tím jsou chemické analysy, jichž střední výsledek jest číslo daleko menší než hořejší poměr (15·907) totiž 15·882. Auktor přijímá po tom pro kyslík jako prvek základní číslo 16 a v tom poměru zvětšuje atomovou hmotu vodíku, tak že čísla, která béře za základ dalších počtů, jsou

	atomová hmota:
stříbro	107·916
dusík	14·005
uhlík	12·004
chlor	35·470
vodík	1·0076
kyslík	16·—
fosfor	30·976
síra	32·056.

Kapitola V. jedná o stlačitelnosti plynů. Auktor vyjadřuje úchylku ε od zákona Mariotteova při stlačování výrazem

$$\varepsilon = \frac{P_0V_0}{PV} - 1 = a(P - P_0) + b(P - P_0)^2,$$

kde P_0 a P značí různé tlaky plynu, V_0 a V příslušné objemy, a a b konstanty.

Střední koefficient úchylky $A_{P_1}^{P_2}$ mezi tlakem P_1 a P_2 definuje pak dle rovnice

$$\varepsilon = A_{P_1}^{P_2}(P_2 - P_1),$$

pravý koefficient úchylky při tlaku P dle rovnice

$$A_P = -\frac{1}{PV}\frac{\partial(PV)}{\partial P}$$

čili

$$A_P = a + (2b - a^2)(P - P_0),$$

z čehož vychází výraz pro pravý koefficient úchylky při tlaku kritickém π

$$A_\pi = a + (2b - a^2)(\pi - P_0).$$

Auktor určuje na základě měření konstanty A_π, a, b pro některé plyny.

V kapitole VI. navrhuje auktor nový zákon o molekulových objemech, který zní: Molekulové objemy různých plynů téže skupiny při temperaturách a tlacích korrespondujících jsou stejné. Značí-li M a M′ hmoty molekulové dvou plynů, D a D′ jich hustoty (za rovných tlaků a temperatur), sluje dle spisovatele

$$d = \frac{D}{D'}$$

relativní hustotou plynu a

$$m = \frac{M}{M'}$$

relativní hmotou molekulovou. Z těchto dvou veličin konstruuje se poměr

$$\varphi = \frac{m}{d},$$

objem molekulový.

K potvrzení zákona molekulových objemů třeba jest určiti experimentalně:

1. hustoty různých plynů,
2. kritické jich tlaky (π) a temperatury (Θ),
3. stlačitelnost při 0^0 mezi tlakem 1 atmosfery a $e\pi$, kde zlomek e jest stálým pro všecky plyny,
4. roztaživost při stálém tlaku $e\pi$ mezi 0^0 a $n\Theta$, kde n jest stálým faktorem pro všecky plyny.

Auktor předpokládá, že lze vyjádřiti objem molekulový (φ) jako algebraickou funkci kritické temperatury (Θ), podobně, že lze tak vyjádřiti součin πA_π a součin $b\pi^2$.

Veškeré plyny rozděluje pak na *tři skupiny*. Do prvé zařaďuje ty plyny, které hořejším podmínkám vyhovují, to jsou plyny normalní, v druhé skupině jsou plyny více stlačitelné nežli normální, jich molekulové objemy jsou při stavech korrespondujících menší než u plynů prvé skupiny; ve skupině třetí jsou plyny méně stlačitelné než normalní, mají však objem molekulový při korrespondujících stavech větší než plyny normalní. Auktor určuje pak stlačitelnost plynů při různých temperaturách a tlacích a uvádí číselné výsledky. Jako pěknou applikaci připojuje, kterak z výsledků těch lze určiti temperaturu (τ), až do které při tom neb onom plynu platí zákon Mariotteův.

V kap. VII. jedná se o molekulovém objemu a hustotě plynů zcela všeobecně. Základním plynem zvolen jest *kyslík* a molekulové jeho číslo 32. Objem molekulový při 0^0 a π *cm* definován jest vzorcem

$$\varphi_1 = \frac{M}{32} \cdot \frac{17052}{D},$$

kde M značí molekulovou hmotu plynu a D jeho hustotu. Ze závislostí objemu molekulového na tlaku a temperatuře odvozuje pak spisovatel vzorec všeobecný pro tlak p a temperaturu T. Výsledek zní

$$\varphi = \frac{1 - y \,.\, 10^{-4}}{1 + A_{\pi}^{p}(p - \pi)}.$$

Ve vzorci tomto y značí funkci kritické temperatury Θ. Jednoduchou rovnici, která platí pro idealní plyn a jež zní

$$pv = RT,$$

kde R značí konstantu a T temp. absolutní, nahrazuje Leduc obecnějším vztahem

$$Mpv = RT\varphi,$$

kde v značí specifický objem plynu, R pak konstantu pro všecky plyny společnou a to $8319 \,.\, 10^4$ erg, v jednotkách absolutních, nebo, měříme-li tlak v *cm* sloupce rtuťového

$$R' = 6237{\cdot}2.$$

Z hořejší rovnice počítá Leduc hustotu D ve všeobecném smyslu slova, výpočty své sestavuje pro 23 plynů v přehlednou tabulku, kde lze výsledek počtu a experimentu srovnávati.

V kapitole VIII. počítá koefficienty roztažnosti a to střední koefficient i pravý koefficient při stálém tlaku, a střední i pravý koefficient při stálém objemu. Také tyto výpočty srovnává s pozorováním. Ke konci knížky přidány jsou úvahy o směsi plynů, a kritický rozbor objemoměrné methody při analysi plynů. Zákon o směsi plynů opravuje se tu zněním: Objem, který zaujme směs plynů, rovná se součtu objemů, které by zaujaly jednotlivé plyny oné směsi a to oddělené při tlaku a temperatuře směsi.

Druhá knížka Leducova jest pokračováním prvé. Auktor probírá tu otázky, které mají přispěti k potvrzení jeho zákona o objemech molekulových.

V kap. I. jedná o hustotě par a objemech specifických pro páry nasycené. Rovnice

$$Mpv = RT\varphi$$

osvědčuje se na sirouhlíku, pentanu a étheru.

V kap. II. zkouší páry anomalní, to jest takové, při nichž nastává při vyšších temperaturách dissociace nebo polymerisace. Hustotu pozorovanou může auktor srovnávati s hustotou počítanou, vychází-li pozorováním hodnota menší, jest to důkazem dissociace, vychází-li naopak hodnota větší, dokazuje se tím polymerisace.

Auktor počítal ze svých vzorců hustotu par iodových pro různé temperatury (od 0^0—1400^0) a srovnal s těmito hodnotami pozorování, jež provedli *Jahn*, *Crafts*, *V. Meyer*. Patrná dissociace iodu nastává teprve při temperaturách nad 1000^0.

Kap. III. jedná o specifických teplech plynů a mechanickém equivalentu tepla. Používá se tu známé rovnice pro rozdíl specifických tepel plynu při stálém tlaku (C_p) a při stálém objemu (C_v)

$$C_p - C_v = \frac{T}{E} \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial t},$$

kde E značí mechanický equivalent tepla.

Spojením této rovnice se zákonem molekulových objemů vyjadřuje auktor mechanický equivalent výrazem

$$E = \frac{RT^2}{MC_p} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \alpha\beta\varphi,$$

kde α a β značí koefficienty roztažnosti jednak při stálém tlaku, jednak při stálém objemu, γ pak poměr specifických tepel: $\frac{C_p}{C_v}$.

Poměr γ určuje z rychlosti zvuku ve vzduchu.

Pro γ_0 (při temp. 0^0) nalézá 1·4051
pro γ_{100} (při temp. 100^0) nalézá 1·4041,

z čehož mechanický equivalent vychází

při 0^0 . . . 4·186 joule
při 100^0 . . . 4·176 „ .

Zákon Dulong-Petitův doplňuje Leduc podmínkou o stavech korrespondujících, tak totiž, že molekulové teplo při stálém objemu plynů rovné atomičnosti jest stálé při korrespondujících stavech těchto plynů. Toto teplo molekulové úměrno jest počtu atomů v molekule plynu obsažených.

Poslední kapitola (IV.) diskutuje pokusy, které provedli v r. 1854 a 1862 *Thomson* (*Lord Kelvin*) a *Joule*. Pokusy tyto záležely v měření rozdílu temperatury plynu proudícího trubicí, v níž se nalézala zátka z vatty, tak že proud plynu se zadržoval a v trubici nastala difference tlaková, stálá při ustáleném proudu. Plyn, který zátkou již prošel, měl nižší temperaturu nežli plyn před zátkou. Nazveme-li tlaky plynu před zátkou a za zátkou p_0 a p_1 a snížení temperatury Θ, jest

$$\Theta = k\,(p_0 - p_1).$$

Teplo absorbované lze pak vyjádřiti částečně prací vnitřní, částečně prací vnější, z kteréhož vztahu vyplyne

$$EC_pk = v\,(\alpha T - 1).$$

Rovnici tuto zkouší Leduc jednak pro dokonalé plyny, jednak spojuje ji se svým všeobecným zákonem, aby i z této stránky potvrdil jeho oprávněnost. Obě knížky Leducovy dokazují, kterak moderní, přesná měření fysikalní a chemická vyžadují přesnějších theorií; úchylky theorie a dřívějších měření, které se jevily jako chyby pozorovací, staly se zdokonalením method a strojů pravidelnými, tak že na tomto základě mohou býti navrhovány doplňky a opravy theorií starších.

Leduc užil při vývodech svých *korrespondujících stavů* plynů a myšlenka tato přivedla ho *k opravené rovnici stavojevné*, jejíž konsequence všeobecně vzato se přesnými měřeními potvrzují.

Dr. *V. Novák.*

Leçons d'Optique géométrique a l'usage des élèves de mathématiques spéciales. Par *E. Wallon.* Paris (Gauthier-Villars 1900).

Geometrická optika Wallonova rozvržena jest na 14 kapitol způsobem málo jen se lišícím od obyčejného rozdělení této látky, které jest základními úkazy, přímočarým šířením se světla, lomem a rozkladem světla dáno přirozeně samo sebou.

V kap. I. nadepsané „Šíření se světla" vykládá autor základní pojmy zdroje světelného, paprsku, těles neprůhledných, průhledných a průsvitných, poukazuje potom ke zjevům, které se jeví jako následky přímočarého šíření se světla, totiž ke stínu a komoře temné. Při této příležitosti omezuje všeobecnost přímočarého postupu světla, zmiňuje se o diffrakci a uvádí základní pojmy optiky theoretické, délku vlny, světelný ether, vlnoplochu, princip Huyghensův a princip vlnoplochy obalující vlnoplochy elementárné.

V kap. II. probírá auktor fotometrii. Ukazuje především, kterak intensita osvětlení záleží na velikosti (ploše) svitícího zdroje a na vzdálenosti jeho od místa osvětleného, dále pak na úhlech, které jsou dány jednak směrem paprsku svítícího a normálou plochy svítící, jednak směrem paprsku a normálou plochy osvětlené. Odvozuje tak postupně od jednoduššího k složitějšímu vzorec Bouguerův.

Na základě tohoto vzorce dokazuje, proč oběžnice jeví se oku jako kotouče stejnoměrně osvětlené.

Auktor přistupuje pak k úlohám fotometrickým, zmiňuje se o normálných zdrojích světelných (o jednotce Violleově a Hefnera Altenecka) a probírá podrobněji pouze starší druhy fotometrů.

Kap. III. jedná o *odrazu světla na ploše rovinné.* Po základních zákonech odrazu, uvedeny jsou případy zrcadla rovinného, zrcadla rovinného otáčejícího se a konečně odraz na dvou zrcadlech. Auktor vychází v případě posledním ode dvou zrcadel rovnoběžných a stanoví vzdálenost n-tého obrazu od zdroje světelného ze vzdálenosti tohoto zdroje od zrcadla jednoho a z odlehlosti obou zrcadel. Docela analogicky počíná si pak při zrcadlech v jakémkoli úhlu k sobě skloněných. Dokázav, že obraz musí ležeti na kruhu, určeném vzdáleností svítícího bodu od hrany oběma zrcadlům společné, počítá vzdálenost n-tého obrazu *v míře úhlové*, čímž se případ tento na předešlý uvádí. Počet obrazů určí se pak snadno z podmínky, že vzdálenost úhlová obrazu n-tého nesmí překročiti 180°.

Kapitola končí se výkladem zrcadlového sextantu a heliostatu.

V kap. IV. zavádí spisovatel jednotná označení pro další výklady o odrazu a lomu, což má tu výhodu, že čtenář v pozdějších výkladech rychle se orientuje. Zdroj světelný klade na výkrese vždy v levo a označuje vzdálenosti zdroje, obrazu atd. na *tuto* stranu měřené za *positivní, v opačném smyslu* za *negativní.*

Ačkoliv označení toto má z geometrického stanoviska jisté výhody, nepokládá je referent za vhodné. Při tomto způsobu označení dána jest souvislost mezi vzdáleností předmětu a obrazu od vrcholu dutého zrcadla vzorcem

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}=\frac{1}{f},$$

naproti tomu při čočce spojné, při vznikání obrazu reálného, vyjádřena jest ona závislost vzorcem

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{f}.$$

Duté zrcadlo a čočka bikonvexní mají však *tutéž vlastnost* činiti paprsky *sbíhavými*, jsou to zařízení úplně analogická a fysikálně jest zcela přirozeno, že reálný obraz při zrcadle dutém vzniká na *téže* straně, kde jest předmět, jakož i, že reálný obraz spojnou čočkou vzniká za čočkou (na opačné straně proti předmětu).

V prvém případě vzniká obraz *odrazem* (do téhož ústředí, na téže straně), v druhém pak *lomem* (do ústředí jiného, na straně opačné).

Nesouhlasem hořejších vzorců *stírá se* tato analogie mezi zrcadlem dutým a čočkou spojnou a tak stává se označení auktorovo nevhodným.*)

V kapitole V. vykládá spisovatel odraz na ploše sférické. Objasněny jsou tu pojmy osy hlavní a vedlejší, odvozena základní rovnice pro zrcadlo sférické, z níž vyplývá jako zvláštní případ rovnice pro body sdružené. Ohnisko jest pak sdruženým bodem k svítícímu bodu v nekonečné vzdálenosti.

K výkladu os vedlejších připojuje auktor pojmy roviny

*) Nevhodné toto označení přijato jest též v učebnici *Reiss-Theurerově* (vydání pro gymn. z r. 1894. pg. 250).

ohniskové a rovin bodů sdružených. Následuje geometrická konstrukce obrazu, výpočet zvětšení obrazu a rozbor zvláštních případů, který jest proveden velice přehledně a podrobně jak algebraicky tak i geometricky pro zrcadlo duté i vypuklé. V dalším jedná se o určování ohniskové dálky sférických zrcadel, o aberraci sférické (jak longitudinalní tak laterarní), o plochách kaustických jakož i deformaci obrazu, konečně o zrcadlech aplanatických.

Kap. VI. rozdělena jest ve 4 části. V prvé vyloženy jsou základní zákony lomu, ve druhé lom rozhraním rovinným, ve třetí lom deskou planparallelní, v poslední pak lom hranolem. Výklad druhé části postupuje analogicky výkladu odrazu, připojen jest tu pěkný elementárný výklad astigmatismu.

Připojil-li auktor v části třetí jako příklad lomu lamelami planparallelními zrcadlení ve vzduchu (fata morgana), slušelo uvésti též astronomickou refrakci.

Velmi rušivě působí nesprávný výkres 54., znázorňující lom světla hranolem, který i jinak měl býti obecnější.

Ke konci čtvrté části připojen jest výklad fokalních čar hranolu a poukázáno tu na důležitý význam minimalní deviace, při níž obě čáry ohniskové se protínají v ohnisku hranolu. Z obecných rovnic, vyjadřujících závislost deviace na úhlu dopadu a úhlu lámavém hranolu, jakož i na indexu lomu, odvozuje spisovatel jednodušší rovnice pro hranoly „malé“, to jest pro hranoly s malým úhlem lámavým pro incidenci téměř normálnou. Rovnic těchto použito jest v dalším s velikou výhodou.

Kap. VII. dělí se v 8 částí. Prvá jedná o lomu jedinou plochou sférickou, druhá o lomu několika plochami sférickými, centrovanými (o společné ose), nekonečně blízkými, třetí o lomu dvěma plochami sférickými od sebe vzdálenými, čtvrtá o lomu čočkou tenkou, pátá o lomu čočkami tenkými, centrovanými, a velice blízkými, šestá o lomu dvěma čočkami tenkými od sebe vzdálenými, sedmá o lomu čočkami silnými a konečně osmá o methodách určování ohniskové dálky.

Postup výkladu v jednotlivých oddílech zachován jest týž jako při odrazu světla, což činí dlouhou tuto kapitolu velmi přehlednou a čtenáři srozumitelnou, neboť se od případů zvláštních postupuje k případům obecným.

Kap. VIII. věnována jest dispersi. Spisovatel uvádí základní pokusy Newtonovy a Charlesovy, podmínky čistého spektra, analysu barev spektrálných, dispersní mohutnost hranolu, skládání barev spektrálných, barvy komplementárné, chromatickou vadu čoček, spektrálný apparát, různou povahu spekter,*) výklad o barvě těles a spektrální analysu.

---

*) Místo „Fraunhofer“ píše auktor důsledně „Frauenhofer“.

Při skládání barev spektrálných ve světlo bílé jest uveden vedle známých pokusů Newtonových též řídčeji uváděný způsob Charlesův, při němž se užívá jediného 60^0 hranolu, broušeného na všech třech plochách.

V kap. IX., jednající o achromasii, přihlíží spisovatel zvláště ku praktickému řešení tohoto problému, uváděje tu diasporametry Boskovičův a Brewsterův a výpočet objektivů astronomických.

Kap. X. podává stručně ale obsažně propracovaný výklad organu zrakového a jeho vlastností, podmínek zřetelného vidění, vidění prostorového, trvání dojmu zrakového atd.

V kap. XI. následuje popis a výklad optických strojů, které auktor dělí ve tři oddíly. V prvém uvádí jednoduché stroje, poskytující obrázek reálný, jehož se přímo užívá (apparát fotografický, sluneční mikroskop, jednoduchý přístroj projekční). V oddílu druhém uvedeny jsou jednoduché stroje, dávající obrázky virtualné, které se přímo pozorují (kamera lucida, lupa); v oddílu třetím stroje složené (mikroskop složený, refraktory astronomický, terrestrický a Galileiho, reflektory Herschelův, Newtonův, Foucaultův, Casagrainův a Gregoryho).

Kapitola XII. probírá methody, jimiž se určuje index lomu. V prvé části spracovány jsou methody týkající se látek tuhých a kapalin, v druhé části methody na měření indexu lomu plynů.

V kap. XIII. pojednává auktor o methodách měření rychlosti světla. Výklad obou astronomických method mohl býti podrobnější; jako ve mnohých jiných učebnicích optiky geometrické uvádí se tu různost dob oběhu měsíce Juppiterova pro extremní případy, kdy země jest se sluncem jednak v konjunkci, jednak v opposici, jakoby v *obou* případech bylo pozorování možné.

Methoda Fizeau-ova, jakož pozdější její spracovaní Cornu-em, dále pak methoda Foucaultova obšírně a pěkně jsou probrány.

Kap. XIV., poslední, obsahuje některé dodatky. Vykládá theorem Gergonneův a Sturmův, jichž se užívá při vyhledávání obrazu jakýmkoliv systémem ploch lámavých a zrcadlících, zevšeobecňuje úlohu čoček silných, řeší podmínky aplanatismu systému čoček a vyšetřuje všeobecné vztahy pro lupy a okulary složené.

Kniha Wallonova jest velmi dobrou učebnicí, nesouc ve všech partiích patrné známky propracovaných přednášek. Auktor dbá úzkostlivě methody jednou zvolené (postupu od případů jednoduchých, zvláštních ku případům složitějším, obecnějším) a vykládá zvláště pečlivě partie důležité pro praksi. Zde sluší uvésti část jednající o dalekohledech a zvláště pěkné stati o složeném mikroskopu a okularech.

Sloh knihy, ačkoliv auktor vyjadřuje se stručně, jest jasný, výkladům přispívají mnohé obrazce (169 celkem) vesměs schematické a jednoduché. Označení v obrazcích jest co možná jednotné, podobně označení veličin ve vzorcích a rovnicích.

Knihu lze plným právem ke studiu geometrické optiky doporučiti.

Dr. Vlad. Novák.

Třetí sjezd českých přírodozpytců a lékařů v Praze, o letnicích, 25.—29. května 1901.

Internacionalní výstava Pařížská, pořádaná v posledním roce století minulého, a četné vědecké kongressy, jež při té příležitosti byly do Paříže svolány a při nichž též zástupcové českých kruhů vědeckých byli súčastněni a ve styk s jinými zejména slovanskými zástupci věd uvedeni, dala vnější podnět k otázce, že by i u nás bylo žádoucno svolati kongress českých přírodozpytců a lékařů do Prahy, zejména také vzhledem k tomu, že sjezd takový u nás již po delší řadu let pořádán nebyl. V skutku uplynulo od druhého sjezdu českých přírodozpytců a lékařů, konaného v Praze roku 1882, téměř již 19 let. Myšlenka nového sjezdu, uvažovaná v předběžných poradách, jež svolal dvorní rada prof. Dr. *F. J. Studnička* a při nichž přítomni byli zástupcové věd mathematických, přírodních i lékařských z university i techniky, doznala souhlasu u veliké většiny, a vykonána zároveň volba předsednictví a výboru, jenž by veškeré práce pro zamýšlený sjezd provedl. Při sjezdu roku 1882 byl předsedou vynikající zástupce věd lékařských, dvorní rada prof. Dr. *Bohumil Eiselt*; dle principu alternování pomýšleno na to, aby předsedou sjezdu stal se dvorní rada prof. Dr. *F. J. Studnička* jakožto přední a dlouholetou činností učitelskou i spisovatelskou vynikající zástupce věd mathematických. Když však týž prohlásil, že z důvodů zdravotních úřad ten přijmouti nemůže, zvolen za předsedu sjezdu opět čelný zástupce věd lékařských, prof. Dr. *Jar. Hlava*. Další složení organisačního výboru, jakož i celé *bureau sjezdové* s předsedy a sekretáři všech jednotlivých sekcí uvádíme níže.

Organisační výbor pokládal za první důležitý úkol, dáti nejenom sjezdu chystanému, nýbrž i všem sjezdům budoucím pevný základ, jímž by bylo umožněno, aby o pořádání sjezdů našich nerozhodovaly nahodilé okolnosti, nýbrž jistý system, dle něhož by každý sjezd již pracoval také pro sjezd následující. Za tímto účelem vypracoval *sjezdový řád* approbovaný v poradě, v níž bylo súčastněno celé bureau sjezdové. Znění tohoto řádu podáváme níže úplně. Po té vykonal veškeré přípravy, jež jsou nutné, aby se mohlo přikročiti k pozváním. Ve dnech právě minulých bylo pozvání toto zahájeno a provolání rozeslána časopisům vědeckým, politickým a to jak domácím tak i zahraničním a ovšem také jednotlivcům doma i v cizině. V provolání se praví:

P. T. „Pokrok, jaký vědecká práce u nás od posledního sjezdu v r. 1882 učinila, a rozvoj českého odborného školství jest Vám zajisté dobře znám. Jest potřebí po delší době opětně přehlédnouti stav, v jakém se vědecká práce a odborné školství u nás nalézá, ukázati, jakého dalšího rozvoje jest schopno a odkrýti, čeho nám ještě se nedostává k docílení stejného stupně s jinými vzdělanými národy, u nichž vědy v příznivějších poměrech se rozvinouti mohly a dále rozvíjejí.

Spoléháme na každého, kdo se s přírodními vědami a lékařstvím zabývá, že přispěje dle své síly k tomu, aby ukázalo se, že ve vědeckém závodění národův nestojíme nikterak pozadu, nýbrž na stejné výši s ostatními kulturními národy.

Jsme tedy přesvědčeni, že ráčíte se súčastniti společné práce, a na důkaz toho že přihlásíte se členem sjezdu. K tomu účelu přikládáme spolu přihlášku, kterou račte vyplniti a generalnímu sekretáři p. Doc. Dru *Antonínu Veselému* nejdéle do konce *dubna* zaslati. Zároveň račte u poštovního úřadu svého bydliště zapraviti K 10·— na připojený složní list c. k. poštovní spořitelny svědčící p. Doc. *Karlu Petru Kheilovi*, jako pokladníku sjezdu. Za příspěvek tento obdržíte veškeré publikace sjezdové bezplatně (§ sjezdového řádu 5. *d.*).

Ráčíte-li se sjezdu súčastniti přednáškou, račte laskavě oznámiti to předsednictvu sekce, ku které se přihlásíte. Program sjezdu bude Vám zaslán, jakmile bude organisačním výborem přesně stanoven".

Nemáme k slovům těmto mnoho podstatného připojiti. Velmi mnozí čtenáři našeho časopisu vzpomenou té nadšené nálady, jakáž byla při sjezdu o letnicích roku 1882.*) Událostí dne byl zákon ze dne 28. února roku 1882, kterým se starobylá universita Carolo-Ferdinandea rozdělila na českou a německou. Konalo se právě konstituování se sborů professorských fakulty filosofické a právnické.

Zařízení fakulty lékařské bylo na obzoru. Všichni byli jsme plni nadějí a důvěry v budoucnost, očekávajíce, že česká universita a ne méně i česká technika bude opatřena všemi moderními prostředky, jichž vysoké školy vyžadují k vědeckému badání. Naděje tyto splnily se jen z části. Jedině fakulta medi-

---

*) Viz Časopis pro pěst. mathem. a fys., ročník XI., pag. 248, 1882.

cinská jest v budově vlastní, jsouc umístěna nikoli sice skvěle ale aspoň tak, že může vědecky pracovati. Naproti tomu poměry na fakultě filosofické (s jedinou výjimkou ústavu botanického) a na technice jsou dnes bohužel tam, kde byly před 18 lety; jsou v provisoriu. Uvádíme tuto věc proto, poněvadž v ní dlužno hledati pravou příčinu, proč třetí sjezd tak dlouho nebyl svolán. Do takových ústavů vědeckých, jak je máme na technice a na universitě, zváti hosti domácí a zahraniční, aby se podívali na ten stav přímo žalostný, bránil stud. V skutku bylo o třetím sjezdu v letech minulých již jednou uvažováno. Ale ani teď neuvidí účastníci chystaného sjezdu nic jiného; nemáme ani na technice ani na universitě přírodovědeckých ústavů, jež by byly důstojnými škol vysokých, za to máme na nové ústavy četné — plány. Proto nebude lze vyhnouti se tomu, že mnozí účastníci sjezdu budou sklamáni v očekávání svém, když seznají stav věd přírodozpytných na českých školách vysokých v Praze. Ve dnech právě minulých zasvitla aspoň jiskra naděje, že snad přece dojde k novostavbám; ale četná sklamání let minulých jsou příčinou, že převládá skepsis. Účastníci sjezdu budou však viděti, jak i v poměrech nuzných bylo úsilovně pracováno a jak podán důkaz zdatnosti našich snah vědeckých.

Ve všech sekcích pracuje se pilně a konají se přípravy k četným a zajímavým přednáškám po většině s pokusy neb demonstracemi spojeným. Uvažuje se o exkursích do čelných závodů, továren, podniků městských i zemských; vyjednává se o zajímavých a poučných výletech do okolí pražského. Návštěva kongressu vyžaduje po případě obětí, jež však dojista budou nahrazeny poučením i osvěžením jak v ohledu vědeckém tak i společenském. Přejíce tudíž sjezdu zdaru co nejlepšího a průběhu skvělého, vyzýváme čtenáře časopisu našeho k přihláškám co nejčetnějším, jež buďtež vykonány v době co možná blízké.

S.

V následujícím uvedeme čestné předsedy sjezdu, členy organisačního výboru, jakož i předsedy a tajemníky jednotlivých sekcí.

Čestní předsedové z českých kruhů vědeckých:

prof. Dr. *Čelakovský Ladislav*, prof. Dr. *Eiselt Bohumil*, c. k. dvorní rada, prof. Dr. *Frič Antonín*, *Hlávka Josef*, president České Akademie, prof. *Hráský Jan Vl.*, rektor české techniky v Praze, prof. Dr. *Chodounský Karel*, prof. Dr. *Koláček František*, člen sboru prof. české techniky v Brně, prof. Dr. *Kořistka Karel*, rytíř, c. k. dvorní rada, *Křižík František*, prof. Dr. *Schöbl Josef*, c. k. dvorní rada, prof. Dr. *Studnička Frant. J.*, c. k. dvorní rada, prof. Dr. *Šafařík Vojtěch*, prof. *Šolín Josef*, prof.

Dr. *Tomek W. W.*, rytíř, c. k. vládní rada, předseda Král. české společnosti nauk, prof. Dr. *Zahradník Karel*, rektor české techniky v Brně, prof. *Zenger Karel Václav*, c. k. dvorní rada.

Organisační výbor:

Předseda sjezdu: prof. Dr. *Jaroslav Hlava*, Praha II., Resslova ulice 3. Místopředsedové sjezdu: prof. Dr. *Čeněk Strouhal*, c. k. dvorní rada, Praha I., Annenské nám 2., prof. *Eduard Weyr*, c. k. dvorní rada, Praha II., Lazarská ul. Generální tajemník: Doc. Dr. *Antonín Veselý*, Praha I., Nábřeží 14 n. Pokladník: Doc. *Karel Petr Kheil*, Praha II, Myslíkova ul. 3. n. Členové výboru: Doc. *Emil Votoček*, Praha II., Resslova ul. 1. Dr. *Jan Semerád*, Praha, Všeobecná nemocnice. Předseda tiskového odboru: prof. Dr. *Josef Thomayer*, Praha II., Václavské nám. 72. Předseda pořadatelského odboru: Mg. Ph. *Vladimír Kubert*, Praha I., Na můstku 2. Předseda ubytovacího odboru: Dr. *Erazím Vlasák*, Král. Vinohrady, Korunní tř. 9.

Předsedové a tajemníci sekcí:

I. Sekce biologická: Anatomie, botanika, embryologie, fysiologie, fysiologická chemie, histologie, theoretická parasitologie, zoologie.

Prof. Dr. *Jan Horbaczewski*, Praha II., Kateřinská ul. 32. Prof. *Fr. Klapálek*, Karlín, Palackého třída 20, Dr. *Karel Černý*, Praha II., Kateřinská ul. 32., tajemník.

II. Sekce mathematicko-fysikální: Astronomie, elektrotechnika, fysika, geodesie, mathematika, mechanika, meteorologie.

Prof. Dr. *Čeněk Strouhal*, c. k. dvorní rada, Praha I., Annenské nám. 2. Prof. Dr. *Karel Domalíp*, Praha II., Jungmannova ul. 12. Doc. Dr. *Václav Felix*, Král. Vinohrady, Šafaříkova ul. 9., tajemník.

III. Sekce lékařská: Všeobecná i experimentální pathologie, pathologická anatomie i histologie, lékařská bakteriologie, vnitřní lékařství, psychiatrie, dětské lékařství, soudní lékařství, balneologie.

Prof. Dr. *Emerich Maixner*, Praha I., Ferdinandova tř. 25. Prof. Dr. *Josef Reinsberg*, Praha II., Palackého nábřeží 1696. Doc. Dr. *Antonín Heveroch*, Praha II., Apolinářská ul. 12., tajemník.

IV. Sekce ranlékařská: Chirurgie všeobecná a specialní, porodnictví, gynaekologie, oční, ušní, nosní lékařství, laryngologie, dermatologie a syfilidologie, zubní lékařství.

Prof. Dr. *Karel Maydl*, Praha II., Bredovská ul. 11. Prof. Dr. *Deyl Jan*, Praha II., Spálená ul. 51. Doc. Dr. *Jaroslav Bukovský*, Praha, Všeobecná nemocnice, tajemník.

V. Sekce zdravotnicko-demografická: Lékařské a technické zdravotnictví, fysické vychování, demografie, sociologie.

Prof. Dr. *Gustav Kabrhel*, Praha II., Táborská ul. č. 1821. Dr. *Jindřich Záhoř*, Praha II., Petrská ul. 8. Dr. *Otokar Janota*, Praha II., Žitná ul. 27., tajemník.

VI. Sekce chemická: Chemie theoretická i užitá.

Prof. Dr. *Bohuslav Raýman*, Praha III., Nové nábřeží 3. Prof. *Karel Kruis*, Praha II., Václavská ul. 1779. Doc. *Emil Votoček*, Praha II., Resslova ul. 1., tajemník.

VII. Sekce mineralogicko-geografická: Mineralogie, geologie, palaeontologie, praehistorie, geografie, ethnologie, ethnografie.

Prof. Dr. *Karel Vrba*, Praha II., Pštrossova ul. 1. Prof. Dr. *Jan N. Woldřich*, Král. Vinohrady, Hálkova tř. 76. Dr. *František Slavík*, Praha II., Karlovo nám. 21., tajemník.

VIII. Sekce farmakologická a farmaceutická: Farmakologie, farmakognosie, farmacie, farmaceutická chemie, toxicologie.

Prof. Dr. *Bohuslav* šl. *Jiruš*, c. k. dvorní rada, Praha II., Hálkova ul. č. 9. Prof. Dr. *August Bělohoubek*, Praha I., Jilská ul. 10. Mg. Ph. *Heřman Rüdiger*, Praha II., Vodičkova ul. 2. tajemník.

