ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATHEMATIKY A FYSIKY.

SPOLUPŮSOBENÍM ODBORNÍKŮ

REDIGUJE

PROF. AUGUSTIN PÁNEK

A VYDÁVÁ

JEDNOTA ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

ROČNÍK XXVIII.

V PRAZE.

Tiskem dr. Ed. Grégra. — Nákladem Jednoty českých mathematiků a fysiků.

1899.

OBSAH.

Věstník literární.

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Úlohy.

O součtech Gaussových.

Referuje **M. Lerch**,
professor university ve Freiburku ve Švýcarech.

Stanovení součtů

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2h\alpha^2\pi i}{n}}$$

pochází od Gausse*), který byl k nim veden svými úvahami o rovnicích kruhodílných. Později podali pro výsledky Gaussovy nové důkazy Dirichtet**), Cauchy***) a Lebesgue (na témž místě), v posledních letech svého života věnoval jim Kronecker několik duchaplných rozprav.

Z knih o tomto předmětě jednajících některé podávají výsledky neúplné (Dedekind, Dirichletovy přednášky o theorii čísel, první dodatek), některé nepřehledné (na př. J. de Seguier, Formes quadratiques et multiplication complexe). Tyto okolnosti mne pohnuly uveřejniti následující úvahy provedené původně toliko jakožto příprava k mým přednáškám na universitě Freiburské. Ony těsně přiléhají k článku Kroneckerovu „Ueber den vierten Gauss'schen Beweis des Reciprotitätsgesetzes für die quadratischen Reste" †), a kde se odchylují, stalo se k vůli přesnosti neb podrobnému objasnění.

---

*) Disquisitiones, článek 356; německého překladu Maserova str. 426. Dále Summatio quaruundam serierum singularium (Maserova překladu str. 463.)

**) Crelleův žurnál sv. 17. (Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies) a sv. 19. (Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres).

***) Liouvilleův žurnál sv. V. (1840).

†) Monatsbericht berlínské Akademie z r. 1880.

1. Pomocný vzorec z theorie funkcí elliptických. Budiž a veličina buď realná a kladná, aneb komplexní s kladnou částí realnou; pak konverguje řada

$$f(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{a}(u+n)^2},$$

nechť jest u jakákoli veličina. Tato funkce jest stále konečná a má periodu 1, poněvadž se obdrží tvar $f(u+1)$, píše-li se $n+1$ za n, čímž se pouze členové řady „pošinou".

Z té příčiny bude lze — a to na základě rozmanitých vět analytických, z nichž nejjednodušší snad je věta Laurentova — rozvinouti tuto funkci v řadu trigonometrickou

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{2mu\pi i}.$$

Součinitel A_m má hodnotu

$$A_m = \int_0^1 f(u)\, e^{-2mu\pi i} du$$

a dosadíme-li sem za $f(u)$ hodnotu (1), obdrží se

$$A_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{a}(u+n)^2 - 2mu\pi i} du.$$

V posledním integrálu proveďme substituci $u + n = x$, čímž tento obdrží tvar

$$\int_n^{n+1} e^{-\frac{\pi}{a}x^2 - 2mx\pi i} dx,$$

a řada pro A_m nalezená přejde tedy v integrál

$$A_m = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{a}x^2 - 2mx\pi i} dx.$$

Výraz tento lze několika způsoby stanoviti v zakončeném tvaru, jichž volba závisí na přípravě čtenářově; pro čtenáře se základy Cauchyovy theorie funkcí seznámené bude nejjednodušším odvození následující. Udělíme-li exponentu

$$-\frac{\pi}{a}x^2 - 2mx\pi i$$

tvar

$$-\pi\left(\frac{x}{\sqrt{a}} + mi\sqrt{a}\right)^2 \quad am^2\pi,$$

obdržíme

$$A_m = e^{-am^2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(\frac{x}{\sqrt{a}}+mi\sqrt{a}\right)^2} dx.$$

Zde nechť nám $\sqrt{a}$ znamená onu z obou hodnot druhé odmocniny, jejíž realná část je kladná. Zavedeme-li nyní integrační proměnnou

$$z = \frac{x}{\sqrt{a}} + mi\sqrt{a},$$

obdržíme výraz

$$A_m = e^{-am^2\pi}\sqrt{a}\int e^{-\pi z^2} dz,$$

kde však integrace neděje se více podél osy realné, nýbrž podél přímky vedené bodem $z = mi\sqrt{a}$ v komplexní rovině rovnoběžně s vektorem $\frac{1}{\sqrt{a}}$ a sice od $-\infty$ do $+\infty$. Z Cauchyovy věty základní však soudíme, že se obdrží táž hodnota integrálu, přeložíme-li cestu integrační do osy realné, takže bude

$$A_m = e^{-am^2\pi}\sqrt{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi z^2} dz$$

čili

$$A_m = c\sqrt{a}\, e^{-am^2\pi},$$

znamená-li nám c čistě numerickou konstantu

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi z^2} dz.$$

Hledaná řada bude tedy zníti

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{a}(u+n)^2} = c\sqrt{a}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-am^2\pi+2mu\pi i};$$

abychom určili c, klaďme $u=0$, $a=1$; i vyjde

$$\sum e^{-n^2\pi} = c\sum e^{-m^2\pi}$$

a poněvadž řada tu se vyskytující není nullou, máme $c=1$, takže platí vzorec základní

$$(1)\qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{a}(u+\nu)^2} = \sqrt{a}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-a\nu^2\pi+2\nu u\pi i},$$

který patří do theorie funkcí elliptických, byl však Cauchyem způsobem právě vyloženým odůvodněn před objevením této theorie a přichází také v rukopisné pozůstalosti Gaussově. Jest důležito připomenouti, že zde $\sqrt{a}$ musí míti kladnou svoji část realnou.

2. Buďte nyní λ a μ celistvá čísla, poslední od nully různé, i vyšetřme, jak se chová řada

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi\left(x+\frac{\lambda i}{\mu}\right)}$$

pro nekonečně malá x.

Položme $n = 2\mu m + \varrho$, kde m probíhá veškery celistvé hodnoty a ϱ pouze řadu čísel $\varrho = 0, 1, 2, \ldots |2\mu| - 1$: tak obdržíme veškery celistvé hodnoty n a každou toliko jednou. Bude tedy

$$\varphi(x) = \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\varrho^2\lambda\pi i}{\mu}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(2m+\varrho)^2 x\pi}$$

a zbývá jen vyšetřiti hodnotu řady

$$\varphi_\varrho(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(2\mu m+\varrho)^2 x\pi}$$

pro nekonečně malá x. Řadu tuto lze psáti

$$\varphi_\varrho(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-4\mu^2 x\pi\left(m+\frac{\varrho}{2\mu}\right)^2},$$

obdržíme pro ni výhodnější tvar, užijeme-li vzorce (1) v případě

$$a = \frac{1}{4\mu^2 x},$$

takže bude

$$\varphi_\varrho(x) = \frac{1}{|2\mu|\,.\,\sqrt{x}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2\pi}{4\mu^2 x}+\frac{\nu\varrho\pi i}{\mu}}.$$

Na pravé straně vyskytuje se totiž řada, kterou lze sloučením členů $+\nu$ a $-\nu$ psáti

$$1 + 2e^{-\frac{\pi}{4\mu^2 x}}\cos\frac{\varrho\pi}{\mu} + 2e^{-\frac{4\pi}{4\mu^2 x}}\cos\frac{2\varrho\pi}{\mu}$$
$$+ 2e^{-\frac{9\pi}{4\mu^2 x}}\cos\frac{6\varrho\pi}{\mu} + 2e^{-\frac{16\pi}{4\mu^2 x}}\cos\frac{8\varrho\pi}{\mu} + \ldots$$

a v té všecky členy se blíží nulle, stává-li se x nekonečně malým, ovšem tak, aby realná část nebyla části pomyslné nekonečně menší. A sice jest ubývání členů této řady toho druhu, že též součet řady sám se blíží nulle. Odtud plyne

$$\lim_{x=0} \sqrt{x}\,\varphi_\varrho(x) = \frac{1}{|2\mu|}$$

a tedy

$$\lim_{x=0} \sqrt{x}\,\varphi(x) = \frac{1}{2|\mu|} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\varrho^2\lambda\pi i}{\mu}},$$

t. j.

$$(2)\qquad \lim_{x=0} \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi\left(x+\frac{\lambda i}{\mu}\right)} = \frac{1}{2|\mu|} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\varrho^2\lambda\pi i}{\mu}}.$$

Ze vzorce (1) máme dále pro $u = 0$

$$\sqrt{a} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-a\nu^2\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2\pi}{a}};$$

vložme sem

$$a = x + \frac{\lambda i}{\mu}$$

a ve vzorci tak vzniklém

$$\sqrt{x + \frac{\lambda i}{\mu}} \sum_\nu e^{-\nu^2\pi\left(x + \frac{\lambda i}{\mu}\right)} = \sum_\nu e^{-\frac{\nu^2\pi}{x + \frac{\lambda i}{\mu}}}$$

násobme obě strany $\sqrt{x}$ a přejděme k limitě pro $x = 0$.

Na levé straně se tímto způsobem podle vzorce (2) obdrží limita

$$\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} \cdot \frac{1}{2\,|\mu|} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\varrho^2 \frac{\lambda \pi i}{\mu}},$$

i zbývá jen stanoviti limitu pravé strany, t. j.

$$\lim_{x=0} \sqrt{x} \sum_\nu e^{\frac{-\nu^2\pi\left(x - \frac{\lambda i}{\mu}\right)}{x^2 + \frac{\lambda^2}{\mu^2}}} = \lim \sqrt{x} \sum_\nu e^{\frac{-\nu^2\pi\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}x - \frac{\mu i}{\lambda}\right)}{1 + \frac{\mu^2 x^2}{\lambda^2}}}.$$

Při tom předpokládáme, že $\lambda \gtreqless 0$. Abychom tuto limitu stanovili, ukažme, že rozdíl

$$\varDelta = \sum \left\{ e^{-\frac{\nu^2\pi}{1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2}x^2}\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}x - \frac{\mu i}{\lambda}\right)} - e^{-\nu^2\pi\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}x - \frac{\mu i}{\lambda}\right)} \right\}$$

zůstává konečným při nekonečně ubývajícím x.

Podle vzorce

$$|f(u) - f(v)| \leqq |f'(w)| \,.\, |u - v|,$$

v němž w značí neznámou veličinu obsaženou na přímce $(u \ldots v)$, bude

$$\left| e^{-\frac{\nu^2\pi}{1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2}x^2}\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}x - \frac{\mu i}{\lambda}\right)} - e^{-\nu^2\pi\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}x - \frac{\mu i}{\lambda}\right)} \right|$$

$$\leqq \nu^2\pi \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2}x^2}\right) \left| \frac{\mu^2}{\lambda^2}x - \frac{\mu i}{\lambda} \right| \,.\, \left| e^{-\frac{\nu^2\pi}{1+\varepsilon}\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}x - \frac{\mu i}{\lambda}\right)} \right|,$$

kde

$$0 < \varepsilon < \frac{\mu^2}{\lambda^2} x^2.$$

Poslední veličina je však menší než

$$\nu^2\pi \frac{\mu^2}{\lambda^2} \,.\, x^2 e^{-\frac{\mu^2\nu^2\pi}{2\lambda^2}\,.\,x},$$

z čehož plyne

$$|\Delta| < \frac{2\mu^2\pi}{\lambda^2} x^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 e^{-\frac{\mu^2\nu^2\pi}{2\lambda^2}\,.\,x}$$

aneb, znamená-li

$$\frac{\mu^2}{2\lambda^2} x = a\,,$$

$$(\alpha) \qquad |\Delta| < \frac{8a^2\lambda^2\pi}{\mu^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 e^{-\nu^2 a\pi}.$$

Z rovnice

$$\sqrt{a} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-a\nu^2\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2\pi}{a}}$$

plyne differencováním

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} \sum e^{-a\nu^2\pi} - \sqrt{a} \sum_{-\infty}^{\infty} \nu^2\pi e^{-a\nu^2\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\nu^2\pi}{a^2} e^{-\frac{\nu^2\pi}{a}}$$

čili

$$a\sqrt{a}\,.\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 e^{-a\nu^2\pi} = \frac{1}{4}\sqrt{a} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-a\nu^2\pi} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2\pi}{a} e^{-\frac{\nu a^2\pi}{a}}.$$

Pro nekonečně malá a má na pravé straně první řada hodnotu blízkou $\frac{1}{4}$, druhá je nekonečně malá; z toho plyne, že řada

$$a\sqrt{a\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 e^{-a\nu^2\pi}$$

pro nekonečně malá a se blíží $\frac{1}{4}$, a tedy pravá strana rovnice (α) je nekonečně malá zároveň s x, t. j.

$$\lim_{x=0} \Delta = 0.$$

Odtud plyne nejprve

$$\lim_{x=0} \sqrt{x} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2\pi}{1+\frac{\mu^2}{\lambda^2}x^2}\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}x-\frac{\mu i}{\lambda}\right)} = \lim \sqrt{x} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2\pi\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}x-\frac{\mu i}{\lambda}\right)}$$

a tedy máme rovnici

$$\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} \frac{1}{2\,|\,\mu\,|} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\varrho^2\lambda\pi i}{\mu}} = \left|\frac{\lambda}{\mu}\right| \lim \sqrt{\frac{\mu^2 x}{\lambda^2}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2\pi\left(\frac{\mu^2 x}{\lambda^2}-\frac{\mu i}{\lambda}\right)}.$$

Pravá strana určí se pomocí vzorce (2) ve tvaru

$$\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| \cdot \frac{1}{2\,|\,\lambda\,|} \sum_{\varrho=0}^{|2\lambda|-1} e^{\frac{\varrho^2\mu\pi i}{\lambda}},$$

čímž nabudeme výsledku

$$\text{(3)} \qquad \sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\varrho^2\lambda\pi i}{\mu}} = \frac{1}{2} \sum_{\varrho=0}^{|2\lambda|-1} e^{\frac{\varrho^2\mu\pi i}{\lambda}}.$$

3. Znamenejme nyní

$$\text{(4)} \qquad \Phi(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\varrho^2\lambda\pi i}{\mu}},$$

i obdrží rovnice (3) tvar

$$\text{(3*)} \qquad \sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\, \Phi(\lambda, \mu) = \Phi(-\mu, \lambda).$$

Připomeňme, že zde odmocninu

$$\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}$$

dlužno stanoviti tak, aby její realná část byla kladná.

Výraz $\Phi(\lambda, \mu)$ má následující vlastnosti:

1⁰. $\Phi(\lambda + 2h\mu, \mu) = \Phi(\lambda, \mu)$, ($h$ celistvé číslo),

2⁰. $\Phi(2h, 1) = 1$,

3^0. $$\Phi(\mu, 2) = 1 - i^\mu, \ \mu \text{ liché},$$

4^0. $$\Phi(\lambda n^2, \mu) = \Phi(\lambda, \mu),$$

značí-li n celistvé číslo nesoudělné s 2μ. Věc je samozřejma, poněvadž součin ϱn probíhá čísla, jež jsou dle modulu 2μ shodna s čísly $0, 1, 2 \ldots |2\mu| - 1$, v jistém pořádku vzatými. Je-li λ sudé, stačí, je-li n nesoudělno s μ.

Jsou-li obě čísla λ i μ lichá, ruší se členové součtu (4) po dvou a tedy $\Phi(\lambda, \mu)$ vymizí. A sice jsou členové, jež se ruší, vždy ϱ a $\varrho + |\mu|$; neboť v druhém případě zní exponent

$$-(\varrho + |\mu|)^2 \frac{\lambda\pi i}{\mu} = -\frac{\varrho^2 \lambda\pi i}{\mu} \pm 2\varrho\lambda\pi i - \lambda\mu\pi i$$

a poněvadž $\lambda\mu$ jest liché, bude

$$e^{-(\varrho+|\mu|)^2 \frac{\lambda\pi i}{\mu}} = -e^{-\varrho^2 \frac{\lambda\pi i}{\mu}}.$$

Je-li dále m celistvé číslo nesoudělné s λ, bude

5^0. $$\Phi(\lambda, m^2\mu) = m\Phi(\lambda, \mu), \quad m > 0.$$

Důkaz. Podle vzorce (3*) bude

$$\Phi(\lambda, m^2\mu) = \sqrt{\frac{\mu m^2}{\lambda i}}\, \Phi(-m^2\mu, \lambda),$$

což podle vlastnosti 4^0. jest

$$= m\sqrt{\frac{\mu}{\lambda i}}\, \Phi(-\mu, \lambda)$$

čili

$$\Phi(\lambda, m^2\mu) = m\Phi(\lambda, \mu).$$

Další vlastnost jest dána vzorcem

(5) $$\Phi(\lambda\nu, \mu)\, \Phi(\lambda\mu, \nu) = \Phi(\lambda, \mu\nu),$$

platným pro *nesoudělná* μ a ν; důkaz se vede takto: Probíhá-li k_1 úplnou soustavu zbytků dle modulu 2μ, k_2 úplnou soustavu zbytků dle modulu 2ν, probíhá číslo

$$\nu k_1 + \mu k_2$$

úplnou soustavu zbytků dle modulu $2\mu\nu$ a sice dvakráte; odtud plyne

$$\sum_{k_1,k_2} e^{-(\nu k_1+\mu k_2)^2 \frac{\lambda\pi i}{\mu\nu}} = \sum_{\varrho=0}^{|2\mu\nu|-1} e^{-\frac{\varrho^2\lambda\pi i}{\mu\nu}}.$$

Levá strana má exponent

$$-\left(\frac{\nu k_1^2}{\mu}+\frac{\mu k_2^2}{\nu}\right)\lambda\pi i - 2k_1k_2\lambda\pi i$$

a tedy zní

$$\sum_{k_1} e^{-\frac{k_1^2\lambda\nu\pi i}{\mu}} \cdot \sum_{k_2} e^{-\frac{k_2^2\lambda\mu\pi i}{\nu}};$$

součin tento jest $4\Phi(\lambda\nu, \mu)\,\Phi(\lambda\mu, \nu)$ a jeho hodnota výše uvedená zní $2 \,.\, 2\Phi(\lambda, \mu\nu)$; tím vzorec (5) dokázán.