IX. Sekce agronomická a zvěrolékařská: Agronomie, zvěrolékařství.

Prof. *Julius Stoklasa*, Král. Vinohrady, Čelakovského ul. 9., předseda. Doc. Dr. *Alois Velich*, Král. Vinohrady, Puchmajerova ul. 37., tajemník sekce agronomické, *Matěj Prettner*, zvěrolékař, Praha VII., Ústřední jatky, tajemník sekce zvěrolékařské.

Řád sjezdový.

§ 1.

Sjezd českých přírodozpytců a lékařů koná se z pravidla každých pět let.

§ 2.

Účelem sjezdu jest:

a) Projednávati otázky vědecké, zejména se zřetelem na zvláštnosti a potřeby zemí českých.

b) Seznamovati se s fysiografickými vlastnostmi různých míst, pokud se týče geologie, botaniky, palaeontologie a pod., jakož i s ústavy a sbírkami, jež se týkají přírodozpytu a lékařství.

c) Dávati podnět k řešení otázek vědeckých, které vyžadují ke svému propracování spojených sil vědeckých, a zejména

d) navazovati a utužovati styky přátelské mezi spolupracovníky.

§ 3.

Veškeré přípravné práce ke sjezdu koná **organisační výbor**, jenž se skládá ze sedmi členů: z předsedy, dvou místopředsedů, generalního tajemníka, pokladníka, dvou členů výboru. Dle potřeby sestavuje odbory pomocné: tiskový, pořadatelský, ubytovací atd. po případě lokální, vybírá jich členy a stanoví jich počet.

Organisační výbor ohlásí den i místo sjezdu, dobu trvání jeho, výšku členského příspěvku, vypracuje podrobný program sjezdu (denní rozdělení přednášek, demonstrací, vycházek atd.), opatří redakci „Denníku sjezdového“, jakož i uspořádání vycházek vědeckých, přátelských atd.

Organisační výbor stanoví počet sekcí a jmenuje po dohodnutí s příslušnými odbornými kruhy předsedy a sekretáře jednotlivých sekcí. Těmto přísluší připravovati **vědeckou** část sjezdu, zejména starati se o přednášky, referaty, rozpravy a činiti organisačnímu výboru návrhy, týkající se zvaní osob a čestných funkcí.

Návrhy rázu administrativního a finančního podléhají schválení výboru organisačního, který je provádí.

§ 4.

Ke sjezdu mohou se přihlašovati:

a) odborní zástupcové a pěstitelé věd mathematických, přírodních a lékařských, jako **členové**,

b) přátelé věd těchto jako **účastníci**.

§ 5.

Každý **člen** (§ 4. *a*) sjezdu má právo:

a) přednášeti nebo písemně předložiti vědecké práce,

b) bráti účast v rozhovorech a hlasovati,

c) bráti účast na vycházkách a sjezdových podnicích,

d) obdržeti veškeré publikace pro členy sjezdu určené.

Účastníci (§ 4. *b*) mají táž práva jako členové vyjma odstavec *a*) i *b*).

§ 6.

Kdož přeje si státi se členem neb účastníkem sjezdu, tomu jest ohlásiti se organisačnímu výboru sjezdovému **nejdéle dvě** neděle před začátkem sjezdu; avšak jest veležádoucí, aby se tak stalo již dříve.

§ 7.

Každý člen nebo účastník jest povinen poslati zároveň s přihláškou sjezdový příspěvek, který určil organisační výbor; za to obdrží legitimaci sjezdovou.

§ 8.

Kdo se chce na sjezdu ujmouti slova (k návrhu, přednášce) musí aspoň čtyři neděle před počátkem sjezdu podati předsednictvu sekce obsah svého výkladu nebo návrhu písemně, ve formě způsobilé k otisknutí ve sjezdovém denníku.

§ 9.

Členové, kteří nemohou býti přítomni na sjezdu nebo na některé ze schůzí jeho, mohou (s podmínkami, jež udány jsou v § 8. a 14.) žádati, aby jejich práce, nebo návrhy, byly některým z přítomných členů sjezdu předneseny (mohou též sami určiti osobu člena) anebo mohou žádati na sekretáři, aby dal tak učiniti sám.

§ 10.

Hosté jiné národnosti vítáni jsou buď jako členové mající právo přednášeti, diskutovati a návrhy činiti svým rodným jazykem, anebo jako účastníci.

§ 11.

Schůze sjezdové jsou *a*) všeobecné a *b*) odborové (sekční).
Všeobecné schůze jsou nejméně dvě, jedna na počátku a druhá na konci sjezdu. Počet schůzí sekčních předem se neoznačuje.

§ 12.

Všeobecné schůze zahajuje a řídí předseda organisačního výboru; podpisuje spolu s tajemníkem listiny jménem sjezdu. Místopředsedové v čas potřeby zastupují předsedu. Tajemník spisuje protokol schůze, předčítá a referuje o zprávách písemně podaných a připravuje k tisku zprávu ze schůze všeobecné.

§ 13.

Sekční schůze zahajuje a řídí předseda sekce, případně střídají se předsedové. Tajemník sekce vede protokol schůze, připravuje k tisku zprávy ze schůzí sekčních a obstarává korrektury. Rozdělení sekce na podsekce státi se může jen v případě naléhavé potřeby a po dohodě s organisačním výborem. Zbytečnému tříštění pokud možno nechť se vyvaruje.

§ 14.

Na schůzích sekčních nesmí nikdo — vyjímaje ty, kteří byli zvláště požádáni — mluviti bez přerušení déle nežli 10 minut; kdo by chtěl mluviti déle, musí si zjednati schválení schůze. O jednom a témž předmětu nesmí se více než dvakráte ujmouti slova.

Každý, kdo sjezdu chce činiti vědecká sdělení, musí dříve nežli se ujme slova, odevzdati sekretáři sekce výtah svého vědeckého sdělení, přihotovený k tisku.

Sekretáři sekce výtahy ty pokud možno nejrychleji odevzdají redakci „Denníku sjezdového“ a obstarají korrekturu.

§ 15.

Hlasovati mohou toliko členové schůzi přítomní.

§ 16.

Na všeobecných i sekčních schůzích schvalují se návrhy prostou většinou hlasů. Hlasuje se zvednutím ruky.

§ 17.

Na poslední schůzi všeobecné ustanoví se místo a doba sjezdu budoucího. Zároveň zvolí se — k udržení souvislosti mezi sjezdy jednotlivými — delegace jakožto nový organisační výbor pro sjezd následující. Této delegaci přísluší též právo určiti místo i dobu sjezdu budoucího, když by usnesení sjezdové, v té příčině učiněné, se nedalo provésti.

Delegaci tvoří sedm členů a čtyři náhradníci.

V nutných případech má delegace právo doplniti se kooptací.

§ 18.

Hned po ukončení sjezdu ustaví se delegace jakožto organisační výbor sjezdu budoucího a zvolí si předsedu, místopředsedy, pokladníka a generalního tajemníka. Po svém ustavení převezme od předešlého organisačního výboru účty, akta i jmění, stará se o provedení usnešení posledního sjezdu. Zprávu o své činnosti podává v publikacích sjezdových.

§ 19.

Jmění sjezdu opatruje pokladník nového organisačního výboru a vyplácí z něho jednotlivé účty na příkaz podepsaný předsedou a generalním sekretářem.

§ 20.

Návrhy na změnu tohoto řádu dlužno podati písemně aspoň 4 neděle před počátkem sjezdu organisačnímu výboru, který je spolu s vlastním návrhem na všeobecné schůzi sjezdové přednese.

Zprávy z výboru Jednoty českých mathematiků.

Ve schůzích výboru, konaných dne 15. února a 15. března t. r., stala se mimo jiné následující oznámení a usnesení: Za členy zakládající s příspěvkem 100 *K* přistoupili pp. Frant. Jansa, ředitel zemské vyšší reálky v Lipníku, a Jan Sobotka, professor c. k. české vysoké školy technické v Brně. Dále přijati 4 noví členové skuteční a 2 činní. Zemřel čestný člen Jednoty Karel Hermite, professor na universitě v Paříži.

Na vydávání XXX. ročníku „Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky" povolena c. k. ministerstvem kultu a vyučování obvyklá subvence 1000 *K*. Z učebnic ku approbaci zadaných schváleny byly dosud tři a to: *V. Jarolímek*, Geometrie pro nižší třídy škol realných, 4. vydání, váz. 2 *K* 80 *h* (vynes. ze dne 26. ledna 1901 č. 1994) a *Soldát-Taftl*, Algebra pro vyšší realky, vydání 5., váz. 3 *K* 20 *h*, jakož i Algebra pro vyšší gymnasia, vydání 5., váz. 3 *K* (obě vynes. ze dne 20. února 1901 č. 4088), všecky tři s vyloučením všech starších vydání. První z učebnic právě jmenovaných jest již definitivně vytištěna a odborným pp. professorům a knihovnám chudých žáků z velké části rozeslána, „Algebra" pak nalézá se v tisku. Nákladem Jednoty vydána bude „Fysika pro nižší třídy škol středních" *Karla Brože*, c. k. ředitele vyšší realky v Hradci Králové. Přijata pravidla vypsání cen za nejlepší přednášky ve schůzích týdenních, jak blíže oznámeno jest ve zprávě o těchto schůzích. Konečně ku žádosti pp. členů Jednoty v Brně v zásadě usneseno, aby zřízena byla pro ně při brněnské c. k. české vysoké škole technické příruční knihovna. Prozatím povoleno zakoupení skříně na knihy, jež se svolením slav. rektorátu v místnostech české techniky postavena bude; o ostatních podrobnostech bude dále jednáno. *Dr. J. Č.*

Týdenní schůze tohoto správního roku zahájeny dne 19. října 1900 přednáškou pana Ph. C. *R. Hruši* *„O výškách obecného čtyřstěnu“*. Dne 26. října a 16. listopadu přednášel pan Ph. C. *R. Milota* *„O jednoduché methodě určení poloměru země“* a *„O plochách jednostranných“*. Methoda, kterou přednášející uvedl, zajímava jest pouze ze stanoviska theoretického, záležejíc v stanovení rozdílu výšky hvězdy a úhlu, pod kterým jest viděti hvězdu zrcadlící se ve vypouklém zrcadle hladiny mořské. Jednoduché příklady ploch jednostranných jakož i vlastnosti těchto ploch demonstroval pan přednášející na papírových modelech. Dne 23. listopadu referoval pan Ph. C. *R. Hruša* o spise *„Sophus Lie“ — G. Scheefers „Vorlesungen über Differentialgleichungen“* a doporučoval vřele zajímavou tuto knihu ke studiu kollegům. V týdenní schůzi konané dne 30. listopadu přednášel pan Ph. C. *J. Vojtěch* *„O theorii grup“*, dne 18. ledna pan Ph. C. *R. Tereba* *„O mechanickém řešení rovnic differencialných“* referuje o přístroji, kterým lze určité (k tomu konstruované) rovnice differencialní řešiti. Ve schůzích dne 25. ledna a 8. února referoval Ph. Dr. Vlad. Novák *„O látkách radioaktivných“* a *„O pokroku pyrometrie“*. *)

Jak již v předešlé zprávě ze schůzí výborových oznámeno, usnesl se výbor uděliti ceny za nejlepší přednášky studujících ve schůzích týdenních.

Kommisse, jíž uloženo ustanoviti podmínky přednášek o cenu, počet cen atd. usnesla se na následujícím.

Pro správní rok 1900—1901 rozdělují se přednášky o cenu na dva cykly. Přihlášky do prvého cyklu končí se 1. březnem 1901, cyklus přednášek pak uzavře se koncem letního semestru 1900—1901. Přihlášky do druhého cyklu přijímají se do 15. července 1901, přednášky pak konány budou hned po hlavních prázdninách jedna po druhé.

Výbor ustanovil pro ceny za nejlepší přednášky pro správní rok 1900—1901 obnos 200 korun. Suma tato rozděluje se v oba cykly rovnou měrou a to tak, aby *prvá* cena obnášela *50* korun, *druhá 30* korun a *třetí 20* korun.

O udělení těchto cen rozhoduje tříčlenná kommisse, která

*) Referaty uveřejněny byly v tomto časopise XXX. pg. 161. a pg. 223.

má právo ve zvláštním případě přibrati k posudku odborníka. Cena prvá udělí se jen při jednohlasném usnesení se kommisse. Cenou poctěné přednášky uveřejněny budou v tomto časopise.

Podmínky přednášek o cenu se ucházejících jsou:

Přednášející musí býti členem Jednoty, studujícím na universitě nebo technice.

Přednáška trvati má alespoň 30 minut, ne však déle jedné hodiny.

Přednášející předloží rukopis přednášky, není však jím při přednášce své vázán.

Při posudku o přednáškách rozhoduje jednak volba látky, jednak věcná správnost a způsob zpracování zvolené látky, pak také způsob přednášky a konečně i vypracování písemné.

O těchto usneseních kommisse ve výboru schválených spraveni byli členové ve schůzích týdenních, a s přednáškami o cenu začato již začátkem února.

Přednášeli: dne 1. února 1901 pan Ph. C. *R. Hruša* o spise *Sophus Lie — G. Scheefers* „*Geometrie der Berührungstransformationen;*"

dne 15. února pan Ph. C. *M. Šmok* „*O primitivní mathematice;*"

22. února pan Ph. C. *R. Tereba* „*O telefonografu*"

a dne 1. března pan Ph. C. *L. Demkow* „*Příspěvek k vývoji theorií maxima a minima.*"

Do prvého cyklu přihlášeny jsou ještě přednášky: pana Ph. C. *J. Vojtěcha* „*Úvod do Galoisovy obecné theorie rovnic*" a pana Ph. C. *R. Miloty* „*Historie námitek proti zákonu Newtonovu.*" Dr. *V. N.*

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Příspěvek k interferenci světla v deskách tlustých.

Napsal

B. Navrátil,
ředitel vyšší reálné školy v Prostějově.

Úkazy interference tuto popsané nejsou neznámy; bylyť původně pozorovány již Newtonem na tlustém skleněném zrcadle dutém, jehož konvexní strana byla rtuťovým amalgamem potažena.*) Později podobné zkoušky též od jiných fysiků s různými obměnami byly opakovány, jak dále ještě uvedeme. Zdá se však, jakoby vše to bylo upadlo v zapomenutí; nenalézámť o nich v učebnicích fysiky a optiky, byť jinak dosti obsáhlých, pravidlem ani zmínky přes to, že zjevy tyto vynikají zvlášť ve světle slunečním stkvělostí překvapující a nežádají k demonstraci žádných zvláštních přístrojů, ba za jistých podmínek mimo obyčejné skleněné zrcadlo rovinné vůbec žádných přístrojů dalších. Z té příčiny nebude snad zbytečno, popíšu-li je na základě pokusů vlastních.

Ku snadnému znázornění těchto interferenčních zjevů jest potřebí intensivního zdroje světelného. Nejčastěji užíváno bylo obloukové lampy, uzavřené ve čtverhranné neprůhledné skříni, do jejíž jedné stěny jest vřezán kruhový otvor průměru asi 10 *cm*, opatřený mosazným pouzdrem na umístění čoček, jimiž světlo lze učiniti dle potřeby buď rovnoběžným nebo rozbíhavým. Místnost, v níž pokusy konány, byla obyčejně zatemněna; mnohdy však stačí i jen pouhé zastínění, ba za jistých okolností lze se obejíti i beze všeho zastínění. V obr. 1.—5. k textu dále při-

*) Viz „Sir Isaac Newtons Optik oder Abhandlung über Spiegelungen, Brechungen, Beugungen und Farben des Lichtes“ v „Ostwald, Klassiker d. exakten Wissenschaften, Nr. 96, 97“.

pojených značí L bod, ze kterého paprsky světelné buď skutečně vybíhají, nebo jen divergují (ohnisko čočky spojovací), anebo v němž alespoň prodloužené jich směry se protínají, jako na př. když elektrický oblouk lampy umístíme mezi ohniskem a čočkou. Nazveme jej bodem radiačním. MN (obr. 1.) značiž skleněné zrcadlo, jež musí býti dosti rovinné, aby nedávalo obrazy znetvořené; zrcadlo starší, na povrchu trochu zašlé, koná lepší služby než zrcadlo nové, dokonale leštěné.

Zrcadlo to postavme svisno ve vhodné vzdálenosti od radiačního bodu L. Při tlouštce zrcadla, již označovati budeme *a*, rovné asi 1·5 *mm*, učiňme pro první orientaci vzdálenost tu LF = *d* asi 4—5 *m*. Vrhneme-li pak z L otvorem skříně kolmo na MN trs paprsků buď rovnoběžných nebo mírně rozbíhavých tak, aby se světlo odráželo zpět ku svému východišti, t. j. k otvoru skříně, otvor ten souměrně obklopujíc, spatříme, pozorujíce desku z bodu O ležícího těsně u L nebo vůbec u LF, v osvětlené části zrcadla velmi krásné, široké, barevné pruhy interferenční, jež mají směr svisný, když oko se nalézá v téže rovině horizontální se světlem dopadajícím, horizontální, když oko jest pod nebo nad trsem světla dopadajícího, a šikmý, když jest v poloze jiné. Pruhy ty jsou zároveň, když O jest blíže zrcadla než L, směrem k oku O zakřiveny, tak že se zdá, vedeme-li oko okolo trsu dopadajícího, jakoby všecky ty oblouky byly částmi mohutných kruhů. Vzdaluje-li se oko od LF, zachovávajíc stejnou vzdálenost od zrcadla, zvětšuje se počet interferenčních proužků v osvětlené ploše zrcadla, zároveň se úží čím dále tím více, až úplně mizejí.

Totéž pozorujeme za okolností jinak nezměněných, když otáčíme zrcadlem okolo osy svisné, zvětšujíce úhel dopadu α, jenž však vždy musí býti velmi malý, ač má-li interference nastati. Rovněž úží se interferenční pasy a zároveň zvětšuje se viditelná část jich oblouku, když se oko neb radiační bod k zrcadlu blíží, jakož i když přibývá tloušťky zrcadla. Mimo to jest šířka jich též závislá na délce vlny světelné. Vhodnou volbou všech podmiňujících elementů lze snadno docíliti, že interferenční pasy nabudou šířky neobyčejné, na př. 10 *cm* i větší. Zajímavo jest též, že když pozorujeme oběma očima, rozeznáváme někdy, má-li přímka oči spojující směr šikmý, dvě soustavy pasů, z nichž každá přináleží oku jednomu.

Ve světle homogenním se barevné proužky promění ve proužky střídavě světlé a temné, jak u zjevů interferenčních vůbec.

Takto zkoušena byla četná zrcadla skleněná, jak se právě nahodila; ve všech pozorovány interferenční pasy, ač ne vždy stejně stkvělé, mimo zrcadla s povrchem hrubým, nedosti rovinným.

Místo zrcadel lze též užiti pouhých desk skleněných bez zrcadlícího povlaku. Zjev se podstatou nemění, jest však méně zářivý. V desce ze skla zrcadlového 4·8 *mm* tlusté byl velmi krásně viditelný. Tlustších a zároveň dostatečně rovných desk nemohl jsem si opatřiti.

Zmínky též zasluhuje, že tvar otvoru, jímž světlo z lampy vychází, (je-li na př. otvor okrouhlý, nebo má-li podobu štěrbiny a pod.) nemá žádného vlivu ani na tvar ani na polohu interferenčních pasů.

Že úkaz ten spočívá na křížení světla na stěnách desky odraženého a v ní lomeného, jest na první pohled patrno. Dosvědčuje to však též přímo zkušenost,

1. že na černém skleněném zrcadle interferenční pasy nepovstávají, a

2. že jich rovněž vyvoditi nelze na zrcadle skleněném, opatřeném hladkým kovovým povlakem, když odráží světlo hladký kovový povlak, kdežto s překvapující stkvělostí se objevují, když ku zdroji světelnému obrátíme skelnou stranu téhož zrcadla. *)

Aby se zjistilo, jaký vliv na změnu fase má po případě odraz světla od kovového povlaku, vytvořeny též interferenční pasy v desce skleněné (1·4 *mm* tlusté), z polovice rtuťovým amalgamem povlečené a z polovice průhledné. Shledáno při tom, že temné pasy v zrcadlící polovici jsou přesně pokračováním temných pasů v polovici průhledné; z čehož usouditi lze, že kovový povlak pro podstatu zjevu jest indifferentní.

---

*) Užíváno průhledných zrcadel (patent Rost) koupených u A. Procházky ve Vídni.

Úkaz tento a jiné drobnější zjevy, jež tuto pomíjíme, již tomu nasvědčují, že příčina těchto interferenčních pasů není táž, jako na tenkých vrstvách (blanách) a na skle Newtonově. Důkazem toho velmi přesvědčivým jest, že oko pozoruje tyto pasy nejen, když se nalézá v oblasti světla pravidelně od desky odraženého, nýbrž i mimo ni, na př. v O (obr. 2.). Totéž dosvědčuje i ta okolnost, že lze zrcadlo (nejlépe jen z polovice k vůli přímému srovnávání) slabo zakaliti, na př. drobným prachem, jaký se během doby na předmětech neužívaných usázívá, nebo mlékem vodou rozředěným a pod., aniž jasnost interferenčních proužků ujmy utrpí; proužky slábnou teprv při značném zakalení mlékem nerozředěným.

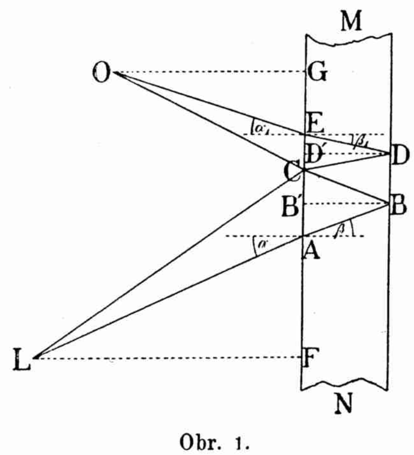
Příčinu úkazu dlužno tedy patrně hledati v interferenci paprsků nepravidelně odražených a lomených, diffusních, roztříštěných na zrcadle nedokonale hladkém. Podstatou jest to tudíž týž zjev, jejž pozoroval Newton na stinítku postaveném ve středu křivosti dutého zrcadla skleněného, zevně amalgamovaného, o poloměru 5′ 11″, když na ně dal dopadnouti trs světelných paprsků malým otvorem onoho stinítka v ose zrcadla ležícím. Praví ť v té příčině:*) „Není ani skla ani zrcadla, jež by, ať jest broušeno sebe pečlivěji, nevysílalo, mimo světlo pravidelně lomené a odražené, na všecky strany ještě slabé světlo roztříštěné, jež v každé poloze oka viditelnou činí leštěnou jeho plochu, když v temnější světnici slunečním paprskem jest osvětlena. Toto roztříštěné světlo způsobuje jisté zjevy, jež se mi při prvním pozorování zdály býti velmi podivny, a překvapující . . .“ Pak popisuje Newton pokus s dutým zrcadlem o poloměru 5′ 11″, o němž právě zmínka byla učiněna, a hledí zjev pozorovaný vysvětliti známými náladami (v něm. překladu: Anwandlungen) paprsků světelných, dle nichž paprsek při jisté náladě (snad dle polohy světelných částic v něm) se odráží, v jiné náladě do nového ústředí vniká.

Dle theorie undulační poprvé úkaz ten vysvětlil Dr. Young interferencí dvou světelných trsů, z nichž prvý se tříští na přední stěně zrcadla a pak pravidelně se odráží a láme, kdežto druhý pravidelně se láme a odráží a pak teprv, vycházeje ze

*) Dle cit. díla: Sir J. Newtons Optik, II. Buch, IV. Theil, p. 68.

skla, se tříští. Podrobně vypracoval theorii jeho sir John Herschel pro případ, že oba povrchy zrcadel náležejí koncentrickým koulím, v jichž společném středu jest stinítko s dírkou.

Později pozoroval Dr. Whewell řadu barevných pasů v zrcadle rovinném přímo okem bez stinítka, když držel svíčku blízko oka ve vzdálenosti několika stop od zrcadla tak, aby obraz svíčky v zrcadle byl viditelný, při čemž zrcadlo bylo zakaleno. Všeobecnou theorii těchto zjevů podal Stokes; v ní pokusy Newtonovy a Whewellovy zahrnuty jsou jakožto případy zvláštní. Též ukázal Newtonovy kroužky, když plamen svíčky neb olejové lampy s malým knotem postavil tak před zrcadlo duté, zakalené mlékem rozředěným vodou v poměru 1 : 3, aby obraz splynul s předmětem; obrácený obraz svíčky byl pak obklopen krásnými kruhy. Výsledek, k němuž Stokes dospěl, uvedeme později. *)



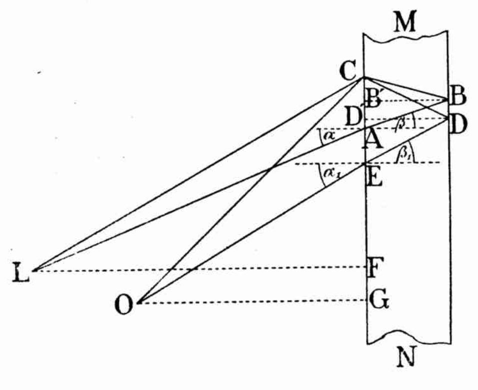
Obr. 1.

*) Stručné tyto črty historické, obsažené v posledních dvou odstavcích, jsou vyňaty z Phil. Mag. 1851 (July-December) z článku: On the Colours of Thick Plates, by G. G. Stokes, který jest výtahem z obšírnějšího snad pojednání, uveřejněného asi v Proceedings of the Cambridge phil. society v květnu 1851. Jinde se citují z téže doby „Transactions" téže učené společnosti. Nebylo mi možno, zjednati si ani ty ani ony. Nahoře uvedené Proceedings nalézají se jenom v univ. knihovně Vídeňské, avšak teprv od r. 1866; o Transactions není v Grassauerově Generalkatalogu zmínky.

Lze tedy vznik těchto interferenčních proužků v deskách tlustých vysvětliti takto:

Z L (obr. 1.) dopadá paprsek světelný na skleněnou desku MN v bodě A, kdež jedna část jeho se tříští, druhá pravidelně se odráží a třetí pravidelně se láme. Část posléze jmenovaná dospěje bodu B, kdež, sledujeme-li v dalším výkladu jen tu část, jež k vytvoření interferenčních proužků přispívá, pravidelně se odráží do C, odkudž část světla roztříštěním vzniklá jde na př. směrem CO do oka O.

Jiný paprsek z L vycházející padá na desku v bodě C, kdež roztříštěná část, neřídící se zákonem pravidelného lomu, vniká do desky směrem CD, odkudž po pravidelném odraze přichází do E a po pravidelném lomu do O. Poněvadž přijímáme, že tříštění světla u obou paprsků v O se stýkajících děje se v témž bodě C, mohou dle Stokesa oba paprsky interferovati; dlužno však zároveň ještě vyhověti další podmínce, aby úhel u O byl dosti malý. Světelný stav v O jest pak podmíněn rozdílem drah obou interferujících paprsků.



Obr. 2.

Obr. 2. znázorňuje dráhy obou paprsků, když oko O se nalézá na druhé straně LF, kam paprsky světelné pravidelným lomem a odrazem dospěti nemohou. Poznačení jest v obou obrazcích souhlasné.

Rozdíl drah obou paprsků určíme napřed na př. pro případ znázorněný v obr. 1. Budiž tloušťka desk $BB' = a$, vzdálenost radiačního bodu $LF = d$, vzdálenost oka $OG = d_1$, $AF = \varepsilon$, $CG = \zeta$, $CF = \varepsilon_1$, $EG = \zeta_1$. Pak jest

$$LA = d\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{d^2}}$$

čili, poněvadž $\frac{\varepsilon}{d}$ jest veličina velmi malá,

$$LA = d\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2d^2}\right).$$

Dále jest

$$AB = BC = a\sqrt{1 + \frac{AB'^2}{a^2}}.$$

Poněvadž úhel dopadu α a tedy též příslušný úhel lomu β jest velmi malý, můžeme položiti, značí-li ν index lomu,

$$\frac{AB'}{a} = \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\nu} = \frac{\varepsilon}{d\nu},$$

tak že

$$AB = BC = a\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2d^2\nu^2}\right).$$

Podobně jest

$$CO = d_1\left(1 + \frac{\zeta^2}{2d_1^2}\right).$$

Uvážíme-li, že světlo koná dráhu $AB + BC$ ve skle, že ji tudíž dlužno násobiti indexem lomu, abychom obdrželi její aequivalentní hodnotu pro vzduch, nalezneme pro úplnou dráhu paprsku prvního

$$LABCO = d\left(1 + \frac{\varepsilon^3}{2d^2}\right) + 2a\nu\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2d^2\nu^2}\right) + d_1\left(1 + \frac{\zeta^2}{2d_1^2}\right).$$

Podobně najdeme pro paprsek druhý

$$LCDEO = d_1\left(1 + \frac{\zeta_1^2}{2d_1^2}\right) + 2a\nu\left(1 + \frac{\zeta_1^2}{2d_1^2\nu^2}\right) + d\left(1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2d^2}\right).$$

Z toho rozdíl drah

$$\Delta = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2}{2d} + \frac{\zeta^2 - \zeta_1^2}{2d_1} + \frac{a}{v}\left(\frac{\varepsilon^2}{d^2} - \frac{\varepsilon_1^2}{d_1^2}\right)$$

čili stručněji, poněvadž $\varepsilon - \varepsilon_1$ a $\zeta - \zeta_1$ jsou u přirovnání k d a d_1 veličiny velmi malé,

$$\Delta = \frac{a}{v}\left(\frac{\varepsilon^2}{d^2} - \frac{\zeta_1^2}{d_1^2}\right). \tag{1}$$

Bude tedy ve světle homogenním v O světlo, když

$$\frac{a}{v}\cdot\left(\frac{\varepsilon^2}{d^2} - \frac{\zeta_1^2}{d_1^2}\right) = 2n\frac{\lambda}{2} \tag{2}$$

a temno, když

$$\frac{a}{v}\left(\frac{\varepsilon^2}{d^2} - \frac{\zeta_1^2}{d_1^2}\right) = (2n+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{3}$$

značí-li λ délku světelné vlny.

Pro správné porozumění významu veličin ε a ζ_1 uvažme toto:

Jak podotčeno bylo, nesmí úhel α překročiti jisté meze, má-li interference nastati. Přímé měření ukázalo, že pro $d = 520$ *cm*, když bylo oko O co nejblíže u L, interferenční pasy v zrcadle 1·31 *mm* tlustém zmizely při $\alpha = 4^0 13'$, ve skleněné desce zrcadlové 4·8 *mm* tlusté za okolností docela totožných již při $\alpha = 2^0 22'$. Z toho plyne, že veškery body mezi A a E (obr. 1.) a C a E (obr. 2.) leží tak blízko u sebe, že můžeme $\varepsilon =$ AF považovati za odlehlost interferenčního proužku A od F a $\zeta_1 =$ EG za odlehlost téhož proužku od G (obr. 4. a 5., ač ani zde relativné poměry skutečnosti měřítkem nejsou vystiženy).

Zvláštní zmínky zasluhuje případ, že rozdíl drah jest roven nulle. Pak dle rovn. (1)

$$\varepsilon : \zeta_1 = d : d_1$$

čili dle toho, což právě bylo řečeno (obr. 3.; srv. též 4. a 5.),

$$\text{AF} : \text{AG} = \text{LF} : \text{OG},$$

t. j. pro každý bod zrcadla, vyhovující podmínce, aby při nezměněné poloze oka a bodu radiačního poměr odlehlostí jeho od bodů F a G měl konstantní hodnotu LF : OG, jest rozdíl drah a tudíž i rozdíl měny roven nulle, a v bodě tom jest jasnost maximální. Není nesnadno tento bod nalézti.

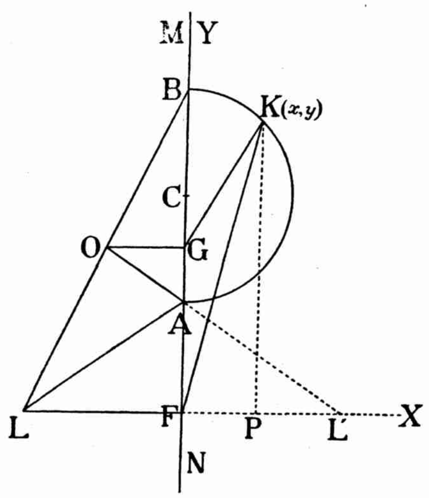
Budiž L′ obrazem (virtualným) bodu L v zrcadle MN (obr. 3.), a veďme OL′, jež protíná zrcadlo v bodě A; pak jest A hledaným bodem. Nebo z podobnosti trojúhelníků AGO a AFL′ plyne

$$AF : AG = FL' : OG = LF : OG.$$

Téže podmínce vyhovuje však též bod B, jejž obdržíme, prodloužíme-li spojnici bodů L a O, až protne rovinu zrcadla. Plyne totiž z podobnosti trojúhelníků LFB a OGB samo sebou

$$BF : BG = LF : OG.$$

Všeobecně pak lze snadno ukázati, že geometrické místo všech bodů, pro něž poměr vzdáleností jejich od dvou pevných bodů jest veličinou stálou, jest kruh.