4. Hodnota součtu $\Phi(\lambda, \mu)$ se určí velmi snadno, je-li $\mu = p$ kmenné číslo liché. Znamenejme pak $a, a', a'', \ldots$ veškery kvadratické zbytky dle modulu p (počet jich rovná se $\frac{p-1}{2}$) a dále buď b libovolné číslo, jež není zbytkem kvadratickým; pak čísla $1, 2, 3, \ldots p-1$ budou v jistém pořadu shodna s čísly

$$a, a', a'', \ldots \qquad ab, a'b, a''b \ldots$$

a následovně

$$\sum_{\lambda=1}^{p-1}\Phi(2\lambda, p) = \Phi(2a, p) + \Phi(2a', p) + \Phi(2a'', p) + \ldots$$
$$+ \Phi(2ab, p) + \Phi(2a'b, p) + \Phi(2a''b, p) + \ldots.$$

Podle vlastností 1. a 4. však plyne z definice zbytků kvadratických, t. j.

$$a \equiv k^2 \,(\mathrm{mod}\, p)$$

obecně

$$\Phi(2a\nu, p) = \Phi(2\nu, p)$$

a tedy výraz náš zní

$$\frac{p-1}{2}\Phi(2, p) + \frac{p-1}{2}\Phi(2b, p).$$

Hodnota levé strany jest však nullou, poněvad

$$\sum \Phi(2\lambda, p) = \frac{1}{2} \sum_{\varrho=0}^{2p-1} \sum_{\lambda=1}^{p-1} e^{-\frac{2\varrho^2\lambda\pi i}{p}}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{p-1} e^{-0} + \sum_{\varrho=1}^{p-1} \sum_{\lambda=1}^{p-1} e^{-\frac{2\varrho^2\lambda\pi i}{p}};$$

ježto první součet má hodnotu $p-1$ a dále

$$\sum_{\lambda=1}^{p-1} e^{-\frac{2\varrho^2\lambda\pi i}{p}} = -1,$$

jest

$$\sum_{1}^{p-1} \Phi(2\lambda, p) = 0.$$

Podle toho tedy

$$\Phi(2b, p) = -\Phi(2, p)$$

a

$$\Phi(2a, p) = +\Phi(2, p).$$

Užijeme-li Legendreova znaménka definovaného rovnicemi

(6) $$\left(\frac{a}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{b}{p}\right) = -1,$$

máme obecně

$$\Phi(2\nu, p) = \left(\frac{\nu}{p}\right) \Phi(2, p),$$

pokud celistvé číslo ν jest nesoudělné s p.

Abychom stanovili

$$\Phi(2, p),$$

převeďme tento symbol užitím vzorce (3) na tvar

$$\Phi(2, p) = \sqrt{\frac{-pi}{2}}\, \Phi(-p, 2) = \sqrt{\frac{-pi}{2}}(1 + i^p).$$

Poněvadž p jest kladné, máme

$$\sqrt{\frac{-pi}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{p}\,(1-i),$$

takže

$$\Phi\,(2, p) = \frac{1}{2}\,(1-i)\,(1+i^p)\sqrt{p}\,;$$

je-li p tvaru $4k+1$, bude $i^p = i$ a pravá strana zní $\sqrt{p}$; je-li však $p = 4k-1$, jest $i^p = -i$ a výraz $\Phi\,(2, p)$ bude míti hodnotu

$$\frac{1}{2}\,(1-i)^2\sqrt{p} = -i\sqrt{p},$$

t. j., sloučíme-li oba případy,

$$\Phi\,(2, p) = (-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}\,.$$

Tím dokázán vzorec platný *pro kmenná p*

$$\Phi\,(2\nu, p) = \left(\frac{\nu}{p}\right)(-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}, \tag{7}$$

v němž $\sqrt{p}$ je kladný; i lze jej jinak psáti, přejde-li se hned k hodnotě sdružené

$$\sum_{\varrho=0}^{p-1} e^{\frac{2\varrho^2\nu\pi i}{p}} = \left(\frac{\nu}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}. \tag{7*}$$

5. Vzorec (7) poskytne (čtvrtý Gaussův) důkaz zákona reciprocity kvadratických zbytků, zvolí-li se v něm za ν kmenné číslo q. Neboť dle (3*) jest

$$\Phi\,(2q, p) = \Phi\,(-p, 2q)\sqrt{\frac{p}{2qi}},$$

i zbývá jen vyjádřiti

$$\Phi\,(-p, 2q).$$

Tu jest dle vzorce (5) pro

$$\lambda = -p, \qquad \mu = 2, \qquad \nu = q$$
$$\Phi\,(-pq, 2)\,\Phi\,(-2p, q) = \Phi\,(-p, 2q),$$

tedy

$$\Phi(-p, 2q) = \Phi(-2p, q)(1 + i^{pq}),$$

takže máme

$$\Phi(-2p, q)(1 + i^{pq})\sqrt{\frac{p}{2qi}} = \Phi(2q, p)$$

aneb podle vzorce (7)

$$\left(\frac{-p}{q}\right)\frac{1 + i^{pq}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - i}{\sqrt{2}} = \left(\frac{q}{p}\right) i^{-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}$$

a užijeme-li vzorce

$$\left(\frac{-p}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)$$

a rovnice

$$\left(\frac{-1}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$$

plynoucí ze shody Fermatovy a Eulerovy

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (\mathrm{mod}\, p),$$

obdržíme

$$\left(\frac{p}{q}\right)\frac{(1 + i^{pq})(1 - i)}{2} = \left(\frac{q}{p}\right)(-i)^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2}.$$

Rozeznáváme-li případy $(p \equiv 1, q \equiv 1)$, $(p \equiv 1, q \equiv -1)$, $(p \equiv -1, q \equiv 1)$, $(p \equiv -1, q \equiv -1)$ mod. 4., obdržíme pořadem

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right),\ \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right),\ \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right),\ \left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right),$$

t. j znamení $\left(\frac{p}{q}\right)$ a $\left(\frac{q}{p}\right)$ se liší pouze v případě, kdy obě čísla p a q jsou tvaru $4k - 1$, což se vyjadřuje známou rovnicí

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

aneb

$$(8) \qquad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Toť Eulerův a Legendreův zákon reciprocity kvadratických zbytků, Gaussem poprvé dokázaný.

6. Znaménko Legendreovo podléhá následujícím zákonům

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{m'}{p}\right), \text{ je-li } m \equiv m' \pmod{p};$$

$$\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m'}{p}\right) = \left(\frac{mm'}{p}\right).$$

Ty zůstanou v platnosti, i když m nebo m' je dělitelno číslem p, ve kterémžto případě klademe $\left(\frac{m}{p}\right)$ rovno nulle.

Jacobi zobecnil Legendreovo znaménko pro libovolné moduly, i klade

$$\left(\frac{m}{P}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\left(\frac{m}{p''}\right)\ldots, \text{ je-li } P = p\,p'\,p''\ldots,$$

a volí

$$\left(\frac{m}{-P}\right) = \left(\frac{m}{P}\right).$$

U Jacobiho tedy jmenovatel P je vždy lichý. Ještě dále šel Kronecker, připustiv též sudé moduly; poněvadž symbol $\left(\frac{m}{2}\right)$ nemá přímo patrného významu, položil

$$\left(\frac{m}{2}\right) = \left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}.$$

Tedy definitivní význam symbolu $\left(\frac{m}{n}\right)$ je tento:

Mají-li čísla m a n společného dělitele většího než 1, jest

$$\left(\frac{m}{n}\right) = 0.$$

Dále jest

$$\left(\frac{m}{1}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Je-li n liché a

$$n = p^{\alpha} p'^{\alpha'} p''^{\alpha''} \ldots$$

jeho rozklad v kmenné činitele, bude

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)^{\alpha} \left(\frac{m}{p'}\right)^{\alpha'} \left(\frac{m}{p''}\right)^{\alpha''} \ldots$$

Je-li m liché a

$$n = 2^{\beta} p^{\alpha} p'^{\alpha'} p''^{\alpha''} \ldots,$$

bude

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{2}{m}\right)^{\beta} \left(\frac{m}{p}\right)^{\alpha} \left(\frac{m}{p'}\right)^{\alpha'} \left(\frac{m}{p''}\right)^{\alpha''} \ldots.$$

Konečně jest

$$\left(\frac{m}{-n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right).$$

Vlastnosti tohoto symbolu jsou následující:

a) Je-li n liché, jest

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{ pro } n > 0, \left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}.$$

b) Jsou-li m, n čísla lichá, platí obecný zákon reciprocity

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}},$$

je-li aspoň jedno z obou čísel kladné.

Důkazy se nalézají v Dirichletových přednáškách, vydaných Dedekindem.

Jsou-li obě čísla m, n záporná, obdržíme příslušnou modifikaci jak následuje.

Poněvadž

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{-n}\right), \quad -n > 0,$$

obdržíme

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{-n}{m}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2}},$$

a ježto $-m > 0$,

$$\left(\frac{-n}{m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{-1}{-m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)(-1)^{\frac{m+1}{2}}$$

a tedy

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}+1}.$$

Lze tedy zákon reciprocitní takto vyjádřiti:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}+\frac{1-sgn.\,m}{2}\cdot\frac{1-sgn.\,n}{2}}$$

$$[m \equiv n \equiv 1 \pmod{2}].$$

Při tom znamená sgn. x buď $+1$ neb -1, dle toho, jak jest $x > 0$ neb $x < 0$ (signum x).

c) Je-li n liché, neb čtyřmi dělitelné, platí

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m'}{n}\right), \text{ jakmile } m \equiv m' \pmod{n}.$$

Důkazy se vedou velmi snadno na základě definice.

d) Bezprostředně jasny jsou následující rovnice

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m'}{n}\right) = \left(\frac{mm'}{n}\right),\ \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right) = \left(\frac{m}{nn'}\right).$$

e) Znamenejme D číslo mající tvar diskriminantní, t. j. pro něž buď $D \equiv 1 \pmod{4}$ aneb $D \equiv 0 \pmod{4}$.

Pak platí $\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{m}{D}\right)(-1)^{\frac{1-sgn.\,D}{2}\cdot\frac{1-sgn.\,m}{2}}$, je-li D liché, a dále obecně $\left(\frac{D}{k}\right) = \left(\frac{D}{k'}\right)$, je-li $D > 0$, $k \equiv k' \pmod{D}$,

$\left(\frac{D}{k}\right) = \left(\frac{D}{k'}\right)$ sgn. kk', je-li $D < 0$, $k \equiv k' \pmod{D}$.

Důkaz první věty:

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{m}{D}\right)(-1)^{\frac{1-sgn.\,D}{2}\cdot\frac{1-sgn.\,m}{2}} \text{ pro lichá D.}$$

Buď $m = 2^a n$, n liché, $a \geqq 0$; tu jest

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{2}{D}\right)^a \left(\frac{D}{n}\right);$$

poněvadž $D \equiv 1 \pmod{4}$, plyne

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{n}{D}\right)(-1)^{\frac{1-sgn.\,D}{2} \cdot \frac{1-sgn.\,m}{2}},$$

tedy

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{2}{D}\right)^a \left(\frac{n}{D}\right)(-1)^{\frac{1-sgn.\,D}{2} \cdot \frac{1-sgn.\,m}{2}}$$

$$= \left(\frac{m}{D}\right)(-1)^{\frac{1-sgn.\,D}{2} \cdot \frac{1-sgn.\,m}{2}},$$

jak tvrzeno.

Abychom druhou větu dokázali, předpokládejme k i k' kladné, D liché. Pak bude

$$\left(\frac{D}{k}\right) = \left(\frac{k}{D}\right), \left(\frac{D}{k'}\right) = \left(\frac{k'}{D}\right), \; k \equiv k' \pmod{D},$$

tedy

$$\left(\frac{D}{k}\right) = \left(\frac{D}{k'}\right).$$

Je-li však $k > 0$, $k' < 0$, bude při $D < 0$

$$\left(\frac{D}{k}\right) = \left(\frac{k}{D}\right), \left(\frac{D}{k'}\right) = -\left(\frac{k'}{D}\right)$$

a tedy
$$\left(\frac{D}{k}\right) = -\left(\frac{D}{k'}\right).$$

Konečně případ $k < 0$, $k' < 0$ se bezprostředně redukuje na první, poněvadž

$$\left(\frac{D}{k}\right) = \left(\frac{D}{-k}\right) = \left(\frac{D}{-k'}\right) = \left(\frac{D}{k'}\right).$$

Zbývá provésti důkaz pro sudé diskriminanty. Zde budou k i k' čísla lichá, poněvadž jinak by čísla k a D měla společného dělitele 2, a znaménka $\left(\frac{D}{k}\right)$ a $\left(\frac{D}{k'}\right)$ byla by nullami.

Poněvadž ze shody

$$k \equiv k' \pmod{D}$$

plyne (ježto D jest dělitelno čtyřmi) $k \equiv k' \pmod{4}$, bude pro $\varepsilon = (-1)^{\frac{k-1}{2}}$ jak εk, tak $\varepsilon k'$ diskriminantem lichým; tedy

$$\left(\frac{D}{k}\right) = \left(\frac{D}{\varepsilon k}\right) = \left(\frac{\varepsilon k'}{D}\right)(-1)^{\frac{1-sgn.\,D}{2}\cdot\frac{1-sgn.\,\varepsilon k}{2}}$$

$$\left(\frac{D}{k'}\right) = \left(\frac{D}{\varepsilon k'}\right) = \left(\frac{\varepsilon k'}{D}\right)(-1)^{\frac{1-sgn.\,D}{2}\cdot\frac{1-sgn.\,\varepsilon k'}{2}}$$

a ježto

$$\left(\frac{\varepsilon k}{D}\right) = \left(\frac{\varepsilon k'}{D}\right),$$

je též

$$\left(\frac{D}{k}\right) = \left(\frac{D}{k'}\right)(-1)^{\frac{1-sgn.\,D}{2}\cdot\frac{sgn.\,\varepsilon k - sgn.\,\varepsilon k'}{2}}$$

čili, což totéž jest,

$$(9) \quad \left(\frac{D}{k}\right) = \left(\frac{D}{k'}\right)(-1)^{\frac{1-sgn.\,D}{2}\cdot\frac{sgn.\,k - sgn.\,k'}{2}}, \quad (k \equiv k' \bmod D).$$

Vzorec tento obsahuje důkaz našeho tvrzení, kteréž zároveň vyslovuje s největší obecností.

7. Buď nyní n číslo liché, kladné neb záporné, tvaru $4k+1$, a n_1 číslo sudé, s n nesoudělné. Utvořme pak celistvá čísla h_1, n_2, h_2, n_3, ... tak, aby platily rovnice $n = 2h_1 n_1 + n_2$, $n_1 = 2h_2 n_2 + n_3$, $n_2 = 2h_3 n_3 + n_4$, ... a při tom absolutní hodnoty čísel n_1, n_2, n_3, ... klesaly.

Poněvadž $2n_1 \equiv 0 \pmod{4}$, bude

$$n \equiv n_2 \pmod{4}.$$

Dále plyne z druhé rovnice $2n_1 \equiv 2n_3$, tedy $2n_3 \equiv 0 \pmod{4}$, a z rovnice třetí $n_2 \equiv n_4 \pmod{4}$, atd. Tedy čísla n, n_2, n_4, n_6, ... jsou vesměs lichá a shodna s 1 dle mod. 4, kdežto $n_1, n_3, n_5, n_7, \ldots$ jsou sudá. Process vyvíjení těchto čísel zakončí se případem $n_{2r} = 1$, t. j. poslední rovnice bude zníti

$$n_{2r-2} = 2h_{2r-1}\, n_{2r-1} + 1.$$

Znamenejme obecně *sgn.* $n = \nu$, *sgn.* $n_k = \nu_k$; poněvadž n má tvar diskriminantu, a podobně $2n_1$, plyne z rovnice $n = 2h_1 n_1 + n_2$, t. j. ze shody $n \equiv n_2$ (mod. $2n_1$) dle vzorce (9)

$$\left(\frac{2n_1}{n}\right) = \left(\frac{2n_1}{n_2}\right)(-1)^{\frac{1-\nu_1}{2}\cdot\frac{\nu-\nu_2}{2}}.$$

Dále jest $2n_1 \equiv 2n_3$ (mod. n_2) a tedy

$$\left(\frac{2n_1}{n_2}\right) = \left(\frac{2n_3}{n_2}\right),$$

takže máme vztah

$$(a) \qquad \left(\frac{2n_1}{n}\right) = \left(\frac{2n_3}{n_2}\right)(-1)^{\frac{\nu_1-1}{2}\cdot\frac{\nu-\nu_2}{2}}.$$

Uvažujme dále výraz

$$\Phi\,(-n,\, n_1);$$

poněvadž $-n = -n_2 - 2h_1 n_1$, máme dle první vlastnosti výrazu Φ

$$\Phi\,(-n, n_1) = \Phi\,(-n_2, n_1),$$

a poněvadž dle (3*)

$$\Phi\,(-n_2, n_1) = \Phi\,(n_1,\, n_2)\sqrt{\frac{n_1\, i}{n_2}},$$

bude

$$\Phi\,(-n, n_1) = \sqrt{\frac{n_1\, i}{n_2}}\,\Phi\,(n_1, n_2).$$

Avšak z rovnice

$$n_1 = 2h_2\, n_2 + n_3$$

plyne dále

$$\Phi\,(n_1, n_2) = \Phi\,(n_3, n_2)$$

a tedy

$$\Phi(-n, n_1) = \sqrt{\frac{n_1 i}{n_2}}\, \Phi(n_3, n_2).$$

Podle (3*) jest dále

$$\Phi(n_1, n) = \Phi(-n, n_1)\sqrt{\frac{n}{n_1 i}},$$

a tedy

$$(b) \qquad \Phi(n_1, n) = \sqrt{\frac{n}{n_1 i}}\sqrt{\frac{n_1 i}{n_2}}\, \Phi(n_3, n_2).$$

Jest nyní důležito vyjádřiti výraz $\sqrt{\frac{n}{n_1 i}}$ pomocí veličin $\sqrt{n}$, $\sqrt{n_1}$, $\sqrt{i}$. Jsou-li n i n_1 téhož znamení, bude

$$\sqrt{\frac{n}{n_1 i}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n_1}\sqrt{i}},$$

znamenáme-li $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ a je-li $\sqrt{n}$ kladný aneb kladně pomyslný (v případě $n < 0$). Neboť v obou případech jest veličina $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n_1}}$ realnou a kladnou. Zbývá tedy vyšetřiti případ, kdy znamení čísel n a n_1 jsou různá. Je-li n kladné a n_1 záporné, bude

$$\sqrt{\frac{n}{n_1 i}} = -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n_1}\sqrt{i}},$$

kdežto pro případ $n < 0$, $n_1 > 0$ máme

$$\sqrt{\frac{n}{n_1 i}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n_1}\sqrt{i}}.$$

Tudíž platí obecný vzorec

$$(10) \qquad \sqrt{\frac{n}{n_1 i}} = (-1)^{\frac{1+sgn.\,n}{2} \cdot \frac{1-sgn.\,n_1}{2}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n_1}\sqrt{i}}$$

čili v našem označení

$$\sqrt{\frac{n}{n_1\, i}} = (-1)^{\frac{\nu+1}{2}\cdot\frac{\nu_1-1}{2}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n_1}\,\sqrt{i}};$$

podobně

$$\sqrt{\frac{n_1\, i}{n_2}} = (-1)^{\frac{\nu_2+1}{2}\,\frac{\nu_1-1}{2}} \frac{\sqrt{n_1}\,\sqrt{i}}{\sqrt{n_2}}$$

a tedy bude rovnice (b) zníti

$$(c) \qquad \Phi(n_1, n) = (-1)^{\frac{\nu-\nu_2}{2}\cdot\frac{\nu_1-1}{2}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n_2}}\, \Phi\,(n_3, n_2)\,.$$

Násobíme-li rovnice (a) a (c) na souhlasných stranách, obdržíme

$$\left(\frac{2n_1}{n}\right) \frac{\Phi\,(n_1, n)}{\sqrt{n}} = \left(\frac{2n_3}{n_2}\right) \frac{\Phi\,(n_3, n_2)}{\sqrt{n_2}}\,.$$

Odtud soudíme, že bude tento výraz dále roven veličinám

$$\left(\frac{2n_5}{n_4}\right) \frac{\Phi\,(n_5, n_4)}{\sqrt{n_4}}\,, \quad \left(\frac{2n_7}{n_6}\right) \frac{\Phi\,(n_7, n_6)}{\sqrt{n_6}}, \ldots$$

a konečně veličině

$$\left(\frac{2n_{2r-1}}{n_{2r-2}}\right) \frac{\Phi\,(n_{2r-1}, n_{2r-2})}{\sqrt{n_{2r-2}}} = A.$$

Avšak

$$\left(\frac{2n_{2r-1}}{n_{2r-2}}\right) = \left(\frac{2n_{2r-1}}{n_{2r}}\right) (-1)^{\frac{1-\nu_{2r-1}}{2}\cdot\frac{1-\nu_{2r-2}}{2}},$$

což vůči okolnosti $n_{2r} = 1$, má hodnotu $(-1)^{\frac{1-\nu_{2r-1}}{2}\cdot\frac{1-\nu_{2r-2}}{2}}$,

dále

$$\frac{\Phi(\,n_{2r-1}, n_{2r-2})}{\sqrt{n_{2r-2}}} = \frac{1}{\sqrt{n_{2r-2}}}\, \Phi\,(-n_{2r-2}, n_{2r-1}) \sqrt{\frac{n_{2r-2}}{n_{2r-1}\, i}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_{2r-2}}} \sqrt{\frac{n_{2r-2}}{n_{2r-1}\, i}}\, \Phi\,(-n_{2r}, n_{2r-1}) = A'.$$

Poněvadž $n_{2r} = 1$, jest dle (3*)

$$\Phi(n_{2r}, n_{2r-1}) = \Phi(n_{2r-1}, 1)\sqrt{n_{2r-1}i},$$

t. j. $\sqrt{n_{2r-1}i}$, takže

$$A' = \frac{1}{\sqrt{n_{2r-2}}}\sqrt{\frac{n_{2r-2}}{n_{2r-1}i}}\sqrt{n_{2r-1}i}.$$

Avšak dle (10)

$$\sqrt{\frac{n_{2r-2}}{n_{2r-1}i}} = (-1)^{\frac{1+\nu_{2r-2}}{2}\cdot\frac{1-\nu_{2r-1}}{2}}\frac{\sqrt{n_{2r-2}}}{\sqrt{n_{2r-1}}\sqrt{i}},$$

$$\sqrt{n_{2r-1}i} = (-1)^{\frac{1-\nu_{2r-1}}{2}}\sqrt{n_{2r-1}}\sqrt{i}$$

a tedy

$$A' = (-1)^{\frac{1-\nu_{2r-1}}{2}\cdot\frac{1-\nu_{2r-2}}{2}},$$

z čehož plyne

$$A = 1,$$

t. j. jinými slovy

$$\left(\frac{2n_1}{n}\right)\frac{\Phi(n_1, n)}{\sqrt{n}} = 1.$$

Tím dokázána obecná věta

$$(11) \qquad \Phi(n_1, n) = \left(\frac{2n_1}{n}\right)\sqrt{n},$$

platná za podmínky $n \equiv 1 \pmod{4}$, n_1 sudé a nesoudělné s n. Odmocnina $\sqrt{n}$ je buď kladná aneb kladně pomyslná. Píšeme-li $n_1 = 2k$, zní tento výsledek

$$(11^a) \qquad \sum_{\alpha=0}^{|n|-1} e^{-\frac{2\alpha^2 k\pi i}{n}} = \left(\frac{k}{n}\right)\sqrt{n}, \quad n \equiv 1 \pmod{4},$$

při čemž k je nesoudělno s n, aneb, píšeme-li $-k$ za k,

$$(11^b) \qquad \sum_{\alpha=0}^{|n|-1} e^{\frac{2\alpha^2 k\pi i}{n}} = \left(\frac{-k}{n}\right)\sqrt{n} \text{ (tytéž podmínky).}$$

Případ sudého jmenovatele vyšetří se na základě tohoto vzorce pomocí vztahu (3*).

Je totiž dle této rovnice

$$\Phi(-n, n_1) = \Phi(n_1, n)\sqrt{\frac{n_1 i}{n}},$$

tedy dle (11)

$$\Phi(-n, n_1) = \left(\frac{2n_1}{n}\right)\sqrt{n}\sqrt{\frac{n_1 i}{n}}.$$

Znamenáme-li $n_1 = -2k$ a užijeme-li samozřejmé identity

$$\Phi(-n, n_1) = \Phi(n, -n_1),$$

máme

$$\Phi(n, 2k) = \left(\frac{-4k}{n}\right)\sqrt{n}\sqrt{\frac{-2ki}{n}}$$

aneb, poněvadž

$$\sqrt{\frac{2k}{ni}} = (-1)^{\frac{1+\operatorname{sgn}.k}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{sgn}.n}{2}}\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{n}\sqrt{i}},$$

$$\Phi(n, 2k) = \left(\frac{-4k}{n}\right)(-1)^{\frac{1+\operatorname{sgn}.k}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{sgn}.n}{2}}\sqrt{k}\,(1-i).$$

Poněvadž $n \equiv 1 \pmod{4}$, plyne z obecného zákona reciprocity

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{n}{a}\right)(-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn}.a}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{sgn}.n}{2}}$$

a rovnice tato platí i pro sudá a. Pro $a = -4k$ tedy bude

$$\left(\frac{-4k}{n}\right) = \left(\frac{n}{4k}\right)(-1)^{\frac{1+\operatorname{sgn}.k}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{sgn}}{.}},$$

takže poslední výsledek lze psáti

(12) $$\Phi(n, 2k) = \left(\frac{n}{k}\right)(1-i)\sqrt{k}, \quad n \equiv 1 \pmod{4}$$

čili

(12*) $$\sum_{a=0}^{|4k|-1} e^{-\frac{a^2 n\pi i}{2k}} = \left(\frac{n}{k}\right)(1-i)\sqrt{4k},$$

kde $n \equiv 1 \pmod{4}$ a čísla n, k jsou nesoudělna. Přejdeme-li k hodnotě sdružené, plyne za stejných podmínek

$$\sum_{a=0}^{|4k|-1} e^{\frac{a^2 n \pi i}{2k}} = \left(\frac{n}{k}\right)(1-i)\sqrt{-4k}.$$

Poznámka k číslům Bernoulliho.

Napsal

Dr. Karel Petr,
professor v Olomouci.

Sčítáme-li 2., 5., 8., 11., ... člen rekurrentního vzorce *Moivreova* pro čísla Bernoulliho, obdržíme výraz obsahující čísla Bernoulliho o indexech dle modulu 3 shodných. Jest pozoruhodno, že tento výraz jednoduše dá se ustanoviti. Obdržíme tak formuli, kteráž pro výpočet určitého čísla Bernoulliho téměř devětkrát jest výhodnější než formule Moivreova; jednak jest totiž třeba počítat jenom třetinu předcházejících, jednak pro výpočet jednotlivého čísla máme vzorec třikráte kratší.

Okolnost tuto, že z formule Moivreovy část členů jakožto známá se může vyjmouti, která, ač i z jiných ohledů než právě dotčeného, jest dosti zajímavá, dosud byla nepovšimnuta, hodláme v následujícím dokázati.

Kořeny rovnice

$$x(1-x)-1=0$$

označme ε_1, ε_2; platí mezi nimi vztahy, jak z rovnice ihned patrno,

$$\varepsilon_1 = 1-\varepsilon_2, \qquad \varepsilon_1^3 = \varepsilon_2^3 = -1$$

$$s_{3k} = \varepsilon_1^{3k} + \varepsilon_2^{3k} = \mp 2, \quad s_{3k+1} = s_{3k+2} = \pm 1.$$

Znaménko horní platí pro indexy liché, dolní pro indexy sudé. Lze psáti tudíž identicky

$$(x-\varepsilon_1)^m = [(x-1)+\varepsilon_2]^m$$
$$(x-\varepsilon_2)^m = [(x-1)+\varepsilon_1]^m.$$

Umocníme-li a sčítáme-li tyto identity, dostaneme

$$2x^m - m_1 x^{m-1} - m_2 x^{m-2} + 2m_3 x^{m-3} - m_4 x^{m-4}$$
$$- m_5 x^{m-5} + 2m_6 x^{m-6} - \dots$$
$$= 2(x-1)^m + m_1(x-1)^{m-1} - m_2(x-1)^{m-2} - 2m_3(x-1)^{m-3}$$
$$- m_4(x-1)^{m-4} + m_5(x-1)^{m-5} + 2m_6(x-1)^{m-6} + \dots$$

anebo

$$-(x+1)^m + 3x^m + 3m_3 x^{m-3} + 3m_6 x^{m-6} + \dots$$
$$= -(x-1-1)^m + 3(x-1)^m - 3m_3(x-1)^{m-3}$$
$$+ 3m_6(x-1)^{m-6} - \dots .$$

Tato identita vede nás k analogické pro funkce Bernoulliho. Tyto budeme zde definovati jakožto celistvé racionálné funkce pro celistvé hodnoty argumentu rovnicí

$$\varphi_m(x) = 1^m + 2^m + 3^m + \dots + x^m.$$

Dosadíme-li do odvozené identity za $x = 1, 2, 3, \dots, x$ a pak sečteme, obdržíme po snadné redukci

$$-(x+1)^m + 1 + 6[m_3\varphi_{m-3} + m_9\varphi_{m-9} + m_{15}\varphi_{m-15} + \dots]$$
$$= (x-1)^m - (-1)^m + x^m - 3[x^m - m_3 x^{m-3} + m_6 x^{m-6} - \dots],$$

ve kterémžto vztahu třeba po případě vynechati člen od x nezávislý v závorce hranaté na pravé straně. Tuto identitu lze též psáti

$$m_3\varphi_{m-3} + m_9\varphi_{m-9} + m_{15}\varphi_{m-15} + m_{21}\varphi_{m-21} + \dots$$
$$(\alpha) \qquad = \frac{1}{3}\left[m_2 x^{m-2} + m_4 x^{m-4} + m_6 x^{m-6} + \dots\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left[m_3 x^{m-3} - m_6 x^{m-6} + m_9 x^{m-9} - \dots\right].$$

Členy na x nezávislé v závorkách se již nevyskytují.

Dosadíme-li za φ_k různé výrazy a srovnáme-li koefficienty stejných mocnin x, dostaneme různé vzorce rekurrentní pro čísla Bernoulliho. Odvodíme zde jenom jediný, užívajíce vyjádření funkce Bernoulliho sudého indexu jakožto funkce argumentu x.*) Jest, jak známo,

---

*) Mohli bychom též vyjádřiti B. f. jakožto funkce argumentu $(2x+1)$, kteréžto vyjádření by nás vedlo k relacím mezi tangentovými koefficienty.

$$\varphi_{2\mu} = (-1)^{\mu+1} B_\mu x + x^2 \psi_{2\mu}, \quad \varphi_0(x) = x,$$

značí-li B_μ číslo μ-té Bernoulliho, $\psi_{2\mu}$ celistvou racionální funkci x.

Pokládáme-li v identitě (α) m za liché tvaru $2\mu + 3$ a srovnáme-li prvé mocniny x na obou stranách, dostaneme tento vztah pro čísla Bernoulliho:

$$1) \quad \begin{aligned} &\mu = 3k, \; (2\mu+3)_3 B_\mu - (2\mu+3)_9 B_{\mu-3} \\ &+ (2\mu+3)_{15} B_{\mu-6} - \ldots \pm (2\mu+3)_{2\mu-3} B_3 = (-1)^{\mu+1} \frac{2\mu}{3} \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} &\mu = 3k+1, \; (2\mu+3)_3 B_\mu - (2\mu+3)_9 B_{\mu-3} \\ &+ (2\mu+3)_{15} B_{\mu-6} - \ldots \pm (2\mu+3)_{2\mu+1} B_1 = (-1)^{\mu+1} \frac{2\mu+3}{3} \end{aligned}$$

$$3) \quad \begin{aligned} &\mu = 3k+2, \; (2\mu+3)_3 B_\mu - (2\mu+3)_9 B_{\mu-3} \\ &+ (2\mu+3)_{15} B_{\mu-6} - \ldots \pm (2\mu+3)_{2\mu-1} B_2 = (-1)^\mu \frac{2\mu+3}{6}. \end{aligned}$$

Jestliže tyto formule srovnáme se vzorcem *Moivreovým* (Z „Miscellanea analytica“, r. 1730. p. 6., viz Saalschütz: „Vorlesungen über Bernoullische Zahlen“ pag. 7.)

$$\begin{aligned} &(2m+1)_1 B_m - (2m+1)_3 B_{m-1} + (2m+1)_5 B_{m-2} - \ldots \\ &\qquad = (-1)^{m+1} \left(m - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

vidíme ihned, že pro $m = \mu + 1$ členy naší formule shodují se s 2., 5., ... členem formule Moivreovy.

Podotýkáme ještě, že způsobu, kterého jsme zde použili, dá se užiti k vyvození všech tak zvaných zkrácených formulí pro čísla Bernoulliho, jež jsou obsaženy ve spisu Saalschützově již citovaném. Stačí rozvinouti dle poučky binomické výraz

$$x^m (x-1)^n$$

jednou dle mocnin x, podruhé dle mocnin $x - 1$. Z identity tak vzniklé a z jiné jednonásobnou integrací*) z této odvozené, dají se odvoditi formule *Seidelovy* a *Sternovy a Saalschützovy.*

---

*) Tuto integraci lze však snadno nahraditi elementárným důkazem

Prvé odvozuje Stern v „Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen“ 1878 způsobem poněkud dlouhým pomocí differenčních řad; Saalschütz pak ke své formuli přichází pomocí součtové řady Mac Laurinovy.

Ostatně plynou z identit dotčených též identity příslušné pro funkce Bernoulliho.

Příspěvek k theorii lemniskaty.

Podává

Dr. K. Zahradník,

ř. professor mathematiky při universitě v Záhřebu.

Lemniskata, jejíž rovnice jest

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0, \tag{1}$$

je křivkou racionální. Každý kruh, jenž se dotýká lemniskaty v reálném dvojném bodě, protíná ji v 7 pevných bodech, osmý průsek jeho je závislý na poloměru u toho kruhu jednoznačně, t. j. můžeme souřadnice toho bodu vyjádřiti pomocí poloměru u jako racionálního parametru. Obdržíme

$$\begin{aligned} x &= a^2\sqrt{2}\,\frac{u(a^2+u^2)}{a^4+u^4} \\ y &= a^2\sqrt{2}\,\frac{u(a^2-u^2)}{a^4+u^4}. \end{aligned} \tag{2}$$

Substitucí

$$u = at, \quad a\sqrt{2} = c \tag{3}$$

obdrží rovnice (2) tvar *)

$$\begin{aligned} x &= c\,\frac{t(1+t^2)}{1+t^4} \\ y &= c\,\frac{t(1-t^2)}{1+t^4}. \end{aligned} \tag{4}$$

Vložíme-li hodnoty (4) do rovnice kruhu, obdržíme ihned

---

*) Parametru u užívá *Dr. Em. Weyr* ve svém pojednání: „Die Lemniscate in razionaler Behandlung.“ Praha, 1873. Jinou cestou algebraickou přichází *Hermite* k rovnici (4) lemniskaty ve svém: „Cours d'Analyse.“ Paris, 1873, pg. 242.

(5) $$t^{\mathrm{I}}t^{\mathrm{II}}t^{\mathrm{III}}t^{\mathrm{IV}} = 1$$

jakožto podmínku, dle které čtyři body lemniskaty t^{I}, t^{II}, t^{III}, t^{IV} leží na jednom kruhu.

Píšeme-li $t^{\mathrm{II}} = t^{\mathrm{III}} = t^{\mathrm{IV}} = t$, obdržíme

(6) $$t^3 t^{\mathrm{I}} = 1,$$

kterážto rovnice podává vztah mezi bodem oskulačním t kruhu křivosti a jeho reálným průsekem t' s lemniskatou.

Z rovnice (6) vychází, že každým bodem t' lemniskaty tři kruhy křivosti procházejí a to jeden reálný a dva imaginárné.

Parametry bodů oskulačních obdržíme jako kořeny kubické rovnice

(7) $$t^3 = \frac{1}{t'}.$$

Z této rovnice plyne ihned, označíme-li t_1, t_2 t_3 její kořeny, že body oskulační t_1, t_2, t_3 kruhů křivosti procházejících bodem t' lemniskaty opět na jednom kruhu leží, což lze i takto dokázati. Jelikož tato vlastnost*) dle Joachimsthala kuželosečce připadá, a z kuželosečky inversí kardioidu, lemniskatu, cissoidu atd. obdržíme, platí tato vlastnost též pro uvedené křivky, tudíž i pro lemniskatu zvláště.

Píšeme-li k vůli krátkosti:

$$t_1 + t_2 + t_3 = (t)_1$$
$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = (t)_2$$
$$t_1t_2t_3 = (t)_3,$$

obdržíme z rovnice (7)

(8) $$(t)_1 = 0,\ (t)_2 = 0,\ (t)_3 = \frac{1}{t'},$$

tudíž též

(8') $$(t^{3\lambda})_1 = \frac{3}{t^{\lambda}},\quad (t^{3\lambda})_2 = \frac{3}{t^{2\lambda}},\quad (t^{\mu})_1 = (t^{\mu})_2 = o,$$

kdež $\mu \neq 3\lambda$, λ i μ jsou čísla celá i positivná a místo t' jsme jednoduše psali t.

*) Viz *K. Zahradník*: „Vlastnosti jistých trojin oskulačních na kuželosečce. Archiv math. a fysiky, II. díl, Praha, 1879.

Tři body oskulační t_1, t_2, t_3, jež sdruženy jsou bodu t', t. j. jejichž kruhy křivosti společně probíhají bodem t' lemniskaty, jmenujeme trojinou bodů oskulačních.

Těžiště trojiny oskulační.