Obr. 3.

V obr. 3. ať jest F počátkem souřadnic, rovina XFY rovinou zrcadla (zde již do roviny nákresné sklopenou), FG = b a K (x, y) bodem, pro nějž platí

$$\frac{KF}{KG} = \frac{LF}{OG} = k,$$

kdež k jest veličinou stálou. Z relace té dle obr. 3. snadno nalezneme, že

$$x^2 + \left(y + \frac{bk^2}{1 - k^2}\right)^2 = \frac{b^2k^2}{(1 - k^2)^2},$$

což jest, jak patrno, rovnice kruhu, jehož souřadnice středu ξ a η a poloměr r určují rovnice

$$\xi = 0, \ \eta = -\frac{bk^2}{1 - k^2}, \ r = \frac{-bk}{1 - k^2}.$$

Kruh AKB representuje tedy ony body zrcadla, v nichž pro danou polohu oka a zdroje světelného se jeví jasnost maximální. Ostatní interferenční pasy pak dílem objímají tento kruh nullový, dílem jsou jím obemknuty. Co do konstrukce, jest z obr. 3. o sobě zřejmo, že AB jest jeho průměr, jehož rozpůlením obdržíme střed C.

S tím souhlasí, co nalezl Stokes, jenž dí: „Spoj oko se světelným bodem i s jeho obrazem, ať realným nebo virtualným, a vyhledej body, v nichž spojnice, prodloužené když potřebí, protínají zrcadlo. Opiš kruh, jehož průměrem jest přímka spojující tyto dva body. Kruh tento bude střední čarou světlého bezbarvého pasu řádu nullového a na každé jeho straně budou barvy seřaděny v sestupném pořádku“.*)

Jsou-li paprsky světelné na desku dopadající rovnoběžny, vrháme-li na př. na desku světlo sluneční heliostatem bez interposice čočky, jest $d = k = \infty$, tudíž

$$\xi = 0, \ \eta = b, \ r = 0,$$

t. j. v tomto případě kruh s nullovým rozdílem fase přejde v bod splývající s G. Umístíme-li pak oko co nejblíže u LF, aniž ovšem světlo hlavou zacloníme, spatříme v zrcadle světlou bílou skvrnu tvaru asi půlkruhového, s okraji namodrale černavými, obemknutou zářivými kruhy barevnými.

*) Phil. Mag. 1851. l. c.

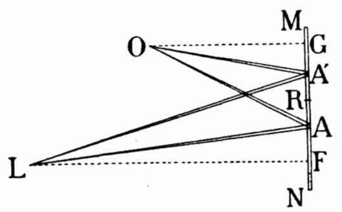
V případě, že radiační bod (zde nejlépe ohnisko čočky) i oko jsou stejně vzdáleny od zrcadla, jest $k = 1$ a

$$\xi = 0, \ \eta = r = \infty,$$

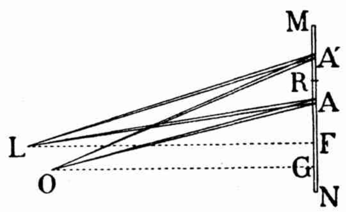
t. j. kruh nullový a zároveň i ostatní proužky interferenční promění se v přímky kolmé k FG.

Všeobecně pak plyne z výrazů pro η a r, že měníme-li k, mění se též směr zakřivení interferenčních pasů, když k prochází hoduotou $= 1$; t. j. jsou-li pasy zakřiveny v podobě C, když oko jest blíže zrcadla než bod radiační, zakřiví se naopak, jakmile se oko pošine směrem od zrcadla za radiační bod L.

Zbývá ještě určiti šířku interferenčních pasů, při čemž se obmezíme na šířku jich podél přímky FG.



Obr. 4.



Obr. 5.

Rovnice (3) udává podmínku pro pasy temné, na př. pro pás A (obr. 4. a 5.). Pro sousední pás temný při konstantním d a d_1 nabudou veličiny ε a ζ_1 hodnot jiných, na př. ε' a ζ_1'. Bude tedy tento pás určen rovnicí

$$\frac{a}{v}\left(\frac{\varepsilon'^2}{d^2} - \frac{\zeta_1'^2}{d_1^2}\right) = (2n+3)\,\frac{\lambda}{2}. \tag{4}$$

Odečtením rovnic (3) a (4) obdržíme

$$\frac{(\varepsilon' - \varepsilon)\,(\varepsilon' + \varepsilon)}{d^2} + \frac{(\zeta_1 - \zeta_1')\,(\zeta_1 + \zeta_1')}{d_1^2} = \frac{v}{a}\,\lambda.$$

Poznačíme-li δ odlehlost dvou sousedních temných pasů, jest zajisté (obr. 4.)

$$\varepsilon' - \varepsilon = \mathrm{A'F} - \mathrm{AF} = \delta$$
$$\zeta_1 - \zeta'_1 = \mathrm{AG} - \mathrm{A'G} = \delta.$$

Leží-li bod R uprostřed mezi A a A', jest dále

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} = \mathrm{FR}$$
$$\frac{\zeta_1 + \zeta'_1}{2} = \mathrm{GR},$$

tak že

$$\delta = \frac{\nu\lambda}{2a\left(\frac{\mathrm{GR}}{d_1^2} + \frac{\mathrm{FR}}{d^2}\right)}. \tag{5}$$

Podobně nalezneme pro polohu oka naznačenou v obr. 2. a 5.

$$\delta = \frac{\nu\lambda}{2a\left(\frac{\mathrm{GR}}{d_1^2} - \frac{\mathrm{FR}}{d^2}\right)}, \tag{5'}$$

kterýžto vzorec patrně plyne z rov. (5), učiníme-li v ní veličinu FR zápornou.

Rovnice (5) a (5') karakterisují šířku interferenčních pasů pro libovolnou polohu radiačního bodu L a oka O. Vytkněme opět některé zvláštní případy.

Pro světlo rovnoběžné jest $d = \infty$, a z rovnic (5) a (5') plyne, píšeme-li d místo d_1,

$$\delta = \frac{\nu\lambda \,.\, d^2}{2a \,.\, \mathrm{GR}}, \tag{6}$$

kterýžto vzorec ostatně též platí, když d, nejsouc přímo nekonečné, u přirovnání k FR jest dosti veliké, obnáší-li na př. několik metrů.

Nalézá-li se oko v téže vzdálenosti od desky jako bod radiační, jest $d = d_1$ a

$$\delta = \frac{\nu\lambda \,.\, d^2}{2a \,.\, \mathrm{FG}} = \frac{\nu\lambda \,.\, d^2}{2ab}. \tag{7}$$

Rovnice (5) — (7) dobře souhlasí se skutečností. Měníme-li polohu oka v rovině horizontální, procházející trsem paprsků dopadajících, nechávajíce celé ostatní zařízení bez proměny, můžeme četné případy v bezprostředním sledu pozorovati. Vycházejíce na př. z polohy naznačené v obr. 2. a 5., uvidíme napřed, přiblíživše se dostatečně k LF, četné jemné proužky; pak se jich šířka rychle zvětšuje, čím blíže k LF přicházíme, při čemž se řídí distance interferenčních pasů rovnicí (5'), po případě (6) nebo (7). Dospějeme-li co nejblíže k LF, nabudou pasy šířky maximální; při $a = 1\cdot3\ mm$ a $d = 520\ cm$ asi $10\ cm$, jak již dříve bylo podotčeno. Překročíme-li na druhou stranu trsu světelného, tak že oko přešlo do polohy naznačené na obr. 1 a 4., kdež tedy zjev se řídí rovnicemi (5), (6) nebo (7), ubývá znenáhla šířky pasů. Dospělo-li oko do oblasti paprsků pravidelně odražených, vidí tytéž pasy stále se úžící a v nich zároveň lesklý obraz bodu L, aniž se jím ostatně interferenční pasy pozmění tvarem nebo polohou. Při dalším postupu oka se těsní pasy víc a více, až konečně splynou a mizejí.

Ve světle slunečním heliostatem do temné místnosti bez interposice čočky vrženým zářil interferenční zjev barvitostí zrovna nádhernou. Nejkrásněji se jevil ve starém zrcadle postříbřeném $1\cdot31\ mm$ tlustém. Avšak i bez heliostatu lze pasy ty pozorovati a to i v místnosti nezatemněné, v plném jasu denního světla, když do místnosti padají přímé paprsky sluneční. Zachytneme-li je zrcadlem tak postaveným, aby po pravidelném odraze postupovaly směrem přesně protivným neb alespoň od tohoto směru jen málo odchýleným, zpozorujeme v zrcadle prostým okem beze všech dalších pomůcek stkvělé interferenční pasy, nalézá-li se oko trsu světla dopadajícího co nejblíže a v přiměřené vzdálenosti od zrcadla.

Ve světle argandského hořáku pozorovány byly sotva stopy interferenčních proužků.

Jest též možno interferenční tyto proužky znázorniti objektivně, na př. na listě bílého papíru, čočkou, již postavíme na místo oka tak, jakobychom vytvořiti chtěli skutečný obraz zrcadla. Uvidíme pak ve světle bílém na papíře barevné interferenční půlkruhy, jež však stkvělostí ani zdaleka se nevyrovnají pasům pozorovaným subjektivně.

Na konec budiž mi dovolena poznámka, že by snad také bylo možno, využitkovati úkazu tohoto při praktickém vyučování na škole střední jakožto nápadné ukázky interference světla v rozměrech velkých, alespoň co do stránky povšechné, třeba bez věcného vysvětlení, k doplnění pravidelného ač velmi drobounkého zjevu na skle Newtonově, k čemuž se snadností demonstrace ještě zvlášť doporučuje.

Úlohy.

Úloha 36.

$$\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{x^2-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{x^2-c^2}}=\frac{abc}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2)}}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 37.

Ustanoviti jest dvě čísla, jichž největší společná míra jest 360 a nejmenší společný násobek 32400.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 38.

V zahradě vysázena řada stromků, z nichž jeden od druhého 5 m vzdálen. V prodloužení této řady stojí nádržka vodní. Zahradník zalévaje stromky a chodě po zalití každého stromku zase k nádržce zpět, ušel těmito cestami po zalití všech stromků, vrátiv se od posledního též zpět k nádržce, celkem 13750 m. Víme-li, že od posledního stromku k nádržce jest 260 m, jest vypočítati: kolik stromů jest v řadě a v jaké vzdálenosti jest první stromek od nádržky.

Stud. techn. *Vlad. Ibl.*

Úloha 39.

V trojúhelníku abc vésti jest příčky

$$a_1a_2 \parallel cb,\quad b_1b_2 \parallel ac,\quad c_1c_2 \parallel ba$$

tak, aby šestiúhelník $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$ *byl rovnostranný. Jsou-li* a, b, c *strany trojúhelníka,* x *strana šestiúhelníka, jest dokázati, že*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 40.

Dokažte, že v šestiúhelníku $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$ předešlé úlohy spojnice a_1b_2, b_1c_2, c_1a_2 protínají se v jediném bodě, jehož vzdálenosti od stran a, b, c původního trojúhelníka jsou v poměru

$$(b + c) : (c + a) : (a + b).$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 41.

Každý vrchol čtverce spojen jest s body půlícími protější strany; spojnice tyto omezují rovnostranný čtyrosý osmiúhelník. Vypočísti jest obsah mnohoúhelníka a poloměr vepsané jemu kružnice, dána-li strana čtverce.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Úloha 42.

Přímky půlící vnitřní úhly nerovnostranného rovnoběžníka omezují rovnoběžník pravoúhlý. Jest dokázati, že úhlopříčky tohoto rovnoběžníka jsou rovnoběžny ku stranám původního a jest ustanoviti jich délku.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Úloha 43.

Úhlopříčky pravidelného osmiúhelníka omezují dva menší pravidelné osmiúhelníky. Je-li A obsah největšího, B prostředního a C nejmenšího, jest dokázati, že

$$B = \frac{1}{2}(A + C).$$

Posl. fil. *Inocenc Hanzlík.*

Úloha 44.

V trojúhelníku jest

$$tg\,\alpha : tg\,\beta : tg\,\gamma = 1 : 2 : 3;$$

v kterém poměru jsou a) jeho strany, b) jeho výšky, c) svrchní části výšek, d) spodní části výšek? Řed. *A. Strnad.*

Úloha 45.

Sestrojte trojúhelník, dána-li strana a, protilehlý úhel α a poloměr ϱ kružnice vně vepsané a strany a se dotýkající.

Prof. *Jindř. Muk* v Rychnově n. K.

Úloha 46.

Řešiti jest rovnici

$$\cos^4 x\,(\sin^3 x + \sin 3x - \cos 3x) - \sin^4 x\,(\cos^3 x + \sin 3x - \cos 3x) = \sin^7 x - \cos^7 x.$$

Prof. *Jindřich Muk* v Rychnově n. K.

Úloha 47.

Úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka o straně a tvoří hvězdovitý pětiúhelník 2. řádu. Tvoří-li tento pětiúhelník síť jehlanu, jest určiti povrch i obsah jehlanu, poloměr koule vepsané a opsané, stěnové úhly jehlanu.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Úloha 48.

V pravoúhlé soustavě souřadnic dány body

$$a\,(-5, b),\ b\,(0, 5),\ c\,(4, 3),\ d\,(3, -4).$$

Dokažte, že body ty leží na kružnici; ustanovte rovnici této kružnice; vypočítejte strany, úhlopříčky a obsah čtyrúhelníka abcd.

Posl. fil. *Jan Schüller.*

Úloha 49.

Do ellipsy vepsati jest kosočtverec, jehož strany délka jest dána.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 50.

Do kuželosečky dané v pravoúhlé soustavě rovnicí

$$y^2 = x\,(12 - x) - 11$$

vepsán jest šestiúhelník abcdef, jehož vrcholy mají úsečky

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 6,\ x_4 = 10,\ x_5 = 9,\ x_6 = 2;$$

z příslušných pořadnic jsou y_5 a y_6 záporné. Jest dokázati, že *průsečíky protějších stran tohoto šestiúhelníka leží v jedné přímce, a rovnici této přímky jest vyvoditi.*

Posl. fil. *Jan Schüller.*

Upozornění. Lhůta k zaslání řešení úl. 25. až 50. prodlužuje se do 31. dubna r. 1901.

Řešení úloh.

Úloha 1.

Řešiti jest rovnici

$$(4x^2 - 11)(4x^3 - 11) = 105.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Hulla,* stud. VIII. tř. gym. v Olomouci.)

Anullujeme-li danou rovnici, obdržíme rovnici převratnou 5. stupně

$$4x^5 - 11x^3 - 11x^2 + 4 = 0,$$

jejíž jeden kořen jest patrně

$$x_1 = -1.$$

Dělíme-li rozdílem kořenovým $x + 1$, dospějeme k převratné rovnici 4. stupně

$$4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = 0$$

čili

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 7.$$

Tuto řešíme známou substitucí

$$x + \frac{1}{x} = y;$$

bude pak

$$4y^2 - 4y - 15 = 0,$$

$$y_1 = \frac{5}{2}, \quad y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Z rovnic

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{2}{3}$$

čili

$$2x^2 - 5x + 2 = 0, \quad 2x^2 + 3x + 2 = 0$$

ustanovíme

$$x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_{4,5} = -\frac{1}{4}(3 \pm i\sqrt{7}).$$

Úloha 2.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$\frac{x^5 - a}{x - b} = y^4,$$
$$\frac{y^5 - a}{y - b} = x^4.$$

Řed. *A. Strnad*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Valach,* stud. VIII. tř. gym. v Kroměříži.)

Pišme rovnice dané ve tvaru

$$x^5 - xy^4 = a - by^4$$
$$y^5 - x^4y = a - bx^4.$$

Vyloučíme-li konstantu b, obdržíme rovnici

$$x^4(x^5 - xy^4) - y^4(y^5 - x^4y) = a(x^4 - y^4)$$

čili

$$(x^5 + y^5)(x^4 - y^4) = a(x^4 - y^4);$$

prostým odečtením vyloučíme a, i bude

$$(x + y)(x^4 - y^4) = b(x^4 - y^4).$$

Oběma posledním rovnicím vyhoví se, bude-li

$$x^4 - y^4 = 0$$

čili se zřetelem k rovnicím původním

$$x^5 - a = x^4(x - b);$$

odtud vyplývá

$$bx^4 - a = 0,$$

tudíž

$$x = y = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}.$$

Po odstranění činitele $x^4 - y^4$ přechází pak soustava rovnic v jednodušší

$$x^5 + y^5 = a$$
$$x + y = b,$$

kterou známým způsobem řešiti lze.

Úloha 3.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 341,$$
$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 330.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Rychlík,* stud. V. tř. akad. g. v Praze.)

K první rovnici přičtouce trojnásobnou druhou obdržíme

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 = 1331,$$

tudíž

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 11,\ 11\alpha,\ 11\alpha^2,$$

kdež

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\quad \alpha^3 = 1.$$

Ze druhé rovnice dané jde pak

$$\sqrt{xy}\,(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 330$$

čili

$$\sqrt{xy} = 30,\ 30\alpha^2,\ 30\alpha.$$

a) Je-li

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 11,\qquad \sqrt{xy} = 30,$$

jsou $\sqrt{x}$ a $\sqrt{y}$ kořeny rovnice

$$u^2 - 11u + 30 = 0,$$

tudíž

$$u = \frac{11 \pm 1}{2},$$

$$x_1 = y_2 = 36,\qquad x_2 = y_1 = 25.$$

b) Je-li

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=11\alpha, \qquad \sqrt{xy}=30\alpha^2,$$

jsou $\sqrt{x}$ a $\sqrt{y}$ kořeny rovnice

$$u^2-11\alpha+30\alpha^2=0,$$

$$u=\frac{11\alpha\pm\alpha}{2},$$

$$x_3=y_4=36\alpha^2=-18\,(1+i\sqrt{3}),$$

$$x_4=y_3=25\alpha^2=-\frac{25}{2}\,(1+i\sqrt{3}).$$

c) Je-li

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=11\alpha^2, \quad \sqrt{xy}=30\alpha=30\alpha^4,$$

užijme rovnice

$$u^2-11\alpha^2+30\alpha^4=0,$$

z níž ustanovíme

$$u=\frac{11\alpha^2\pm\alpha^2}{2},$$

$$x_5=y_6=36\alpha=-18\,(1-i\sqrt{3}),$$

$$x_6=y_5=25\alpha=-\frac{25}{2}\,(1-i\sqrt{3}).$$

Úloha 4.

Řešiti jest rovnici

$$\frac{x-12}{x^2}=\frac{15-(x+1)^2}{x-2}.$$

Posl. techniky *Jaroslav Milbauer.*

Řešení. (Zaslal p. *Lad. Seifert,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.)
Anullované rovnici

$$x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$$

lze dáti podobu

$$x^2\,(x^2+2x+1)-14x\,(x+1)+24=0;$$

substitucí

$$x\,(x+1)=y$$

obdržíme rovnici

$$y^2-14y+24=0,$$

z níž ustanovíme

$$y = 7 \pm 5.$$

Jest tedy buď

$$x^2 + x - 12 = 0,$$
$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -4,$$

aneb

$$x^2 + x - 2 = 0,$$
$$x_3 = 1, \qquad x_4 = -2.$$

Úloha 5.

Které kořeny má soustava rovnic

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$
$$x + x^2y^2 + y = 7?$$

Posl. techniky *Jaroslav Milbauer.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Kadeřábek,* stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech.)

Odečteme-li první rovnici od druhé, nabudeme rovnice

$$x^2(y^2 - 1) - x(y - 1) - y(y - 1) = 0,$$

která rozpadá se v

$$y - 1 = 0, \qquad x^2 + x^2y - x - y = 0.$$

Hodnota

$$y_{1,2} = 1$$

vede k rovnici

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

z níž

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -3.$$

Rovnice

$$x^2 + x^2y - x - y = 0$$

čili

$$x(x - 1) + y(x^2 - 1) = 0$$

poskytuje řešení

$$x_{3,4} = 1,$$
$$y^2 + y - 6 = 0, \qquad y_3 = 2, \qquad y_4 = -3;$$

mimo to pak z rovnic

$$x^2 + xy + y^2 = 7,$$
$$x + xy + y = 0$$

vychází

$$(x+y)^2 + (x+y) - 7 = 0,$$

tedy

$$x + y = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} = -xy.$$

Z rovnice

$$x^2 - \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} x - \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} = 0$$

jde

$$x = \frac{1}{4} [-1 + \sqrt{29} \pm \sqrt{22 + 6\sqrt{29}}],$$

kdež $\sqrt{29}$ vzíti jest v obou členech současně buď kladnou neb zápornou.

Obdržíme tak další kořeny

$$x_5 = y_6, \; x_6 = y_5, \; x_7 = y_8, \; x_8 = y_7.$$

Úloha 6.

Budiž dokázána věta:

Je-li

$$b = \prod_{k=1}^{n} b_k,$$

jest

$$\frac{1}{lg_b a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{lg_{b_k} a}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Hanus*, stud. VIII. tř. gym. v Litomyšli.)

Budiž

$$\lg_{b_k} a = c_k,$$

tedy

$$\lg_{b_1} a = c_1, \quad \lg_{b_2} a = c_2, \ldots, \quad \lg_{b_n} a = c_n;$$

pak jest

$$b_1^{c_1} = b_2^{c_2} = b_3^{c_3} = \ldots = b_n^{c_n} = a$$

čili

$$b_1 = a^{\frac{1}{c_1}}, \quad b_2 = a^{\frac{1}{c_2}}, \quad \ldots, \quad b_n = a^{\frac{1}{c_n}}.$$

Součin těchto rovnic dává

$$b = b_1 b_2 b_3 \ldots b_n = a^{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}},$$

$$b^{\frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}}} = a.$$

Odtud vychází

$$\lg_b a = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n}},$$

tudíž

$$\frac{1}{\lg_b a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lg_{b_k} a}.$$

Úloha 7.

Ustanoviti obecný člen a součet řady, ve které

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Emil Schoenbaum,* stud. VIII. tř. g. v Benešově u Prahy.)

Jelikož

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2},$$

jest

$$a_{n-1} = a_{n-2} - a_{n-3};$$

součtem obou rovnic vychází

$$a_n = - a_{n-3}.$$

Jest tedy

$$a_4 = - a_1, \quad a_5 = - a_2, \quad a_6 = - a_3,$$

$$a_7 = - a_4 = a_1, \quad a_8 = - a_5 = a_2, \quad a_9 = - a_6 = a_3,$$

to jest: členy řady se periodicky opakují. Jest-li

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = a_2 - a_1 = c,$$

jest řada následující:

$$a,\ b,\ c,\quad -a,\ -b,\ -c,\quad a,\ b,\ c,\ -a,\ -b,\ -c, \text{ a t. d.}$$

Je-li

$$n = 3p + q, \qquad q = 1,\ 2,\ 3,$$

jest obecně

$$a_n = (-1)^p . a_q .$$

Z rovnic

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_{n-1} &= a_{n-2} - a_{n-3} \\ a_{n-2} &= a_{n-3} - a_{n-4} \\ &\ \vdots \\ a_3 &= a_2 - a_1 \\ a_2 &= a_2 \\ a_1 &= a_1 \end{aligned}$$

vychází součet

$$s_n = a_{n-1} + a_2 .$$

Jest tedy na př.

$$\begin{aligned} &a_{23} = (-1)^7 . a_2 = -b, \\ &s_{23} = a_{22} + a_2 = (-1)^7 . a_1 + a_2 = b - a; \\ &a_{24} = (-1)^7 . a_3 = a - b, \\ &s_{24} = a_{23} + a_2 = -b + b = 0. \end{aligned}$$

Poznámka redakce. Řada, jejíž členy vyhovují relaci

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

jest při

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2$$

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

Podíly

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \ldots$$

jsou přibližné hodnoty periodického řetězce

$$z = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots \text{ in inf.,}}}}$$

jehož mezná hodnota jest

$$z = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Úloha 8.

Zvětší-li se každý rozměr obdélníka o 3 cm, zvětší se jeho úhlopříčka o 4 cm a jeho obsah o 60 cm². *Které rozměry má obdélník?*

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Honzák*, stud. VI. tř. gym. ve Vys. Mýtě.)

Rozměry obdélníka buďtež x, y; potom jsou podmínky úlohy vyjádřeny rovnicemi

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2} = 4+\sqrt{x^2+y^2},$$
$$(x+3)(y+3) = xy+60.$$

Z druhé rovnice plyne

$$x+y=17,$$

čímž prvá rovnice nabývá tvaru

$$\sqrt{x^2+y^2+120} = 4+\sqrt{x^2+y^2}.$$

Položíme-li

$$x^2+y^2=z,$$

přijdeme k rovnici

$$\sqrt{z+120}=4+\sqrt{z},$$

z níž vypočítáme

$$z=169.$$

Z rovnic

$$x+y=17,$$
$$x^2+y^2=169$$

najdeme rozměry obdélníka

$$x=5, \quad y=12.$$

Úloha 9.

Do rovnostranného trojúhelníka vepsána jest kružnice, do zbylých částí vepsány kružnice, do částí při vrcholech trojúhelníka opět kružnice a t. d.

V kterém poměru jest součet všech těchto kruhů k ploše kruhu opsaného?

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Zdeněk Laštovka,* stud. VII. tř. r. v Č. Budějovicích.)

Vepsané kruhy jsou

$$K_1,\quad 3K_2,\quad 3K_3,\quad 3K_4,\ \ldots$$

a poloměry jejich

$$r_1 = \frac{v}{3},\quad r_2 = \frac{v}{9},\quad r_3 = \frac{v}{27},\ \ldots$$

Obsahy tvoří tudíž řadu nekonečnou geometrickou

$$\delta = K_1 + K_2 + K_3 + \cdots,$$

ve které

$$K_1 = \frac{\pi v^2}{9},$$

podíl

$$q = \frac{1}{9}$$

a součet

$$S = \frac{K_1}{1-q} = \frac{\pi v^2}{8}.$$

Součet veškerých kruhů

$$\Sigma = 3S - 2K_1 = \frac{3\pi v^2}{8} - \frac{2\pi v^2}{9} = \frac{11\pi v^2}{72}.$$

Plocha kruhu opsaného jest

$$K = \pi\left(\frac{2v}{3}\right)^2 = \frac{4\pi v^2}{9};$$

tudíž

$$\Sigma : K = \frac{11}{72} : \frac{4}{9}$$

čili

$$\Sigma : K = 11 : 32.$$

Úloha 10.

Dán jest obdélník abcd; strana ab spatřuje se ze středu m protější strany cd v úhlu α, strana ad ze středu n protější strany bc v úhlu β.

V kterém poměru jsou rozměry obdélníka, je-li

$$\alpha = 2\beta?$$

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Vlad. Polák,* stud. VII. tř. g. v Přerově.) Dle podmínky v úloze dané jest

$$\sphericalangle\, amb = \alpha, \quad \sphericalangle\, and = \beta.$$

Označíme-li

$$\overline{ab} = a, \quad \overline{bc} = b,$$

jest

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2a}.$$

Jelikož

$$\alpha = 2\beta,$$

jest

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\beta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}$$

čili

$$\frac{a}{2b} = \frac{4ab}{4a^2 - b^2}.$$

Odtud vyplývá

$$4a^2 - b^2 = 8b^2,$$
$$4a^2 = 9b^2,$$

tudíž

$$a : b = 3 : 2.$$

Úloha 11.

Obdélník rozdělen jest úhlopříčkou a osou souměrnosti kolmou k delší straně ve dva trojúhelníky a dva lichoběžníky.

a) Jest určiti podmínku, kdy lze lichoběžníkům kružnici vepsati.

b) Jest dokázati, že pak středy těchto kružnic se středy kružnic vepsaných v oba trojúhelníky tvoří vrcholy čtverce.

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Pleva,* stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.)

V obdélníku *abcd* veďme úhlopříčku *ac* a osu *mn* kolmou k $ab > bc$. Obě příčky protínají se v bodě *s*. Vzniknou trojúhelníky *ams, cns* a lichoběžníky *adns, bcsm*; do trojúhelníka *ams* vepišme kružnici středu o_1 a poloměru ϱ, dotýkající se osy *mn* v bodě f; lichoběžníku *bcsm* vepišme kružnici středu o_2, poloměru r a dotýkající se osy v bodě g.

Označme

$$\overline{ab} = a, \quad \overline{bc} = b, \quad \overline{ac} = c;$$

potom jest

$$r = \frac{a}{4} = \frac{ab}{a+b+c},$$

pročež

$$a + b + c = 4b,$$
$$a^2 + b^2 = (3b - a)^2,$$

z čehož podmínka

$$a : b = 4 : 3.$$

Poloměr ϱ stanoví pak vzorec

$$\varrho = \frac{ab}{2(a+b+c)} = \frac{r}{2} = \frac{a}{8}.$$

Že středy vepsaných kružnic jsou vrcholy čtverce, stvrdíme takto:

Předně jest $so_1 \perp so_2$, neboť přímky tyto půlí dva vedlejší úhly. Mimo to jest

$$\overline{so}_1^2 = \overline{o_1 f}^2 + \overline{sf}^2 = \varrho^2 + (\frac{b}{2} - \varrho)^2 = \frac{a^2}{64} + \frac{a^2}{16},$$

$$\overline{so}_1 = \frac{a}{8}\sqrt{5},$$

$$\overline{so}_2^2 = \overline{o_2 g}^2 + \overline{sg}^2 = r^2 + (\frac{b}{2} - r)^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{64},$$

$$\overline{so}_2 = \frac{a}{8}\sqrt{5}.$$

Jest tudíž také $\overline{so}_1 = \overline{so}_2$ a tedy o_1 o_2 vrcholy čtverce o středu s.

Úloha 12.

Vypočítati a sestrojiti jest úhel ostrý vyhovující rovnici
7 lg cos x + 3 lg sin x = 13 lg tg x.

Řed. A. Strnad.

Řešení. (Zaslal p. *Jiří Šír,* stud. VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě.)

Z dané rovnice jde

$$7 \lg \cos x + 3 \lg \sin x = 13 \lg \sin x - 13 \lg \cos x,$$
$$20 \lg \cos x = 10 \lg \sin x,$$

z čehož

$$\cos^2 x = \sin x$$

čili

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Odtud ustanovíme pro ostrý úhel

$$\sin x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0{\cdot}61803\ \ldots$$
$$x = 38^0 10' 22''.$$

Je-li $\overline{ab} = 2r = 1$ průměr kružnice a rozdělíme-li jej dle zlatého řezu, bude větší díl

$$\overline{bc} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Sestrojíme-li tedy v kruhu tětivu

$$\overline{bd} = \overline{bc},$$

bude

$$\sphericalangle\, bad = x.$$

Poznámka redakce. Z rovnice

$$\cos^2 x = \sin x$$

jde na jevo, že při tomto úhlu jest

$$\cos x = \operatorname{tg} x.$$

Úhlu toho užil již Simon a Quercu (1588) k přibližné rektifikaci kružnice; jestiť

$$\operatorname{tg} x = 0{\cdot}786\ \ldots$$
$$\frac{\pi}{4} = 0{\cdot}785\ \ldots,$$

tedy přibližně

$$\operatorname{tg} x \doteq \frac{\pi}{4}.$$

Úloha 13.

Sestrojiti jest pětiúhelník abcde, ve kterém každá z úhlopříček jest rovnoběžná s jednou stranou. Vrcholy a, b, c jsou dány.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Dvořák*, stud. VIII. tř. g. v Brně.)

V pětiúhelníku *abcde* protínejtež se úhlopříčky

ac, be v bodě m,
bd, ce v bodě n,
ad, ce v bodě p.

Jest-li každá úhlopříčka rovnoběžná s příslušnou stranou, jest $\triangle\, ame \sim \triangle\, bde$ a proto

$$am : me = de : be$$

čili

$$am : mc = cd : be.$$

Jest však také $\triangle\, ben \sim \triangle\, cdn$, tudíž

$$cd : be = cn : en;$$

poněvadž pak

$$\triangle\, bcn \cong \triangle\, aep,$$
$$cn = ep, \quad cp = en,$$

jest také

$$cd : be = ep : cp = de : ac$$

čili

$$cd : be = mc : ac.$$

Z úměry této a ze druhé úměry při počátku položené plyne

$$am : mc = mc : ac,$$

t. j. průsečík m dělí úhlopříčku ac dle zlatého řezu. Dle ob-doby soudíme, že každé dvě úhlopříčky předpokládaného pětiúhelníka dělí se navzájem dle zlatého řezu.

Odtud pak vyplývá toto sestrojení:

Rozdělíme-li ac v bodě m dle zlatého řezu ($am < mc$) a prodloužíme bm k průsečíku s rovnoběžkou $cp \parallel ab$, obdržíme vrchol e; podobně vrchol d.

Poznámka redakce. 1. Že jest vůbec možným pětiúhelník, ve kterém každá strana jest rovnoběžná s jednou úhlopříčkou, vysvítá z toho, že tuto vlastnost má pravidelný pětiúhelník a tudíž také jeho rovnoběžný (šikmý neb pravoúhlý) průmět.

Naopak lze dokázati, že pětiúhelník, jehož úhlopříčky jsou rovnoběžny ku stranám, možno vždy pokládati za průmět pětiúhelníka pravidelného. Jsouť oba tyto pětiúhelníky útvary afinními na základě poměru, v kterém úhlopříčky vzájemně se dělí.

2. Budiž ještě připomenuto, že lze též sestrojiti hvězdovitý pětiúhelník $abcde$ dle udaných podmínek. Rozdělme ab bodem k dle zlatého řezu ($ak < kb$), veďme ck a prodlužme k průsečíku s rovnoběžkou jdoucí bodem a ku bc; tím obdržíme vrchol d a obdobně též vrchol e.

Jest tedy daná úloha dvojznačnou.

Úloha 14.

Dána jest plocha trojúhelníka $\Delta = 6\ cm^2$, součet výšek $2\sigma = 9{\cdot}4\ cm$ a průměr kružnice opsané $2r = 5\ cm$. Určiti obvod a strany.

P. *Marian Haas*, kněz na Strahově.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Ogoun*, bohoslovec v Olomouci.)

Vyjádříme-li dané veličiny stranami a, b, c, obdržíme:

$$(1)\qquad \Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = s[s^3 - (a+b+c)s^2 + (ab+ac+bc)s - abc],$$

$$(2)\qquad 2\sigma = \frac{2\Delta}{a} + \frac{2\Delta}{b} + \frac{2\Delta}{c} = \frac{2\Delta}{abc}(ab+ac+bc),$$

$$(3)\qquad 4\Delta r = abc,$$

$$(4)\qquad a+b+c = 2s.$$

Dosadíme-li hodnoty

$$abc = 4\Delta r$$
$$ab + ac + bc = 4r\sigma$$

do (1), dostaneme

$$\Delta^2 = s\,[s^3 - 2s^3 + 4r\sigma s - 4\Delta r].$$

Přeměňme tuto rovnici na tvar

$$s^4 - 4r\sigma s^2 + 4\Delta rs + \Delta^2 = 0$$

a dosaďme hodnoty dané, tím nabude podoby

$$s^4 - 47s^2 + 60s + 36 = 0.$$

Úloze vyhovuje jediný kořen $s = 6$, neboť druhý positivní kořen jsa menší než 4 nevyhovuje úloze, která žádá, aby $2s > 2\sigma$.

Známe-li obvod, určíme snadno strany z rovnic

$$a + b + c = 12,$$
$$ab + ac + bc = 47,$$
$$abc = 60.$$

Kořeny rovnice

$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$$

určují strany

$$a = 3\ cm,\ b = 4\ cm,\ c = 5\ cm.$$

Poznámka. Z rovnice

$$s^4 - 4\sigma rs^2 + 4\Delta rs + \Delta^2 = 0$$

plynou některé důsledky, týkající se velikosti veličin s, Δ, σ, r.

Jest totiž, má-li s býti positivní, kterýkoli kladný člen na levé straně rovnice menší než záporný člen $4\sigma rs^2$, tudíž

$$s^2 < 4\sigma r,\quad \Delta < \sigma s,\quad \Delta^2 < 4\sigma rs^2.$$

Z první a třetí z těchto nerovnic plyne $\Delta < 4\sigma r$; jelikož pak $s > \sigma$, jest dle nerovnice druhé $\sigma^2 < \Delta < s^2$.

Úloha 15.

Obvod trojúhelníka $2s = 24$, poloměr kružnice opsané $r = 2{\cdot}1\sqrt{5}$, vepsané $\varrho = \sqrt{5}$. Které jsou strany?

P. *Marian Haas*, kněz na Strahově.

Řešení. (Zaslal p. *Leopold Šrámek*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Dané veličiny vyjádříme stranami a, b, c a plochou trojúhelníka Δ; tím nabudeme známých vztahů

$$2s = a + b + c$$
$$4\varDelta r = abc$$
$$\varDelta = s\varrho$$
$$\varDelta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

čili rozvinuto

$$\varDelta^2 = s[s^3 - s^2(a+b+c) + s(ab+ac+bc) - abc].$$

Tato rovnice se promění dosazením hořejších hodnot na tvar

$$s\varrho^2 = -s^3 + s(ab+ac+bc) - 4\varDelta r,$$

tak že máme

$$ab + ac + bc = s^2 + \varrho^2 + 4r\varrho.$$

Ježto

$$a + b + c = 2s$$
$$abc = 4r\varrho s,$$

značí kořeny rovnice

$$x^3 - 2sx^2 + (s^2 + \varrho^2 + 4r\varrho)x - 4r\varrho s = 0$$

čili

$$x^3 - 24x^2 + 191x - 504 = 0$$

hledané strany

$$a = 7, \quad b = 8, \quad c = 9.$$

Úloha 16.

Z kruhu o poloměru $r = 85$ cm vyřízli jsme plášť a ze dvou kruhů o poloměru $\varrho = 26$ cm základny rovnoběžnostěnu pravoúhlého, jehož povrch $P = 15792$ cm^2.

Které jsou rozměry rovnoběžnostěnu?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Lochmann,* stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi.)

Buďtež x, y, z hrany rovnoběžnostěnu.

Potom jest

$$(2x + 2y)^2 + z^2 = (2r)^2$$
$$x^2 + y^2 = (2\varrho)^2$$
$$2xy + 2yz + 2xz = P.$$

Položíme-li

$$x + y = u,$$

přijdeme k rovnicím

$$4u^2 + z^2 = 4r^2$$
$$u^2 + 2uz = 4\varrho^2 + P,$$

z nichž vyplývá vyloučením z

$$17u^4 - 2(P + 4\varrho^2 + 8r^2)u^2 + (P + 4\varrho^2)^2 = 0.$$

Dosadíme-li dané hodnoty číselné, dojdeme rovnice

$$u^4 - 8976u^2 + 20123648 = 0,$$

z níž

$$u^2 = 4488 \pm 136.$$

a) Je-li

$$u^2 = 4624,$$

jest

$$u = x + y = 68$$
$$x^2 + y^2 = 4\varrho^2 = 2704,$$

tedy

$$x = 48,\ y = 20$$

a k tomu

$$z = \frac{P - 2xy}{2u} = 102.$$

b) Je-li

$$u^2 = 4352,$$

jest

$$u = x + y = 16\sqrt{17}$$
$$x^2 + y^2 = 4\varrho^2 = 2704,$$

z čehož

$$x = 8\sqrt{17} + 2\sqrt{66}$$
$$y = 8\sqrt{17} - 2\sqrt{66}$$
$$z = 26\sqrt{17}.$$

Úloha 17.

Kolmému kruhovému kuželi o straně $s = 169$ cm vepsána polokoule, která se pláště dotýká. Jak velký jest povrch a obsah kužele, je-li poloměr polokoule $\varrho = 60$ cm?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Grössl*, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech.)

Je-li r poloměr základny, v výška kužele, jest

$$r^2 + v^2 = s^2$$
$$rv = \varrho s,$$

tudíž

$$v + r = \sqrt{s(s + 2\varrho)} = 17 . 13$$
$$v - r = \sqrt{s(s - 2\varrho)} = 7 . 13,$$

z čehož

$$v = 156, \; r = 65.$$

Jest tedy povrch kužele

$$P = \pi r (r + s) = 15210\pi$$

a obsah jeho

$$K = \frac{1}{3} \pi r^2 v = 219700\pi.$$

Úloha 18.

a) Dán jest čtyrboký jehlan, jehož podstavou jest různoběžník abcd, vrchol v, a kdekoli v prostoru bod m. Bodem m proložiti jest rovinu σ, která by jehlan protala v rovnoběžníku.

b) Dán jest různoběžník abcd v rovině ϱ jakožto podstava jehlanu. Které jest geometrické místo vrcholu jehlanu, jejž rovinami protínati lze ve čtvercích?

Řed. *Vinc. Jarolímek.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Kálal,* stud. VII. tř. r. v Písku.)

a) Rozbor. Aby rovina σ protala protější stěny jehlanu abv, cdv v úsečkách rovnoběžných, musí býti rovnoběžna se společnou průsečnicí P rovin (abv), (cdv); aby pak protínala i stěny bcv, adv v rovnoběžkách, musí býti rovnoběžna s průsečnicí R rovin (bcv), (adv). Rovina σ bude tudíž rovnoběžna s rovinou (PR).

Sestrojení. Prodlužme podstavné hrany $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ k společnému průsečíku x, hrany $\overline{bc}$, $\overline{ad}$ k průsečíku y, spojme $\overline{xv} \equiv P$, $\overline{yv} \equiv R$, proložme přímkami (PR) rovinu τ a bodem m rovinu $\sigma \parallel \tau$.

Omezení. Úloha jest možná, seče-li rovina σ veškeré pobočné hrany jehlanu mezi podstavou a vrcholem; seče-li podstavu, má pronik tvar jiný. Úloha je možná bez výjimky, myslíme-li si jehlanovou plochu neomezenou, za podstavu i vrchol v do nekonečna prodlouženou.

b) *Rozbor*. Buď jako nahoře průsečík $(\overline{ab}, \overline{cd}) \equiv x$, $(\overline{bc}, \overline{ad}) \equiv y$, spojnice $\overline{xv} \equiv \mathrm{P}$, $\overline{yv} \equiv \mathrm{R}$, rovina σ $\tau \equiv (\mathrm{PR})$ protínej jehlan v rovnoběžníku $\alpha\beta\gamma\delta$. Aby bylo $\alpha\beta \perp \beta\gamma$, musí býti $\mathrm{P} \perp \mathrm{R}$ čili $\sphericalangle xvy = 90^0$, jelikož $\overline{\alpha\beta} \parallel \mathrm{P}$, $\overline{\beta\gamma} \parallel \mathrm{R}$. Geometrické místo vrcholů v pravých úhlů v prostoru, jichž ramena procházejí pevnými body x, y, jest plocha kulová K, daná průměrem $\overline{xy}$. To jest podmínka, aby průsek byl pravoúhelníkem. Aby však byl také rovnostranný, musí i úhlopříčny $\overline{\alpha\gamma} \perp \overline{\beta\delta}$. Protínají-li prodloužené úhlopříčky podstavy $\overline{ac}$, $\overline{bd}$ spojnici $\overline{xy} \equiv \mathrm{S}$ v bodech ξ, η, jest $\overline{\alpha\gamma} \parallel \overline{\xi v}$, $\overline{\beta\delta} \parallel \overline{\eta v}$, $\overline{\alpha\gamma} \perp \overline{\beta\delta}$, tedy i $\overline{\xi v} \perp \overline{\eta v}$ čili $\sphericalangle \xi v \eta = 90^0$. Geom. místo vrcholů v pravých úhlů, jichž ramena probíhají pevnými body ξ, η, jest druhá plocha kulová L, daná průměrem $\overline{\xi\eta}$. Společný pronik obou ploch kulových K, L, *kružnice* Σ, jejíž rovina $\perp$ S a střed leží na S, jest žádaným místem vrcholu jehlanu.

Sestrojení. Podlužme podstavné hrany $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ k průsečíku x, hrany $\overline{bc}$, $\overline{ad}$ k průsečíku y, spojme $\overline{xy} \equiv \mathrm{S}$, prodlužme úhlopříčny $\overline{ac}$, $\overline{bd}$ do ξ, η na S, v rovině $(abcd) \equiv \varrho$ opišme kružnici K_1 nad průměrem $\overline{xy}$ a kružnici L_1 nad průměrem $\overline{\xi\eta}$, a nad společnou chordálou kružnic K_1, L_1 jakožto průměrem opišme kružnici Σ v rovině $\perp \varrho$. Vytkneme-li na Σ kdekoli vrchol jehlanu v, protne každá rovina $\parallel (xvy) \equiv \tau$ jehlan $v(abcd)$ ve čtverci, ač seče-li všecky jeho pobočné hrany mezi podstavou a vrcholem.

Úloha 19.

Sestrojiti jest vrchol plochy kuželové v, dána-li její řídící křivka druhého stupně K a tři body na ploše m, n, p mimo rovinu křivky K.

Řed. *Vinc. Jarolímek.*

Řešení. (Zaslal p. *Ladislav Seifert,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.)

Rozbor. Povrchová přímka plochy, jež prochází bodem m, seče křivku K a jest tedy také povrchovou přímkou plochy kuželové, jejíž řídící křivka jest K a vrchol m. Vrchol v bude tudíž na ploše kuželové (mK). Z téhož důvodu bude v i na ploše kuželové, jejíž vrchol jest n a řídící křivka K, jakož i na ploše kuželové, jejíž vrchol jest p a řídící křivka K.

Sestrojení. Žádaný vrchol v je společným průsečíkem kuželových ploch (mK), (nK), (pK). Každé dvě z těchto tří ploch druhého stupně pronikají se v křivce K a tudíž v další kuželosečce Σ. Sestrojíme tedy proniky $\Sigma_{\overline{mn}}$, $\Sigma_{\overline{mp}}$, $\Sigma_{\overline{np}}$ a vyhledáme společný jejich průsečík v. Výsledky jsou dva, protože dvě rovinné křivky na téže ploše kuželové 2. stupně ležící mají toliko dva body společné.

Dodatek. Novější geometrie prostorová řeší úlohu takto. Rovina $(mnp) \equiv \sigma$ seče plochu kuželovou v křivce druhého stupně L a rovinu ϱ křivky K v přímce S. Křivka K seče přímku S ve dvou bodech x, y (ať realných či imaginarných), jimiž také křivka L procházeti musí. Sestrojme tedy v bodě m tečnu T ke křivce L určené pěti body m, n, p, x, y (což i bez křivky vykonati lze), průsečíkem q tečny T na přímce S veďme tečnu T_1 ke křivce K a dotyčný bod m_1 spojme s bodem m. Spojnice $\overline{m_1 m}$ jest povrchovou přímkou žádané plochy kuželové, podél níž se plochy dotýká tečná rovina (TqT_1). Rovněž tak sestrojíme povrchovou přímku $\overline{n_1 n}$ procházející bodem n a průsečík přímek $\overline{m_1 m}$, $\overline{n_1 n}$ dá vrchol plochy v. Že však z bodu q sestrojiti lze ke křivce K tečny *dvě,* dostaneme dvě plochy kuželové úloze hovící.

Úloha 20.

V prostoru buďtež dány tři paprsky A, B, C týmž bodem v procházející a čtvrtý D, který prvé tři neseče. Sestrojiti jest plochu kulovou, která daných čtyř paprsků se dotýká.

Řed. *Vinc. Jarolímek.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Fiala,* stud VII. tř. r. v Písku.)

Rozbor. Paprsky A, B, C určena jest rotační plocha kuželová, do níž plocha kulová K bude vepsána. Rovina ϱ, položená vrcholem v a paprskem D, seče plochu kuželovou ve dvou přímkách E, F a plochu kulovou v kružnici L, která přímek D, E, F bude se dotýkati. Střed žádané plochy kulové bude tedy jednak na ose O plochy kuželové, jednak na ose U kružnice L.

Sestrojení. Osu O kuželové plochy (ABC) sestrojíme buď spojnicí vrcholu v se středem kružnice $(abc) \equiv$ M, jejíž tři body obdržíme, učiníce na paprscích A, B, C úsečky $\overline{va} = \overline{vb} = \overline{vc}$; anebo průsečnicí rovin, jež kolmo rozpolují úhly AvB, AvC. Rovina $(v\mathrm{D}) \equiv \varrho$ seče plochu kuželovou v přímkách E, F, jež dostaneme, vyhledáme-li průsečíky roviny ϱ s kružnicí M a spojíme-li je s vrcholem v. Do trojúhelníka, jenž omezen jest přímkami D, E, F, vepišme kružnici L, a v středu jejím postavme osu $\mathrm{U} \perp \varrho$; průsečík os O, U dá střed s, úsečka $\overline{sm} \perp$ A poloměr žádané plochy kulové. Výsledky jsou dva.

Úloha 21.

Trať železniční má od místa A do B stoupání $\operatorname{tg}\alpha = 0{\cdot}0262$, od B do C stoupání $\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{\cdot}0349$. Jak dlouhé jsou tratě AB, BC, má-li C od A vodorovnou vzdálenost 10 km a je-li 280 m nad A?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *František Dvořák*, stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Pokládejme A za počátek pravoúhlé soustavy souřadnic. Potom má přímka $\overline{\mathrm{AB}}$ rovnici

$$y = x \operatorname{tg}\alpha$$

a rovnice přímky $\overline{\mathrm{BC}}$ jest

$$y - 280 = (x - 10000) \operatorname{tg}\alpha_1;$$

10000, 280 jsou souřadnice bodu C. Souřadnice x, y bodu B oběma přímkám společného vypočítáme z obou rovnic; obdržíme tak

$$x \operatorname{tg}\alpha - 280 = x \operatorname{tg}\alpha_1 - 349,$$

$$x = \frac{690000}{87} \doteq 7931, \quad y = \frac{69\,.\,262}{87} \doteq 207.$$

Potom bude

$$\overline{AB} = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{7931}{0{\cdot}99966} = 7934.$$

$$\overline{BC} = \frac{10000 - x}{\cos\alpha_1} = \frac{2069}{0{\cdot}99939} = 2070.$$

Úloha 22.

Dány jsou body

$$a\,(1,\ 2),\quad b\,(2,\ 4),\quad c\,(5,\ 3).$$

a) Ustanoviti jest body d, e tak, aby v pětiúhelníku abcde každá ze čtyř stran $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ byla rovnoběžná s jednou úhlopříčkou;

b) dokázati, že též pátá strana $\overline{ea}$ jest s příslušnou úhlopříčnou rovnoběžná.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Zahradníček*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.)

a) Souřadnice hledaných vrcholů buďtež

$$d\,(x_1,\ y_1),\ e\,(x_2,\ y_2).$$

Úloha vyžaduje, aby bylo

$$\overline{ab} \parallel \overline{ce},\ \overline{bc} \parallel \overline{ad},\ \overline{cd} \parallel \overline{be},\ \overline{de} \parallel \overline{ac}.$$

Podmínky tyto vyjadřují se analyticky rovnicemi

$$\frac{x_2 - 5}{y_2 - 3} = \frac{1}{2} \text{ čili } 2x_2 - y_2 = 7,$$

$$\frac{x_1 - 1}{y_1 - 2} = -3 \text{ čili } x_1 + 3y_1 = 7,$$

$$\frac{x_1 - 5}{y_1 - 3} = \frac{x_2 - 2}{y_2 - 4},\ \frac{x_1 - y_2}{y_1 - y_2} = 4.$$

Vyjádříme-li z prvních dvou rovnic

$$y_1 = \frac{7 - x_1}{3},\ y_2 = 2x_2 - 7$$

a dosadíme do druhých dvou, obdržíme

$$5x_1 + 4x_2 - x_1x_2 = 23$$
$$x_1 + 3x_2 = 16.$$

Z rovnic těchto vypočítáme

$$x_1 = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}, \quad x'_1 = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{9 - \sqrt{5}}{2}, \quad x'_2 = \frac{9 + \sqrt{5}}{2},$$

k čemuž dle rovnic dřívějších příslušejí hodnoty

$$y_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad y'_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$y_2 = 2 - \sqrt{5}, \quad y'_2 = 2 + \sqrt{5}.$$

Tím našli jsme body

$$d\,(x_1\, y_1) \quad d'\,(x'_1\, y'_1)$$
$$e\,(x_2\, y_2) \quad e'\,(x'_2\, y'_2),$$

kteréž jsou vrcholy dvou pětiúhelníků

abcde, abcd'e'

vyhovujících úloze. Snadně lze se přesvědčiti prostým náčrtem, že pětiúhelník první jest tvaru obyčejného, druhý pak jest hvězdovitý.

b) Že jest $\overline{ae} \parallel \overline{bd}, \ \overline{ae'} \parallel \overline{bd'}$,

stvrzují rovnice

$$\frac{x_2 - 1}{y_2 - 2} = \frac{x_1 - 2}{y_1 - 4} = \frac{5 - 7\sqrt{5}}{10},$$

$$\frac{x'_2 - 1}{y'_2 - 2} = \frac{x'_1 - 2}{y'_1 - 4} = \frac{5 + 7\sqrt{5}}{10},$$

o jichž správnosti se přesvědčíme dosadivše hodnoty dříve vypočítané.

Poznámka redakce. Jak z úlohy 13. na str. 322. a 323. vysvítá, dělí se úhlopříčky pětiúhelníka *abcde* navzájem dle zlatého řezu a souhlasí také poměr strany k příslušné úhlopříčce s tímto rozdělením.

Tak na př. v naší úloze jest

$$\overline{de} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \sqrt{17}$$

$$\overline{ac} = \sqrt{(5-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{17},$$

tudíž

$$\overline{de} : \overline{ac} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Rovněž jest

$$\overline{cd} = \sqrt{(x_1 - 5)^2 + (y_1 - 3)^2} = \sqrt{21 - 6\sqrt{5}}$$

$$\overline{be} = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (y_2 - 4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{66 + 6\sqrt{5}},$$

z čehož

$$\overline{cd} : \overline{be} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Úloha 23.

V pravoúhlé soustavě souřadnic dány jsou přímky

$$M \equiv 4x + 3y - 15 = 0,$$
$$N \equiv 7x - 24y + 3 = 0;$$

jest ustanoviti body, které jsou co nejblíže průsečíku daných přímek a mají od nich součet neb rozdíl vzdáleností $k = 117$.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Sukdol,* stud. VIII. tř. g. v Čes. Budějovicích.)

Geometrické místo bodů, které mají od daných přímek daný součet neb rozdíl vzdáleností, vyjádřeno jest rovnicí

$$\pm \frac{4x + 3y - 15}{5} \pm \frac{7x - 24y + 3}{25} = 117.$$

Kombinujíce znaménka $\pm$ shledáme, že toto místo rozpadá se ve čtvero přímek

$$P_1 \equiv 3x - y - 21 = 0$$
$$P_2 \equiv 3x - y + 5 = 0$$
$$P_3 \equiv x + 3y - 15 = 0$$
$$P_4 \equiv x + 3y + 3 = 0.$$

Průsečík přímek M, N jest bod $s(3, 1)$ a body hledané jsou paty kolmic s tohoto průsečíku k přímkám P_1, P_2, P_3, P_4 spuštěných. Rovnice těchto kolmic, kteréž jsou zároveň osami obdélníka přímkami P omezeného, jsou

$$O_1 \equiv x + 3y - 6 = 0$$
$$O_2 \equiv 3x - y - 8 = 0.$$

Průsečíky jich s přímkami P jsou body hledané:

$$p_1 \equiv (O_1P_1) \equiv (\ 6{\cdot}9,\ -0{\cdot}3)$$
$$p_2 \equiv (O_1P_2) \equiv (-0{\cdot}9,\ \ 2{\cdot}3)$$
$$p_3 \equiv (O_2P_3) \equiv (\ 3{\cdot}9,\ \ 3{\cdot}7)$$
$$p_4 \equiv (O_2P_4) \equiv (\ 2{\cdot}1,\ -1{\cdot}7).$$

Úloha 24.

Která jest podmínka, při které přímka

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

jest normálou ellipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1?$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Drastich*, stud. VII. tř. g. v Opavě.)

Normála ellipsy v bodě $(x_1\, y_1)$ má rovnici

$$a^2y_1x - b^2x_1y = e^2x_1y_1.$$

Aby tato normála byla totožna s přímkou

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

k tomu jest třeba, aby bylo

$$m = \frac{e^2x_1}{a^2},\ n = -\frac{e^2y_1}{b^2}.$$

Vyloučíme-li z těchto dvou rovnic a z rovnice

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$$

souřadnice bodu (x_1y_1), obdržíme žádanou podmínku, nutnou i dostatečnou, ve tvaru

$$a^2m^2 + b^2n^2 = e^4.$$

Poznámka redakce. Pokládáme-li úseky m, n, způsobené normálou ellipsy na osách, za souřadnice bodu, jest geom. místo těchto bodů ellipsa určená rovnicí

$$a^2x^2 + b^2y^2 = e^4.$$

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Albini Fedor, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 5., 8. až 12., 14. až 17., 21., 22., 24.
Bartošek Jul., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 12.
Barvík Jindřich, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 12., 14. až 17., 21., 23., 24.
Bezloja Alois, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8. až 17., 21., 23., 24.
Binko Em., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 9., 10., 12., 15., 17., 21., 24.
Brzobohatý Břetislav, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 6., 8. až 11., 13. až 17., 21. až 24.
Břeský František, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1., 3., 4., 8., 9., 10., 12., 14. až 17.
Cenek Miloš, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 9., 12., 17., 21.
Czwetler Frant., stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1., 3., 4., 8., 9., 10., 12., 17., 21.
Čihák Hugo, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 3., 8., 10., 13.
Čupr Karel, stud. V. tř. ve Vys. Mýtě, 1. až 17., 21. až 24.
Dědouch Lud., stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 1. až 5., 8. až 17., 21., 22., 24.
Dolák Alois, bohoslovec v Olomouci, úl. 1., 4.
Drastich Frant., stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 12., 14. až 17., 21. až 24.
Duchek Frt., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 5., 8., 10., 11., 21.
Dusl K., stud. VI. tř. v Rakovníku, úl. 1. až 5., 7. až 15., 17., 21.
Dvořák Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 17., 21., 23., 24.
Dvořák Jan, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1. až 4., 8., 12., 17., 21.
Fiala C., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 5., 8. až 12., 15., 21.
Fiala Josef, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1. až 5., 7. až 12., 15., 16., 17., 20. až 23.

Filípek Miloš, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 4., 8., 9., 12., 15., 17., 21.
Fink Hugo, stud. VII. tř. g. v Jindřichově Hradci, úl. 1., 3., 8., 12.
Foltynovský Josef, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 9., 10., 12., 14., 15., 17., 21.
Franěk Frt., stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 10.
Grössl Václav, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 6., 8. až 12., 14. až 17., 20. až 24.
Habrich Alois, stud. VI. tř. r. v Prostějově, úl. 1. až 5., 7. až 12., 14., 15., 21.
Hac Rudolf, stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 5., 8., 9., 12., 17.
Hanosek Bohumír, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 8. až 12., 15., 17., 21.
Hanus Josef, stud. VIII. g. v Litomyšli, úl. 1. až 24.
Hanuš Jos., stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 4., 8.
Hanuš Rudolf, posluchač vyšší lesnické školy v Písku, 1., 3., 10.
Hegner Václav, stud. V. tř. r. v Plzni, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 15.
Heisler Robert, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 8., 10.
Henčlík Ant., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 20.
Herlinger A., stud. VII. tř. g. v Táboře, úl. 1. až 6., 8., 9., 10., 12., 14., 15.
Hnilička Miloslav, stud. VII. tř. r. v Praze-III., úl. 1., 3., 4., 8., 9., 10., 12.
Honzák Josef, stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1. až 24.
Horák Alois, stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 8., 10., 11.
Hrubý T., stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1., 3., 4., 8. až 12., 17., 21.
Hruška Miloslav, stud. VI. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 4., 8., 10., 11.
Hujer Zdeněk, stud. VII. tř. g. na Smíchově, úl. 1. až 5., 8., 12., 15., 17., 21.
Hulla Karel, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 24.
Chadim Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1., 3., 4, 5., 8. až 12., 14., 15., 17.
Jahn Rudolf, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 8. až 12., 15., 17., 21.
Janáček Jan, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 17., 21., 23., 24.

Jechoutek F., stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1., 3., 4., 5., 8. až 13., 15., 16., 17., 19. až 24.
Kadeřábek František, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1., 3., 4., 5., 7. až 10., 12., 15., 17., 21.
Kálal Josef, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1. až 24.
Keclík Tomáš, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1. až 5., 8. až 17., 20. až 24.
Klíma Rudolf, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 1. až 5., 7. až 12., 14. až 17., 20., 21.
Kocian Dominik, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 8., 11., 12., 17., 21.
Kopeček O., stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 1., 3., 4., 5., 7. až 17., 21., 22., 23.
Korber Augustin, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 5., 8., 11., 12., 16., 17., 21., 24.
Koreček Frant., stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 5., 8. až 13., 17., 18., 20., 21.
Koza Frant., stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1., 8., 9., 17.
Kratochvíl Frant., stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 5., 8. až 17., 21., 22., 24.
Kraus Jos., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 8., 9., 10., 12., 17.
Krištof Antonín, stud. VIII. tř. g. v Domažlicích, úl. 1., 7. až 10., 12., 17., 21., 24.
Krýže Bohumír, stud. VIII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1. 3., 4., 5., 7. až 10., 12., 15., 16., 17., 21., 22., 24.
Kubis Jan, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 3., 4., 8.
Kulhánek Silvestr, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 17., 21. až 24.
Láska Arnošt, stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1., 4., 8.
Laštovka Zdeněk, stud. VII. r. v Českých Budějovicích, úl. 1., 3., 4., 5., 8. až 12., 16., 17., 19., 21.
Lochmann Ant., stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 1. až 5., 7. až 13., 16., 17., 21. až 24.
Louda Jos., stud. VIII. tř. g. v Jičíně, úl. 1., 3., 4., 8., 9., 16., 17.
Macháč František, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 4., 8., 17.

z Maillardů Moric, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 3., 6., 8., 10., 13., 21.
Malý Jan, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 5., 8. až 17., 21.
Mathesius Vilém, stud. VIII. tř. g. v Kolíně, úl. 3., 4., 8., 9., 12., 17., 21.
Matoušek Maxmilian, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 6., 8. až 12., 14. až 17., 21., 22., 23.
Merz Antonín, stud. VI. tř. v Lounech, úl. 1., 2., 4., 8.
Mikyna Josef, stud. VII. tř. g. ve Dvoře Králové n. L., úl. 1. až 6., 8. až 12., 17., 21.
Mráz Josef, stud. VIII. tř. g. na Smíchově, úl. 1. až 6., 8. až 17., 21. až 24.
Navrátil Ant., stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 5., 7. až 12., 14. až 17., 20. až 24.
Nigrin Otakar, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 5., 8. až 14., 21.
Novák Josef, stud. VI. tř. g. v Jičíně, úl. 8., 10., 16., 17., 21.
Ogoun Frant., bohoslovec v Olomouci, úl. 1. až 5., 7. až 12., 14. až 17., 21. až 24.
Pauzar Filip, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1., 3., 4., 8. až 12., 17., 21., 22.
Perutz Hugo, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 12., 21.
Petz Leopold, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 4., 8., 12., 15., 17., 21.
Pleva Eduard, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1., 3., 4., 5., 8. až 12., 16., 21.
Polák Vlad., stud. VII. tř. g. v Přerově, úl. 1. až 24.
Ponec Karel, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1., 3.
Pospíšil Bohumil, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 3. až 6., 8. až 13., 17., 21.
Procházka Frant., stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 5., 8. až 11., 17., 21.
Procházka Václav, stud. VI. tř. r. v Praze-I., úl. 1., 5., 8., 12.
Ptáček Adolf, stud. V. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 1., 8., 11.
Racek Aurelius, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 3., 8., 10., 13.

Rozsíval Petr, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 4., 8. až 11., 12., 13., 15., 17., 21.
Růžek Ant., stud, VIII. tř. g. v Táboře, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 11., 15., 21., 24.
Rybář Emil, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 1.
Rychlík Karel, stud. V. tř. akad. g. v Praze, úl. 1. až 24.
Sedláček Frant., stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1., 3., 4., 5., 7. až 12., 16., 17., 20., 21.
Schoenbaum Emil, stud. VIII. tř. g. v Benešově, úl. 1. až 24.
Seifert Lad., stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 24.
Seitz Alf., stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 5., 8. až 12., 16., 21., 22.
Slovák Josef, stud. VII. tř. g. v Přerově, úl. 1., 3., 4., 8.
Skalecký Jan, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 1., 3., 4., 6., 8. až 13., 17., 18., 20., 21., 24.
Sklenička Frant., stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1., 3., 8.
Sládek Alois, stud. V. tř. r. v Uherském Brodě, úl. 1., 4., 8.
Soldát Jan, stud. V. tř. r. v Písku, úl. 1., 4., 8., 21.
Sperling Frant., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 8., 12., 17.
Sudek V., stud. VIII. tř. g. v Táboře, úl. 1., 3., 4., 5., 8. až 11., 15., 21.
Sukdol Václav, stud. VIII. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 1. až 6., 8. až 12., 14. až 17., 21. až 24.
Surka Leopold, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 1., 8., 9.
Svěda Otakar, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 12., 21.
Sýkora Jan, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1., 3., 4., 5., 7. až 12., 16., 17., 20. až 23.
Szalaÿ Josef, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 5., 7., 8., 9., 11., 12.
Šilhán Ludvík, stud. VI. tř. g. v Třebíči, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 9., 17.
Šír Jiří, stud. VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 1. až 24.
Šňupárek Richard, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 4., 5., 8. až 12., 17., 21.
Špíšek J., stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1., 4., 8.
Šrámek Leopold, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8. až 17., 20., 21., 22., 24.