Budiž T (ξ, η) těžiště trojiny oskulační t_1, t_2, t_3 sdružené bodu t. Vzhledem k rovnicím (8) i (8') obdržíme

$$(9)\qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{c}{3}\sum_{h=1}^{3}\frac{t_h(1+t_h^2)}{1+t_h^4} = c\,\frac{t(1+t^2)}{1+t^4} \\ \eta &= \frac{c}{3}\sum_{h=1}^{3}\frac{t_h(1-t_h^2)}{1+t_h^4} = c\,\frac{t(1-t^2)}{1+t^4}, \end{aligned}$$

neb jest

$$\begin{aligned} \Sigma(t_1+t_1^3)(1-t_1^4+t_2^4t_3^4) &= (t^3)_1+(t)_3(t^3)_2 \\ \Sigma(t_1-t_1^3)(1-t_1^4+t_2^4t_3^4) &= -(t^3)_1+(t)_3(t^3)_2 \\ \Pi(1+t^4) &= 1+(t)_3^4. \end{aligned}$$

Leží tudíž těžiště trojiny oskulační na lemniskatě i jest oným bodem, jemuž je ta trojina sdružená.

Kruh opsaný trojině oskulační.

Rovnice kruhu probíhajícího třemi body jest

$$(10)\qquad \begin{aligned} &(x^2+y^2)\,|\,x, y, 1\,| - x\,|\,x^2+y^2, y, 1\,| \\ &+ y\,|\,x^2+y^2, x, 1\,| - |\,x^2+y^2, x, y\,| = 0. \end{aligned}$$

Za trojinu oskulační však platí

$$|\,x, y, 1\,| = -2c^2\Delta\frac{(t)_1+(t)_2(t)_3}{\prod\limits_{h=1}^{3}(1+t_h^4)} = 0,$$

a to za příčinou rovnic (8) i (8'); mimo to jest

$$\begin{aligned} |\,x^2+y^2, y, 1\,| &= -2c^3\Delta\frac{1+(t)_3^2}{\Pi(1+t^4)} \\ |\,x^2+y^2, x, 1\,| &= -2c^3\Delta\frac{1-(t)_3^2}{\Pi(1+t^4)} \\ |\,x^2+y^2, x, y\,| &= 4c^4\Delta\frac{(t)_3}{\Pi(1+t^4)}, \end{aligned}$$

znamená-li

$$\Delta = | 1, t, t^2 | .$$

Rovnice kruhu (10) přechází, jsou-li ty tři body, jimiž probíhá, trojinou oskulační, ve tvar

$$[1 + (t)_3^2]\, x - [1 - (t)_3^2]\, y - 2c\,(t)_3 = 0,$$

t. j. v rovnici

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{P} \equiv (1 + t^2)\, x + (1 - t^2)\, y - 2ct = 0.$$

Kruh opsaný trojině oskulační skládá se z přímky úběžné a z přímky P, která bodem t, jemuž je trojina oskulační sdružená, probíhá.

Přímka P je společná tětiva reálného kruhu křivosti a lemniskaty. Opíše-li bod t lemniskatu, obaluje přímka P rovnoosou hyperbolu

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{H} \equiv x^2 - y^2 - c^2 = 0,$$

jejíž reálná poloosa $OA = c$.

Sestrojení středu křivosti.

Jak známo, je lemniskata průmětnice rovnoosé hyperboly, pokládáme-li její střed za pol. Z toho plyne sestrojení bodu oskulačního reálného kruhu křivosti, jenž bodem t probíhá, konstrukce ta, k níž *Dr. Em. Weyr* *) dospěl zcela jinou cestou. *Na $\overline{Ot}$ sestrojme v bodě t kolmici. Její průsek s lemniskatou je hledaný bod t^*.* Naopak můžeme k bodu t^* lemniskaty jako bodu oskulačnímu nalézti sdružený bod t jakožto průsek kruhu s lemniskatou, je-li průměr kruhu Ot^*.

Jelikož sestrojení normály v bodu lemniskaty nečiní žádných obtíží, je tím i jednoduchá konstrukce poloměru křivosti i středu křivosti v bodě lemniskaty dána.

Přímka P je tudíž tečnou hyberboly H; její bod dotyčnosti budiž M a t pata kolmice s bodu O na P spuštěné. Můžeme však lemniskatu považovati za inversní křivku rovnoosé hyper-

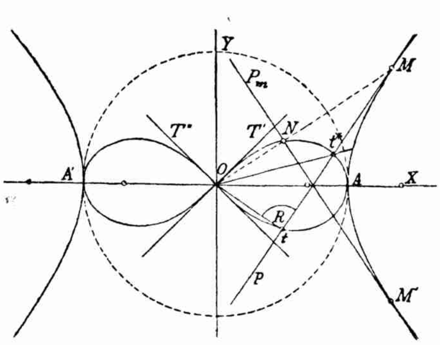
---

*) *Dr. Em. Weyr* l. c. pag. 21.

boly H se středem inverse v bodě O a poloměrem kruhu inverse $OA = c$. Platí tudíž

$$ON \,.\, OM = c^2.$$

Uvažujeme-li lemniskatu jakožto průmětnici hyperboly H s polem v O, tu odpovídá bodu $M(x, y)$ hyperboly bod $t(\xi, \eta)$ lemniskaty. Uvažujeme-li však lemniskatu jako křivku inversní hyperboly H vzhledem k Γ jakožto kruhu inverse, odpovídá



bodu $M(x, y)$ hyperboly H bod $N(\xi', \eta')$ lemniskaty. Body t, N leží symetricky vzhledem k ose X. Jest totiž

$$t \begin{cases} \xi = \dfrac{c^2 x}{x^2 + y^2} \\ \eta = -\dfrac{c^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases} \qquad N \begin{cases} \xi' = \dfrac{c^2 x}{x^2 + y^2} \\ \eta' = \dfrac{c^2 y}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Patrně je polára P_m bodu M vzhledem ke kruhu inverse Γ tangentou hyperboly H, jejíž bod dotyčnosti M' s bodem M symetricky leží k ose X. Tuto vlastnost můžeme i následovně vyjádřiti: *Hyperbola H je sama sobě polaroreciproká vzhledem ke kruhu Γ.*

O některých integrálech omezených.

Podává

M. Lerch,

prof. ve Freiburku Švýcarském.

Vzorec

$$(1)\quad \int_{u+w}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{w \cos 2ux - x \sin 2ux}{w^2+x^2} dx$$

lze takto dokázati. Položme

$$f(u) = e^{-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{w \cos 2ux - x \sin 2ux}{w^2+x^2} dx,$$

a differencujme vůči u dle známého pravidla; tak vyjde nejprve

$$f'(u) = -2e^{-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{w^2 \cos 2ux - wx \sin 2ux}{w^2+x^2} dx$$

$$-2e^{-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{wx \sin 2ux + x^2 \cos 2ux}{w^2+x^2} dx$$

a tedy po sečtení

$$f'(u) = -2e^{-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ux \, dx.$$

Jeden z nejznámějších vzorců počtu integrálního

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ux \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-u^2}$$

poskytne

$$f'(u) = -\sqrt{\pi}\, e^{-u^2-2uw},$$

z čehož plyne integrací

$$f(u) = \sqrt{\pi} \int_u^{\infty} e^{-x^2-2wx} dx = e^{w^2} \sqrt{\pi} \int_{u+w}^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

poněvadž funkce $f(u)$ se blíží nulle, roste-li u do nekonečna; druhý tvar vznikl substitucí $z = x + w$.

Tím vzorec (1) dokázán.

Klade-li se $u = 0$, vyjde ze vzorce (1)

$$(2) \qquad \int_w^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w dx}{w^2 + x^2}.$$

V rovnici (1) nelze klásti $w = 0$ (obě veličiny u a w původně byly předpokládány kladnými), i jest otázka, jak lze tu přejíti k mezím pro $w = 0$.

Tu užijeme nejprve rovnice $\cos 2ux = 1 - 2\sin^2 ux$, čímž integrál se rozpadne ve dva:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w \cos 2ux - x \sin 2ux}{w^2 + x^2} = \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w dx}{w^2 + x^2}$$

$$- \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{2w \sin^2 ux + x \sin 2ux}{w^2 + x^2} dx;$$

poslední integrál má pro $w = 0$ limitu

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin 2ux}{x} dx,$$

i zbývá jen vyšetřiti limitu integrálu

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w dx}{w^2 + x^2};$$

ta jest podle vzorce (2) rovna integrálu

$$\sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

a tedy bude v případě $w = 0$ vzorec (1) zníti

$$(3) \qquad \int_u^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin 2ux}{x} dx.$$

Z tohoto vzorce vychází

$$\sqrt{\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt{v}}}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} e^{-vx^2}\frac{\sin 2x}{x}\,dx\,;$$

rovnici tuto násobme na obou stranách $e^{-av}dv$ a integrujme od nully do nekonečna, takže

$$\sqrt{\pi}\int_0^{\infty} e^{-av}\,dv \int_{\frac{1}{\sqrt{v}}}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\pi}{2a} - \int_0^{\infty} dv \int_0^{\infty} e^{-v(a+x^2)}\frac{\sin 2x}{x}\,dx.$$

Přetvořme nejprve integrál v pravo. Ten lze psáti po změně pořádku integračního takto

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x}\,dx\int_0^{\infty} e^{-v(a+x^2)}dv,$$

a poněvadž vnitřní integrace poskytne výsledek

$$\frac{1}{a+x^2},$$

bude hodnota tohoto integrálu dvojnásobného

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x}\,\frac{dx^2}{a+x^2}.$$

Abychom pak přetvořili integrál na levé straně, t. j.

$$\int_0^{\infty} e^{-av}\,dv\int_{\frac{1}{\sqrt{v}}}^{\infty} e^{-x^2}dx,$$

uvažme, že to integrál dvojnásobný

$$\int\int e^{-av-x^2}dv\,dx,$$

jehož obor integrační dán jest podmínkami $vx^2 \geqq 1$, $x \geqq 0$. Poněvadž integrál ten jest absolutně konvergentní, nezávisí na pořádku integrace, i lze nejprve integrovati vůči v, takže máme výraz

$$\int_0^{\infty} dx \int_{\frac{1}{x^2}}^{\infty} e^{v^{2}-w}\, dv = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-x^2-\frac{a}{x^2}}\, dx.$$

Tím způsobem nacházíme vztah

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\int_0^{\infty} e^{-x^2-\frac{a}{x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2a} - \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,\frac{dx}{a+x^2}.$$

Integrál na levé straně stojící lze však vyčísliti. Užije-li se identity

$$x^2 + \frac{a}{x^2} = \left(x - \frac{\sqrt{a}}{x}\right)^2 + 2\sqrt{a},$$

obdrží se

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2-\frac{a}{x^2}}\, dx = e^{-2\sqrt{a}} \int_0^{\infty} e^{-\left(x-\frac{\sqrt{a}}{x}\right)^2} dx$$

a zde substituce

$$x - \frac{\sqrt{a}}{x} = 2z$$

poskytne

$$x = z + \sqrt{z^2+\sqrt{a}}, \quad dx = \frac{z+\sqrt{z^2+\sqrt{a}}}{\sqrt{z^2+\sqrt{a}}}\, dz,$$

takže náš výraz bude

$$e^{-2\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4z^2} \frac{z+\sqrt{z^2+\sqrt{a}}}{\sqrt{z^2+\sqrt{a}}}\, dz;$$

avšak tento výraz rozpadá se ve dva

$$e^{-2\sqrt{a}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4z^2} \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+\sqrt{a}}} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4z^2}\, dz \right\};$$

první z těchto dvou integrálů rovná se nulle, druhý má hodnotu $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ a tedy

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2-\frac{a}{x^2}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2\sqrt{a}};$$

následkem toho poslední výsledek bude zníti

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x} \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2a} e^{-2\sqrt{a}};$$

píšeme-li

$$a = \frac{u^2}{4}, x = \frac{z}{2},$$

vyjde tvar pěknější

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} \frac{dz}{u^2+z^2} = \frac{\pi}{2u^2}(1-e^{-u}). \tag{4}$$

Odtud vyvodí se další vzorec obsahující integrální logarithmus, násobí-li se du a integruje-li se od u do nekonečna. Tak vyjde nejprve

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{u}\, dx = \frac{\pi}{2u} - \frac{\pi}{2} \int_u^\infty e^{-z} \frac{dz}{z^2}.$$

Po částečné integraci máme

$$\int_u^\infty e^{-z} \frac{dz}{z^2} = \frac{e^{-u}}{u} - \int_u^\infty e^{-z} \frac{dz}{z} = \frac{e^{-u}}{u} + e^{-u} \log u - \int_u^\infty e^{-z} \log z\, dz$$

a tedy

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{u}\, dx = \frac{1-e^{-u}}{u} - e^{-u} \log u + \int_u^\infty e^{-x} \log x dx. \tag{5}$$

Příspěvek k theorii kuželoseček.

Podává

Dr. Karel Zahradník,
ř. professor mathematiky při universitě v Záhřebě.

Sestrojení tečny.

1. Souřadnice x, y kteréhokoliv bodu M kuželosečky

$$y^2 = 2px - xq^2 \tag{1}$$

můžeme vyjádřiti pomocí racionálného parametru u rovnicemi

$$x = \frac{2p}{u^2 + q}, \quad y = \frac{2pu}{u^2 + q}, \tag{2}$$

kdež značí, jak známo,

$$u = \operatorname{tg} MOX.$$

Tečna bodu M kuželosečky jest

$$2uy - (u^2 - q)\, x = 2p.$$

Táž protíná tečnu vrcholu A, jenž jest diametrálným bodem počátku souřadnic O v bodě M_1. Souřadnice bodu M_1 jsou

$$x_1 = 2\frac{p}{q}, \quad y = \frac{p}{q}. \tag{3}$$

Průvodič OM bodu M protíná tečnu vrcholu A v bodě B, jehož souřadnice jsou

$$x' = \frac{2p}{q}, \quad y' = \frac{2p}{q} u. \tag{4}$$

Bod M_1 půlí tudíž délku AB, z kteréžto vlastnosti vychází následující konstrukce tečny kuželosečky se středem v konečnu. *Ze středu S kuželosečky veďme rovnoběžku s průvodičem OM; tato rovnoběžka protíná tečnu bodu diametralného počátku souřadnic v bodě M_1. Spojnice MM_1 jest hledaná tečna.*

2. Kdybychom jiný bod O′ kuželosečky pokládali za počátek souřadnic, průměr toho bodu za X, tečnu jeho za osu Y, nemění se tvar rovnice kuželosečky; parametr u je v případě

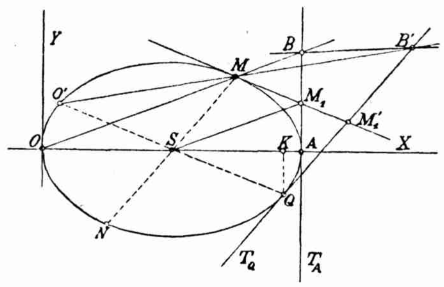
tomto dělící poměr paprsku OM vzhledem k osám souřadnic, totiž

$$u = \frac{\sin(\mathrm{XOM})}{\sin(\mathrm{MOY})}.$$

Jelikož rovnice (3) i (4) nemění svůj tvar, vychází následující sestrojení tečny bodu M kuželosečky:

Průvodič $\overline{O'M}$ protíná tečnu bodu Q diametralného bodu O' v B'. Spojnice středu M'_1 délky QB' s bodem M stanoví tečnu bodu M.

Souřadnice bodů B a M_1 dané rovnicemi (3) a (4) závisejí pouze na velikosti hlavní osy kuželosečky a na parametru u. Můžeme tudíž říci: Dán budiž svazek kuželoseček o společné hlavní ose OA. Krajním bodem O této osy veďme paprsek, jenž



Obr. 1.

jednotlivé kuželosečky svazku v bodech $M^{(r)}$ protíná a tečnu společného vrcholu A v bodě B. Spojnice $M_1M^{(r)}$ středu M_1 délky AB s body $M^{(r)}$ jsou tečnami na jednotlivé kuželosečky svazku.

3. Budiž opět OA hlavní osa, T_A tečna vrcholu A, O počátek souřadnic, OA osou X pravoúhelné soustavy souřadnic. Dále budiž O'Q určitý průměr kuželosečky, T_Q tečna bodu Q. Promítněme bod M kuželosečky dané s bodu O, O' na tečnu T_A resp. T_Q. Buďtež B, B' dotýčné projekce. Dle předcházejícího odstavce leží středy M'_1 délek QB' příslušných bodům O' (při proměnlivém O' na kuželosečce) na přímce, jež se dotýká dané kuželosečky v bodě M.

Buďtež naopak nyní body O, O′ pevné na kuželosečce a bod M proměnlivý. Za každý bod M obdržíme dva body B, B′ prvý na T_A, druhý na T_Q. Při proměnlivém M obalují spojnice $\overline{BB'}$ kuželosečku, jež se dotýká tečen T_A, T_Q.

Důkaz synthetický jest jednoduchý. Promítneme-li s vrcholu O kuželosečky body její na tečnu T_A, obdržíme řadu bodů (B). Podobně jest řada bodů (B′) projekcí bodů kuželosečky na tečnu T_Q bodu Q, jenž je diametrálným bodu O′, vzatému za střed projekce. Tyto dvě řady bodové jsou projektivné. Vyjdeme-li od bodu B na T_A, veďme OB, čímž obdržíme bod M na kuželosečce a $\overline{O'M}$ určuje na T_Q sdružený bod B′. Naopak vracíme se od bodu B′ jednoznačně k bodu B. Body B, B′ přímek T_A, T_Q jsou tím ve vztahu jednoznačném, t. j. projektivném; spojnice jejich obaluje tudíž kuželosečku, jež se dotýká spojnic řad bodových T_A, T_Q. Že ty dvě řady bodové nejsou v perspektivné poloze, vychází z toho, že se nenacházejí v jejich průseku dva body sdružené.

4. Analytický důkaz je též jednoduchý. Budiž t parametr bodu O′ dané kuželosečky a x, y jeho souřadnice. Parametr v bodu Q diametrálného bodu O′ vychází z relace

$$tv = -q,$$

je tudíž

$$v = -\frac{q}{t}.$$

Označíme-li x', y' souřadnice bodu Q, najdeme

$$x' = \frac{2pt^2}{q(t^2+q)}, \quad y' = -\frac{2pt}{t^2+q}. \tag{5}$$

Totéž plyne i geometricky, neboť

$$x' = \mathrm{OA} - \mathrm{KA} = 2\frac{p}{q} - x, \quad y' = \mathrm{QK} = -y.$$

Z posledních rovnic plyne opět

$$\frac{y'}{x'} = v = \frac{2\frac{p}{q} - x}{-y} = -\frac{q}{t}.$$

Rovnice tečny T_Q jest

$$(6) \qquad 2qty + q(q - t^2)x = -2pt^2$$

a rovnice spojnice*) $\overline{OM}$ jest

$$(7) \qquad (t + u)y - (tu - q)x = 2p.$$

Tečna T_Q protíná spojnici $\overline{OM}$ v bodě B′, jehož souřadnice jsou

$$(8) \qquad x = \frac{2pt(2q + t^2 + tu)}{q(t^2 + q)(t - u)}, \qquad y = \frac{2p(-q^2 + t^3u)}{q(t^2 + q)(t - u)}.$$

Souřadnice ξ, η spojnice $\overline{BB'}$ nabudeme

$$(9) \qquad \xi = \frac{-q^3 + q(t^2 + q)u - q^2tu}{2p(q + tu)^2}, \qquad \eta = \frac{-q[q(u + t) + 2ut^2]}{2p(q + tu)^2}.$$

Budiž nyní u proměnlivo, t. j. bod M mění svoji polohu na dané kuželosečce, tu obaluje spojnice $\overline{BB'}$ křivku, která jest, jak již z rovnice (9) patrno, druhé třídy. Rovnice (9) ji vyjadřují v souřadnicích tangenciálních.