Táborský Frant., stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 6., 8. až 12., 14. až 17., 21., 22., 23.
Tereba Viktor, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 24.
Uchytil Alois, stud. VII. tř. g. v Jindřich. Hradci, úl. 1., 3., 8., 12.
Valach Frant., stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 24.
Velísek Ignát, bohoslovec v Olomouci, úl. 1., 3. až 6., 8. až 12., 14. až 17., 21., 24.
Vermousek Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 5., 8. až 13., 17.
Veselá Emilie, stud. gymn. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 5., 10. až 17.
Veselý Frant., stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 4., 8., 9., 10., 12., 14., 15., 16., 21.
Vilíta Jan, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 1. až 5., 7. až 12., 15., 16., 17., 20., 21.
Višinka Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 9., 12., 17., 21., 24.
Vodička Karel, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1. až 5., 7. až 17., 21. až 24.
Vondráček Frant., stud. VI. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 4., 8., 9., 11., 21.
Votrubová Žofie, stud. VIII. tř. střední školy dívčí v Praze, úl. 1. až 5., 8. až 11., 17., 21.
Vrbický Hynek, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 12., 21.
Wald J., stud. VI. tř. r. v Praze-I., úl. 1., 3., 5., 8., 12., 13.
Weissenstein Rudolf, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1., 3., 4., 5., 8. až 12., 15., 17., 21.
Zahradníček Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 17., 21., 24.
Závada Bohuslav, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 21.
Zavadil Stan., stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 9., 10., 13. až 17., 21.
Nepodepsaný, dle pošt. razítka z Plzně, úl. 8., 9., 12., 15., 16.
J. T. z Prahy, úl. 1. až 6., 8., 12., 14. až 17., 21., 22., 24.

O jistých integrálech pseudoelliptických.*)

Napsal

Augustin Pánek.

Úkolem těchto řádků jest ukázati, že původ substitucí, jichž užito k vyčíslení pseudoelliptických integrálů tvarů algebraických, jež až dosud v různých žurnálech a sbornících uveřejněny byly, dlužno hledati v substitucích Eulerem publikovaných, podle nichž lze je konstruovati.

I. Když Euler vyčíslil integrály

$$(1) \qquad \int \frac{x^2\, d\,x}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}},$$

$$(2) \qquad \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\, d\,x,$$

$$(3) \qquad \int \frac{(1+x^2)\, d\,x}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}},$$

$$(4) \qquad \int \frac{(1-x^2)\, d\,x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$$

způsoby, o nichž jsme se zmínili v tomto Časopise roč. XXVIII. str. 105. na konci Poznámky, vyčíslil je pak také *společnou* substitucí algebraickou

---

*) Práci tuto lze též pokládati za dokončení článku uveřejněného v tomto Časopise roč. XXVIII. str. 97. s názvem *Vyčíslení jistých Eulerových integrálů neomezených.*

$$\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} = p.\text{*)} \tag{5}$$

V pojednání „*De integratione formulae* $\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$ *aliarumque ejusdem generis, per logarithmos et arcus circulares*", později akademii Petrohradské předloženém,**) Euler vrací se opět k integrálu

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx \tag{2}$$

a tu praví:

„Když jsem o výrazu tomto bedlivě uvažoval, shledal jsem že lze jej zbaviti irracionálnosti podivuhodnou substitucí

$$x = \frac{\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{2}}\text{“}. \tag{6}$$

Zvláštními obraty pak dospívá žádoucího vyčíslení, na konec poznamenávaje:

„Právem možno tázati se, kterým umělým obratem jsem dospěl substituce této, o níž by se při prvém pohledu mohlo zdáti, že k cíli nevede. Zajisté by nikdo na substituci tu nepřipadl, a já sám nemohu se upamatovati, jak jsem jí mohl dosíci. ***)

---

*) Viz Euler „*Inst. calculi integr.*", 4. díl, str. 26. aneb Salomonův německý překlad, 4. díl táž stránka.

**) ibid. pag. 37.

***) V citovaném díle na str. 39. praví Euler dále: „Avšak uváživ všechny momenty, dospěl jsem mnohem jednodušší methody, podle níž možno výpočet bez velikých oklik vykonati . . . ", i podává methodu s názvem „Jednoduchá a přirozená methoda, kterak předložený výraz integrální vyšetřiti." Pod tímto titulem vyčísluje Euler integrál (2) substitucí $\sqrt{1+x^4} = px$, ač všechen další složitý apparát početní možno značně zjednodušiti, jak námi bylo dokázáno. (Viz tento Časopis roč. XXVIII.) Konstatujeme, že *nejjednodušší možná* a *společná* substituce, vedoucí zároveň *nejrychleji* k vyčíslení všech integrálů (1), (2), (3), (4) jest námi zavedená a Eulerem poprvé avšak pouze k vyčíslení jediného integrálu (2) užitá substituce $\sqrt{1+x^4} = px$. (Viz A. Pánek „*O vyčíslení některých integrálův Eulerových společnou substitucí algebraickou*". Věstník král. české Společnosti náuk. V Praze, 1893.)

Ukážeme nyní, jak Euler mohl asi substituci (6) dostati ze substituce jím před tím zavedené (5).

Zdvojmocníme-li totiž obě strany rovnice (5) a upravíme ji, nabudeme

$$p^2x^4 - 2x^2 + p^2 = 0,$$

načež

$$(\lambda) \qquad x^2 = \frac{1 + \sqrt{1-p^4}}{p^2},$$

tudíž

$$x = \frac{1}{p}\sqrt{1 + \sqrt{1 - p^4}}.$$

Dle známého vzorce

$$(\alpha) \qquad \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\ ^{*)}$$

---

*) Dovolím si tu ukázati, jak jsem již před 25. lety svým žákům na bývalé městské střední škole na Malé Straně v Praze tento vzorec odůvodňoval.

Položíme-li

$$(\alpha) \qquad \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

jest

$$(\beta) \qquad \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Z rovnic (α) a (β) stanovíme x, y.

Sečteme-li obě rovnice, dostaneme

$$(\gamma) \qquad \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = 2\sqrt{x},$$

a odečteme-li rovnici (β) od (α), nabudeme

$$(\delta) \qquad \sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} = 2\sqrt{y}.$$

Zdvojmocníme-li rovnici (γ), jest patrně

$$(\varepsilon) \qquad x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

bude

$$\sqrt{1+\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{\frac{1+p^2}{2}} + \sqrt{\frac{1-p^2}{2}},$$

pročež

$$(6') \qquad x = \frac{\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}},$$

což jest, píšeme-li tu t místo p, Eulerova substituce (6).

Kdybychom nepřihlíželi ku vzorci (α), mohli bychom postupovati též takto:

Přičteme-li k rovnici (λ) na obou stranách 1, bude

---

a zdvojmocníme-li rovnici (δ), bude

$$(\zeta) \qquad y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2},$$

což vzhledem k (ε) možno přímo napsati.

Hodnoty (ε), (ζ) dosadíme do rovnic (α) a (β), které spojíme, píšíce

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

což jest známý vzorec, který v učebnicích pro střední školy jedním ze dvou obvyklých různých způsobů bývá stanoven.

Toto rozvedení druhé odmocniny z výrazu surdického v součet neb rozdíl dvou takových odmocnin jest výhodné jen v tom případě, je-li $\sqrt{a^2 - b}$ číslo racionálné.

Žádáme-li, aby výraz $a^2 - b$ byl úplným čtvercem, třeba položiti

$$a^2 - b = x^2,$$

čímž b nabude hodnoty

$$(\eta) \qquad b = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x).$$

Chceme-li zpaměti konstruovati případné číselné příklady pro druhou odmocninu z čísla surdického, jest nutno, abychom napřed věděli, že $\sqrt{a^2 - b}$ bude číslem racionálním.

Kdyby dáno bylo na př. $a = 2$, volíme číslo x na př. $x = 1$, načež z rovnice (η) vypočteme $b = 3$ a tudíž předložený příklad bude $\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$.

$$(\mu) \qquad 1 + x^2 = \frac{p^2 + 1 + \sqrt{1 - p^4}}{p^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + p^2}}{p} \cdot \frac{\sqrt{1 + p^2} + \sqrt{1 - p^2}}{p}.$$

Avšak vzhledem k (5) jest faktor

$$\frac{\sqrt{1 + p^2}}{p} = \sqrt{1 + \frac{1}{p^2}} = \sqrt{1 + \frac{1 + x^4}{2x^2}} = \frac{1 + x^2}{x\sqrt{2}},$$

tudíž (μ)

$$1 + x^2 = \frac{1 + x^2}{x\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + p^2} + \sqrt{1 - p^2}}{p},$$

z čehož opětně plyne

$$(6') \qquad x = \frac{\sqrt{1 + p^2} + \sqrt{1 - p^2}}{p\sqrt{2}}.$$

I můžeme z kterékoliv substituce Eulerovy (m), (n), uvedené v tomto Časopise roč. XXVIII. str. 105., a (5), bez velikých obtíží konstruovati zcela nové substituce algebraické pro integrály (1), (2), (3) a (4).

Konstruujme snazší substituce charakteristické jako

$$(7), (8) \qquad \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 + x^4}} = p, \quad \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 + x^4}} = p$$

aneb

$$(9), (10) \qquad \frac{\sqrt{1 + x^4}}{1 + x^2} = p, \quad \frac{\sqrt{1 + x^4}}{1 - x^2} = p$$

aneb klaďme

$$(11), (12) \qquad \frac{\sqrt{1 + x^4}}{1 - x^4} = p, \quad \frac{1 - x^4}{\sqrt{1 + x^4}} = p,$$

značí-li p vždy nově zavedenou integrační proměnnou.

Že jsme tyto substituce nazvali *charakteristickými*, odůvodňujeme tím, že v každém z uvedených čtyř integrálů jsou za symbolem integračním obsaženy některé z výrazů

$$(\nu) \qquad 1+x^2, \quad 1-x^2, \quad 1-x^4, \quad \sqrt{1+x^4},$$

z nichž první nebo druhý anebo třetí, spojen jsa se čtvrtým ve tvaru zlomku, poskytuje nám substituční rovnice (7) až (12) té vlastnosti, že každou jednotlivou z nich možno vyčísliti všechny integrály (1), (2), (3), (4).

Tato možnost dokazuje, že vazba těchto čtyř integrálů jest v jakési souvislosti, i patrno dle povahy integrálu (1), který z nich jediný obsahuje kromě posledních dvou výrazů v (ν) uvedených ještě x^2, že lze stanoviti další jednoduché substituce, a to

$$(13) \qquad \frac{\sqrt{1+x^4}}{x} = p$$

aneb

$$(14) \qquad \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} = q,$$

kde p i q jsou nové integrační proměnné.

Ze substitucí (7) až (14) uvádí Euler pouze dvě a to substituci (13), jak již řečeno, při vyčíslení integrálu

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx$$

a integrálů obecnějších tvarů, a substituci (14), kterou zavedl při vyčíslení některých integrálů, v tomto Časopise roč. XXVIII. vytčených.

V následujícím podáme instruktivní methodu, jak lze některých z těchto nových substitucí použiti k vyčíslení všech integrálů (1), (2), (3) a (4).

II. Euler, vyčísliv integrály (1), (2), (3), (4) společnou substitucí (5) odst. I., podává je v pořadí (3), (4), (2), (1).*) Dle tohoto postupu nazveme integrály ty po řadě V_1, V_2, V_3, V_4. K jich vyčíslení volme na př. substituci (7), kladouce

$$(\alpha) \qquad p = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^4}},$$

*) Srov. Euler tamže str. 26.

z čehož

$$(\beta) \qquad dp = \frac{2x(1-x^2)\,dx}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sestrojme výrazy

$$(\gamma) \qquad \sqrt{p^2-1} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}},$$

$$(\delta) \qquad \frac{\sqrt{p^2-1}}{p} = \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2},$$

$$(\varepsilon) \qquad 2-p^2 = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^4}$$

a (ε) násobme $p^2 = \frac{(1+x^2)^2}{1+x^4}$, zdvojmocněnou to rovnicí (α), kterýžto součin pišme v podobě

$$(\zeta) \qquad 1-(p^2-1)^2 = \left(\frac{1-x^4}{1+x^4}\right)^2.$$

Dělíme-li (β) součinem (δ) a (ε), nabudeme

$$\frac{pdp}{(2-p^2)\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{2}\,\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}},$$

tedy

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{pdp}{(2-p^2)\sqrt{p^2-1}}.$$

Položíme-li

$$p^2-1 = z^2, \quad \text{jest} \quad pdp = zdz,$$

tudíž

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Vrátíme-li se k původní proměnné, jest především

$$(a) \qquad z = \sqrt{p^2-1}$$

a dle (γ) bude

$$(a') \qquad z = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$$

a ježto

$$(b) \qquad \sqrt{1-z^2} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^4}},$$

nabýváme dosazením (a') a (b) do V_1

$$(A) \qquad \int \frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2},$$

výsledek to s Eulerovým souhlasný.*)

Dělíme-li (β) součinem rovnic (α) a (γ), obdržíme

$$\frac{dp}{p\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{2}\,\frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$$

a integrujeme-li obě strany,

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dp}{p\sqrt{p^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sec} p$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sin} \frac{\sqrt{p^2-1}}{p}.$$

Vzhledem k (δ) bude V_2 neboli

$$(B) \qquad \int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sin} \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2},$$

což jest opět výsledek Eulerův.**)

Dělíme-li (β) rovnicí (δ) i (ζ), dostaneme

$$\frac{p\,dp}{[1-(p^2-1)^2]\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx$$

*) Viz Euler tamže str. 23.

**) Viz Euler tamže str. 23.

a tedy

$$V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{pdp}{[1-(p^2-1)^2]\sqrt{p^2-1}},$$

kterýžto integrál vložením $p^2 - 1 = z^2$, $pdp = zdz$ lze převésti na tvar integrálu differenciálu racionálního, tak že

$$V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dz}{1-z^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left\{ \frac{dz}{1-z^2} + \frac{dz}{1+z^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ l \frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}} + \operatorname{arc\,tg} z \right\}.$$

Zavedeme-li opět původní proměnnou, jest vzhledem k (a') a (b) integrál V_3, t. j.

$$\text{(C)} \quad \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ l \frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{1-x^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} \right\},$$

výsledek opět totožný s Eulerovým.*)

Posléze násobme (β) rovnicí (δ) a součin ten dělme rovnicí (ε), čímž obdržíme

$$\frac{\sqrt{p^2-1}\,dp}{(2-p^2)p} = 2\sqrt{2} \frac{x^2 dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}.$$

Integrací obou stran povstane

$$V_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{p^2-1}\,dp}{(2-p^2)p}$$

a násobíme-li za integračním symbolem čitatele i jmenovatele p, lze psáti

$$V_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{p\sqrt{p^2-1}\,dp}{1-(p^2-1)^2}.$$

Integrál tento vede opětně na integrál differenciálu racio-

*) Viz Euler tamže str. 39.

nálního, použijeme-li dřívější substituce $p^2 - 1 = z^2$, tak že přímo jest patrný tvar integrálu posledního

$$\int \frac{z^2 dz}{1 - z^4} = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{dz}{1 - z^2} - \frac{dz}{1 + z^2} \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ l \frac{1 + z}{\sqrt{1 - z^2}} - \text{arc tg}\, z \right\}.$$

Přihlížíme-li opětně k původní proměnné, lze dle V_3 psáti integrál V_4, t. j.

$$\text{(D)} \qquad \int \frac{x^2\, dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + x^4}}$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ l \frac{\sqrt{1 + x^4} + x\sqrt{2}}{1 - x^2} - \text{arc tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}} \right\}.$$

Abychom dostali výsledek Eulerův,*) uvažme, že

$$\text{arc tg}\, \psi = \text{arc sin} \frac{\psi}{\sqrt{1 + \psi^2}},$$

kdež

$$\psi = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

A tak lze vyčísliti ostatními, v odst. I. uvedenými substitucemi všechny integrály (1), (2), (3) a (4), při čemž konstruování příslušných výrazů řídí se dle differenciálu, stanoveného ze zavedené integrační proměnné p.

Poznámka. Ukážeme ještě, jak lze vyčísliti integrál V_1 substituční rovnicí (8), uvedenou v odst. I., kdež píšeme

$$(k) \qquad p = \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

Stanovme

$$(l) \qquad dp = -\frac{2x(1 + x^2)\, dx}{(1 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

*) Euler tamže str. 25.

a sestrojme

$$(m) \qquad \sqrt{1-p^2} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}},$$

načež, násobíce (*k*) rovnicí (*m*), nabudeme

$$(n) \qquad p\sqrt{1-p^2} = \sqrt{2}\,\frac{x(1-x^2)}{1+x^4}.$$

Dělíme-li (*l*) rovnicí (*n*), povstane

$$\frac{dp}{p\sqrt{1-p^2}} = -\sqrt{2}\,\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}},$$

tedy V_1, t. j.

$$\int\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dp}{p\sqrt{1-p^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{1+\sqrt{1-p^2}}{p}$$

a vzhledem ku (*k*) a (*m*) nabýváme výsledku (A).

Jest na jevě, že ve všech našich substitucích možno místo *p* zavésti goniometrickou funkci jakožto novou integrační proměnnou, což budiž předmětem úvahy naší v odstavci následujícím.

III. Volme třebas poslední tvar substituce (*k*) v odstavci předešlém uvažované, kladouce nyní

$$(1) \qquad \cos\varphi = \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^4}},$$

kteroužto rovnicí lze též vyčísliti všechny integrály V_k

$$(k = 1, 2, 3, 4).$$

Z rovnice (1) stanovíme

$$(2) \qquad d\varphi = \sqrt{2}\,\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx,$$

což násobíme rovnicí (1), i bude

$$(3) \qquad \cos\varphi d\varphi = d\sin\varphi = \sqrt{2}\,\frac{1-x^4}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

Dále sestrojíme výrazy

$$(4) \qquad 1 + \sin^2\varphi = \frac{(1+x^2)^2}{1+x^4},$$

$$(5) \qquad (1+\sin^2\varphi)\cos^2\varphi = 1 - \sin^4\varphi = \left(\frac{1-x^4}{1+x^4}\right)^2.$$

Dělením rovnice (2) rovnicí (1), dospějeme differenciálu V_1,

$$(6) \qquad \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt{2}\,\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}} = \sqrt{2}\,.\,dV_1$$

a dělíme-li (3) rovnicí (4), dostaneme differenciál V_2,

$$(7) \qquad \frac{d\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi} = \sqrt{2}\,\frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}} = \sqrt{2}\,.\,dV_2;$$

dělíme-li pak (3) rovnicí (5), nabýváme differenciálu V_3,

$$(8) \qquad \frac{d\sin\varphi}{1-\sin^4\varphi} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx = \sqrt{2}\,.\,dV_3$$

a konečně, násobíme-li (8) rovnicí $\sin^2\varphi = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$, obdržíme differenciál V_4,

$$(9) \qquad \frac{\sin^2\varphi\, d\sin\varphi}{1-\sin^4\varphi} = 2\sqrt{2}\,\frac{x^2dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}} = 2\sqrt{2}\,.\,dV_4.$$

Integrály V_k jsou tedy vyjádřeny jakožto integrály differenciálů racionálních, které vedou k resultujícím hodnotám vytčeným v odstavci předchozím.

Substitucí goniometrickou vyčísleny poprvé a dosud jedině tyto čtyři integrály V_k zvěčnělým *Gustavem Skřivanem*, professorem polytechnického ústavu království Českého ve článku *„Note über einige Integrale“.* *)

Dle obvyklého způsobu, při jistých integrálech differenciálů

*) Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik u. Physik. Roč. VIII., 1863, str. 303.

irracionálních s výhodou užívaného, irracionálnost odstraňuje se zaváděním případné goniometrické funkce, aby z uvedené odmocniny, když si ji myslíme samu o sobě, vznikl jeden ze známých základních vzorců goniometrických, plynoucích z věty Pythagorovy. Proto Skřivan klade $x^2 = \operatorname{tg}\eta$, i jest tudíž

$$\sqrt{1+x^4} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\eta} = \sec\eta.$$

Zřejmo, že mohlo se též klásti $x^2 = \operatorname{ctg}\eta$.

Tato Skřivanem zavedená společná substituce jest sice nejpřípadnější substituce *goniometrická*, nevede však k nejrychlejšímu vyčíslení integrálů těch, jako na př. goniometrická substituce (1) a jiné, které lze napsati dle substitucí (7) až (14) odst. I., z nichž (8) jest v tomto odstavci (1). Třeba tu opětně konstatovati, že námi zavedená *společná algebraická* substituce $\sqrt{1+x^4} = px$ jest *nejjednodušší* ***vůbec*** *možná* substituce, vedoucí nejrychleji k vyčíslení integrálů V_k, což námi v citovaném článku, uveřejněném v král. Společnosti náuk, bylo ukázáno.

IV. *Legendre**) zabýval se integrálem tvaru

$$V = \int \frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{4x^3-1}}, \tag{1}$$

který možno vyčísliti takto:

Zaveďme substituci

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x^3-1}} = y, \text{**)} \tag{2}$$

z níž plyne

$$x = \sqrt[3]{\frac{3+y^2}{4y^2}}$$

a

$$dx = -\sqrt[3]{2}\,\frac{dy}{\sqrt[3]{y^5(3+y^2)^2}}.$$

---

*) Srovnej Legendre „*Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*“. T. I, pag. 171, Paris, 1825.

**) O této substituci viz Poznámku na konci tohoto odstavce připojenou.

Po dosazení těchto hodnot do (1) bude

$$V = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}} \int \frac{y\,dy}{(1-y^2)\sqrt[3]{y^3+3y}}. \tag{3}$$

Ježto

$$\frac{y}{(1-y^2)\sqrt[3]{y^3+3y}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{y^3+3y}}\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y}\right), \tag{α}$$

nabude (3) tvaru

$$V = \frac{\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}} \left\{ \int \frac{dy}{(1-y)\sqrt[3]{y^3+3y}} - \int \frac{dy}{(1+y)\sqrt[3]{y^3+3y}} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}} (V_1 - V_2),\text{*)}$$

kde V_1 znamená prvý a V_2 druhý integrál.

V obou integrálech jest výraz pod třetí odmocninou roven

$$\frac{(y-1)^3 + (y+1)^3}{2}.$$

Vložením této hodnoty do integrálu druhého udělíme tomuto podobu

$$V_2 = \sqrt[3]{2} \int \frac{dy}{(y^2-1)\sqrt[3]{1 + \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^3}}. \tag{5}$$

Klademe-li nyní

$$\frac{y+1}{y-1} = t, \tag{6}$$

---

*) Označíme-li druhý integrál $f(y)$, jest patrně prvý $f(-y)$, tak že

$$V = \frac{\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}} \{f(-y) - f(y)\}.$$

obdržíme differencováním

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = -\frac{dt}{2},$$

což dělíme-li (6),

$$(7) \qquad \frac{dy}{y^2-1} = -\frac{dt}{2t}.$$

Dosadíme-li hodnoty (6) a (7) do (5), nabudeme

$$(8) \qquad V_2 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \int \frac{dt}{t\sqrt[3]{1+t^3}}.$$

Podobným způsobem dospěli bychom ku

$$(9) \; V_1 = \sqrt[3]{2} \int \frac{dy}{(1-y^2)\sqrt[3]{1+\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \int \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}}.$$

Jest tedy

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \left\{ \int \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}} + \int \frac{dt}{t\sqrt[3]{1+t^3}} \right\}.$$

Druhý z těchto integrálů přejde ve formu prvého substitucí $= \frac{1}{z}$, tak že pak V čili integrál

$$(1') \int \frac{xdx}{(1-x^3)\sqrt{4x^3-1}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left\{ \int \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}} - \int \frac{dz}{\sqrt[3]{1+z^3}} \right\}.$$

Známé integrály pravé strany jsou téže formy.

Volme z nich prvý

$$\int \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}},$$

který vyčíslíme jiným postupem než dosud se děje.

Položme

$$\sqrt[3]{1+t^3} = tu_2$$

čili

$$1 + t^3 = t^3 u_2^3,$$

kteroužto rovnici přímo differencujme a ihned kraťme $3t^2$; pak jest

$$dt = u_2^3\, dt + t\, u_2^2\, du_2$$

aneb

$$(1 - u_2^3)\, dt = tu_2 \,.\, u_2\, du_2.$$

Hledíce k původní substituční rovnici pišme dále

$$(1 - u_2^3)\, dt = \sqrt[3]{1+t^3} \,.\, u_2 du_2.$$

Rozloučíme-li proměnné, bude

$$\frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}} = \frac{u_2 du_2}{1 - u_2^3}$$

a integrujeme-li obě strany této rovnice, jest hledaný integrál

$$\int \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}} = \int \frac{u_2 du_2}{1 - u_2^3}$$

patrně vyjádřen integrálem differenciálu racionálního.

Touže cestou, kladouce

$$\sqrt[3]{1+z^3} = zu_1,$$

dojdeme k nové formě druhého integrálu v (1′), t. j. k integrálu

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{1+z^3}} = \int \frac{u_1 du_1}{1 - u_1^3}.$$

Integrál (1′) bude míti nyní tvar

$$(1'')\quad \int \frac{xdx}{(1 - x^3)\sqrt{4x^3 - 1}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left\{ \int \frac{u_2\, du_2}{1 - u_2^3} - \int \frac{u_1\, du_1}{1 - u_1^3} \right\},$$

z něhož patrno, že předložený integrál (1) jest vyjádřen integrály racionálních differenciálů.

Poznámka k integrálu předchozímu. *Serret* ve svém vynikajícím spise o počtu differenciálním a integrálním uvádí binomický differenciál

$$(a)\qquad dV = \frac{dx}{(1 - x^3)^{\frac{2}{3}}},\text{*)}$$

jejž substitucí

$$(b)\qquad \frac{\sqrt[3]{1 - x^3}}{1 - x} = t$$

transformuje především na tvar

$$(c)\qquad \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}} = \frac{1 - x}{1 + x}\, dt = dV.$$

Na to stanoví

$$t^3 = \frac{3}{4}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2 + \frac{1}{4},$$

z kteréžto rovnice jde

$$(d)\qquad \frac{1 - x}{1 + x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4t^3 - 1}},$$

čímž (c) nabývá formy

$$(e)\qquad dV = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4t^3 - 1}}\, dt.$$

Když t nahradíme x, tu výraz $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x^3 - 1}}$, položen rovný y, jest ona substituce, kterou jsme při vyčíslení Legendrova

*) Viz Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral.* 2. édit., pag. 66, Paris, 1879 aneb na téže stránce ve 4. vyd., Paříž, 1894 aneb Harnackův německý překlad str. 58., Lipsko, 1885.

integrálu (1) zavedli a označili (2). Tato substituce, jak patrno, má svůj původ v substituci (*b*), kterouž dle povahy předloženého integrálu (1) sestrojiti lze dle substitucí, námi uvedených na str. 345., k nimž jsme dospěli úvahou opřenou o substituce, Eulerem, podané.

Třeba tu též poznamenati, že tvar integrálu

$$V = \int \frac{dx}{(1 - x^3)^{\frac{3}{2}}}$$

vyskytuje se v Eulerově díle IV. na str. 293. Také Legendre ve svém *Traité des fonctions elliptiques,* pag. 185 uvádí týž integrál, při němž poprvé zavedena je substituce (*b*), kterou Serret v citovaném díle svém reprodukuje.

V. Legendreův integrál tvaru

$$V = \int \frac{x dx}{(x^3 + 8) \sqrt[3]{x^3 - 1}}, \tag{1}$$

který vyčíslil též *Clausen*, a kterým zabýval se *Günther*,*) převedeme na tvar Eulerova integrálu.

Klademe-li tu

$$x = \sqrt[3]{1 + 3u^2},$$

jest

$$dx = \frac{2udu}{(1 + 3u^2)^{\frac{2}{3}}},$$

tak že

*) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes.* Tome I, pag. 165, Paris, 1825. Clausen, *Ueber ein Integral in Legendre's Traité des fonctions elliptiques* (Astronom. Nachrichten, Nr. 442.). Totéž reprodukoval Grunert ve svém Archiv der Mathematik u. Physik, III. díl, pag. 335, 1843. Günther, *Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques.* (Bulletin de la Société mathématiques de France, pag. 88, Paris, 1882.).

$$(1') \qquad V = \frac{2}{3\sqrt[3]{3}} \int \frac{du}{(3+u^2)\sqrt[3]{1+3u^2}},$$

což jest integrál Eulerův.*)

Ježto

$$\frac{1}{(3+u^2)\sqrt[3]{1+3u^2}} = \frac{1}{(3+u^2)\sqrt[3]{1+3u^2}} \cdot \frac{(1+u)^2-(1-u)^2}{4u},$$

nabude (1') podoby

$$(2) \; V = \frac{1}{6\sqrt[3]{3}} \left\{ \int \frac{(1+u)^2\,du}{(3u+u^3)\sqrt[3]{1+3u^2}} - \int \frac{(1-u)^2\,du}{(3u+u^3)\sqrt[3]{1+3u^2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt[3]{3}} (V_1 - V_2),$$

při čemž patrně označujeme první integrál V_1 a druhý V_2.

První integrál V_1 vyčíslíme, substitujeme-li

$$(3) \qquad \frac{1-u}{\sqrt[3]{1+3u^2}} = y;$$

differencujeme-li tuto rovnici, bude

$$(4) \qquad \frac{(1+u)^2\,du}{(1+3u^2)\sqrt[3]{1+3u^2}} = -dy.$$

---

*) Integrál tento uvádí Euler s názvem „*Integratio succincta formulae integralis maxime memorabilis*

$$\int \frac{dz}{(3 \pm z^2)\sqrt[3]{1 \pm 3z^2}}“$$

(Convent. exhib. die 28. april. 1777). N. Acta Petr., X, 1792, p. 20—26. Viz též Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*. Tome I, pag. 170.

Sestrojíme výraz

$$1 - y^3 = \frac{u(3 + u^2)}{1 + 3u^2}, \tag{5}$$

načež, dělíme-li (4) rovnicí (5), obdržíme

$$\frac{(1 + u)^2\, du}{u(3 + u^2)\sqrt[3]{1 + 3u^2}} = -\frac{dy}{1 - y^3},$$

tak že

$$V_1 = -\int \frac{dy}{1 - y^3}, \tag{6}$$

čímž integrál V_1 vyjádřen jest integrálem racionálního differenciálu.

Druhý integrál V_2 vyčíslíme substitucí

$$\frac{1 + u}{\sqrt[3]{1 + 3u^2}} = z. \tag{7}$$

Přímým differencováním rovnice této nabudeme

$$\frac{(1 - u^2)\, du}{(1 + 3u^2)\sqrt[3]{1 + 3u^2}} = dz \tag{8}$$

a ježto

$$z^3 - 1 = \frac{u(3 + u^2)}{1 + 3u^2}, \tag{9}$$

dostaneme, dělíme-li (8) rovnicí (9),

$$\frac{(1 - u^2)\, du}{u(3 + u^2)\sqrt[3]{1 + 3u^2}} = \frac{dz}{z^3 - 1}$$

a tedy

$$V_2 = -\int \frac{dz}{1 - z^3}.$$

Difference

$$V_1 - V_2 = -\int \frac{dy}{1 - y^3} + \int \frac{dz}{1 - z^3},$$

tak že hledaný integrál

$$\int \frac{x\,dx}{(x^3+8)\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{1}{6\sqrt[3]{3}} \left\{ \int \frac{dz}{1-z^3} - \int \frac{dy}{1-y^3} \right\}$$

vyjádřen jest integrály racionálních differenciálů.

Kterak lze dokázati větu o osách podobnosti tří kružnic užitím deskriptivní geometrie.

Napsal

Dr. Ant. Sucharda v Brně.

1. Ve čtvrtém vydání Mongeovy deskriptivní geometrie, jež pořídil r. 1820 žák jeho Brisson, dokazuje se na str. 56., že šest bodů podobnosti tří kružnic leží po třech na čtyřech přímkách (osách podobnosti). K výsledku tomu dospívá Monge, hledaje společné tečné roviny tří ploch kulových, sestrojených nad kružnicemi těmi jako hlavními, kterouž úlohu řeší užitím kuželových ploch, opsaných každým dvěma z těchto ploch kulových.

Důkaz Mongeův vyžaduje, aby žádné dvě z daných kružnic vespolek se neprotínaly, ježto sic vnitřní jejich tečny, tedy i příslušné plochy kuželové a proto i některé z tečných rovin jim společných stávají se pomyslnými. *)

V následujících řádcích pokusím se o důkaz také na deskriptivní geometrii založený, ale nezávislý na vzájemné poloze daných kružnic.

Za tou příčinou volím ono znění věty, které uvádí Salmon-Fiedler (Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 4. vyd., p. 193.) a z něhož jsoucnost čtyr os podobnosti snadně vyplývá.

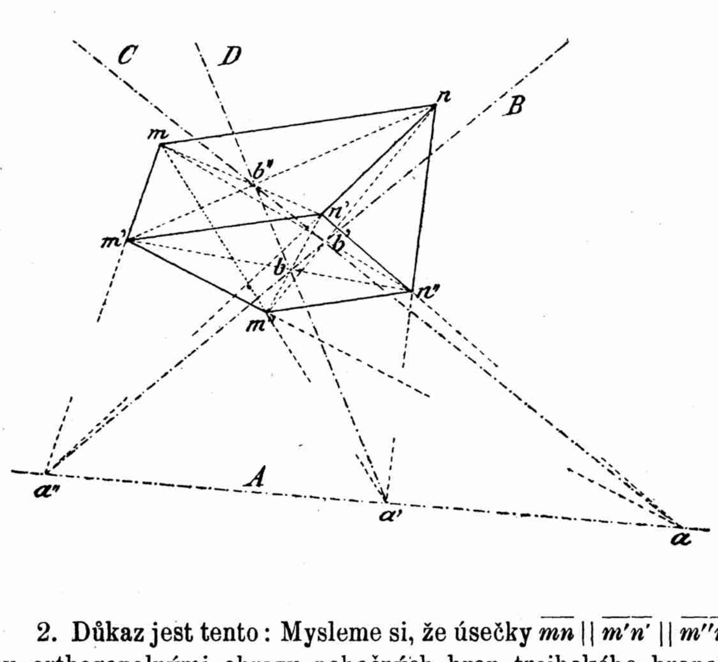
Dány-li v rovině tři libovolné kružnice $K\,K'\,K''$, prochází

---

*) Bez řečené výhrady dokazuje se věta planimetricky z obrácené věty Menelaovy (sr. Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie 21. vyd. p. 20. a j.).

spojnice jednoho bodu podobnosti kružnic $K K'$ s jedním bodem podobnosti kružnic $K K''$ také bodem podobnosti kružnic $K' K''$.

Jsou-li $\overline{mn} \,||\, \overline{m'n'} \,||\, \overline{m''n''}$ stejnolehlé průměry řečených tří kružnic, a značí-li podle podmínky a'' vnější, b'' vnitřní bod podobnosti kružnic $K K'$, a', b' vnější, resp. vnitřní bod podobnosti kružnic $K K''$, konečně a, b vnější, resp. vnitřní bod podobnosti kružnic $K' K''$, potřebí ukázati, že bodové trojiny $aa'a''$ $ab'b''$, $a'bb''$, $a''bb'$ jsou každá na jedné přímce.



2. Důkaz jest tento: Mysleme si, že úsečky $\overline{mn} \,||\, \overline{m'n'} \,||\, \overline{m''n''}$ jsou orthogonalnými obrazy pobočných hran trojbokého hranolu šikmo sříznutého, jehož podstavný trojúhelník $mm'm''$ budiž v průmětně s nákresnou sjednocené (viz obr.).*)

Poněvadž jsou podle podmínky body a', a vnějšími body podobnosti resp. úseček $\overline{mn}$, $\overline{m''n''}$; $\overline{m'n'}$, $\overline{m''n''}$, vznikají užitím příslušných spojnic lichoběžníky $mnm''n''$, $m'n'm''n''$, pobočné to stěny řečeného hranolu, jehož horní podstavou jest troj-

*) Za zjednodušením vynechány jsou v obraze indexy, připomínající, že jest pořízen na základě orthogonalného promítání.

úhelník $nn'n''$. Roviny podstavné protínají se v přímce A určené body aa', v níž tedy protínají se i homologické strany, $\overline{mm''}$ $\overline{nn''}$ obou podstavných trojúhelníků a to v bodě a''.

3. Rovina $nn'm''$ s rovinou $mm'n''$ protíná se v přímce B, určené body b, b', obsaženými ve dvou pobočných stěnách hranolu. Přímka B seče přímku $\overline{nn'}$ jakož i přímku $\overline{mm'}$, jsouc s každou z nich v jedné rovině, poněvadž však nenáleží rovině, určené oběma těmi přímkami, protíná je v jejich společném bodě a''. Obdobně možná poznati, že také bodové trojiny $ab'b''$ $a'bb''$ leží na přímkách C, resp. D, zamění-li se dvojice rovin právě užitá dvojicemi $n'n''m$, $m'm''n$; $n''nm'$, $mm''n'$.

4. Vrátíme-li se od prostorového významu obrazce, který byl podkladem úvah dosavadních, k příslušným průmětům, při čemž ve shodě s poslední poznámkou pod čarou značí A, B, C, D průměty stejnojmenných přímek, nabudeme v průmětně útvaru, z něhož vzhledem k 2. odstavci patrno: jsou-li dva body podobnosti (a, a'') body vnějšími, jest třetí (a') také bodem vnějším a s nimi v ose podobnosti A; vzhledem pak k odst. 3.: jsou-li dva body podobnosti (b, b'), resp. (b, b''), (b', b'') body vnitřními, jest třetí (a'') bodem vnějším a s nimi v ose podobnosti B, resp. C nebo D. Tím podán jest důkaz horní věty a zjištěna existence čtyř os podobnosti kružnic $K\,K'\,K''$.

Připomenutí. Že tři kružnice mají *čtyři* osy podobnosti, jest následkem toho, že každým dvěma z nich náležejí *dva* body podobnosti. Dva libovolné jiné útvary homothetické mají však jen *jediný* bod podobnosti. Z té příčiny mají tři takové útvary $U\,U'\,U''$, z nichž dva jsou třetímu podobny dle dvou různých bodů podobnosti, jen jedinou osu podobnosti.*)

---

*) Větu tuto i jednoduchý její důkaz planimetrický uvádí Strnad ve své Geometrii (2. vyd. pg. 88.); pro případ kružnic možná z ní dospěti ku větě, která jest předmětem přítomného článku.

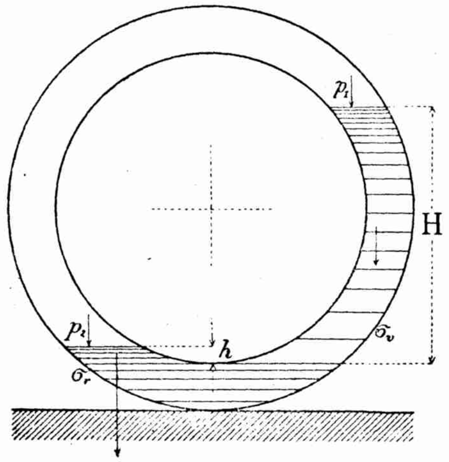
Úloha z mechaniky.

Napsal

Josef Hněvkovský,

c. a k. setník u pionérů v Klosterneuburku.

Naplníme-li nádobu, omezenou dvěma souosými válcovými plochami kruhovými a dvěma rovinami k povrchovým přímkám válcových ploch kolmými, částečně rtutí a nalejeme-li pak na rtuť po jedné straně vodu, postaví se obě kapaliny dle zákona o spojitých nádobách do rozličných výšek h a H. Množství obou kapalin budiž takové, aby dolejší hladina rtuti byla tečnou rovinou vnitřního válce podél jeho nejnižší povrchové přímky.



Obr. 1.

Znamenají-li σ_v a σ_r specifické váhy obou kapalin a nedbá-li se tlaků na povrchy kapalin, platí pro rovnováhu známá podmínka

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{H} : h = \sigma_r : \sigma_v.$$

Dokážeme počtem, že skutečně, platí-li podmínka (1), jest rovnováha, t. j. že nádoba nebude se valiti po vodorovné rovině.

Označme:

l délku nádoby válcové ($\perp$ ku rovině obrazce),

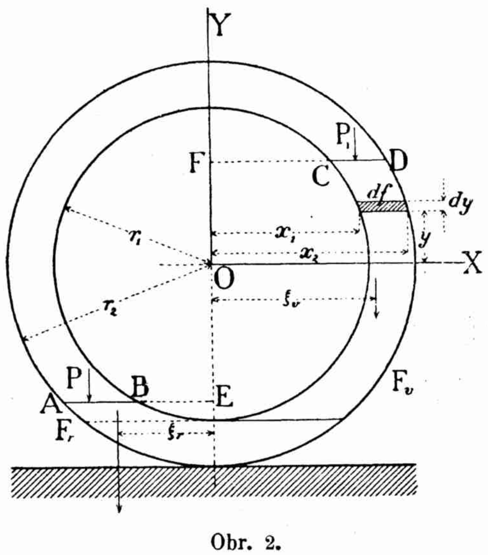
F_r plochu mezikruží, kterou zaujímá sloupec rtuti o výšce h,
F_v „ „ „ „ „ vody „ „ H,
ξ_r vzdálenost těžiště rtuti obsažené v prostoru $F_r \,.\, l$ od osy Y,
ξ_v „ „ vody „ „ „ $F_v \, l$ „ „ Y.
p specifický tlak, t. j. tlak na 1 čtver. jednotku AB,
p_1 specifický tlak v hladině CD.

Úhrnný tlak P na hladinu AB jest pak

$$P = l \,.\, \overline{AB} \,.\, p = l\,(\overline{AE} - \overline{BE})\, p$$

a úhrnný tlak P_1 na hladinu CD

$$P_1 = l \,.\, \overline{CD} \,.\, p_1 = l\,(\overline{DF} - \overline{CF})\, p_1 .$$



Obr. 2.

Pohyb nádoby by nastal, kdyby na soustavu působil výsledný moment, t. j. kdyby bylo

$$F_r \,.\, l \,.\, \sigma_r \,.\, \xi_r + P\left(\overline{BE} + \frac{\overline{AB}}{2}\right) \gtrless F_v \,.\, l \,.\, \sigma_v \,.\, \xi_v + P_1\left(\overline{FC} + \frac{\overline{CD}}{2}\right).$$

Určeme nejdříve úsečku těžiště sloupce vodního takto:

Jest rameno

(2) $$\xi_v = \frac{\int_{-r_1}^{H-r_1} df \, . \, x}{F_v}.$$

Ježto

$$df = (x_2 - x_1)\, dy$$

a odlehlost těžiště elementu df od osy Y

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2},$$

obdržíme

(3) $$df \, . \, x = (x_2 - x_1)\, dy \, . \, \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\, dy;$$

avšak

$$x_2^2 = r_2^2 - y^2 \text{ a } x_1^2 = r_1^2 - y^2,$$

tak že

(4) $$x_2^2 - x_1^2 = r_2^2 - r_1^2.$$

Dosadíce toto do rovnice (3), dostaneme

$$df \, . \, x = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} dy$$

a tedy

(5) $$\xi_v = \frac{1}{F_v} \int_{-r_1}^{H-r_1} \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}\, dy = \frac{(r_2^2 - r_1^2)\, H}{2\, F_v}.$$

Zcela podobně jest

(6) $$\xi_r = \frac{(r_2^2 - r_1^2)\, h}{2\, F_r}.$$

Vyjádřeme dále momenty sil P a P_1.

Moment síly $P = P\,(\overline{BE} + \frac{\overline{AB}}{2}) = P \, . \, \frac{\overline{AE} + \overline{BE}}{2}$

$$= lp\,(\overline{AE} - \overline{BE})\, \frac{\overline{AE} + \overline{BE}}{2} = \frac{lp}{2}\,(\overline{AE}^2 - \overline{BE}^2)$$

a tedy dle rovnice (4), která platí pro všechny tětivy mezikruží rovnoběžné k OX,

(7) $$\text{mom. síly } P = \frac{lp\,(r_2^2 - r_1^2)}{2}.$$

Analogicky se obdrží

(8) $$\text{mom. síly } P_1 = \frac{lp_1\,(r_2^2 - r_1^2)}{2}.$$

Výsledný moment jest

$$M = F_v l\sigma_v \xi_v - F_r l\sigma_r \xi_r + \text{mom. } P_1 - \text{mom. } P$$

a tedy dle rovnic (5) až (8):

$$M = \frac{(r_2^2 - r_1^2)\,H}{2}\,l\sigma_v - \frac{(r_2^2 - r_1^2)\,h}{2}\,l\sigma_r + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}\,lp_1 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}\,lp$$

(9) $$= \frac{(r_2^2 - r_1^2)\,l}{2}\,(H\sigma_v - h\sigma_r + p_1 - p).$$

Je-li γ specif. váha tekutiny (na př. vzduchu) tlaky p a p_1 způsobující, jest

(10) $$p = p_1 + \gamma\,(H - h),$$

což dosazeno, dává

(11) $$M = \frac{(r_2^2 - r_1^2)\,l}{2}\,[H\,(\sigma_v - \gamma) - h\,(\sigma_r - \gamma)].$$

Při nepatrných výškách H a h aneb malé spec. váze γ lze dle (10) pokládati p a p_1 za stejné a z rovnice (9) výsleduje pak na základě (1), že

$$M = 0.$$

Poznámka redakce. Tuto úlohu lze zobecniti. Podobná nádoba válcová, jejíž řídící křivky jsou zcela libovolné, ale co do tvaru známé, zadrží se vnější silou v určité poloze a nalije se do ní několik kapalin spolu nemísitelných, různých specifických vah. Kapaliny oddělí se nahoře pneumaticky.

Když se nádoba pustí, počne se pohybovati, kývá se po jistou dobu kol rovnovážné polohy a konečně se v této poloze zastaví. Měla by se určiti poloha nádoby s kapalinami v rovné váze.

Podmínky rovnováhy pro tuto soustavu jsou:

Výslednice všech těžných sil na soustavu působících musí procházeti bodem podporovaným; momenty kapalin, otáčející nádobu jedním směrem, musí býti rovny momentům otáčejícím nádobu směrem opačným; vzdálenost těžiska soustavy od podpory jest *minimum*.

Věstník literární.

Annuaire pour l'an 1901, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Prix 1 fr. 50 c. Paris, Gauthier — Villars.

Každoroční publikace francouzského úřadu pro vyměřování zeměpisné délky přináší velké množství udajů a drobných zpráv z různých oborů přírodovědeckých, jichž bývá pro jejich známou přesnost a spolehlivost ve vědeckých spisech hojně používáno a k nimž na tomto místě velmi rádi poukazujeme.

V *kalendářní* části strana 3—80 můžeme se poučiti o zařízení různých kalendářů, o východu, západu slunce, měsíce a oběžnic, o průchodu jich poledníkem pařížským a deklinaci v různých dobách ročních.

Na str. 81—148 jest obsažen přehled *výjevů nebeských*, jež možno viděti v Paříži r. 1901. K těmto výjevům náleží zatmění slunce a měsíce, zakrytí hvězd měsícem, aspekty planet, hvězdy měnlivé a seznam hlavních radiantů létavic pro jednotlivé dni roku. Celkem jsou uvedeny 63 epochy, ve kterých se objevují různé roje meteoritů, jimž se z jisté strany u nás přikládá velký účinek nejen na výjevy atmosferické, ale též na výjevy nitra zemského.

Na str. 149—288 shledáváme hlavní data o slunci a o tělesech, která se kolem něho pohybují. V letošním ročníku se strojil při údajích o slunečních hodinách *Cornu* křivku středního poledne kolem přímky vyznačující pravé poledne. Jest známo, že se shoduje pravý čas pouze čtyřikráte do roka s časem středním, a sice dne 15. dubna, 15. června, 1. září a 25. prosince, kdežto v ostatních dobách ročních se od něho odchyluje. Rozdíl mezi časem pravým a středním slove časová rovnice. Tato má největší hodnotu $+ 14' 27''$ dne 10. února, $— 3' 49''$ dne 15. května, $+ 6' 17''$ dne 26. července a $— 16' 20''$ dne 3. listopadu.

Odchylky středního poledne od poledne pravého byly zde graficky znázorněny velmi jednoduchým způsobem.

O zemi bylo referováno obšírněji v roce minulém. Počet planet teleskopických neboli asteroidů, objevených do 31. října 1900 činí 500. V tabulkách přiložených shledáváme čísla, názvy, dobu objevení, dobu oběhu, střední vzdálenost od slunce, excentricitu a inklinaci 449 z těchto planetoidů.

Na str. 282—288 jsou uvedeny historické udaje komet, jež se objevily r. 1899.

Hojně tabulek vykazuje zpráva o mírách a vahách str. 317 až 332, o mincovnictví str. 333—368, o amortisaci úrokové str. 369—394 a o zeměpise a statistice str. 395—469.

V tabulkách statistických jsou obsaženy výšky největších vrchů, průsmyků, obydlených míst, pomníků a největší hloubky mořské. Tak shledáváme největší hloubku v Tichém oceánu pod 30° 25′ j. š. a 179° 0′ z. d. 9416 *m*, v Atlant. oceánu pod 19° 39′ s. š. a 68° 44′ z. d. 8340 *m* a v Ind. oceánu pod 23° 0′ j. š. a 98° 15′ v. d. 5820 *m*.

Udaje hlavních elementů magnetických, deklinace, inklinace a horizontální intensity pro hlavní místa jednotlivých departementů a arondissementů uvedl *Moureaux* na dobu 1. ledna 1901.

Různé tabulky na str. 488—636 obsahují hojné údaje, jež vztahují se k fysice a k chemii a jež mohou učitelům těchto odborů vědeckých pro svou přesnost býti velice vítanou pomůckou.

Články k těmto tabulkám v letošním ročníku připojené jsou: *Cornu*: O elektrickém přenosu síly; *H. Poincaré*: Zpráva o projektu revise měření oblouku poledníkového v Quitu; *Loewy*: O mezinárodní konferenci astronomické konané na observatoři pařížské v červenci r. 1900; *Bassot*: Historické poznámky k zavedení soustavy metrické; *Bouquet de la Grye*: Zpráva o XIII. konferenci mezinárodní společnosti geodetické; *J. Janssen*: O pokrocích učiněných ve vzduchoplavbě a o pracích vykonaných na observatoři na Mont Blancu r. 1900.

Ze zprávy o revisi měření poledníkového oblouku *peruanského*, nebo vlastně *quitského*, vyjímáme, že byla roku minulého akademie francouzská vybídnuta ministerstvem vyučování, aby podala o tomto projektu své dobré zdání. Akademie sestavila za tím účelem kommissi, skládající se ze členů odboru geometrického, astronomického, zeměpisného a navigačního, která projekt velmi podrobně prostudovala a učinila vládě následující návrhy:

1. aby byla revise měření poledníkového oblouku quitského provedena a sice aby místo 4·5° byl měřen oblouk 6°;

2. aby provedení této práce bylo svěřeno vojenskému úřadu zeměpisnému pod dozorem akademie věd, jež by jmenovala stálou kommissi, která by provádění prací sledovala a kontrolovala;

3. aby schválen byl předběžný návrh s vymezením připomenutí o pozorováních, týkajících se hlavně nevyhnutelného rozmnožení měření kyvadlových.

Původní měření oblouku peruanského podniknuto bylo za tím účelem, aby se zjistilo, má-li země dle theorie Newtonovy tvar koule smáčknuté aneb koule směrem osy prodloužené, jak tvrdili někteří odpůrcové této theorie. K rozhodnutí otázky bylo potřebí měřiti dva oblouky poledníkové v různé zeměpisné šířce a sice blíže rovníku a blíže polárního kruhu. Provedení prvního podniku svěřeno bylo *Bouguerovi* a *La Condaminovi* r. 1735, kdežto výpravu do Laponska vedl *Maupertuis* a *Clairaut*. Provedením obojího tohoto měření byla sploštěnost země nade vši pochybnost dokázána.

Původně byla geodesie skoro výhradně vědou francouzskou, avšak později pěstována byla též jinými národy, kteří podnikali v oboru tomto pozoruhodné práce. Methody měřické zdokonaleny zvláště pracemi *Gaussovými, Besslovými, Airyho* a *Clarkovými.*

Zvláštní náhodou se stalo, že všechna novější měření oblouků, jako *anglicko-francouzského* sahajícího od 32°—60° s. š.; *ruského* od 45°—70° s. š.; *indického* mezi 8°—32° s. š.; *amerického* na straně atlantské mezi 32°—45° s. š. a *amerického* od 30°—40° s. š. podél oceánu Tichého, byla vykonána v šířce střední, kdežto na rovníku v pozdější době nebylo měřeno. Také na jižní polokouli nebyl dosud měřen nežli oblouk 7° v osadě kapské.

Tato okolnost byla překvapující pro společnost geodetickou, tak že jest zde nutnost celému světu zjevna, aby se podnikala nová měření, a aby se měření vykonané La Condaminem a Maupertuisem opravilo. Jelikož se již *rusko-švédská* výprava odebrala na Špicberky, aby tam vyšetřila oblouk 4—5° a tím nahradila jaksi měření Maupertuisovo, nezbývá pro rovník nic nežli revidovati měření oblouku peruanského.

Měření v 18. století vztahovalo se od stanice Miry na 0° 35′ s. š. až k Targui na 3° 10′ j. š. k oblouku 3° 45′. Akademie však navrhuje, aby bylo měření nynější prodlouženo směrem severním i jižním a aby se vztahovalo k oblouku 6° obnášejícímu.

Oblouk *quitský* může býti pokládán za článek sítě, vycházející od Severního moře a sahající až k mysu Hornskému přes 120°.

Na severu inženýři „*Coast Survey*“ se uvolují provésti triangulaci po území Spojených států ponechávajíce prodloužení sítě k severu Kanaďanům. Mexiko bude pracovati stejným směrem ve své zemi a bylo by žádoucno, aby se republiky jihoamerické připojily k mezinárodní společnosti geodetické a pokračovaly dále v díle započatém Francií v republice Ecuadorské.

Dřívějšími výsledky měření země vyšla na jevo nutnost konati příští měření stupňová jednotně a soustavně. Za tou příčinou byl učiněn návrh, aby se sdružili odborníci všech národů. Na podnět generala Baeyera sešla se roku 1864 poprvé stálá kommisse středoevropského měření stupňového v Berlíně, kteráž se poznenáhlu rozšířila na mezinárodní společnost, jež obsahuje nyní 21 států s vyjmutím Číny a republik středo- a jihoamerických. Francie, kde se vlastně geodesie zrodila a která měla první síť triangulační, přistoupila ku společnosti r. 1871.

Mezinárodní společnost geodetická, jež jest jediná svého druhu, a jež má za úkol porovnávati a kontrolovati triangulační práce jednotlivých států ve společnosti se nalezajících, může nejlépe řešiti veškeré otázky, jež se týkají tvaru a velikosti země.

Každý stát provádí své práce geodetické, které se ubírají různým směrem, triangulace, astronomické určování šířky a délky hlavních bodů, gravitační a nivellační pozorování na vyvolených stanicích a j.

Na schůzích konference mezinárodní společnosti ve dnech 25. září až 6. října m. r. za předsednictví Faye bylo vedle uvedeného projektu revise měření oblouku *peruanského* pojednáno o větších podnicích triangulačních, jimiž by bylo lze zjistiti tvar země.

Tak na př. velká síť trojúhelníků kolem Středozemního moře, jež se prostírá po Francii, Hispanii a na pobřeží africkém, rozšíří se přes Sicilii do Italie, odkud se překročením Alp spojí se sítí francouzskou. Jinak může se síť italská spojiti ještě se sítí rakouskou a obklíčiti moře Jaderské.

Obtížnější práce nežli jsou tyto uvedené provádějí Rusové v Asii a jiní národové ve svých osadách.

Tomuto přičinění děkujeme, že máme nyní podrobné mapy z takových končin, které byly do nedávna ještě „terra incognita“.

Pan *Gill*, ředitel observatoře na Mysu Dobré naděje předložil projekt, aby se měřil poledníkový oblouk počínající od nejjižnějšího cípu Afriky a končící v Alexandrii. Rozdíl v šířce činí 66^0 a mohla by síť býti později prodloužena přes Malou Asii, aby se docílilo připojení k oblouku ruskému, končícímu na 66^0 s. š. Tím byl by získán oblouk 100^0. Provedení této obrovské práce vyžadovalo by doby asi půl století.

V nejbližší době bude měřen společně Rusy a Švédy poledníkový oblouk na Špicberkách, jenž bude delší nežli oblouk laponský, měřený kdysi Francouzi.

Vedle těchto projektů bylo jednáno na konferenci ještě o jiných otázkách jako o určování rozdílu zeměp. délek, o oscillaci osy zemské, o methodách pozorovacích a kalkulačních, o intensitě tíže a j.

V Paříži se vystřídal minulého roku jeden kongress za druhým a pronášeny byly v nich náhledy o nejrůznějších otázkách vědeckých. V tom ohledu jest pozoruhodnou řeč, již pronesl na zahájení kongressu *aeronautického J. Janssen* dne 15. září a z níž zde důležitější místa vyjímáme.

Aeronautika, která vznikla ve Francii, pěstuje se nyní u všech národů s velikým úsilím zvláště u Němců a Rusů za účely vojenskými a bude hráti v příštích válkách velkou úlohu. Bylo shledáno již v občanské válce severoamerické a zvláště v poslední válce jihoafrické, že mohou obezřelí vojevůdcové velmi dobře použiti služby aeronautické ku svým účelům.

Ačkoliv byly již ve vojenské aeronautice učiněny různé pokroky, zbývají přece ještě mnohá desiderata. Skutečně nepřestává problem řiditelných balonů zaměstnávati četné aeronauty. V Berlíně pokusy s takovýmto balonem měly smutné zakončení a na jezeře Bodamském prováděl marné pokusy spojené s velkým nákladem hrabě Zöppelin.

Jestli v otázce řiditelných balonů zůstává dosud všechno při starém, přece učiněny byly značné pokroky při výstupech do velikých výší a v udržení se v atmosféře po delší dobu. Jest to následkem zdokonalení materialu, jehož se při vzduchoplavbě užívá a method vzduchoplaveckých. Uvádíme zde na př. cestu p. *Malleta* po Francii, která trvala s přestávkami celých 8 dní. Vzhledem k výšce poukazujeme na výstupy p. *Bersona*, assistenta meteorologického ústavu v Berlíně, který vystoupil několikráte do výše 8000 *m* a jednou dokonce 9150 *m*, tak že se dostal do větší výše nežli sahají vrcholky hor himalajských. Při velkém prořídnutí vzduchu v této výši musil užívati hojně kysliku, aby se tam mohl udržeti.

Vědecké výzkumy vzduchoplavecké učinily značné pokroky v Německu přičiněním společnosti vzduchoplavecké v Berlíně podporované štědře se strany panovníkovy. Společnost vykazuje v době posledních 10 let 60 výstupů a výsledky jimi dosažené jsou sneseny ve velkém díle (Wissenschaftliche Luftfahrten), vydaném Assmannem a Bersonem.

Výšky dosažitelné s balony nesoucími pozorovatele, jsou ustanoveny prořídlostí vzduchu a nedostatkem kyslíku, jež nelze bez nebezpečí překročiti. Mají-li býti činěny výzkumy vědecké ve velmi velkých výškách, tedy jest nutno pomýšleti na jiné prostředky. Od kongressu r. 1889 bylo počato uskutečňováním myšlenky Le Monnierovy užívati balonů *výzkumných*, opatřených pouze přístroji samočinně zapisujícími. Pomocí těchto balonů lze dosáhnouti mnohem větší výšky nežli s balony nesoucími pozorovatele.

Různé pokusy balonové vedly k zařízení *mezinárodní kommisse aeronautické*, která řídí veškeré výstupy balonové, v různých zemích za účely vědeckými podnikané. Bylo uznáno, že jest to spojeno s výhodami, dějí-li se výzkumné výpravy do vzduchu ve stejnou dobu.

Avšak balonky výzkumné nejsou více jedinými prostředky ku provádění studií vědeckých. Za tím účelem přizpůsobeni byli též draci po příkladu Franklinově. Americký meteorolog *Rotch* vypouští draky opatřené přístroji samočinně registrujícími, kteří se vznášejí až do výše 4815 *m*.

Teisserenc de Bort zařídil svým nákladem v Trappech meteorologickou stanici, kde se pozorují výzkumy meteorologické různým způsobem a kde jest též zavedeno pravidelné vypouštění draků, při čemž dosaženo bylo jednou výše 5150 *m*. Také při meteorologickém ústavu v Berlíně bylo v nejnovější době zavedeno nové oddělení pro vypouštění draků do vzduchu, opatřených registrujícími přístroji.

Aeronautika má velkou budoucnost; není pochybnosti, že se časem podaří sestrojiti řiditelné vzducholodi. Národ, který v tom ohledu učiní největší pokroky, nabude tím takové moci, o které si dnes nemůžeme učiniti pojem.

Jako jest nyní pánem země, kdo vládne mořem, bude míti tím ještě větší moc národ, který bude ovládati atmosferu. Moře má své omezení a své břehy, kterých atmosfera nezná, moře dává plavci k disposici pouze svou hladinu, kdežto vzduchoplavci bude náležeti celá atmosfera. Moře odděluje pevniny, atmosfera je spojuje panujíc nad nimi.

Můžeme očekávati s obavou následky úplného převratu v podmínkách života národohospodářského a v poměrech mezinárodních. Po stránce vědecké bude míti z toho největší prospěch, až se zmocní člověk celé atmosfery, meteorologie, jež bude obsahovati poznání a příčiny výjevů v celém oboru atmosfery se vyskytující. *Dr. F. Augustin.*

Sbírka příkladů geometrických pro vyšší třídy středních škol. Sestavil *Adolf Mach,* professor c. k. vyšší realky v Jičíně. Jičín, 1900. Nákladem vlastním. V kommissi Höfera a Kloučka v Praze.

Konečně dočkali jsme se sbírky geometrických úloh, ačkoliv s jiné strany, než odkud jsme ji již delší dobu čekali. A když si vzpomeneme obtíží, jež jsme měli se sestavováním, po případě vyhledáváním vhodných příkladů, co času ztraceno diktováním oněch, jež ukládány k cvičbě domácí, dojista vítáme ji všichni učitelé mathematiky na středních školách s radostí, a myslím, že přijali bychom bez reptání i sbírku dosti chatrnou, kterou by aspoň poněkud nám bylo uleveno a žákům snaživějším byla poskytnuta možnost, aby doma samostatně se mohli cvičiti. Proto jsme tím více uspokojeni, že hned na poprvé dostalo se nám sbírky velmi dobré a pečlivě uspořádané, takové asi, o jaké praví instrukce, že by bylo žádoucno, aby byla v rukou žáků.

V planimetrii jest příkladů 829, z trigonometrie a goniometrie 332, ze stereometrie 516, ze sférické trigonometrie 105 a z geometrie analytické 422, tedy celkem jest ve sbírce 2.22[illegible] úloh, vlastně ještě mnohem více, neboť někdy shrnuto až 15 příkladů obdobných pod jedním číslem. Jest to tedy sbírka bohatá a obsahuje velmi slušný výběr příkladů početních a konstruktivních, a příkladů na mnoze zcela originelních, velice zajímavých, jimiž vzbudí se u žáků zvědavost a zájem jejich pro řešení se značně zvýší; to platí zvláště o mnohých příkladech z trigonometrie, zejmena oněch, kde výsledkem není číslo neb mathematický výraz, nýbrž na př. město (př. 117., 121., 136., 147.). Také dbáno v rozsáhlé míře koncentrace vyučování: jest tam mnoho úloh a velmi praktických z fysiky, ze zeměpisu, z astronomie, astronomického zeměpisu, mnohé jednají o těle lidském, o našich penězích, o věcech školních, o drahách, o poštovních tiskopisech a t. d. Vůbec jednotvárnosti ve sbírce této není, jen se mi zdá astronomie až příliš mnoho, a stíny rozmanitých tvarů a délek na různých místech zeměkoule a v rozličných dobách ročních se všude jen hemží. V analytické geometrii zvláště se zamlouvají příklady o geometrických místech, při nichž možno příslušný pohyb znázorniti pomocí hran školní tabule, pravítka, kružítka a p. (př. 114., 124., 125., 220., 221., 266., 296., 297.). Některé úlohy nejsou však dosti přesně stylisovány, nebo jest v nich něco vynecháno, tak že někdy jen s tíží lze si domysliti, co jest vlastně počítati (na př. úl. 57. trig., 139., 187., 366., 440. b ster., 143. a 216. an. geom.). Také omylů tiskových jest dosti, přiblížně, křivočárý, pruvoúhlý, týč a j. v.; také střídají se tvary nesprávné se správnými: tratě a trati (gen. sing.), odchýlka a odchylka, půlicí a půlící a t. d. To však dá se snadno vysvětliti tím, že sbírka tištěna ve venkovské tiskárně, kde ponechají málo času ke korrektuře, spěchajíce, aby mohli sazbu co nejdříve rozmetati a dále sázeti. Slov zapísčení, dolení, hoření a dokonce i nejhořenější užito však patrně s rozmyslem, ač správna nejsou, také nesouhlasíme s p. autorem, zavádí-li na př. cos $(90 + \alpha)^0$ místo všeobecně užívaného cos $(90^0 + \alpha)$, neboť vzorce příslušné platí i tehdy, udán li úhel α i v minutách a vteřinách, říká-li střední příčka trojúhelníka, a nazývá-li rovnice, jaké jsou na př. v úloze 18. na str. 68. identickými. Mimo to zasluhuje též výtky, že až do dnešního dne výsledků a pokynů k řešení, jež vlastně podle titulu měly býti hned připojeny, v rukou nemáme. Jak se dovídáme, jest sbírka nyní již na dobro rozebrána, což je nejlepším dokladem, jak jí bylo třeba, a kterak dobré vlastnosti její daleko převyšují slabší její stránky. Nové, opravené vydání nedá na sebe jistě dlouho čekati a za nedlouho asi zdomácní sbírka tato na ústavech našich podobně jako známá sbírka Hromádkova a Strnadova, čehož jí po zásluze upřímně přejeme. Prof. *Th. Zelinka.*

Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Nebst Erläuterung der bezüglichen Göttinger Universitätseinrichtungen.

Vorträge, gehalten in Göttingen, Ostern 1900, bei Gelegenheit des Feriencurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, gesammelt von *F. Klein* und *E. Riecke.* Mit 84 Textfiguren. Teubner, Lipsko a Berlín. 1900. (VIII. + 252 str.).