V pravoúhlých souřadnicích bodových jest rovnice této kuželosečky

$$(10) \qquad [qtx + (q + 2t^2)y - 4pt]^2 + 4[q(t^2 + q)x + 2pt^2][qx + ty - 2p] = 0.$$

Z rovnice této poznáváme, že nezávisle na poloze bodu O′ na kuželosečce obálka vždy prochází počátkem souřadnic (vrcholem O) a že se dotýká průvodiče OA′ bodu A′, jenž jest diametrálný bodu O′, v počátku souřadnic O. Bodem O′ t. j. parametrem t, jest již kuželosečka (10) určená. Čtyřem bodům t_1, t_2, t_3, t_4 na základní kuželosečce příslušejí čtyři kuželosečky

*) Z rovnice (7) plyne souměrnost bodů t a u k ose X, je-li $t + u = 0$, souměrnost k ose Y, platí-li $tu = q$. Z obou podmínek souměrnosti k osám obdržíme podmínku souměrnosti vzhledem k středu kuželosečky, t. j. podmínku diametrálnosti dvou bodů kuželosečky.

(10), jež se protínají v bodě O pod týmž dvojpoměrem, jenž oněm bodům přísluší a jest roven (t_1, t_2, t_3, t_4).

5. Všem bodům základní kuželosečky přísluší řada kuželoseček, jejichž obálka jest křivka dvanáctého stupně.

Každým bodem roviny probíhají čtyři kuželosečky (10), příslušné parametrům t_1, t_2, t_3, t_4, tudíž čtyřem bodům na základní kuželosečce. Hledáme-li geom. místo bodů (x, y), jichž kuželosečky příslušejí čtveřinám bodů na základní kuželosečce té vlastnosti, že se v harmonických svazcích paprskových promítají aneb což totéž, že se ty čtyři kuželosečky v počátku souřadnic harmonicky protínají, srovnejme rovnici (10) dle klesajících mocnin parametru t, totiž

$$A_0 t^4 + A_1 t^3 + A_2 t^2 + A_3 t + A_4 = 0. \tag{11}$$

Podmínka harmoničnosti*) jest

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_7 \end{vmatrix} = 0.$$

Jelikož jsou A_h funkce druhého stupně vzhledem k x, y, je hledané geometrické místo křivka stupně šestého.

Kdyby koeficienty rovnice (11) vyhovovaly podmínce **)

$$A_0 A_4 + 3A_3^2 = 4A_1 A_3, \tag{12}$$

činily by kuželosečky jdoucí bodem (x, y) skupiny aequianharmonické. Z rovnice (12) bezprostředně vychází, že geometrické místo takových bodů (x, y) jest křivka stupně čtvrtého.

7. Z rovnice (8) plyne opět, že je geom. místo bodů B′, je-li M bod pevný, O′ proměnlivý, racionalná křivka třetího stupně, mající tři asymptoty reálné v případě, že je základní kuželosečka hyperbola; jedna reálná a dvě imaginárné asymptoty, je-li základní kuželosečka ellipsa. Úběžné body uvedené racionální křivky třetího stupně odpovídají bodu M a úběžným bodům základní kuželosečky.

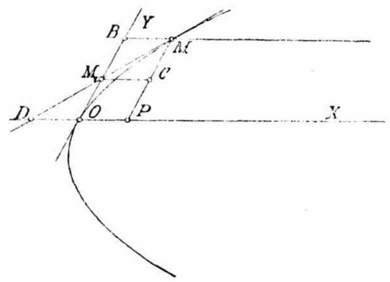
---

*) *Dr. H. Durège: „Ebene Curven dritter Ordnung“.* 1871, Leipzig, pg. 25. nebo *Cremona-Weyr*: „Úvod do geometrické theorie křivek rovinných“. Praha, 1873, pg. 32.

**) L. c. pg. 25. a 33.

8. Pro parabolu platí táž konstrukce tečny; třeba pouze uvážiti, že je střed paraboly v nekonečné vzdálenosti a tudíž všecky průměry paraboly rovnoběžny.

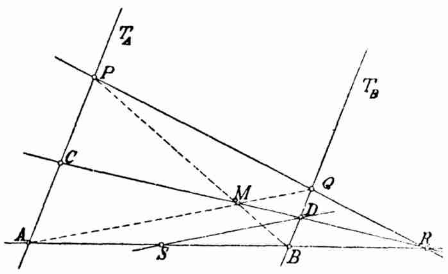
Je-li dán bod O paraboly, její průměr tím bodem jdoucí a tečna téhož bodu, mimo to bod M paraboly, veďme, chceme-li tečnu bodu M sestrojiti, bodem tímto rovnoběžku s průměrem OX,



Obr. 2.

jenž tečnu OY bodu O protíná v bodě B. Spojnice M_1M středu M_1 délky OB s bodem M jest hledaná tečna. Jelikož DO $=$ OP, neboť $OM_1 = PC = CM$, shledáváme souvislost této koustrukce tangenty s konstrukcí pomocí subtangenty.

9. Mohli bychom obdržeti vzpomenutou konstrukci tečny bodu M kuželosečky z Pascalovy věty, předpokládajíce, že známe



Obr. 3.

bod kuželosečky a dvě rovnoběžné tečny a zároveň body dotyčnosti A, B. Máme tu Pascalův šestiúhelník AABBMM, kdež je na příklad AA daná tečna T s dotyčným bodem A. Dle schematu

$$\left.\begin{array}{l} T_A \;..\; \overline{BM} \cdot - \cdot P \\ AB \;...\; \overline{MM} \\ T_B \;...\; \overline{AM} \cdot - \cdot Q \end{array}\right\} \Pi$$

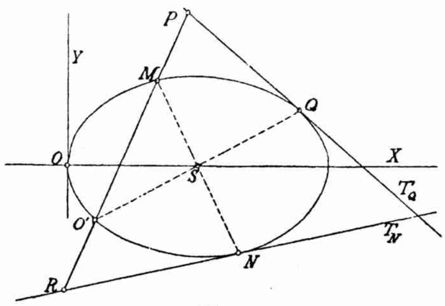
najdeme bod $T_A . \overline{BM} \equiv P$, $T_B . \overline{MA} \equiv Q$. Spojnice $\overline{PQ}$ jest Pascalova přímka šestiúhelníka AABBMM vepsaného kuželosečce. Spojnice bodu $R \equiv \overline{AB} . \overline{PQ}$ s bodem M jest hledaná tečna, Jelikož je $T_A \parallel T_B$, půlí $\overline{MR}$ délku $\overline{AP}$ v bodě C, délku BQ v bodě D. Střed S průměru AB je střed kuželosečky i platí jako dříve $SD \parallel AM$, $DM \equiv T_M$.

Nová vlastnost kuželosečky.

10. *Nechť jsou O′Q, MN dva průměry kuželosečky; spojnice $\overline{O'M}$ nechť protíná tečny diametrálných bodů Q, N v bodech P, R tak, že*

$$RO' = MP.$$

Tuto vlastnost dokážeme tím, že dokážeme rovnost pravoúhlých projekcí těchto úsečí na ose X.



Obr. 4.

Buďtež u, t parametry bodu M, O; parametr bodu P diametrálného bodu O′ jest $-\frac{q}{t}$, proto souřadnice bodu P [viz odst. 4., rovnice (6), (7), (8)] jsou

$$(8') \qquad x = \frac{2pt\,(2q + t^2 + tu)}{q\,(t^2 + q)\,(t - u)}, \qquad y = \frac{2p\,(-q^2 + t^3 u)}{q\,(t^2 + q)\,(t - u)}$$

a souřadnice bodu R obdržíme, píšeme-li u místo t v rovnicích (8′)

$$
(13) \qquad
\begin{aligned}
x &= \frac{2pu\,(2q + u^2 + tu)}{q\,(u^2 + q)\,(u - t)} \\
y &= \frac{2p\,(-q^2 + u^3t)}{q\,(u^2 + q)\,(u - t)}\,.
\end{aligned}
$$

Průmět úsečky MP na ose X rovná se rozdílu úseček bodů P a M; je tudíž jednak

$$\frac{2pt\,(2q + t^2 + tu)}{q\,(t^2 + q)\,(t - u)} - \frac{2p}{u^2 + q}$$

aneb

$$\frac{2pt}{q\,(t - u)} + \frac{2pt\,(tu + q)}{q\,(t^2 + q)\,(t - u)} - \frac{2p}{u^2 + q}\,.$$

Týmž způsobem obdržíme průmět úsečky RO′ na ose X

$$\frac{2p}{t^2 + q} - \frac{2pu}{q\,(u - t)} - \frac{2pu\,(tu + q)}{q\,(u^2 + q)\,(u - t)}\,.$$

Tyto průměty jsou rovny, neboť platí

$$\frac{2pt}{q\,(t - u)} + \frac{2pt\,(tu + q)}{q\,(t^2 + q)\,(t - u)} - \frac{2p}{u^2 + q} \equiv \frac{2p}{t^2 + q} + \frac{2pu}{q\,(t - u)} + \frac{2pu\,(tu + q)}{q\,(u^2 + q)\,(t - u)}\,.$$

Převedeme-li totiž všechny členy na levou stranu a zkrátíme-li činitelem $\frac{2p}{q}$, obdržíme po krátké redukci

$$1 - \frac{t^2u^2 - q^2}{(t^2 + q)\,(u^2 + q)} - q\,\frac{t^2 + u^2 + 2q}{(t^2 + q)\,(u^2 + q)} \equiv 0$$

aneb

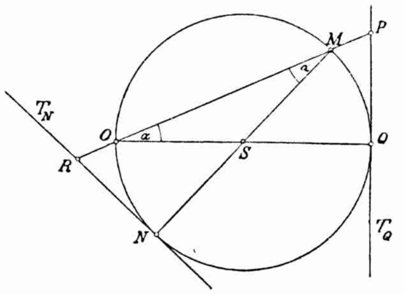
$$(t^2 + q)\,(u^2 + q) + q^2 \equiv t^2u^2 + q\,(t^2 + u^2 + 2q),$$

z kteréhož tvaru totožnost vysvítá. Tím jest i dokázáno, že

$$MP = RO'.$$

11. U ellipsy mohli bychom mnohem jednodušeji tuto vlastnost dokázati. Kruh jest orthogonalným průmětem ellipsy.

Obrazec 4. přejde tu v obrazec 5., kdež téhož označení jako v obrazci 4. jsme užili. Trojúhelníky OQP a MNR jsou shodny,



Obr. 5.

neboť jsou pravoúhlé, dále je $\sphericalangle$ NMR = $\sphericalangle$ POQ a OQ = MN, tudíž RM = OP a proto MP = RO.

Jelikož horní vztah platí pro kruh a parallelnou projekcí se nemění, platí též pro ellipsu.

Věstník literární.

Arithmetika pro I. a II. třídu škol gymnasijních. Sepsal *František Tůma,* professor c. k. gymnasia v Č. Budějovicích. Vydání páté. Cena seš. 1·50 K., váz. 1·80 K. V Praze, 1898. Tiskem I. L. Kobra. Nákladem vlastním. Nové vydání této učebnice, od r. 1886 na gymnasiích zavedené (viz Časopis roč. XVI.), neliší se podstatně od vydání čtvrtého, o němž Časopis roč. XXIV. pochvalný přinesl posudek z péra vynikajícího odborníka prof. dra Vaňause. Předsevzaté změny, pokud nejsou rázu toliko stylistického, nesou se hlavně k rozmnožení příkladů k cvičení. Mimo to přehledněji a srozumitelněji podány jsou počty na sto a ve stu. Bylo by si ještě přáti, aby výklad o počítání zlomky obyčejnými založen byl na předchozím výkladu o zlomcích desetinných. Tím předešlo by se parallelním a zdánlivě různým výkladům některých výkonů početních se zlomky. Rovněž doporučuje se založiti výklad o počítání čísly mnohojmennými, rozvodu a převodu na obdobném počítání čísly desetinnými. Lze tudíž i v tomto směru užiti methody induktivní, jíž pan autor v učebnici s prospěchem sleduje. V počtu procentovém s výhodou jest zavésti „jednotku" 1% základu, t. j. stý díl základu. Výnos na př. 684 jednotek po 3% (§ 61, a) vypočítáme takto: 1% z 684 jest 6·84, 3% tudíž 6·84 × 3 atd. Obdobně vedeme si při vypočítávání procenta i základu, berouce základ rovný 100%. Tak počítáme úlohy tyto z paměti, bez vzorců i vštípíme tím postup trvale v paměť žáků. Z úkolů k cvičení, jež v hojném počtu a s výborem do učebnice přijaty jsou, vyřadili bychom příklady na sečítání a odčítání 8. a 12. na str. 17., př. 19. a 20. na str. 22. a 23., př. 12 a 13. na str. 24. a vřadili je mezi úkoly o násobení a dělení. Vyslovená tuto přání nejsou na úkor příznivému posudku, výše uvedenému. Učebnice zamlouvá se jasným a prostým výkladem učiteli, jmenovitě ale žákům, jimž činí obtíže co nejmenší. Prof. *J. Pour.*

Arithmetika pro I. třídu škol realných. Sepsal *František Tůma,* profesor c. k. gymnasia v Č. Budějovicích. Cena seš. 50 kr., váz. 70 kr. V Praze, 1898. Nakladatel I. L. Kober, knihkupectví. Pan autor upravil výše uvedenou učebnici pro potřebu škol realných, vydav proti dosavadnímu zvyku pro 1. třídu samostatný sešit. Kladla-li se dříve váha na to, aby žák měl v ruce učebnici, obsahující v sobě učivo dvou i více tříd, vede se nyní nářek na velikou objemnost a tím i drahotu učebnic. Vidíme tudíž ve vydání samostatného sešitu pro 1. třídu počátek nápravy. Instrukce pro realky předpisují probrání zlomků před počítáním s mnohojmennými čísly, čemuž pan autor vyhověl. Kromě toho přidal několik příkladů na str. 55. a několik příkladů k opakování o číslech mnohojmenných. Výklad o největší společné míře a o nejmenším společném násobku upraven jest dle 2. vyd. pro gymnasia. Těšíme se na brzké vydání dílu druhého a doporučujeme učebnici tuto laskavé pozornosti pp. kollegů. Prof. *J. Pour.*

Prof. dra Ed. Weyra **Přednášky o mathematice.** *(II. ročník). Druhé, opravené vydání. Vydal assistent Em. Hlavatý.* V kommissi „Spolku posluchačů inženýrství na c. k. české vysoké škole technické." Cena pro členy Spolku 4 zl., pro nečleny 5 zl. r. m.

Pod tímto titulem vydány přednášky prof. Weyra, které p. auktor konal ve stud. roce 1897—98 ve II. ročníku na c. k. české vysoké škole technické, takže díl tento jest vlastně pokračováním i dokončením mathematických přednášek pro I. ročník, jež zahrnuty byly v díle prvém. Referát o tomto prvém díle, jež dle přednášek, prof. Weyrem k tisku upravených, vydal býv. assistent p. auktorův, nyní professor v Rakovníku p. Ant. Vaňourek, byl podán v tomto Časopise roč. XXI. (1892), str. 254. a o II. díle, obsahujícím přednášky pro II. ročník, referováno bylo v následujícím ročníku str. 45. Druhé vydání II. dílu, které máme právě před sebou (2. vyd. I. dílu dosud nevyšlo), lithografoval nástupce assistenta p. Vaňourka, p. Em. Hlavatý, nyní professor v Hradci Králové, který svému úkolu, jak rádi doznáváme, svědomitě dostál.

Ježto některá místa v novém vydání byla pozměněna, reprodukujeme přehled celé látky.

1. **Pokračování počtu differenciálního.** *Differencování funkcí více neodvisle proměnných*, kdež uvedeno: Totální differenciál funkce více neodvisle proměnných a funkce složené z jiných funkcí několika neodvisle proměnných, vyšší totální differenciály funkce více neodvisle proměnných, totální differenciály implicitních funkcí, zavádění nových proměnných do funkcí více neodvisle proměnných. Pak se pojednává o větě Taylorově a Mac-Laurinově pro funkce více neodvisle proměnných a o větě Eulerově o homogenních funkcích.

Jakožto applikaci počtu differenciálního podává dále:

a) Maxima a minima funkcí více neodvisle proměnných a relativná maxima. Tu úplněji precisována jest podmínka, kdy nastává maximum neb minimum funkce dvou neodvisle proměnných.

b) Plochy a čáry s obsahem: Tečna a normálná rovina čáry, tečná rovina a normála plochy, tečná rovina vedená bodem daným mimo plochu, a pak differenciál oblouku prostorové čáry.

Dále vykládá se rektifikace čar prostorových, oskulační rovina a hlavní normála prostorové čáry, křivost prostorových čar a kružnice křivosti, křivost čar vedených na dané ploše, křivost šikmých a normálných řezů a průběh poloměru zakřivení normálných řezův. Pak následuje výklad o plochách obalujících, rozvinutelných, zvláště o obalující ploše systemu závislého na dvou parametrech; sdružené tečny plochy, přímočaré plochy, asymptotické čáry, křivoznačné čáry, všude s připojenými poučnými příklady.

V theorii čar vypuštěn jeden způsob odvození rovnice roviny oskulační.

2. **Pokračování počtu integrálního.** *Omezené integrály*, jež obsahují: Definici omezeného integrálu a jeho geometrický význam, případ, kdy integrovaná funkce roste do nekonečna, případ nekonečně velkých mezí, stejnoměrnou konvergenci řad a integrování za integračním znamením, řady trigonometrické (Fourierovy), funkce sudé a liché. Dále jedná o vícenásobných integrálech, a to: O zdvojených integrálech, při čemž vyložen na geometrickém základě pojem zdvojeného integrálu, a zavedeny polárné souřadnice do zdvojeného integrálu; pak řešeny úlohy o kubatuře těles, stanovena komplanace ploch, zavádění nových proměnných do zdvojených integrálů (transformace zdvojených integrálů) a komplanace ploch v polárních souřadnicích prostorových. Po té následují trojnásobné integrály, zavádění nových proměnných do ztrojených integrálů se zajímavými příklady.

3. **Differenciální rovnice** skýtají: Úvod, obecný a partikulárný integrál, partikulární řešení rovnice differenciální prvního řádu, separování (oddělování) proměnných, homogenní differenciální rovnice prvního řádu, lineární differenciální rovnice prvního řádu, singulární řešení differenciální rovnice prvého řádu, pak stanovení trajektorií k čarám v rovině a evolventy čar rovinných. Dále se vykládá o integrování totálních differenciálů, integrační faktor, differenciální rovnice druhého řádu, vznikající eliminací dvou stálých z dané relace mezi dvěma proměnnými a ze dvou rovnic derivováním z ní odvozených, obecné differenciální rovnice druhého řádu, lineární differenciální rovnice druhého řádu, redukovaná rovnice o stálých koefficientech a variace stálých. Pak následují differenciální rovnice vyšších řádů a variace stálých, soustava differenciálních rovnic (rovnice soudobé či simultanní); centrálný pohyb hmotného bodu, planetárný pohyb, zákony Keplerovy a lineárné parciálné differenciální rovnice prvého řádu ukončují tuto stať.

4. **Pokračování analytické geometrie v prostoru** jedná o plochách válcových, kuželových, o plochách rotačních a konoidických a o ploše kulové. Pak vykládá plochy stupně druhého, střed ploch těchto, transformaci centrálných ploch k hlavním osám, pak roztřídění centrálných ploch druhého stupně, transformace rovnic ploch necentrálných, polární vlastnosti ploch druhého stupně a zvláště vyšetřen ellipsoid od str. 227 - 234., pak hyperboloid jednoplochý (přímočarý) a dvojplochý, paraboloid elliptický a hyperbolický.

5. **Variační počet** zahrnuje v sobě: Úvod, definici variace v případě jedné i více funkcí jedné proměnné; pořad operací označených znaky d a δ lze obrátiti, rovněž pořad operací označených δ a $\int$, nechť jsou meze integrálu jakékoliv. Pak následuje: Maxima a minima omezených integrálův a relativní maxima a minima (isoperimetrické problémy), kterýž obor končí se případem, kdy jde o variaci výrazu závislého na funkci dvou neodvisle proměnných.

V počtu variačním zpozorovali jsme některé změny textové.

V dodatku konečně připojen důkaz věty, že přímočará plocha jest rozvinutelna, dotýká-li se jí tečná rovina podél celé přímky.

Obrazce částečně ponechány, mnohé však nahrazeny jinými, někde — kde toho bylo potřebí — i axonometricky přesně konstruovanými.

Doporučovati nové toto vydání netřeba, neboť evropské jméno p. auktorovo jest jeho výkladům o mathematice nejlepším doporučením.
R.

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Základní úlohy mathematického zeměpisu a sférické astronomie řešené konstrukcí.

Podává

Adolf Mach,

professor c. k. vyšší reálky v Jičíně.

I. Denní a noční oblouk zemských rovnoběžek.

Každá koule ozářená jsouc sluncem, jest z polovice osvětlena, z polovice ve vlastním stínu. Bod povrchu kulového, na který sluneční paprsek dopadá kolmo, jenž jest tudíž nejintensivněji osvětlován a oteplován, nazývá se *světelný pól.*

Mez vlastního stínu, to jest linie, která dělí osvětlenou část kulové plochy od zastíněné, jest od světelného pólu všude 90^0 vzdálena, půlí kulovou plochu, jest její hlavní kružnicí; nazývejme ji krátce *„světelnou mezí“*.

To vše platí též o zemské kouli.

Polovina povrchu zemského jest stále osvětlena, polovina jest ve stínu. Ale poněvadž se země otáčí kolem své osy, vstoupí místa povrchu zemského, kromě některých vyjímek, jen na několik hodin do stínu zemského, místa ta mají *noc,* načež vystoupivše ze stínu, jsou opět sluncem ozařována i oteplována, mají *den.*

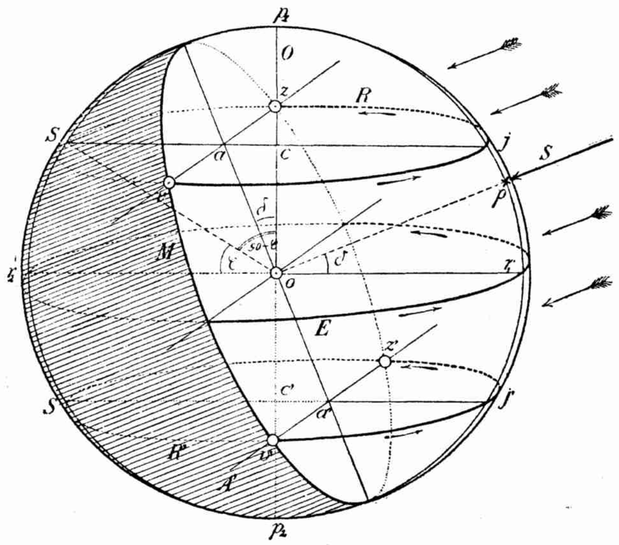
Jak dlouho každé místo dlí ve stínu a jak dlouho se pohybuje v osvětlené části, to budiž předmětem následujících úvah.

Obr. 1. jest šikmý průmět zeměkoule; o střed její, p_1p_2 zemská osa, E rovník, R a R' rovnoběžky zeměpisné šířky φ a $-\varphi$, S směr slunečních paprsků, p *světelný pól*, jemuž přísluší hlavní kružnice M jako světelná mez, která dělí zemský povrch na dvě stejné části, osvětlenou a zastíněnou.

Dokud body rovnoběžky *R*, otáčejíce se kolem zemské osy od západu přes jih k východu, prodlévají v oblouku *vjz*, dotud vidí slunce, mají *den*; jakmile vstoupí do oblouku *zsv*, zmizí jim slunce s obzoru, mají *noc*.

V bodu *v* vychází místo ze stínu zemského, v bodu *z* do něho zapadá, ač pravíme, že v prvém případě *„slunce vychází"*, ve druhém že *„slunce zapadá"*.

Oblouk *vjz* lze nazvati *denním obloukem rovnoběžky R*, oblouk *zsv* jejím *nočním obloukem*.



Obr. 1.

Kdyby země nekolovala kolem slunce, kdyby se otáčela jen kolem své osy, pak by stále body téže rovnoběžky se stávaly světelnými póly, táž kružnice *M* by po všecek věk byla mezí světelnou, ale pak by též po všecku dobu dni byly stejně dlouhé, poněvadž by se velikost denního a nočního oblouku neměnila.

Totéž by nastalo, kdyby země sice kolovala kolem slunce, ale osa její byla kolmá na rovinu dráhy zemské, na *ekliptiku*.

Pak by slunce svítilo stále kolmo na rovník, světelná mez by procházela oběma póly, sjednocovala by se s poledníky, načež den po všecek věk a na celém povrchu zemském rovnal by se noci; 12^h by trval den, 12^h noc.

Že tomu není tak, toho příčinou jest, že osa zemská jest o $23^1/_2{}^0$ k rovině ekliptiky skloněna, což má za nasledek, že sluneční paprsky dopadají každý den na místa jiné zeměpisné šířky kolmo, že světelný pól putuje mezi oběma obratníky a že světelná mez polohu svou den jak den mění.

Takto kolem slunce kolujíc, země přichází jen dvakrát ročně — 20. března a 22. září — do polohy, ve které průsečnice roviny zemského rovníka s blankytem nebeským — *rovník nebeský* — prochází středem slunce, kdy slunce svítí kolmo na rovník a světelná mez prochází póly. V tom případě místa téhož poledníka překročí světelnou mez současně, mají současně východ a západ slunce a jako každý jiný den, současně i poledne.

Ale již ve dnech, které 20. březnu následují až do 22 září, přichází slunce do polohy vyvýšené nad rovinu rovníka. V této poloze padají paprsky sluneční kolmo na místa severně od rovníka a jen malé úvahy jest třeba, bychom seznali, že jsou to právě místa, jichž zeměpisná šířka rovná se vyvýšení slunce nad rovinu rovníka, kteréžto vyvýšení měříme obloukem na nebeské báni, jdoucím od slunce kolmo k rovníku. Velikost tohoto oblouku nazýváme *„sluneční deklinací“* a znamenáme písmenem δ.

Od 20. března do 22. září jest deklinace *severní (kladná).*

Od 22. září až do 20. března přichází slunce pod rovník, svítí kolmo na místa jižní zeměpisné šířky, deklinace jest *jižní (záporná).*

V obr. 1. rovná se deklinace oblouku pr_1, jenž počtem stupňů se rovná úhlu por_1.

Majíce vše to na mysli, můžeme přikročiti k sestrojení pravé velikosti denního a nočního oblouku libovolné rovnoběžky R.

Především otočme současně $\triangle\, coa$ a $\triangle\, cos$ kolem strany cs jako osy do roviny rovnoběžky R, jako kdybychom dvéře ve stěžejích otáčeli.

Body c, a a s jsou stálé, a poněvadž

$$co \perp or_1 \quad \text{a} \quad ao \perp op,$$

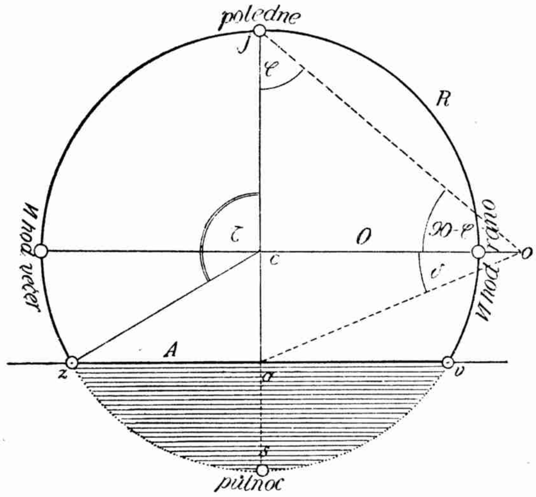
jest

$$\sphericalangle\, coa = \delta \text{ a } \sphericalangle\, cos = 90^0 - \varphi,$$

kteréžto úhly při otáčení se nemění.

Proto lze vše v pravé velikosti zobraziti v rovině papíru, myslíme-li si, že se s ní sjednotí rovina rovnoběžky R.

Zobrazme přímku sj, třeba svisle (obr. 2.); jejím bodem c přímku vodorovnou O jako otočenou zemskou osu, na ni nanesme libovolně dlouhou úsečku co, tím obdržíme otočený střed zemský o; k tomuto bodu a k přímce O nanesme dolů $\sphericalangle\, \delta$



Obr. 2.

a nahoru $\sphericalangle\, 90^0 - \varphi$; ramena těchto úhlů protnou svislou přímku v bodech a a j. Poloměrem cj opišme kružnici, kteráž jest obrazem rovnoběžky R, bodem a veďme přímku $A \parallel O$, kterou je vyznačena přímka vz, jež dělí kružnici R na dvě části, z nichž ona, která prochází bodem s jest *noční oblouk*, druhá pak *denní oblouk* příslušné rovnoběžky; $\sphericalangle\, \tau$ rovná se počtem stupňů polovině denního oblouku. V bodu v místo vychází ze stínu zemského, v bodu z do něho zapadá; v bodu j, jenž denní oblouk půlí, jest v *poledne*, v bodu s o *půlnoci*.

Abychom se dozvěděli, kolik hodin to trvá, než kterékoliv místo rovnoběžky R vykoná dráhu denního nebo nočního oblouku, tu třeba se jen rozpomenouti, že země otočí se kolem osy jednou za 24 hodiny; každý bod rovnoběžky R vykoná celou dráhu, t. j. 360^0 za 24^h, za hodinu 15^0, za 4 minuty 1^0, za minutu $15'$, za 4 sekundy $1'$ atd.

Změřme $\sphericalangle \tau$! Počet stupňů dělme 15 a zbývající stupně násobme čtyřmi. Podíl značí hodiny, součin minuty; hodiny a minuty dohromady stanoví trvání polovičního dne, t. j. doby od východu slunce do pravého poledne. Násobíme-li tuto dobu dvěma, obdržíme délku celého dne, a odečteme-li ji od 24 hod., dostaneme délku noci.

V obr. 2. jest $\varphi = 50^0$ (zeměpisná šířka středních Čech), $\delta = 23^1/_2{}^0$, deklinace sluneční v nejdelší den roční (21. června).

$$\sphericalangle \tau = 121^0;$$

tedy

$$121^0 : 15 = 8^h,$$
$$1$$

$$1^0 \times 4 = 4^m.$$

Dne 21. června trvá u nás půl dne $8^h\ 4^m$, celý den $16^h\ 8^m$. Slunce vychází ve $3^h\ 56^m$ pravého času, zapadá v $8^h\ 4^m$ pravého času.

Co platí o slunci, platí též o každé jiné stálici.

Každá hvězda, vysílajíc světelné paprsky, osvětluje zemi, a můžeme míti i za to, že na ni vytvořuje, ovšem ne tak znatelně jako slunce, část osvětlenou a část zastíněnou, jež od sebe jsou odděleny hlavní kružnicí.

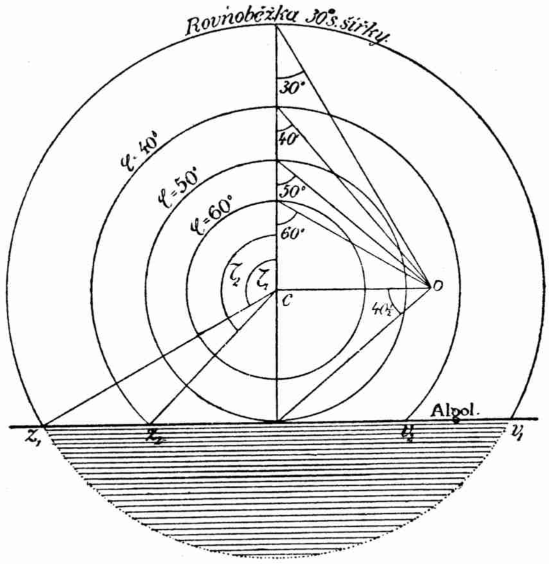
Dokud místo libovolné rovnoběžky jest v části osvětlené, má hvězdu nad obzorem, a je-li právě jasná noc, vidí ji tak dlouho, dokud nevstoupí do části povrchu zemského, hvězdou zastíněné.

Je-li známá deklinace hvězdy a pólová výška místa pozorovacího, lze způsobem v obr. 2. vylíčeným, stanoviti denní a noční oblouk příslušné rovnoběžky pro určitou hvězdu.

V obr. 3. řešena tato úloha pro hvězdu *Algol* ($\delta = 40^1/_2{}^0$) a pro rovnoběžky 30.°, 40.°, 50.° a 60.° s. š.

Z obr. 3. jde na jevo, že půl denního oblouku rovnoběžky 30.°, t. j. $\sphericalangle\, \tau_1 = 120^0$ čili 8^h; to znamená, že místa na této rovnoběžce každý den mají hvězdu *Algol* 16^h nad obzorem, 8^h pod obzorem.

Půl denního oblouku na rovnoběžce 40.°, čili $\sphericalangle\, \tau_2 = 136^0$. *Algol* dlí zde nad obzorem $18^h\ 8^m$.



Obr. 3.

Rovnoběžky 50.° i 60.° s. š. neprotínají mez vlastního stínu místa těchto rovnoběžek otáčejí se stále jen v oné části povrchu zemského, jež je hvězdou osvětlena. *Algol* pro tyto jakož i všechny severnější rovnoběžky jest hvězdou *cirkumpolární.*

Ale i mathematický vzorec pro poloviční denní oblouk lze z obr. 2. vyvoditi:

Je-li úsečka $co = 1$,

jest

$$cj = cz = \cotg \varphi,$$
$$ca = \operatorname{tg} \delta.$$

Z $\triangle\, acz$ plyne:

$$\cos(180-\tau) = \frac{ca}{cz}$$

čili

$$\cos\tau = -\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{cotg}\varphi}$$

nebo

$$\cos\tau = -\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\varphi.$$

Z tohoto vzorce, jakož i z obr. 2. vyplývá, že délka denního oblouku rovnoběžek závisí na zeměpisné šířce místa pozorovacího a na deklinaci hvězdy.

Stálice nemění své deklinace, nehledíme-li k malé její roční změně; proto denní i noční oblouk rovnoběžek jest pro určitou stálici stále týž.

Každá stálice jest u nás po celý rok a každý den stejně dlouho nad horizontem, stejně dlouho pod ním.

Jinak jest tomu u slunce.

Již dříve byla učiněna zmínka, že slunce deklinaci stále mění.

Od 21. prosince do 21. června deklinace sluneční přibývá, od 21. června do 21. prosince jí ubývá.

Zajímavé jest vyšetřiti z obr. 2., jaký vliv na délku denního a nočního oblouku rovnoběžek má změna deklinace pro místa téže zeměpisné šířky.

Uvažujme!

a) Zvětšuje-li se deklinace, posouvá se přímka A dolů, noční oblouk se zmenšuje, denní zvětšuje.

Od 21. prosince do 21. června dne přibývá, poněvadž přibývá sluneční deklinace.

Kastor ($\delta = 32^0$) *jest delší dobu nad obzorem než* **Pollux** ($\delta = 28\frac{1}{4}{}^0$), *poněvadž má větší deklinaci.*

b) Je-li $\delta = 90^0 - \varphi$ čili $\varphi + \delta = 90^0$, stane se přímka A tečnou rovnoběžky R v bodu s; celá rovnoběžka jest denním obloukem. Místa této rovnoběžky dotknou se jenom meze světelné, vidí bez přestání 24 hodiny slunce; jen o půlnoci na okamžik zmizí střed sluneční, aby v příštím okamžiku se opět stal viditelným. Den trvá 24^h.

Příkladem budiž:

Dne 21. června jest $\delta = 23^1/_2{}^0$; *slunce nezapadá toho dne na rovnoběžce, jejíž zeměpisná šířka rovná se* $90^0 - 23^1/_2{}^0 = 66^1/_2{}^0$, *t. j. na severním polárním kruhu, jakožto první rovnoběžce, kde spatřiti lze* **„půlnoční slunce"**.

c) Je-li $\delta > 90^0 - \varphi$ čili $\varphi + \delta > 90^0$, stane se přímka A mimoběžkou rovnoběžky R, slunce po několik dní po případě i měsíců je nepřetržitě viditelné; příslušná místa mají dlouhý **„polární den"**.

Má-li hvězda deklinaci větší než $90^0 - \varphi$, jest stále nad obzorem, jest hvězdou *cirkumpolární.*

Severní Mys, moderní cíl turistický, má zeměpisnou šířku rovnou 71^0, *a proto: dokud slunce má deklinaci větší než 19*^{0}, *dotud* svítí na *Severním Mysu* nepřetržitě — od 15. května do 27. července.

Wega má deklinaci $38^3/_4{}^0$, proto začíná býti cirkumpolární na $51^1/_4{}^0$ s. š., t. j. na rovnoběžce, která prochází *Antverpy.*

d) Zmenšuje-li se δ, posouvá se přímka A nahoru, denní oblouk se zmenšuje, noční oblouk se zvětšuje.

Od 21. června do 21. prosince dne ubývá, poněvadž deklinace sluneční stává se ode dne ke dni menší.

e) Je-li $\delta = 0$, pak stotožní se přímka A s O, stane se průměrem rovnoběžky R, nechť si tato má jakoukoliv zeměpisnou šířku. Denní oblouk rovná se nočnímu na všech místech povrchu zemského.

Dne 20. března a 22. září rovná se sluneční deklinace nulle, a proto jsou tyto dni všude 12^h *dlouhé.*

f) Až dosud uvažovali jsme jen o kladné deklinaci, kterou jsem nanášeli od přímky O dolů.

Z obrazce je na první pohled patrno, že dokud jest deklinace kladná, dotud jest denní oblouk větší než noční.

Důsledek:

Od 20. března do 22. září, ve které době slunce jest nad rovníkem, jest den delší než noc.

Jakmile se stane deklinace zápornou, pak nutno nanésti úhel δ nad přímku O, přímka A posune se též nad ní, načež denní oblouk jest menší než noční.

Důsledek:

Od 22. září do 20. března jest den kratší než noc.

Povšimnutí zasluhuje, že denní oblouk onoho dne, kdy deklinace jest $+\delta$, rovná se nočnímu oblouku v den, kdy deklinace jest $-\delta$.

Deklinace sluneční dne 9. června rovná se 23^0, dne 1. ledna -23^0; délka $\frac{dne}{noci}$ 9. června rovná se délce $\frac{noci}{dne}$ 1. ledna.

g) Je-li $\delta = -(90^0 - \varphi)$, pak stane se přímka A tečnou v bodu j, celá kružnice R jest nočním obloukem.

Dne 21. prosince jest $\delta = -23\frac{1}{2}{}^0$; *na severním polárním kruhu vychází dne 21. prosince v poledne jen malý úsek sluneční, který v krátké době opět zapadne.*

h) Je-li konečně $\delta < -(90^0 - \varphi)$, pak jest přímka A mimoběžkou nad bodem j, a slunce stane se neviditelným potud, pokud deklinace jeho nestane se větší než $-(90^0 - \varphi)$. Na těchto místech nastává dlouhá **„polární noc“**.

V nejsevernějším městě — *Hammerfestu* — ($\varphi = 70^0 40'$) mají polární noc od 18. listop. do 24. ledna ($\delta = -19^0 20'$).

Řešení úloh.

Je-li řešiti několik úloh o délce dne a noci, pak jest výhodné, řeší-li se jedním obrazcem, jenž opatřen jest hodinovým rozdělením; pak doba východu i západu míst z obrazce vyplývá bez převádění dráhy obloukové na čas.

To provedeno jest v obr. 4., kde zobrazena jsou některá větší města, jichž zeměpisná šířka přesahuje 40^0.

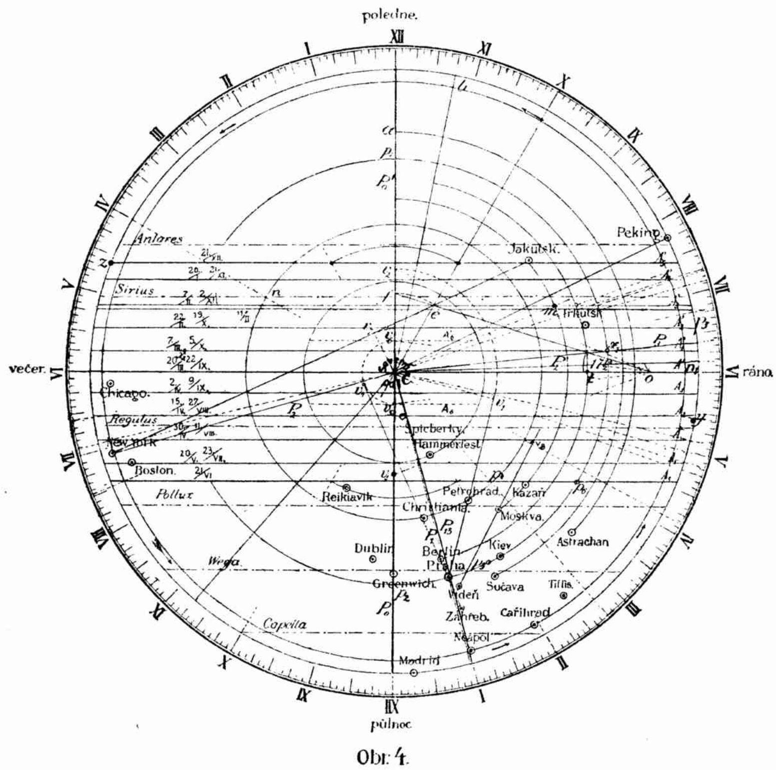
Rovnoběžky, na nichž tato města leží, stanoví se způsobem v obr. 2. vylíčeným.

Máme-li na této rovnoběžce určiti bod, jenž jest obrazem toho neb onoho města, musíme znáti jeho zeměpisnou délku.

Uváží-li se, že rovina každého poledníka protíná rovinu každé rovnoběžky v jejím průměru a že tyto roviny stojí na sobě kolmo, pak pozná se snadno, že úhel dvou průměrů stanoví zároveň odchylku obou příslušných poledníků.

Zvolme si jeden poledník, třebas *greenwichský*, za základní — *nulltý*. Je-li společný obraz všech průsečnic rovnoběžek s greenwichským meridiánem v přímce P_0, pak musí místo, jehož zeměpisná délka rovná se příkladem 15°, jako *Jindřichův Hradec*, býti na průměru P_{15}, jenž svírá s P_0 úhel 15°.

Poloha *Prahy*, jejíž zeměpisná šířka $\varphi = 50°$, délka $d = 14^1/_2{}°$, jest určena průsečíkem rovnoběžky 50.° s poloměrem P_1, jenž svírá s poloměrem P_0 úhel $14^1/_2{}°$ čili 58^m.



Obr. 4.

Mimo to jest v obr. 4. určeno několik přímek A pro různé dny v roce, jichž datum jest u každé připsáno; tolikéž i pro některé důležitější hvězdy jako jsou: *Capella, Wega, Regulus, Sirius* atd. jest na základě jejich deklinac sestrojena přímka A.

Poněvadž každý bod povrchu zemského, otáčeje se kolem osy, vykoná dráhu své rovnoběžky za 24^h, rozdělena byla jedna kružnice o středu c na 24 rovné díly, z nichž každý značí hodinu, která rozdělena jest mimo to na půlhodiny, čtvrthodiny a díly po 5 minutách.

Po této přípravě možno řešiti mnoho zajímavých úloh; uvádíme jen některé.

A. Úlohy o východu a západu míst.

1. *V kolik hodin vychází a zapadá dne 30. dubna nebo 11. srpna* a) **Madrid**; b) **Praha**; c) **Petrohrad**; d) **Hammerfest?**

Proložme jmenovanými městy příslušné rovnoběžky, které protínají přímku A_3 (při níž připsáno jest 30./IV. a 11./VIII.) v bodech, jichž spojnice se středem c určuje na hodinovém rozdělení dobu, kdy města ze stínu vystupují a kdy do něho vstupují, t. j. kdy slunce vychází a zapadá.

Seznáme, že

a) *Madrid*	vychází	v $5^h\ 9^m$,	zapadá	v $6^h\ 51^m$;
b) *Praha*	„	ve $4^h\ 45^m$,	„	v $7^h\ 15^m$;
c) *Petrohrad*	„	ve $4^h\ 9^m$,	„	v $7^h\ 51^m$;
d) *Hammerfest*	„	ve $2^h\ 45^m$,	„	v $9^h\ 15^m$.

2. *V kolik hodin* **středního** *času vychází u nás (Praha) slunce dne 11. února a 2. listopadu?*

V kalendářích stanoví se východ a západ slunce časem středním; z té příčiny jest výsledky, plynoucí z obr. 4. ve spojení uvésti s *„časovou rovnicí“*, t. j. s rozdílem času středního a slunečního.

Nahoře zvolené dni, jichž datum 11./2. a 2./11., lze si snadno zapamatovati, jsou v té příčině důležité, protože časová rovnice jest 11./2. největší, 14^m, 2./11. nejmenší, — 16^m.

Když 11./2. ukazují kyvadelní hodiny poledne, ukazují hodiny sluneční $11^h\ 46^m$; slunce vstoupí do poledníka teprv za 14^m.

Když 2./11. ukazují hodiny kyvadelní poledne, ukazují sluneční hodiny $12^h\ 16^m$; slunce bylo v poledníku již před 16^m.

Abychom obdrželi dne 11./2. z času slunečního čas střední, musíme k němu příčísti 14^m, dne 2./11. jest 16^m odečísti.

Dne 11. února vychází slunce v $7^h\ 6^m$, zapadá ve $4^h\ 54^m$ slunečního času; v $7^h\ 20^m$ a $5^h\ 8^m$ středního času. Dopoledne jest o 28^m kratší než odpoledne.

Dne 2. listopadu vychází slunce v $7^h\ 14^m$, zapadá ve $4^h\ 46^m$ slun. času; v $6^h\ 58^m$ a $4^h\ 30^m$ času středního. Dopoledne jest o 32^m delší než odpoledne.

3. *Jak dlouhý jest den 15. dubna nebo 27. srpna* ($\delta = 10^0$), *22. února nebo 19. října* ($\delta = -10^0$) a) **v Cařihradě**, b) **v Berlíně**, c) **v Christianii**?

Jako v předešlém příkladě určí se doba západu a ta násobí se dvěma.

Poněvadž deklinace sluneční obou dvojic dnů liší se jen znaménkem, rovná se den jedné dvojice noci dvojice druhé.

Výsledky:

a) v *Cařihradě* $13^h\ 8^m$ a $10^h\ 52^m$;
b) v *Berlíně* $13^h\ 44^m$ a $10^h\ 16^m$;
c) v *Christianii* $14^h\ 16^m$ a $9^h\ 44^m$.

4. *Kde vychází slunce 7. února nebo 2. listopadu v 10^h ráno?*

Bod, jímž vyznačena jest desátá hodina dopolední, spojme se středem c, průsečíkem e této spojnice s přímkou A'_3 proložme kružnici, jejíž průsečík f s přímkou P'_0 spojme s o, načež $\sphericalangle cof = 17^1/_2{}^0$ jest doplňkem hledané zeměpisné šířky $= 72^1/_2{}^0$. Všem místům rovnoběžky $72^1/_2{}^0$ s. š. vychází slunce dne 7. února a 2. listopadu v 10^h ráno.

5. *Na svých cestách po* **Norvéžsku** *viděl jsem zapadati slunce dne 11. srpna v $9^1/_4{}^h$. Ve kterém městě to bylo?*

Řešení jako v příkladě předešlém.

Rovnoběžka prochází norvéžským městem *Hammerfestem*, jež úloze vyhovuje.

6. *Kterého dne vychází u nás slunce v $7^h\ 14^m$?*

Bod, jímž označena jest tato hodina ranní, spojí se se středem c, průsečíkem spojnice s pražskou rovnoběžkou vede se přímka A, která stanoví deklinaci sluneční δ, na jejímž základě se z deklinačních tabulek určí den.

Zde sjednocuje se přímka A s A'_3, což znamená, že hledanými dny jsou 7. únor a 2. listopad.

7. *Kde trvá nejdelší den $14^h\ 56^m$?*

Nejdelší den jest 21. červen. Má-li býti $14^h\ 56^m$ dlouhý, musí slunce zapadati v $7^h\ 28^m$. Tím převedena jest tato úloha na úlohu 5.

Jest to rovnoběžka, na které jsou města: *Nový York, Neapol, Cařihrad.*

8. *Jak dlouho trvá nejdelší a nejkratší den v Reikiaviku?*

Nejdelší den jest 21. června, nejkratší 21. prosince. Ostatní jako v příkladech předešlých.

V *Reikiaviku* trvá nejdelší den 20^h, nejkratší 4^h.

B. Úlohy, závislé též na zeměpisné délce.

Při těchto úlohách jest míti stále na mysli, že odchylka dvou rovin poledníkových při otáčení země kolem své osy se nemění. Proložíme-li tedy dvěma městy obr. 4. paprsky P, musí úhel těchto paprsků zůstati stále týž, i když města kol bodu c se otáčejí.

1. *Je-li v* **Praze** *poledne, kolik hodin jest v* **Novém Yorku**?

Praha, majíc poledne, dospěje na denní dráze do p_1, *Nový York* do n_1.

Poněvadž rozdíl zeměpisných délek po otočení se nezměnil, musí úhel $P_1P_2 = P'_0P'_2$.

Poloměr procházející bodem n_1 směřuje k 6^h 7^m ráno.

Je-li v *Praze* poledne, jest v *Novém Yorku* 6^h 7^m ráno.

2. *Když bylo v* **Praze** *31. pros. 1897 12^h v noci, které datum a kolik hodin bylo v* **Pekingu**?

Praha je v p_2, *Peking* v p_3 na poloměru směřujícím k $6^3/_4{}^h$ ráno.

V Pekingu bylo 1. ledna 1898 $6^3/_4{}^h$ ráno.

3. *V kolik hodin* **středoevropského** *času vychází slunce v Sučavě, nejvýchodnějším městě rakouském, dne 2. listopadu?* (Časová rovnice = — 16^m).

Slunce vychází v 7^h 9^m času slunečního, a — odečteme-li 16^m — v 6^h 53^m času středního.

Hodiny železniční, poštovní a telegrafní řídí se časem středoevropským, jehož základem jest čas meridiánu 15^0 v. délky od Greenwiche, který u nás prochází *Jindřichovým Hradcem*, v Německu *Zhořelcem.*

Jakmile nastane v těchto městech poledne, jest poledne v celé střední Evropě: v Rakousku, Německu, Italii, Švýcarsku, ve Švédsku, Norvežsku, Dánsku, v Srbsku, Bulharsku atd.

V Německu i v Uhrách jest středoevropský čas zákonem ustanoven i pro život občanský, u nás vešel do zvyku z nutné potřeby. Poněvadž Sučava jest o 45^m uchýlena na východ, místní čas měl by tam býti o 45^m pokročilejší než v *Jindřichově Hradci*, ale poněvadž se i v *Sučavě* řídí časem středoevropským, jdou tam tedy hodiny o 45^m pozdě proti času místnímu. Bijí-li hodiny v Sučavě dne 2. listopadu poledne, jest vlastně 12^h 45^m středního času, pravé poledne bylo již před $45^m + 16^m$, t. j. v 10^h 59^m času středoevropského.

Z té příčiny nutno, abychom obdrželi dobu východu, od 6^h 53^m středního času odečísti 45^m, takže tam slunce vychází v 6^h 8^m středoevr. času.

4. *Jak dlouho je již slunce a) dne 21. června, b) dne 21. prosince v* **Petrohradě** *nad obzorem, když v* **Praze** *vychází?*

Dne 21. června vychází slunce v *Petrohradě* ve 2^h 45^m, u nás ve 3^h 56^m.

Z toho dalo by se souditi, že slunce svítí v *Petrohradě* 1^h 11^m, když v *Praze* vychází. Ale tomu není tak!

Vychází-li slunce dne 21. června v *Petrohradě*, dospělo toto město do bodu p_4, *Praha* do p_5; než bude v *Praze* slunce vycházeti, musí *Praha* učiniti ještě dráhu p_5 p_6, ku kteréž potřebuje 2^h 10^m, jak vyčísti lze z hodinového rozdělení.

b) Soudíme-li podobně i pro 21. prosinec, shledáme, že toho dne *Praha* vychází o 10^m dříve ze stínu zemského než *Petrohrad.*

Týmž způsobem bychom seznali, že dne 21. června v *Petrohradě* svítí slunce jen ještě 10^m, když v *Praze* zapadlo, a že dne 21. prosince mají v *Petrohradě* již 2^h 10^m noc, když v *Praze* slunce zapadá.

5. *Kterou zeměpisnou délku má místo, jež jest s Prahou na téže rovnoběžce, a jemuž dne 7. března nebo 5. října a) slunce vychází, b) zapadá, když v Praze jest poledne?*

Má-li *Praha* poledne, dospěla, otáčejíc se kolem zemské osy, do polohy p_1.

V tom okamžiku vychází na pražské rovnoběžce místo x_1 ze stínu, slunce mu vychází; místo x_2 do stínu vchází.

Úhel $P'_0 P_3$ určuje počet stupňů, o které místo x_1 jest na západ, x_2 na východ od *Prahy* uchýleno. Tuto odchylku lze též vyjádřiti časem, který uplyne, než místo x_1 bude míti poledne, t. j. $5^h\ 37^m$.

Poněvadž zeměpisná délka *Prahy* jest 58^m, jest zeměpisná délka místa $x_1 = 5^h\ 37^m - 58^m = 4^h\ 39^m$ čili $69^3/_4{}^0$ na západ.

Nahlédneme-li do atlantu, shledáme, že jest to místo ve státu *Quebek* v *Britické Americe*.

Zeměpisnou délku vyjádřenou časem možno též přímo obdržeti, nanese-li se od pražského meridiánu na západ P'_0P_3.

Místo x_2 jest o týž počet stupňů na východ uchýleno; jeho zeměp. délka $= 58^m + 5^h\ 37^m = 6^h\ 35^m$ čili $98^3/_4{}^0$.

Jest to místo v *Severní Mongolii*.

6. *Je-li v* **Berlíně** *dne 15. dubna neb 27. srpna* $11^1/_4{}^h$ *dopoledne, kterému místu na 40.*^{0} *s. š. slunce vychází?*

Každé místo, jež má $11^1/_4{}^h$ dopoledne, dospělo do poloměru bc, jenž k této hodině směřuje.

Rovnoběžka 40.^{0} s. š. jest ona, na které jest *Madrid.*

Místo na této rovnoběžce, jež vychází dne 15./IV. nebo nebo 27./VIII. v okamžiku, kdy v *Berlíně* je $11^1/_4{}^h$, jest y. — Jeho zeměpisnou délku obdržíme, když tetivu by na rovnoběžce madridské přeneseme od berlínského poledníka na západ. Přijdeme k meridiánu, jenž prochází *Novým Yorkem*, a poněvadž zem. šířka *Nového Yorku* jest o něco málo větší než 40^0, jest hledané místo jižně od tohoto města.

7. *Vychází-li slunce 7. února v* **Moskvě**, *ve kterém místě na 50.*^{0} *s. š. jest* 6^h *ráno?*

Vychází-li *Moskva* dne 7. února z vlastního stínu zemského, jest v bodu m; na 50.^{0} s. š. má bod t 6 hodin ráno.