Felix Klein, známý professor mathematiky na universitě v Gottinkách, již po celou řadu let zanášel se plány, jak by „vztahy mathematiky a fysiky na jedné straně a technických věd na straně druhé v bádání a vyučování daleko vydatněji a bezprostředněji se vyvinuly, než se posud dálo. Technickým vysokým školám má býti vše to vyhrazeno, co se vztahuje k vlastním úkolům praxe a vzdělání inženýrů. Universita má spracovávat otázky fysikální techniky se stanoviska theoretických věd přírodních a v této formě učiniti je přístupnými mathematikům a fysikům na ní studujícím.“ (Z řeči 6. pros. 1895.). Tím docíliti chce užšího styku theorie a praxe, který pro pokrok obou je velmi důležitým a užitečným, jak ukazuje na př. optický ústav Zeiss-Abbeův v Jeně nebo elektrotechnický ústav Siemensův. Technické vysoké školy stavěly a staví se namnoze dosud nepřátelsky k těmto snahám, spatřujíce v nich neodůvodněně konkurenci.*) Přes to podařilo se úsilí

*) Není nám známo, že by kruhy technické proti uvedeným snahám nepřátelsky vystupovaly. Spíše by technické kruhy mohly spatřovati uznání

Kleinovu založiti při universitě Gottingské laboratoř elektrotechnickou a ústav pro všeobecnou technickou fysiku, jichž určením je jednak, aby mohli studující fysiky, mathematiky a z části i chemikové seznati applikaci abstraktní theorie na skutečnou praxi, a podruhé, aby inženýři, po ukončení studií na technické vysoké škole, mohli se zde věnovati studiu otázek rázu více theoretického a všeobecně fysikálního, při němž je třeba experimentálních měření na příslušných strojích. Aby toto sblížení theorie a praxe mělo také blahodárný účinek na vzdělání středoškolské, bylo do nového pruského zkušebního řádu pro učitele středních škol (Oberlehrer) hlavně přičiněním Kleinovým přijato ustanovení, že může býti udělena učitelská způsobilost pro „užitou mathematiku" (Lehrbefugniss für angewandte Mathematik). Pro působící již učitele mathematiky a fysiky zařízené velikonoční prázdninové kursy na universitě v Gottinkách byly r. 1900 věnovány z veliké části applikacím těchto věd na techniku a praktický život, aby tak byla poskytnuta posluchačstvu příležitost seznati tato nová odvětví. Soubor těchto přednášek vynikající bohatostí a zajímavostí obsahu vydali Klein a Riecke pod uvedeným titulem ve formě knižní. Nadpisy jednotlivých oddílů jsou: I. *E. Riecke*: Dějiny fysikálního ústavu a fysikálního učení na universitě v Gottinkách. II. *F. Klein*: Všeobecné poznámky o užité mathematice. III. *Týž*: O technické mechanice. IV. *Fr. Schilling*: O deskriptivní geometrii. V. *E. Wiechert*: Úvod do geodaesie. IV. *G. Bohlmann*: O mathematice pojišťovací. VII. *E. Meyer*: O tepelných strojích. VIII. *Th. Des Coudres*: O elektrotechnice. Na konec otištěny jsou v přídavku čtyři statě Kleinovy obsahující všeobecné výklady o jeho snahách. Zvláště poslední čtyři ze jmenovaných prací vynikají bohatostí obsahu, kdežto prvé čtyři jsou spíše informačními přehledy. Všude udána je také knižní literatura, v níž nabyti lze dalšího poučení. Kniha je zajímavou pro každého, kdo interessuje se o sympathickou myšlénku užšího sblížení středoškolského učení s dnešní technikou a životem.

Dr. B. Kučera.

---

v té okolnosti, že university samy přicházejí k přesvědčení, že i při vědách ryze theoretických sluší míti zřetel k velikému rozvoji upotřebených věd přírodních. O nějaké konkurenci mezi technikou a universitou nemůže již proto býti řeči, poněvadž vzdělání, jež podává vysoké učení technické, směřuje nejen ku *vědění* ale také ku *tvoření* (*konstrukci*) *pro praktické potřeby*, kterážto stránka založena jsouc ovšem na oné, jest hlavním úkolem technické výchovy. *Redakce.*

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 25.

Dána jest kuželosečka a na této tři libovolné body M_1, M_2, M_3. Pak vedeny přímky P_1, P_2, P_3 rovnoběžné s hlavní osou ve vzdálenostech FM_1, FM_2, FM_3, kdež F značí ohnisko kuželosečky, a body M_1, M_2, M_3 spuštěny kolmice Q_1, Q_2, Q_3 k ose hlavní. Jest dokázati, že průsečíky (P_1Q_1), (P_2Q_2), (P_3Q_3) jsou na jediné přímce.

Posl. fil. *Karel Nečas.*

Řešení. (Zaslal p. *Viktor Tereba,* stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí.)

Polárná ohnisková rovnice kuželoseček jest

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

kdež p značí parametr, ε číselnou výstřednost. Zavedeme-li místo polárného úhlu φ úsečku x, jest

$$x = r \cos \varphi, \quad r = r + \varepsilon x.$$

Leží-li body $M_1 (r_1\, x_1)$, $M_2 (r_2\, x_2)$, $M_3 (r_3\, x_3)$ na kuželosečce, jest

$$r_1 = p + \varepsilon x_1, \; r_2 = p + \varepsilon x_2, \; r_3 = p + \varepsilon x_3,$$

odkud vyloučením p, ε plyne podmínka

$$\begin{vmatrix} x_1, & r_1, & 1 \\ x_2, & r_2, & 1 \\ x_3, & r_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Průsečíky daných přímek mají v pravoúhlé soustavě, kdež F jest počátkem a hlavní osa osou úseček, souřadnice

$$(P_1Q_1) \ldots x_1, r_1; \ (P_2Q_2) \ldots x_2, r_2; \ (P_3Q_3) \ldots x_3, r_3;$$

jest tedy

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

což jest známá podmínka, by body (P_1Q_1), (P_2Q_2), (P_3Q_3) ležely v jedné přímce.

Úloha 26.

Řešiti rovnici

$$1 - \frac{2x}{x^2 + x - 2} + \frac{2x}{x^2 - x - 6} + \frac{2x}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= \frac{10x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Honzák,* stud. VI. tř. gym. ve Vys. Mýtě.)

Rozložíme-li jmenovatele zlomků v linearné činitele, můžeme rovnici psáti

$$1 - \frac{2x}{(x-1)(x+2)} + \frac{2x}{(x+2)(x-3)} + \frac{2x}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \frac{10x}{(x-1)(x+2)(x-3)}.$$

Násobíme-li obě strany nejmenším spol. násobkem jmenovatelů, obdržíme

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 + 2x(x - 1 + x + 2 - x + 3) - 10x = 0$$

čili

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Jeden kořen této rovnice jest patrně

$$x_1 = 1;$$

dělíme-li činitelem kořenovým $x - 1$, dospějeme k rovnici kvadratické

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

z níž ustanovíme

$$x_2 = 2, \quad x_3 = -3.$$

Poznámka redakce: Tyto hodnoty jsou kořeny poslední rovnice kubické, ale ne všechny vyhovují rovnici původně dané.

Jestliže totiž rovnici annulujeme a všechny členy v jeden zlomek Z sloučíme, obdržíme rovnici

$$Z = \frac{x^3 - 7x + 6}{(x-1)(x+2)(x-3)} = 0$$

čili

$$Z = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+2)(x-3)} = 0.$$

Tento výraz Z stává se rovným nulle při $x = 2$, $x = -3$ ne však při $x = 1$; tu nabývá hodnoty

$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-3)} = \frac{2}{3}.$$

Rovnice

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

není equivalentní s rovnicí původně danou, nýbrž má o jeden kořen $(x = 1)$ více.

Úloha 27.

Nad stranou $\overline{ab} = a$ sestrojen rovnostranný trojúhelník abc a trojúhelník abd tak, že obvod i obsah tohoto rovná se dvojnásobnému obvodu i obsahu trojúhelníka prvého.

a) Které jsou strany $\overline{ad}$, $\overline{bd}$ trojúhelníka abd?

b) V kterém poměru jsou poloměry kružnice opsané a vepsané trojúhelníku abd?

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Václav Sukdol*, stud. VIII. tř. gym. v Českých Budějovicích.)

Položme

$$\overline{ad} = x, \quad \overline{bd} = y, \quad \overline{dg} = v, \quad \overline{bg} = z,$$

při čemž dg značí výšku trojúhelníka abd. Jelikož dle podmínky

$$\triangle\, abg = 2\,.\,\triangle\, abc,$$

jest

$$v = a\sqrt{3}.$$

Mimo to jest dle druhé podmínky

$$x + y + a = 6a,$$

dále pak

$$\begin{aligned} x^2 &= (a + z)^2 + v^2 \\ y^2 &= z^2 + v^2. \end{aligned}$$

Z rovnic těchto plyne

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a^2 + 2az \\ x + y &= 5a \\ x - y &= \frac{a + 2z}{5}, \end{aligned}$$

tudíž

$$x = \frac{13a + z}{5}, \quad y = \frac{12a - z}{5}$$

a jelikož

$$y^2 = z^2 + 3a^2,$$

obdržíme k určení z rovnici

$$8z^2 + 8az - 23a^2 = 0,$$

z níž ustanovíme

$$z = \frac{a}{4}(-2 \pm 5\sqrt{2}).$$

Při hořejším znaménku vypočítáme

$$x = \frac{a}{4}(10 + \sqrt{2}), \quad y = \frac{a}{4}(10 - \sqrt{2}),$$

při negativném z budou hodnoty x, y navzájem vyměněny.

b) Dle známých vzorců ustanovíme poloměr ϱ kružnice vepsané i poloměr r kružnice opsané trojúhelníku abd. Jestiť

$$\varrho = \frac{\Delta}{s} = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} : 3a = \frac{a}{6}\sqrt{3},$$

$$r = \frac{axy}{4\Delta} = a \cdot \frac{a^2}{16} \cdot 98 : 2a^2\sqrt{3} = \frac{49a}{48}\sqrt{3},$$

tudíž

$$\varrho : r = 8 : 49.$$

Úloha 28.

Sestrojiti jest rovnoramenný trojúhelník, dán-li rozdíl půdice a ramene, jakož i rozdíl příslušných výšek.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Ondř. Kopeček,* stud. VII. tř. real. v Hodoníně.)

Rozbor. Označme rameno $\overline{ac} = \overline{bc}$ trojúhelníka abc písmenem a, půdici $\overline{ab} = b$, příslušné výšky $\overline{an} = u$, $\overline{cm} = v$; předpokládejme $a > b$, tedy $u < v$. Jelikož jest

$$a : b = v : u,$$

jest

$$(a - b) : a = (v - u) : v,$$

$$\frac{a - b}{v - u} = \frac{a}{v}.$$

Dáno-li $a - b$, $v - u$, jest tedy znám též poměr $\frac{a}{v}$ a tím určen tvar trojúhelníka abc. Dle poměru toho lze napřed sestrojiti

$$\sphericalangle\, acm = \sphericalangle\, bcm = \gamma.$$

Učiníme-li na rameni bc úsečku

$$bd = ba,$$

a označíme-li

$$\sphericalangle\, adc = \varphi, \quad \sphericalangle\, bac = \alpha = \mathrm{R} - \gamma,$$

jest

$$\varphi = \alpha + 2\mathrm{R} - \varphi,$$

tudíž

$$\varphi = \mathrm{R} + \frac{\alpha}{2}.$$

Dle toho lze k rameni $\overline{cd}$ sestrojiti rameno $\overline{da}$, čímž určen vrchol a. Je-li $a < b$, tudíž $u > v$, lze obdobně pokračovati.

Úloha 29.

Jsou-li u, v výšky rovnoramenného trojúhelníka příslušné k rameni a a půdici b, budiž řešen trojúhelník, dáno-li

$$a - b = 17,\ v - u = 15.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Dvořák*, stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Ku dvěma rovnicím daným připojme

$$au = bv$$

$$a^2 = v + \frac{b^2}{4};$$

jest pak

$$v = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}},\quad u = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}},$$

tudíž

$$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}\left(1 - \frac{b}{a}\right) = 15.$$

Ve spojení s první rovnicí danou obdržíme

$$17\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = 15a$$

čili

$$289\,(4a^2 - b^2) = 900a^2,$$

z čehož, hledíme-li pouze k hodnotám kladným,

$$16a = 17b.$$

Z rovnic

$$a - b = 17$$

$$a : b = 17 : 16$$

vycházejí pak hodnoty

$$a = 289,\quad b = 272;$$

k nim přísluší

$$v = 255,\quad a = 240.$$

Úloha 30.

Příčky spojující středy protějších stran čtyrúhelníka ABCD protínají se v bodě S.

Budiž dokázáno, že jest

$$\triangle ABS + \triangle CDS = \triangle BCS + \triangle DAS.$$

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Rychlík*, stud. V. tř. akad. gymn. v Praze.)

Strany AB, BC, CD, DA buďtež po řadě rozpůleny v bodech M, P, N, Q; příčky MN, PQ protínají se v bodě S. Potom jest

$$SM = SN, \quad SP = SQ,$$

jelikož MPNQ jest rovnoběžník.

Mimo to jest

$$\triangle ABS = \triangle AMQ + \triangle BMP;$$

neboť, spustíme-li s bodů P, Q, S kolmice PP_1, QQ_1, SS_1 ku straně AB, jest

$$\triangle AMQ = \frac{1}{2} \overline{AM} \,.\, \overline{QQ_1}$$

$$\triangle BMP = \frac{1}{2} \overline{BM} \,.\, \overline{PP_1},$$

tudíž

$$\triangle AMQ + \triangle BMP = \frac{1}{2} \overline{AB} \,.\, (\overline{PP_1} + \overline{QQ_1}) = \overline{AB} \,.\, \overline{SS_1} = \triangle ABS.$$

Z obdobných důvodů jest

$$\triangle CNP + \triangle DNQ = \triangle CDS.$$

Jest tedy

$$\begin{aligned} \triangle ABS + \triangle CDS &= \triangle AMQ + \triangle BMP \\ &\quad + \triangle CNP + \triangle DNQ \\ &= ABCD - MPNQ = \frac{1}{2} ABCD; \end{aligned}$$

rovněž jest

$$\triangle BCS + \triangle DAS = \frac{1}{2} ABCD,$$

tudíž, jak tvrzeno,

$$\triangle ABS + \triangle CDS = \triangle BCS + \triangle DAS.$$

Úloha 31.

V harmonickém čtyrúhelníku ABCD dány jsou úhly

$$\sphericalangle DAB = \alpha, \quad \sphericalangle ABC = \beta.$$

Který úhel svírají úhlopříčky?

[*Harmonickým slove čtyrúhelník do kruhu vepsaný, v němž součiny protějších stran jsou stejné*].

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Lochmann*, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi.)

Ve čtyrúhelníku ABCD vepsaném do kruhu poloměru r označme úhly

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \varphi,$$

úhel úhlopříček ω.

Jest pak

$$\omega = \alpha - \varphi + \beta - \varphi,$$

tudíž

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta - \omega}{2}$$

$$\alpha - \varphi = \frac{\alpha - \beta + \omega}{2}$$

$$\beta - \varphi = \frac{\beta - \alpha + \omega}{2}$$

$$\omega + \varphi = \frac{\alpha + \beta + \omega}{2}.$$

Mimo to jest

$$\overline{AB} = 2r \sin(\omega + \varphi)$$

$$\overline{CD} = 2r \sin \varphi$$

$$\overline{AC} = 2r \sin(\beta - \varphi)$$

$$\overline{BD} = 2r \sin(\alpha - \varphi),$$

tudíž

$$\sin \varphi \sin(\omega - \varphi) = \sin(\alpha - \varphi) \sin(\beta - \varphi)$$

čili

$$\sin\frac{\alpha+\beta-\omega}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\omega}{2}=\sin\frac{\alpha-\beta+\omega}{2}\sin\frac{\beta-\alpha+\omega}{2}.$$

Jelikož však obecně

$$\sin\gamma\sin\delta=\frac{1}{2}[\cos(\gamma-\delta)-\cos(\gamma+\delta)],$$

přechází rovnice poslední ve

$$\cos\omega-\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta)-\cos\omega$$

čili

$$\cos\omega=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

tudíž

$$\cos\omega=\cos\alpha\cos\beta.$$

Úloha 32.

Kterou odchylku má rovina kruhu od průmětny, je-li průmětem jeho ellipsa o parametru rovném polovici poloměru? Jaká jest pak číselná výstřednost ellipsy?

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Zdeněk Laštovka*, stud. VII. tř. r. v Čes. Budějovicích.)

Poloosy ellipsy jsou

$$a=r,\quad b=r\cos\alpha,$$

má-li rovina kruhu od průmětny odchylku α. Parametr ellipsy jest pak

$$p=\frac{b^2}{a}=r\cos^2\alpha=\frac{r}{2},$$

tudíž

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \alpha=45^0.$$

Lineárná výstřednost ellipsy v tomto případě jest

$$e=\sqrt{a^2-b^2}=r\sin\alpha=\frac{r\sqrt{2}}{2},$$

pročež výstřednost číselná

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Úloha 33.

Dva jehlany, jichž základny jsou $Z_1 = 15$, $Z_2 = 20$ a výšky $v_1 = 6$, $v_2 = 4$, stojí na téže rovině; ve které vzdálenosti jest vésti k této rovinu rovnoběžnou,

a) aby vznikly na jehlanech řezy obsahem stejné,

b) aby vznikly komolé jehlany obsahem stejné.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *K. Dusl*, stud. VI. tř. r. v Rakovníku.)

a) Žádaná rovina měj od základen vzdálenost x, průsek její s jehlanem prvním měj obsah P_1, s druhým P_2. Potom platny jsou úměry

$$Z_1 : P_1 = v_1^2 : (v_1 - x)^2$$
$$P_2 : Z_2 = (v_2 - x)^2 : v_2^2.$$

Má-li býti

$$P_1 = P_2 = P,$$

obdržíme znásobením obou úměr

$$Z_1 : Z_2 = v_1^2 (v_2 - x)^2 : v_2^2 (v_1 - x)^2$$

a odmocněním

$$\sqrt{Z_1} : \sqrt{Z_2} = v_1 (v_2 - x) : v_2 (v_1 - x).$$

Odtud ustanovíme

$$x = \frac{v_1 v_2 (\sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2})}{v_2\sqrt{Z_1} - v_1\sqrt{Z_2}},$$

načež

$$P = \left(\frac{v_1 - x}{v_1}\right)^2 Z_1 = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_2\sqrt{Z_1} - v_1\sqrt{Z_2}}\right)^2 Z_1 Z_2.$$

Při daných hodnotách číselných jest

$$x = \frac{24(\sqrt{20} - \sqrt{15})}{6\sqrt{20} - 4\sqrt{15}} = 3 - \sqrt{3},$$

$$P = \left(\frac{2}{6\sqrt{20} - 4\sqrt{15}}\right)^2 . 300 = \frac{5}{2}(2 + \sqrt{3}).$$

K témuž výsledku mohli jsme dojíti touto cestou:

$$P_1 = \left(\frac{v_1 - x}{v_1}\right)^2 Z_1, \quad P_2 = \left(\frac{v_2 - x}{v_2}\right)^2 Z_2,$$

tedy při $P_1 = P_2$ jest

$$\left(\frac{v_1 - x}{v_1}\right)^2 Z_1 = \left(\frac{v_2 - x}{v_2}\right)^2 Z_2.$$

Rozvineme-li tuto rovnici a spořádáme, nabude podoby

$$(Z_1 v_2^2 - Z_2 v_1^2)\, x^2 - 2v_1 v_2 (Z_1 v_2 - Z_2 v_1)\, x + v_1^2 v_2^2 (Z_1 - Z_2) = 0;$$

odtud ustanovíme

$$x = \frac{v_1 v_2}{Z_1 v_2^2 - Z_2 v_1^2} [Z_1 v_2 - Z_2 v_1 \mp (v_1 - v_2)\sqrt{Z_1 Z_2}],$$

kterýž výraz od hořejšího jen tvarem se liší.

b) Při stejném označení jako v odst. *a*) obdržíme pro rovnost obsahů kuželů zkomolených podmínku

$$\frac{x}{3}[Z_1 + \sqrt{Z_1 P_1} + P_1] = \frac{x}{3}[Z_2 + \sqrt{Z_2 P_2} + P_2]$$

čili

$$Z_1\left[1 + \frac{v_1 - x}{v_1} + \left(\frac{v_1 - x}{v_1}\right)^2\right] = Z_2\left[1 + \frac{v_2 - x}{v_2} + \left(\frac{v_2 - x}{v_2}\right)^2\right].$$

Tuto upravíme v rovnici

$$(Z_1 v_2^2 - Z_2 v_1^2)\, x^2 - 3v_1 v_2 (Z_1 v_2 - Z_2 v_1)\, x + 3v_1^2 v_2^2 (Z_1 - Z_2) = 0,$$

z níž plyne

$$x = -\frac{v_1 v_2 \sqrt{3}}{2(Z_1 v_2^2 - Z_2 v_1^2)} [(Z_1 v - Z_2 v_1)\sqrt{3} \mp \sqrt{4(v_1 - v_2)^2 Z_1 Z_2 - (Z_1 v_2 - Z_2 v_1)^2}\,].$$

Dané hodnoty číselné vedou k rovnici

$$x^2 - 9x + 18 = 0,$$

z níž ustanovíme

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 6.$$

Rovina ve vzdálenosti $x_1 = 3$ rovnoběžná ku základnám stanoví komolé kužele obsahu

$$K_1 = K_2 = \frac{Zx}{3} \cdot \frac{3v^2 - 3vx + x^2}{v^2},$$

kdež hodnotám v a Z lze připojiti ukazatele 1 neb 2; v obou případech obdržíme

$$K = \frac{75}{2} = 37{\cdot}5.$$

Rovina u vzdálenosti $x_2 = 6$ prochází vrcholem kužele prvního, jehož obsah jest

$$K'_1 = \frac{15{\cdot}6}{3} = 30.$$

Druhý kužel jest doplniti ve dvojkužel, jehož vrchní základnu Z'_2 vypočítáme z úměry

$$Z_2 : Z'_2 = 4^2 : 2^2,$$

tedy

$$Z'_2 = 5;$$

obsah dvojkužele jest pak

$$K'_2 = \frac{1}{3}(20 \,.\, 4 + 5 \,.\, 2) = 30,$$

tudíž také

$$K'_1 = K'_2.$$

Úloha 34.

Dána jest ellipsa, na jejíž hlavní poloose $\overline{oa}$ *jest ohnisko* f, *na prodloužené vedlejší poloose* $\overline{ob}$ *pak bod* g *tak, že* $\overline{fg} \perp \overline{bf}$.

Je-li m *libovolný bod ellipsy a vedeme-li* $\overline{mh} \parallel \overline{oa}$, $\overline{hi} \parallel \overline{bg}$, $\overline{il} \parallel \overline{oa}$, *kdež leží bod* h *na* $\overline{bf}$, i *na* $\overline{fg}$, l *na* $\overline{bg}$, *jest* $\overline{ml}$ *normalou ellipsy v bodě* m. *Budiž podán důkaz této konstrukce.*

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Emil Schoenbaum*, stud. VIII. tř. g. v Benešově.)

Budiž

$$\overline{oa} = a, \quad \overline{ob} = b, \quad \overline{of} = e.$$

Jsou-li x_1, y_1 souřadnice bodu m, jest rovnice normály

$$N \equiv a^2 y_1 x - b^2 x_1 y - e^2 x_1 y_1 = 0$$

a tudíž úsek její na ose Y

$$n = -\frac{e^2 y_1}{b^2}.$$

Označíme-li

$$\sphericalangle\, ofb = \alpha,$$

jest

$$n = - y_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Dle sestrojení jest, značí-li j průsečík přímky $\overline{hi}$ s poloosou $\overline{oa}$,

$$\overline{hj} = y_1, \quad \overline{jf} = y_1 \operatorname{ctg} \alpha,$$
$$\overline{ji} = \overline{ol} = - y_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

tedy

$$\overline{ol} = n.$$

Poznámka redakce: Obdobně lze ustanoviti průsečík normaly s osou hlavní. Veďme $\overline{ml} \parallel \overline{bg}$, $\overline{ln} \parallel \overline{oa}$, $\overline{np} \perp \overline{fg}$, $\overline{pq} \perp \overline{oa}$, při čemž leží body l a p na $\overline{fg}$, n na $\overline{og}$, q na $\overline{oa}$; $\overline{mq}$ jest normálou v bodě m. Odůvodnění záleží v tom, že jest

$$\overline{oq} = \frac{e^2 x_1}{a^2} = x_1 \cos^2 \alpha.$$

Úloha 35.

Dány jsou v pravoúhlé soustavě souřadnic body

$$a_1\,(2, 0), \quad b_1\,(6, 0); \quad a_2\,(0, 4), \quad b_2\,(0, 1).$$

Jest ustanoviti bod c tak, aby trojúhelníky $a_1 b_1 c$, $a_2 b_2 c$ byly sobě podobny.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Zahradníček*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.)

Jsou-li trojúhelníky $a_1 b_1 c$, $a_2 b_2 c$ vzájemně podobny, jest

$$\frac{a_1c}{a_2c} = \frac{b_1c}{b_2c} = \frac{a_1b_1}{a_2b_2};$$

podmínky tyto jsou k určení bodu c nutny, ale také dostatečny. Označíme-li souřadnice bodu c písmeny x, y, jest

$$\overline{a_1c} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}, \quad \overline{b_1c} = \sqrt{(x-6)^2 + y^2},$$
$$\overline{a_2c} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}, \quad \overline{b_2c} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$

Pro bod c obdržíme tudíž dvě geometrická místa určená rovnicemi

$$\sqrt{\frac{(x-2)^2 + y^2}{(x-6)^2 + y^2}} = \frac{4}{3}, \quad \sqrt{\frac{x^2 + (y-4)^2}{x^2 + (y-1)^2}} = \frac{4}{3};$$

tato místa jsou dvě kružnice Apolloniovy pro úsečky $\overline{a_1a_2}$, $\overline{b_1b_2}$ a rovnice jich ve tvaru racionalném jsou

$$K_1 \equiv 7(x^2 + y^2) + 36x - 128y + 220 = 0$$
$$K_2 \equiv 7(x^2 + y^2) + 108x - 32y - 308 = 0.$$

Průsečíky těchto kružnic jsou 2 body c řešící úlohu.

Chordála obou kružnic má rovnici

$$K_2 - K_1 \equiv 72x + 96y - 528 = 0$$

čili

$$3x + 4y - 22 = 0;$$

body společné této přímce a kterékoli z obou kružnic jsou body hledané. Ustanovíme-li na př.

$$y = \frac{22 - 3x}{4}$$

a dosadíme do rovnice K_2, obdržíme rovnici

$$175x^2 + 1188x - 4356 = 0,$$

ze které vypočítáme

$$x = \frac{1}{175}[-594 \pm 1056];$$

bude tedy

$$x_1 = \frac{66}{25} = 2{\cdot}64, \quad x_2 = -\frac{66}{7} = -9\frac{3}{7},$$

k čemuž přísluší

$$y_1 = \frac{88}{25} = 3{\cdot}52, \quad y_2 = \frac{88}{7} = 12\frac{4}{7}.$$

Souřadnice x_1, y_1 sluší bodu c_1, souřadnice x_2, y_2 bodu c_2; i jest pak

$$\triangle\, a_1b_1c_1 \sim \triangle\, a_2b_2c_1, \quad \triangle\, a_1b_1c_2 \sim \triangle\, a_2b_2c_2.$$

Úloha 36.

Řešiti jest rovnici

$$\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{x^2-b^2}} + \frac{c}{\sqrt{x^2-c^2}} = \frac{abc}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2)}}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Ant. Růžek*, stud. VIII. třídy gym. v Táboře.)

Rovnici zlomků zbavenou pišme v podobě

$$a\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)} + b\sqrt{(x^2-c^2)(x^2-a^2)}$$
$$= abc - c\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)},$$

zdvojmocněním obdržíme

$$a^2(x^2-b^2)(x^2-c^2) + b^2(x^2-c^2)(x^2-a^2) - c^2(x^2-a^2)(x^2-b^2)$$
$$- a^2b^2c^2 = -2abx^2\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)},$$

čili — po odstranění kořene $x^2 = 0$ —

$$(a^2+b^2-c^2)x^2 - 2a^2b^2 = -2ab\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}.$$

Opětným zdvojmocněním a zkrácením činitelem x^2 nabude rovnice tvaru

$$[(a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2]\,x^2 + 4a^2b^2c^2 = 0,$$

odkud ustanovíme

$$x = \pm\frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}.$$

Poznámka. Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, značí vypočítaný kořen x průměr kružnice trojúhelníku opsané. Položíme-li

$$\frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{tg} \alpha,$$

jest

$$x = \frac{a}{\sin \alpha}$$

a obdobně

$$x = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma};$$

α, β, γ jsou pak úhly trojúhelníka, o nichž v platnosti jest relace známá

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Úloha 37.

Ustanoviti jest dvě čísla, jichž největší společná míra jest 360 a nejmenší společný násobek 32400.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Břetislav Brzobohatý,* stud. VI. tř. r. v Lipníku.)

Žádaná čísla buďtež x, y; potom jest

$$x = 360\,u, \qquad y = 360\,v,$$

kdež u, v jsou čísla celá nesoudělná. Nejmenší společný násobek čísel x, y jest pak $360uv$, tudíž

$$360uv = 32400$$

čili

$$uv = 90.$$

Z toho plynou tato 4 řešení:

$u =$	1	2	5	9
$v =$	90	45	18	10
$x =$	360	720	1800	3240
$y =$	32400	16200	6480	3600

Úloha 38.

V zahradě vysázena řada stromků, z nichž jeden od druhého 5 m vzdálen. V prodloužení této řady stojí nádržka vodní. Za-

hradník zalévaje stromky a chodě po zalití každého stromku zase k nádržce zpět, ušel těmito cestami po zalití všech stromků, vrátiv se od posledního též zpět k nádržce, celkem 13750 m. Víme-li, že od posledního stromku k nádržce jest 260 m, jest vypočítati: kolik stromů jest v řadě a v jaké vzdálenosti jest první stromek od nádržky.

Stud. techn. *Vlad. Ibl.*

Řešení. (Zaslal p. *C. Fiala*, stud. VI. tř. r. v Plzni.) Dráhy, jež vykonal zahradník od nádržky k jednotlivým stromkům, tvoří patrně arithmetickou posloupnost, jejíž rozdíl $d = 5$, poslední člen $a_n = 260$ a součet $s_n = \frac{13750}{2} = 6875$.

První člen a_1 (vzdálenost prvního stromku od nádržky) a počet členů (stromků) n plyne ze známých vzorců

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d.$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

V daném případě jest

$$a_1 + 5n = 265,$$

$$n(a_1 + 260) = 13750.$$

Vyloučíme-li a_1, vyjde rovnice

$$n^2 - 105n + 2750 = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$n_1 = 50, \quad n_2 = 55;$$

k těm přísluší hodnoty

$$a_1' = 15, \quad a_1'' = -10.$$

V prvním případě bylo by 50 stromků a nádržka před prvním z nich 15 m, ve druhém pak 55 stromků a nádržka (mezi stromky) za prvním 10 m.

Úloha 39.

V trojúhelníku abc vésti jest příčky

$$a_1a_2 \parallel cb, \quad b_1b_2 \parallel ac, \quad c_1c_2 \parallel ba$$

tak, aby šestiúhelník $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$ byl rovnostranný. Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, x strana šestiúhelníka, jest dokázati, že

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jindřich Barvík*, stud. VII. tř. g. v Opavě.)

Dle zvoleného v úloze označení jsou ve straně ab vrcholy a_2, b_1, ve straně bc vrcholy b_2, c_1 a ve straně ca vrcholy c_2, a_1. Budiž

$$a_1a_2=a_2b_1=b_1b_2=b_2c_1=c_1c_2=c_2a_1=x,$$
$$aa_2=y, \quad b_1b=z.$$

Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$y:x=c:a, \quad z:x=c:b,$$

tudíž

$$y=\frac{cx}{a}, \quad z=\frac{cx}{b},$$

$$y:z:x=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}.$$

Jelikož výšky trojúhelníka jsou obráceně úměrny stranám, jest také

$$y:z:x=v_a:v_b:v_c.$$

Znajíce, v kterém poměru body a_2 b_1 dělí stranu ab, totiž

$$aa_2:a_2b_1:b_1b=v_a:v_c:v_b,$$

snadno tyto body sestrojíme a také ostatní vrcholy šestiúhelníka ustanovíme.

Poněvadž jest

$$x+y+z=c,$$

máme dle hořejších rovnic

$$x+\frac{cx}{a}+\frac{cx}{b}=c,$$

z čehož

$$x=\frac{abc}{ab+bc+ac}$$

čili

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Úloha 40.

Dokažte, že v šestiúhelníku $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$ předešlé úlohy spojnice a_1b_2, b_1c_2, c_1a_2 protínají se v jediném bodě, jehož vzdálenosti od stran a, b, c původního trojúhelníka jsou v poměru

$$(b+c):(c+a):(a+b).$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Mráz*, stud. VIII. třídy gym. na Smíchově.)