Hledané místo jest od *Moskvy* o úhel tcm uchýleno na západ; naneseme-li tento úhel na západ od meridiánu moskevského, padneme na poledník procházející *Prahou*, a poněvadž z. š. hledaného místa má býti 50^0, jest to *Praha*, jež vyhovuje dané úloze.

8. *Kterého dne zapadá slunce v* **Pekingu**, *když v* **Astrachanu** *jest poledne?*

Otočí-li se *Astrachan* do bodu a, kdy má poledne, otočí se *Peking* do bodu z, poněvadž se otáčejí stejnou úhlovou rychlostí. V tomto bodu vchází *Peking* do zemského stínu. Vedeme-li bodem z přímku A a určíme příslušné δ, můžeme z deklinačních tabulek stanoviti den, kdy slunce má nalezenou deklinaci δ. V tomto případě stotožňuje se přímka A s A_5', t. j.:

V *Pekingu* zapadá slunce dne *21. prosince,* když v *Astrachanu* jest poledne.

C. Současný východ nebo západ dvou i více míst.

Místa téhož meridiánu mají sice po všecek čas poledne současně, ale současný východ a západ slunce mají jen dvakrát ročně, a to 20. března a 22. září, neboť jen v tyto dny slunce, svítíc kolmo na rovník, vytvoří na zemi světelnou mez, procházející oběma póly, stotožňující se tedy s meridiánem.

Ve všech ostatních dnech mají místa téhož meridiánu sice poledne v téže chvíli, ale doba východu a západu slunce se může značně lišiti, poněvadž světelná mez všechny meridiány zemské protíná.

Z té příčiny mohou místa různé zeměpisné délky současně vystoupiti ze stínu zemského, mohou míti současný východ slunce, ale nikdy současné poledne.

Chceme-li se dozvěděti den, kdy dvě města současně vycházejí neb zapadají, otočme přímku obě města spojující do polohy vodorovné, ve které se sjednotí s některou přímkou A; z deklinace této přímce příslušné určí se z tabulek deklinačních hledaný den.

Ještě rychleji dojdeme cíle, otočíme-li patu v kolmice ze středu c na spojnici obou měst spuštěné do svislé přímky P_0.

Padne-li otočený bod v do pásu rovnoběžného A_5A_5', pak vycházejí dvakrát za rok obě místa současně, dvakrát za rok současně zapadají.

1. *Může-li* **Praha** *a* **Petrohrad** *vyjíti současně ze stínu a kdy?*

Spojme obě města; z c spusťme kolmici cv_1 a bod v otočme do polohy v_2.

Poněvadž bod v_2 jest uvnitř pásu A_5A_5', vycházejí obě města dvakrát ročně současně a to když deklinace sluneční se rovná úhlu $cov_2 = -22^0$.

Dne 2. prosince a 9. ledna vychází *Praha současně s Petrohradem,* to znamená: *První paprsky sluneční, které ve jmeno-*

vaných dnech začínají ozařovati Prahu, jsou zároveň i Petrohradu hlasateli, že mu nastal nový den. A přece leží Petrohrad mnohem východněji než Praha!

Dospěje-li bod v_1 při otáčení do polohy v_3, spojnice obou měst podruhé jest v poloze vodorovné, ale obě města jsou na levo od svislé přímky, tudíž zapadají, a to když deklinace sluneční se rovná $\sphericalangle cov_3$, jenž jest kladný, ale absolutní hodnotou se rovná $\sphericalangle cov_2 = 22^0$.

Dne 31. května a 12. července zapadá Praha současně s Petrohradem; oběma začíná noc v témž okamžiku.

2. *Kdy vycházejí a zapadají současně* **Praha, Berlín** *a* **Záhřeb**?

Tato tři města jsou na obrazci v téže přímce. Otočme patu v_4 kolmice z c na přímku tu spuštěné do přímky P_0. Kružnice, kterou tento bod opisuje, dotýká se přímky A_6, jíž přísluší deklinace $\delta = 7^0$. Kdybychom otočili i spojnici měst, přišla by města v pravo od přímky P_0, t. j. řečená města vycházejí současně dne 7. dubna a 4. září ($\delta = 7^0$); ale i přímka A'_6 dotýká se kružnice poloměrem cv_4 opsané; otočená města by přišla v levo od přímky P'_0 a proto dne 2. března a 11. října ($\delta = -7^0$) současně zapadají.

3. *Může Vídeň a Moskva vycházeti současně?*

Nemůže. Pata v_8 otočená do paprsku P_0 a P_0' padne mimo rovnoběžný pás $A_5 A_5'$, deklinace by byla větší než $23^1/_2{}^0$, a poněvadž není dne v roce, ve kterém by deklinace byla větší než $23^1/_2{}^0$, nemůže *Moskva* a *Vídeň* vycházeti současně.

4. Padne-li pata kolmice mezi obě města a otočená spojnice měst do rovnoběžného pásu $A_5 A_5'$, pak jedno město vychází, když druhé zapadá a naopak.

Tak příkladem pata v_7 kolmice spuštěné z c na spojnici *Nového Yorku s Jakutskem* padne mezi obě města.

Otočíme-li tuto spojnici do polohy vodorovné nad bod c, sjednotí se s přímkou A'_2, při čemž *Jakutsk* je v pravo, *Nový York* v levo; z toho plyne, že dne 22. února a 19. října *Nový York* zapadá, když *Jakutsk* vychází.

Otáčíme-li dále, shledáme, že spojnice se též sjednotí s přímkou A_2, ale v této poloze jest *Jakutsk* v levo, *Nový York* v pravo.

Dne 15. dubna a 27. srpna *Nový York* vychází, když *Jakutsk* zapadá.

D. Úlohy o hvězdách.

1. *Jak dlouho dlí Regulus nad obzorem a)* **v Cařihradě**, *b) u nás, c)* **na Špicberkách**?

Průsečíky těmto místům příslušných rovnoběžek zemských s přímkou, při níž napsáno jest „*Regulus*“, spojí se se středem *c*, načež počet hodin mezi oběma poloměry, v pravo a v levo od dvanácté hodiny polední, určuje dobu, po kterou *Regulus* dlí nad obzorem.

Seznáme, že

a) v Cařihradě dlí *Regulus* nad obzorem $13^1/_2{}^h$;

b) u nás „ „ „ „ 14^h;

c) na Špicberkách jest *Regulus* hvězdou circumpolární, poněvadž rovnoběžka procházející Špicberky neprotíná *Regulovu* přímku *A*.

2. *Na které rovnoběžce zemské jest* **Sirius** 8^h *nad obzorem?*

Má-li býti *Sirius* 8^h nad obzorem, musí poloviční denní oblouk příslušné rovnoběžky rovnati se 4^h. Spojíme bod, jímž vyznačena tato hodina odpoledne, se středem. Průsečíkem *n* spojnice se Siriovou přímkou proložená kružnice jest hledaná rovnoběžka, jejíž zeměp. šířka stanoví se známým způsobem. Zde zeměpisnou šířku netřeba stanoviti, poněvadž prochází *Petrohradem*, jehož z. š. $= 60^0$.

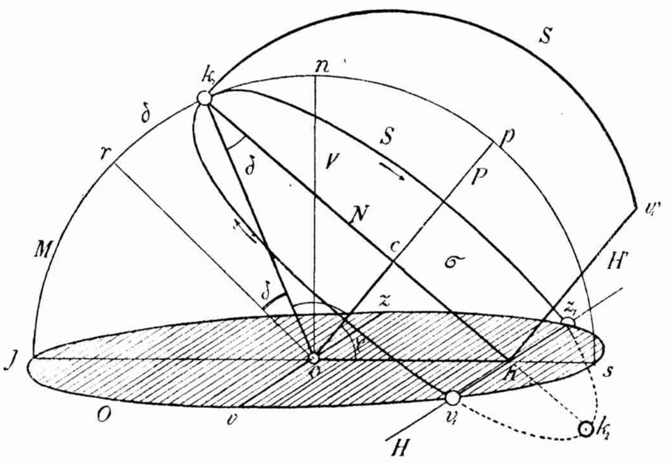
II. Denní a noční oblouk slunce a hvězd.

Hodinu, kdy slunce vychází a zapadá, a dobu, kterou hvězdy dlí nad obzorem, lze druhým způsobem stanoviti na základě zdánlivého otáčení slunce a hvězd kolem země.

Budiž v obr. 5. bod *o* místo pozorovací, kružnice *O* jeho obzorník (horizont), body *j*, *v*, *s* a *z* jižní, východní, severní a západní bod, *n* nadhlavník (zenith), *V* vertikál, *M* meridián místa pozorovacího, *P* světová osa, *p* severní pól nebeský, jehož pólová výška φ, *or* poloměr rovníka nebeského, oblouk rk_1 nebo úhel rok_1 sluneční deklinace δ.

Předpokládáme-li, že slunce v době dne nemění deklinace, pak opíše na nebeské báni kružnici S, jejíž rovina σ jest kolmá k světové ose P.

V bodu v_1 slunce vychází nad obzor, vystupuje pak stále výš a výše, v k_1 dostoupí vrcholu, *vrcholí — kulminuje* zde v pravé poledne, pak začíná klesati, až konečně v z_1 zapadá; do k_2 dospěje o půlnoci.



Obr. 5.

Dokud jest slunce v oblouku $v_1k_1z_1$, jest místo, jehož horizont jest O, osvětleno, má *den*; jakmile slunce překročí bod z_1, zmizí, nastává *noc*.

Z té příčiny nazýváme oblouk $v_1k_1z_1$ *denním obloukem*, $z_1k_2v_1$ *nočním obloukem* slunečním, kteréžto názvy přeneseny byly i na hvězdy, ač probíhají denní svůj oblouk i v noci.

Abychom obdrželi polovinu denního oblouku, t. j. dráhu $v_1 k_1$ v pravé velikosti, otočme rovinu σ kolem průměru $k_1 k_2$ jako osy, až se ztotožní s rovinou meridiánu M, jež se zde sjednocuje s rovinou papíru.

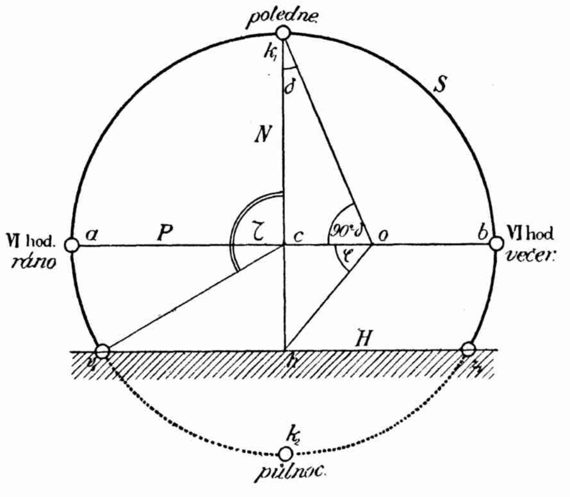
Po tomto otočení padne přímka H do polohy $H' \perp k_1 k_2$. Oblouk v_1k_1 sjednotí se s kruhovým obloukem o středu c a poloměru ck_1, sahajícím od bodu k_1 až k průsečíku v_1' s H'.

Kolik stupňů obloukových má oblouk $k_1 v_1'$, tolika stupňům se rovná půl denního oblouku.

Jest patrno, že k sestrojení pravé délky denního oblouku jest třeba sestrojiti jen $\triangle\, hok_1$ s výškou oc, v němž $\sphericalangle\, hoc = \varphi$ jest *výška pólu* místa pozorovacího, $\sphericalangle\, k_1 oc = 90^0 - \delta$ jest *pólová vzdálenost* slunce nebo stálice.

Toho bylo užito v obr. 6.

Na svislou přímku N vztyčena v bodu c kolmice P, na té zvolen kdekoliv bod o, jenž jest vrcholem úhlů φ a $90^0 - \delta$, jichž jedno rameno sjednotí se s přímkou P. Druhá ramena protínají přímku N v bodech k_1 a h.



Obr. 6.

Bodem h veďme přímku $H \parallel P$ a poloměrem ck_1 opišme z c kružnici S, jež jest obrazem dráhy sluneční na zeměpisné šířce φ v den, kdy sluneční deklinace jest δ.

Část kružnice S nad přímkou H jest *denní oblouk*, pod přímkou H *noční oblouk* sluneční.

V bodu v_1 slunce vychází, v bodu a jest v 6^h ráno, v k_1 v pravé poledne, v b v 6^h večer, v z_1 zapadá a v k_2 jest o půlnoci.

Přímkou H jest zobrazen *horizont* místa pozorovacího.

Slunce vykoná celou dráhu S, t. j. 360° za 24 hodiny; 15° za hodinu, 1° za 4 minuty atd.

V obr. 6. jest $\varphi = 50^0$, $\delta = 23^1/_2{}^0$.

Oblouk v_1 *a* k_1 nebo $\sphericalangle \tau = 121^0$; půl denního oblouku rovná se $8^h\ 4^m$, t. j. *dne 21. června* ($\delta = 23^1/_2{}^0$) *jest den* $16^h\ 8^m$ *dlouhý, slunce vychází ve* $3^h\ 56^m$, *zapadá v* $8^h\ 4^m$.

I lze z obr. 6. vyvoditi mathematický vzorec pro poloviční denní oblouk.

Je-li

$$co = 1,$$

jest

$$ck_1 = cv_1 = \operatorname{cotg} \delta,$$
$$ch = \operatorname{tg} \varphi.$$

Z $\triangle chv_1$ plyne:

$$\cos(180 - \tau) = \frac{ch}{cv_1} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{cotg} \delta},$$

tedy

$$\cos \tau = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$$

Obr. 6. jest způsobilý, bychom seznali, jak na délku denního a nočního oblouku působí měnící se φ čili, jak jeví se délka téhož dne a noci na různých místech povrchu zemského.

1. Zalétněme především v mysli své na různá místa povrchu zemského v letním pololetí, t. j. od 20. března do 22. září, kdy deklinace sluneční jest kladná a přiberme k úvaze též hvězdy, jež jsou nad rovníkem nebeským, mající tudíž též kladnou deklinaci.

a) Pouhý pohled na obr. 6. poučuje, že dokud při kladné deklinaci též výška pólu jest kladná, přímka H jest pod přímkou P; *denní oblouk jest větší než noční.*

Jakmile však se stane φ záporným, t. j. octneme-li se v mysli na jižní polokouli zemské, pak nanésti jest φ nad přímku P, *načež denní oblouk jest menší než noční.*

To vše znamená, že v letním pololetí jest na severní polokouli zemské den delší než noc a že hvězdy s kladnou deklinací mají denní oblouk delší než noční; na jižní polokouli zemské jest v téže době den kratší než noc, denní oblouk týchž hvězd jest menší než noční.

b) Přechod tvoří místa na rovníku. Poněvadž jejich výška pólu = 0, sjednotí se přímka H s P; H stane se průměrem, načež *denní oblouk rovná se nočnímu*, nechť si je deklinace jakákoliv.

Na rovníku jest každý den, každá noc 12^h dlouhá; každá hvězda dlí 12 hodin nad obzorem, 12 hodin pod ním.

c) Zvětšuje-li se výška pólu, posouvá se přímka H dolů; denní oblouk se zvětšuje.

Týž letní den čím dále k severu jest tím delší.

Táž hvězda má na severnějších místech delší denní oblouk než na jižnějších.

2. Jestliže všechny tyto úvahy letního pololetí učiníme též o pololetí zimním a taktéž o hvězdách, jež jsou na jižní polokouli nebeské, kde deklinace jejich jest záporná, shledáme, že severní polokoule zemská vyměnila si úlohu s jižní. Co v létě platí o severní polokouli, platí v zimě o jižní a naopak.

O tom netřeba se dále šířiti; jen tolik sluší podotknouti, že zápornou deklinaci jest nanášeti ve smyslu protivném, t. j. dolů, což má za následek, že pak denní oblouk jest pod přímkou H, noční nad ní.

Řešení úloh.

Obr. 6. hodí se k řešení úloh, při nichž není deklinace příliš malá a zeměpisná šířka příliš veliká, aby body k_1, k_2 a h nepřišly mimo nákresnu.

Řešení úloh stane se zajímavým, jsou-li zobrazeny polohy hvězd a slunce, jež se děje podobným způsobem, jako se v obr. 4. stanovila poloha měst.

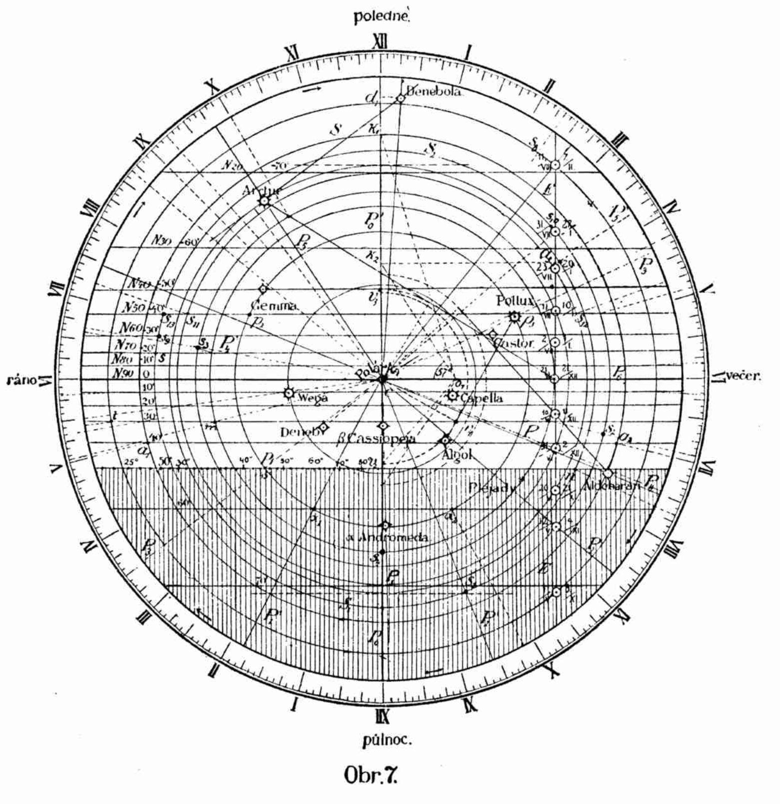
Místo rovníku zemského nastoupí rovník nebeský, místo meridiánu greenwichského nastoupí kruh, procházející nebeskými póly a *bodem jarním*, jenž jak známo, jest průsečíkem ekliptiky s nebeským rovníkem.

Kruh tento prochází téměř hvězdou α v *Andromedě*, β v *Cassiopeji* a γ v *Pegasu*.

(Význačné hvězdy *Andromedy* a *Pegasa*, přibere-li se k nim hvězda β v *Pegasu*, tvoří podobnou, jenže hodně zvětšenou konfiguraci, jako *Veliký Vůz*.)

Rovina toho kruhu jest v obr. 7. znázorněna paprskem P_0, od něhož se počítá rektascence, a to od západu