Zůstávajíce při označení, jehož v úloze předcházející bylo užito, znamenejme ještě vzdálenosti vrcholů a, b, c od příček a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 po řadě l_a, l_b, l_c; průsečík spojnic v úloze jmenovaných měj od stran trojúhelníka vzdálenosti k_a, k_b, k_c. Že se spojnice a_1b_2, b_1c_2, c_1a_2 v jediném bodě s protínají, jest patrno z toho, že šestiúhelník maje protější strany rovnoběžné a stejné, jest středově souměrný; středem souměrnosti jest právě bod s.

Vzdálenosti jeho od stran trojúhelníka ustanovíme takto:

Z podobnosti trojúhelníků cc_1c_2 a abc vysvítá, že

$$l_c : x = v_c : c,$$

tudíž

$$l_c=\frac{xv_c}{c}=\frac{abv_c}{ab+bc+ca}.$$

Poněvadž pak

$$l_c+2k_c=v_c,$$

jest

$$k_c=\frac{1}{2}(v_c-l_c)=\frac{(a+b)\,cv_c}{2\,(ab+bc+ca)}=\frac{(a+b)\,\Delta}{ab+bc+ca}.$$

Obdobné hodnoty mají vzdálenosti k_a, k_b; jest proto

$$k_a : k_b : k_c=(b+c):(c+a):(a+b).$$

Úloha 41.

Každý vrchol čtverce spojen jest s body půlícími protější strany; spojnice tyto omezují rovnostranný čtyrosý osmiúhelník. Vypočísti jest obsah mnohoúhelníka a poloměr vepsané jemu kružnice, dána-li strana čtverce.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Vodička*, stud. VIII. tř. gym. v Jindř. Hradci.)

Delší z os souměrnosti svírá se stranou úhel φ, pro který jest

$$\operatorname{tg} \varphi = 2,$$

tudíž

$$\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Stranu osmiúhelníka vyjádříme z úměry

$$x : \frac{a}{4} = \sin 45^0 : \sin (45^0 + \varphi);$$

obdržíme tak po dosazení hodnot

$$x = \frac{a}{12}\sqrt{5}.$$

Poloměr ϱ kružnice vepsané osmiúhelníku jest

$$\varrho = \frac{a}{4} \sin \varphi = \frac{a}{10}\sqrt{5}.$$

Jest tedy obsah mnohoúhelníka

$$M = 4x\varrho = \frac{a}{3}\sqrt{5} \, . \, \frac{a}{10}\sqrt{5} = \frac{a^2}{6},$$

rovná se tudíž $\frac{1}{6}$ daného čtverce. Kruh vepsaný tomuto mnohoúhelníku má obsah

$$K = \pi\varrho^2 = \frac{\pi a^2}{20},$$

což jest $\frac{1}{5}$ plochy kruhu vepsaného ve čtverec daný.

Úloha 42.

Přímky půlící vnitřní úhly nerovnostranného rovnoběžníka omezují rovnoběžník pravoúhlý. Jest dokázati, že úhlopříčky tohoto rovnoběžníka jsou rovnoběžny ku stranám původního a jest ustanoviti jich délku.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Lad. Dědouch*, stud. VIII. tř. gym. v Pelhřimově.)

Budiž dán rovnoběžník $abcd$, jehož strany

$$\overline{ab} = a, \quad \overline{bc} = b, \quad a > b.$$

Příčky půlící vnitřní úhly a, b protínejtež se v bodě c_1; jelikož úhly a, b jsou výplňkové, jsou polovice jich úhly doplňkovými a tudíž $ac_1 \perp bc_1$.

Rozpůlivše všechny vnitřní úhly rovnoběžníka $abcd$ obdržíme 4 polopaprsky omezující pravoúhlý rovnoběžník $a_1b_1c_1d_1$.

Přímka půlící úhel a protínej stranu cd v bodě e; obdobně mějme příčky bf, cg, dh. Jest pak

$$ad = de = ah = bc = cf = bg;$$

čtyrúhelníky $adeh$, $bcfg$ jsou rovnoběžníky rovnostranné, d_1 a b_1 jich středy. Jest tedy bod d_1 a podobně i b_1 stejně vzdálen od stran ab a cd, pročež

$$b_1d_1 \parallel ab.$$

Z rovnoběžnosti $fg \parallel eh$ a shodnosti $\triangle a_1gh \cong \triangle c_1ef$ vysvítá, že jest $a_1c_1 \parallel fg$ a tedy také

$$a_1c_1 \parallel ad.$$

Tím dokázáno, že úhlopříčky rovnoběžníka $a_1b_1c_1d_1$ jsou rovnoběžny ku stranám rovnoběžníka $abcd$. Jelikož rovnoběžník $a_1b_1c_1d_1$ jest pravoúhlý, jest $a_1c_1 = b_1d_1$.

Prodloužíme-li b_1d_1 až protne strany ad, bc v bodech k, l, jest

$$kd_1 = b_1l = \frac{b}{2},$$

tedy

$$b_1 d_1 = kl - kd_1 - b_1 l = a - \frac{b}{2} - \frac{b}{2},$$

pročež

$$b_1 d_1 = a_1 c_1 = a - b.$$

Úloha 43.

Úhlopříčky pravidelného osmiúhelníka omezují dva menší pravidelné osmiúhelníky. Je-li A obsah největšího, B prostředního a C nejmenšího, jest dokázati, že

$$B = \frac{1}{2}(A + C).$$

Posl. fil. *Inocenc Hanzlík.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Kálal,* stud. VII. tř. r. v Písku.) Budiž r poloměr kružnice opsané danému osmiúhelníku; obsah jeho

$$A = 4r^2 \sin 45^0 = 2r^2 \sqrt{2}.$$

Spojíme-li vrcholy jeho ob jeden, omezují spojnice tyto osmiúhelník B. Poloměr r_1 kružnice opsané tomuto osmiúhelníku rovná se straně původního, jest tedy

$$r_1 = a = 2r \sin 22\tfrac{1}{2}^0 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Úhlopříčky spojující vrcholy daného osmiúhelníka ob dva omezují osmiúhelník C; kružnice jemu opsaná má poloměr

$$r_2 = \frac{a}{\cos 22\frac{1}{2}^0} = r \operatorname{tg} 22\tfrac{1}{2}^0 = r(\sqrt{2} - 1).$$

Jest tedy

$$A : B : C = r^2 : r_1^2 : r_2^2 = 1 : (2 - \sqrt{2}) : (\sqrt{2} - 1)^2$$

čili

$$A : B : C = 1 : (2 - \sqrt{2}) : (3 - 2\sqrt{2}).$$

Odtud plyne

$$(A + C) : B = (4 - 2\sqrt{2}) : (2 - \sqrt{2}),$$

tudíž

$$A + C = 2B.$$

Úloha 44.

V trojúhelníku jest

$$tg\, \alpha : tg\, \beta : tg\, \gamma = 1 : 2 : 3;$$

v kterém poměru jsou a) jeho strany, b) jeho výšky, c) svrchní části výšek, d) spodní části výšek? Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Petráň*, stud. VII. třídy r. v Hradci Králové.)

O úhlech trojúhelníka znám jest vztah

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma;$$

z rovnice této a z podmínek daných vypočítáme

$$\operatorname{tg} \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \beta = 2, \quad \operatorname{tg} \gamma = 3.$$

Odtud ustanovíme

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Strany trojúhelníka jsou tedy v poměru

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3;$$

výšky jsou v převráceném poměru stran, tedy

$$v_a : v_b : v_c = \frac{1}{\sin \alpha} : \frac{1}{\sin \beta} : \frac{1}{\sin \gamma} = 6\sqrt{2} : 3\sqrt{5} : 2\sqrt{10}.$$

Průsečíkem výšek dělí se každá v část u svrchní, vrchol obsahující a část spodní t, přilehající ku straně. Jest pak

$$u_a = \frac{b \cos \alpha}{\sin \beta} = 2r \cos \alpha,$$

$$t_a = c \cos \beta \operatorname{ctg} \gamma = 2r \cos \beta \cos \gamma,$$

jelikož obdobné hodnoty mají výškové úsečky

$$u_b, \quad u_c \quad \text{a} \quad t_b, \quad t_c,$$

jest

$$u_a : u_b : u_c = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \sqrt{5} : \sqrt{2} : 1,$$
$$t_a : t_b : t_c = \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{2} : \sqrt{5} : \sqrt{10}.$$

Úloha 45.

Sestrojte trojúhelník, dána-li strana a, protilehlý úhel α a poloměr ϱ kružnice vně vepsané a strany a se dotýkající.

Prof. *Jindř. Muk* v Rychnově n. K.

Řešení. (Zaslal p. *Eman. Dvořák*, stud. VII. třídy r. v Brně.)

Rozbor. Budiž *abc* trojúhelník hledaný; označme

$$\overline{bc} = a, \qquad \sphericalangle\, bac = \alpha,$$

mimo to buď *o* středem kružnice vepsané vně o poloměru ϱ. V trojúhelníku *obc* jsou úhly

$$R - \frac{\alpha}{2}, \quad R - \frac{\beta}{2}, \quad R - \frac{\gamma}{2}.$$

Nalezneme tedy vrchol *o* trojúhelníka *obc* jako průsek dvou geometrických míst: kružnice sestrojené nad tetivou $\overline{bc} = a$ s příslušným úhlem obvodovým $R - \frac{\alpha}{2}$ a rovnoběžky ve vzdálenosti ϱ od $\overline{bc}$. Z trojúhelníka *obc* snadně nalezneme trojúhelník *abc*.

Poznámka. Poloměr *r* kružnice opsané trojúhelníku *obc* jest

$$r = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}};$$

dle toho, jest-li

$$r\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) \gtreqless \varrho,$$

má úloha dvě řešení (shodná), jedno neb žádné.

Úloha 46.

Řešiti jest rovnici

$$\cos^4 x (\sin^3 x + \sin 3x - \cos 3x) - \sin^4 x (\cos^3 x + \sin 3x - \cos 3x)$$
$$= \sin^7 x - \cos^7 x.$$

Prof. *Jindřich Muk* v Rychnově n. K.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Valach*, stud. VIII. třídy gym. v Kroměříži.)

Rovnici pišme v podobě

$$\cos^4 x (\cos^3 x + \sin^3 x + \sin 3x - \cos 3x)$$
$$- \sin^4 x (\cos^3 x + \sin^3 x + \sin 3x - \cos 3x) = 0$$

čili

$$(\cos^4 x - \sin^4 x) (\cos^3 x + \sin^3 x + \sin 3x - \cos 3x) = 0.$$

Rovnice tato rozpadá se ve dvě, z nichž první

$$\cos^4 x - \sin^4 x = 0$$

za příčinou vztahu

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

jest totožna s rovnicí

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

čili

$$\cos 2x = 0,$$

odkudž

$$x = \frac{2n+1}{2} R.$$

V rovnici

$$\cos^3 x + \sin^3 x + \sin 3x - \cos 3x = 0$$

vyjádřeme $\sin 3x$ a $\cos 3x$ funkcemi úhlu jednoduchého dle vzorců

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x;$$

tím obdržíme, zkrátivše 3mi,

$$\cos x + \sin x - (\cos^3 x + \sin^3 x) = 0.$$

Tuto rovnici můžeme psáti

$$(\cos x + \sin x) (1 - \cos^2 x + \cos x \sin x - \sin^2 x) = 0,$$

kteráž opět ve dvě se rozkládá.

Je-li

$$\cos x + \sin x = 0,$$

jest

$$\operatorname{tg} x = -1,$$

tudíž

$$x = 2n\mathrm{R} - \frac{\mathrm{R}}{2} = \frac{4n-1}{2}\mathrm{R}.$$

Druhý činitel vede k rovnici

$$\sin x \cos x = 0$$

čili

$$\sin 2x = 0,$$

z níž

$$x = n\mathrm{R}.$$

Úloha 47.

Úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka o straně a tvoří hvězdovitý pětiúhelník 2. řádu. Tvoří-li tento pětiúhelník síť jehlanu, jest určiti povrch i obsah jehlanu, poloměr koule vepsané a opsané, stěnové úhly jehlanu.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Pleva*, stud. VI. třídy r. v Kutné Hoře.)

V pravidelném pětiúhelníku $abcde$ veďme úhlopříčky omezující pětiúhelník $a_1b_1c_1d_1e_1$, který s trojúhelníky a_1b_1b, b_1c_1c, c_1d_1d, d_1e_1e, e_1a_1a tvoří síť jehlanu pravidelného pětibokého. Je-li $ab = a$, jest obsah původního pětiúhelníka

$$\mathrm{P}_1 = \frac{5a^2}{4} \operatorname{ctg} 36^0$$

a tudíž povrch jehlanu

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 - 5 \,.\, \triangle\, aba_1.$$

Jest však

$$\varDelta = \triangle\, aba_1 = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} 36^0,$$

pročež

$$\mathrm{P} = \frac{5a^2}{4}(\operatorname{ctg} 36^0 - \operatorname{tg} 36^0) = \frac{5a^2}{4} \,.\, 2\operatorname{ctg} 72^0$$

$$\mathrm{P} = \frac{a^2}{2}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}.$$

Strana pětiúhelníka $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ budiž a_1; jest to menší díl strany a rozdělené zlatým řezem

$$a_1 : (a - a_1) = (a - a_1) : a.$$

Úměru tuto přetvořme v rovnici

$$a_1^2 - 3a_1 a + a^2 = 0,$$

z níž ustanovíme menší kořen

$$a_1 = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Obsah pětiúhelníka pravidelného o straně a_1 jest

$$Z = \frac{5}{4} a_1^2 \operatorname{ctg} 36^0,$$

čímž vypočtena základna jehlanu

$$Z = \frac{a^2}{8}(7 - 3\sqrt{5})\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

$$= \frac{a^2}{8}\sqrt{10(25 - 11\sqrt{5})}.$$

Výška v jehlanu daná jest výrazem

$$v = \sqrt{\left(\frac{a_1}{2} \operatorname{tg} 72^0\right)^2 - \left(\frac{a^0}{2} \operatorname{tg} 54^0\right)^2}$$

$$= \frac{a_1}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2 72^0 - \operatorname{tg}^2 54^0}.$$

Hodnoty těchto tangent jsou

$$\operatorname{tg} 72^0 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{tg} 54^0 = \frac{1}{5}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}};$$

proto jest

$$v = a_1\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.$$

Lze již nyní ustanoviti obsah jehlanu

$$J = \frac{1}{3} Zv = \frac{a^3}{24} \sqrt{(25 - 11\sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}$$

$$J = \frac{a^3}{12} \sqrt{45 - 20\sqrt{5}} = \frac{a^3}{12} (5 - 2\sqrt{5}).$$

Poloměr ϱ koule vepsané určen jest rovnicí

$$\varrho = \frac{3J}{P},$$

z níž dosazením hodnot a upravením nalezneme

$$\varrho = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Shledáváme, že povrch jehlanu

$$P = 5a\varrho.$$

Poloměr r koule opsané ustanovíme z relace

$$\varrho_1^2 = v(2r - v),$$

značí-li ϱ_1 poloměr kružnice opsané o základnu.

Poloměr tento

$$\varrho_1 = \frac{a_1}{2 \cos 54^0} = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

čili

$$\varrho_1 = a\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} = 2\varrho;$$

proto jest

$$r = \frac{\varrho_1^2 + v^2}{2v} = \frac{a}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 36^0.$$

Odchylku α pobočné stěny od základny vypočítáme ze vztahu

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a_1}{2} \operatorname{tg} 54^0}{\frac{a_1}{2} \operatorname{tg} 72^0} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Odchylku β dvou pobočných stěn můžeme ustanoviti z trojúhelníka, jehož vrcholy jsou na př. b_1 e_1 a třetí f na hraně a_1t, značí-li t témě jehlanu a je-li rovina $b_1e_1f \perp a_1t$. Jest pak

$$b_1f = a_1 \sin 72^0 = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 36^0 = r$$

$$b_1e_1 = 2a \sin 54^0 = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Je-li

$$\sphericalangle b_1fe_1 = \beta,$$

jest

$$\overline{b_1e_1}^2 = 2 \,.\, \overline{b_1f}^2 - 2\overline{b_1f}^2 \,.\, \cos\beta,$$

$$\cos\beta = \frac{2-\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

jest tedy

$$\alpha + \beta = 2R.$$

Úloha 48.

V pravoúhlé soustavě souřadnic dány body

$$a\,(-5, 0),\ b\,(0, 5),\ c\,(4, 3),\ d\,(3, -4).$$

Dokažte, že body ty leží na kružnici; ustanovte rovnici této kružnice; vypočítejte strany, úhlopříčky a obsah čtyrúhelníka abcd.

Posl. fil. *Jan Schüller.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Dokládal,* stud. VII. třídy r. v Prostějově.)

Jelikož dané body mají od počátku stejnou vzdálenost $r = 5$, leží na kružnici, jejíž rovnice jest

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Délky stran čtyrúhelníka *abcd* vypočítáme ze souřadnic vrcholů

$$\overline{ab} = 5\sqrt{2},\quad \overline{bc} = 2\sqrt{5},\quad \overline{cd} = 5\sqrt{2},\quad \overline{da} = 4\sqrt{5};$$

rovněž tak ustanovíme úhlopříčky

$$\overline{ac} = \overline{bd} = 3\sqrt{10}.$$

Označíme-li strany po řadě písmeny a, b, c, d a úhlopříčky m, n, jest dle vypočítaných hodnot

$$ae + bd = mn;$$

tím znovu stvrzeno, že čtyrúhelník jest do kružnice vepsán. Jest to patrně rovnoramenný lichoběžník, ve kterém

$$\overline{ad} \parallel \overline{bc}, \quad \overline{ab} \parallel \overline{cd}.$$

Výška tohoto lichoběžníka, vzdálenost stran $\overline{ad}$ a $\overline{bc}$, jest

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d-b}{2}\right)^2} = \sqrt{30}.$$

Odtud vypočítáme úhel $bad = adc = \alpha$ dle vzorce

$$\sin\alpha = \frac{v}{a} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{15},$$
$$\alpha = 71^\circ 34'.$$

Obsah čtyrúhelníka lze stanoviti buď analyticky jako součet dvou trojúhelníků aneb dle planimetrického vzorce

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = 45.$$

Úloha 49.

Do ellipsy vepsati jest kosočtverec, jehož strany délka jest dána.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Hulla*, stud. VIII. třídy gym. v Olomouci.)

Mějme ellipsu danou v pravoúhlé soustavě souřadnic rovnicí

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Do té vepsati jest kosočtverec, jehož strana měj délku danou s. Kosočtverec tento — $mnpq$, — má úhlopříčky

$$\overline{mp} = 2m, \quad \overline{nq} = 2n,$$

kteréž na sobě kolmo stojí a středem o ellipsy se rozpolují. Svírá-li poloměr $\overline{om}$ s osou X úhel α, má bod m souřadnice

$$x_1 = m\cos\alpha, \quad y_1 = m\sin\alpha,$$

které do rovnice ellipsy dosadivše vypočítáme

$$m^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}.$$

Podobně jest pro bod n

$$n^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}.$$

Z výrazů těchto vyplývá vztah

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

čili

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

jest tedy tento součet pro všechny vepsané kosočtverce veličinou stálou.

Položíme-li

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$m^2 + n^2 = s^2,$$

můžeme relaci poslední psáti též

$$\frac{s^2}{m^2 n^2} = \frac{c^2}{ab}$$

čili

$$\frac{mn}{s} = \frac{ab}{c} = \varrho,$$

kdež ϱ jest poloměr kružnice vepsané v kosočtverec. I tato veličina jest tedy stálou pro všechny v ellipsu vepsané kosočtverce. Všechny v ellipsu vepsané rovnostranné rovnoběžníky jsou téže kružnici opsány.

Jeden z kosočtverců takových určen jest vrcholy ellipsy; strana jeho jest c. Znajíce přeponu s a příslušnou k ní výšku ϱ, můžeme kdekoli sestrojiti trojúhelník omn; když jsme tak ustanovili odvěsny jeho m, n, přeneseme je jakožto poloměry do ellipsy, čímž nalezneme vrcholy žádaného kosočtverce v ellipsu vepsaného.

Abychom vyšetřili *omezení úlohy*, vyjádřeme z dřívějších výrazů délku strany s. Jestiť

$$s^2 = m^2 + n^2 = \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)} .$$

Jelikož čítatel tohoto zlomku má hodnotu stálou, jest s tím menší, čím větší hodnotu má jmenovatel. Tento může býti psán v podobě

$$\begin{aligned} J &= a^2 b^2 (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) + (a^4 + b^4) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \\ &= a^2 b^2 (1 - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha) + (a^4 + b^4) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \\ &= a^2 b^2 + \frac{1}{4} e^4 \sin^2 2\alpha. \end{aligned}$$

Poněvadž obsah kosočtverce jest $2\varrho s$ a ϱ jest veličina stálá, vzrůstá obsah současně s délkou strany.

Maximum s obdržíme tedy při nejmenší hodnotě $\sin 2\alpha$, t. j. při $\alpha = 0$; kosočtverec určený vrcholy ellipsy jest tedy největší z vepsaných kosočtverců.

Minimum s nastane při největší hodnotě $\sin 2\alpha$, t. j. při $\alpha = 45^0$, tedy $m = n$; nejmenší z kosočtverců vepsaných v ellipsu přechází tudíž ve čtverec.

$$s_{max} = c, \quad s_{min} = \frac{ab}{c} = \varrho.$$

Úloha 50.

Do kuželosečky dané v pravoúhlé soustavě souřadnic rovnicí

$$y^2 = x(12 - x) - 11$$

vepsán jest šestiúhelník abcdef, jehož vrcholy mají úsečky

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 6,\ x_4 = 10,\ x_5 = 9,\ x_6 = 2;$$

z příslušných pořadnic jsou y_5 *a* y_6 *záporné. Jest dokázati, že průsečíky protějších stran tohoto šestiúhelníka leží v jedné přímce, a rovnici této přímky jest vyvoditi.*

Posl. fil. *Jan Schüller.*

Řešení. (Zaslal p. *Vladimír Polák,* stud. VII. tř. gym. v Přerově.)

Daná kuželosečka jest kružnice, jejíž rovnici lze psáti v normálním tvaru

$$(x-6)^2+y^2=25.$$

Pořadnice vrcholů šestiúhelníka jsou

$$y_1=0,\quad y_2=4,\quad y_3=5,\quad y_4=3,\quad y_5=-4,\quad y_6=-3.$$

Rovnice stran šestiúhelníka ustanovíme jako rovnice přímek, z nichž každá určena jest dvěma body; obdržíme tak

$$\begin{aligned}\overline{ab}&\equiv 2x-y-2=0, & \overline{de}&\equiv 7x-y-67=0,\\ \overline{bc}&\equiv x-3y+9=0, & \overline{ef}&\equiv x+7y+19=0,\\ \overline{cd}&\equiv x+2y-16=0, & \overline{fa}&\equiv 3x+y-3=0.\end{aligned}$$

Průsečíky protějších stran označme:

$$m(ab,de),\quad n(bc,ef),\quad p(cd,fa);$$

souřadnice jich vyplývají z rovnic příslušných stran a jsou:

$$\begin{aligned}\xi_1&=13, & \eta_1&=24,\\ \xi_2&=-12, & \eta_2&=-1,\\ \xi_3&=-2, & \eta_3&=9.\end{aligned}$$

Jelikož jest

$$\begin{vmatrix}\xi_1, & \eta_1, & 1\\ \xi_2, & \eta_2, & 1\\ \xi_3, & \eta_3, & 1\end{vmatrix}=0,$$

leží body m, n, p v jedné přímce P. Rovnice její jest

$$P\equiv x-y+11=0.$$

V geometrii polohy dokazuje se důležitá obecná *věta Pascalova*: V každém šestiúhelníku, jenž jest kuželosečce vepsán, leží průsečíky protějších stran v jedné přímce. Přímka ta slove *Pascalovou přímkou* daného šestiúhelníka.

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Arnold Emil, stud. VI. tř. r. na Starém Městě v Praze, úl. 26., 27., 38., 41.

Bartošek Jul., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 26., 29., 37., 38., 41., 43.

Barvík Jindřich, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 25. až 50.
Brancovský Jindřich, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 26. až 29., 31., 33., 35., 36., 38., 42., 45., 46.
Brzobohatý Břetislav, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 25. až 50.
Břeský František, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 26., 27., 29., 33., 36. až 44., 46., 48., 50.
Czwetler Frant., stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 26., 27., 36., 38., 41., 46., 48.
Čupr Karel, stud. V. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 25. až 50.
Dědouch Lud., stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 26. až 29., 31., 32., 33., 35. až 48.
Dokládal Frant., stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 26. až 29., 32., 38., 48., 50.
Drastich Frant., stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 13., 25. až 29., 32. až 39., 40. až 48., 50.
Duchek Frt., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 26. až 29., 33., 36., 37., 38., 41. až 44., 46.
Dusl K., stud. VI. tř. v Rakovníku, úl. 26. až 29., 31., 32., 33., 35. až 48.
Dvořák Eman., stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 25. až 48., 50.
Dvořák Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 25. až 48., 50.
Fiala C., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 26. až 29., 38., 41., 43., 46.
Fiala Josef, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 25. až 29., 31. až 39., 41., 42., 43., 45. až 48., 50.
Fink Hugo, stud. VII. tř. g. v Jindřichově Hradci, úl. 26., 38., 48.
Flusser Karel, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 26., 27., 35., 37., 38., 39.
Foltynovský Josef, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 26.
Franěk Frant. stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 36., 37., 39. 42., 46.
Funk Theodor, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 27., 32., 33., 37., 38., 39., 41., 42., 43., 45., 46., 47.
Grössl Václav, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 25. až 29., 31. až 48., 50.
Habrich Alois, stud. VI. tř. r. v Prostějově, úl. 26. až 33., 36., 37., 38., 41., 42., 45., 46.

Hanosek Bohumír, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 25. až 30., 32. až 36., 38., 39., 41. až 46., 48., 50.
Hanus Josef, stud. VIII. tř. g. v Litomyšli, úl. 25. až 50.
Hanuš Jos., stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 26., 27., 29., 32., 33., 38., 41.
Hanuš Rudolf, posluchač vyšší lesnické školy v Písku, úl. 28., 29., 37., 38., 39.
Havelka Miloslav, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 26., 36., 37., 38., 41., 42., 46.
Hegner Václav, stud. V. tř. r. v Plzni, úl. 26.
Honzák Josef, stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 25. až 35.
Horák Alois, stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 26., 33., 37., 41.
Hrubý T., stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 27., 33., 36., 37., 38., 41., 42., 44., 45., 46., 48., 50.
Hujer Zdeněk, stud. VII. tř. g. na Smíchově, úl. 26., 27., 29., 38
Hulla Karel, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 25. až 50.
Chadim Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 26. až 29., 33, 35., 38., 44., 46, 48.
Jakubský O., stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 26. až 29., 32., 33., 35., 36., 38., 39., 41. až 46., 48, 50.
Janáček Jan, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 25. až 48., 50.
Jechoutek F., stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 25.
Jílek Frant., stud. V. tř. r. v Brně, úl. 26., 28., 37., 41., 42.
Kadeřábek František, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 26., 27., 29., 33., 35., 38., 46.
Kálal Josef, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 25. až 50.
Kalandra St., stud. VII. tř. g. v Jičíně, úl. 26., 28., 32., 38., 41., 42., 48.
Karpeles Karel, stud. VII. tř. g. v Příbrami, úl. 46.
Keclík Tomáš, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 25.
Klíma Rudolf, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 26. až 34., 36. až 39., 41. až 48., 50.
Konopásek Václav, stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 26., 27., 29., 35., 37., 39.
Kopeček Ondřej, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 2., 20., 24. až 30., 32. až 39., 41. až 46., 48., 50.
Korber Augustin, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 26., 27., 28., 30., 35., 36., 37., 41., 42., 43., 46., 48., 50.

Nekola Josef, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 26., 38., 41.
Nigrin Otakar, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 26. až 28., 36. až 39., 41., 42., 43., 45., 46.
Novák Jaroslav, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 26., 27., 29., 30., 31., 33., 36. až 39., 41. až 44., 46., 48., 50.
Obšil Jan, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 26. až 29., 33., 36., 37., 38., 41., 42., 46., 48.
Ogoun Frant., bohoslovec v Olomouci, úl. 26. až 38., 41., 42., 43., 45. až 48., 50.
Pauzar Filip, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 26. až 29., 33., 35. až 44., 46., 47., 48., 50.
Perutz Hugo, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 26., 27., 29., 32., 35., 37., 38., 39., 41., 44., 45.
Petráň Karel, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1., 3., 4., 8. až 12., 15., 21., 22., 24., 26., 27., 29., 32. až 35., 38., 41. až 44., 46., 48.
Petz Leopold, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 26. až 29., 35., 36., 38., 46., 49.
Pleva Eduard, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 2., 6., 13., 26. až 30., 33., 36. až 44., 46., 47.
Polák Vlad., stud. VII. tř. g. v Přerově, úl. 25. až 50.
Pospíšil Bohumil, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 26. až 29., 32., 33., 36., 37., 38., 43., 46.
Postupa K., posluchač vyšší lesnické školy v Písku, úl. 37., 38., 39.
Procházka Václav, stud. VI. tř. r. v Praze-I., úl. 26., 38., 41.
Racek Aurelius, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 26., 29., 36., 37., 39., 41., 42., 44., 45., 46.
Růžek Ant., stud. VIII. tř. g. v Táboře, úl. 26. až 29., 32. až 44., 46., 48., 50.
Rybář Emil, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 26.
Rychlík Bedřich, stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 26., 29., 37., 41.
Rychlík Karel, stud. V. tř. akad. g. v Praze, úl. 25. až 50.
Sedláček Frant., stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 26. až 29., 32., 33., 35. až 38., 41. až 44., 46., 48.
Schoenbaum Emil, stud. VIII. tř. g. v Benešově, úl. 25. až 50.
Seifert Lad., stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 25. až 50.

Votrubová Žofie, stud. VIII. tř. střední školy dívčí v Praze, úl. 26.
Vrbický Hynek, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 26., 27., 29., 33., 38., 41., 42., 43, 46.
Wald Jindřich, stud. VI. tř. r. v Praze-I., úl. 26., 27., 38., 41., 43.
Weissenstein Rudolf, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 26., 27., 29., 33., 35., 36., 38., 41., 46., 48.
Zadražil Ant., stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 26. až 29., 33., 36., 37., 38., 46.
Zahradníček Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 22., 25. až 39., 41. až 50.
Závada Bohuslav, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 25. až 50.
Zavadil Stan., stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 26. až 29., 32., 37., 38., 41., 42., 43., 46., 47.
Nepodepsaný, dle pošt. razítka z Plzně, úl. 26. až 29.

Ceny udělené za řešení úloh.

Redakce těchto listů uznala, aby za řešení úloh obsažených v tomto ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky (1901) ceny vypsané výborem Jednoty českých mathematiků obdrželi tito řešitelé:

I. Ceny první.

1. *Hanus Josef,* stud. VIII. tř. g. v Litomyšli.
2. *Hulla Karel*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
3. *Kálal Josef*, stud. VII. tř. r. v Písku.
4. *Polák Vladimír*, stud. VII. tř. g. v Přerově.
5. *Rychlík Karel*, stud. V. tř. akad. g. v Praze.
6. *Schoenbaum Emil*, stud. VIII. tř. g. v Benešově.
7. *Seifert Ladislav,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.
8. *Šír Jiří*, stud. VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě.
9. *Tereba Viktor*, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí.
10. *Valach František,* stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.

II. Ceny druhé.

1. *Brzobohatý Břetislav,* stud. VI. tř. r. v Lipníku
2. *Čupr Karel*, stud. V. tř. g. ve Vys. Mýtě.
3. *Drastich František*, stud. VIII. tř. g. v Opavě.
4. *Grössl Václav,* stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech.
5. *Janáček Jan,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
6. *Kulhánek Silvestr*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
7. *Mráz Josef,* stud. VIII. tř. g. na Smíchově.
8. *Sukdol Václav*, stud. VIII. tř. g. v Č. Budějovicích.
9. *Zahradníček Josef*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.
10. *Závada Bohuslav,* stud. VI. tř. r. v Lipníku.

III. Ceny třetí.

1. *Barvík Jindřich,* stud. VIII. tř. g. v Opavě.
2. *Dědouch Ludvík,* stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově.
3. *Dusl Karel*, stud. VI. tř. r. v Rakovníku.
4. *Dvořák František,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
5. *Fiala Josef*, stud. VII. tř. r. v Písku.
6. *Habrich Alois*, stud. VI. tř. r. v Prostějově.
7. *Hanosek Bohumír*, stud. VII. tř. g. v Brně.
8. *Honzák Josef*, stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě.
9. *Klíma Rudolf*, stud. VI. tř. r. v Písku.
10. *Kopeček Ondřej,* stud. VII. tř. r. v Hodoníně.
11. *Kratochvíl František,* stud. VIII. tř. g. v Třebíči.
12. *Laštovka Zdeněk,* stud. VII. tř. r. v Č. Budějovicích.
13. *Lochmann Antonín*, stud. VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi.
14. *Malý Jan*, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí.
15. *Matoušek Maxmilian,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
16. *Mikyna Josef*, stud. VII. tř. g. ve Dvoře Králové n. L.
17. *Ogoun František,* bohoslovec v Olomouci.
18. *Pleva Eduard*, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.
19. *Šrámek Leopold,* stud. VII. tř. g. v Olomouci.
20. *Vodička Karel*, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci.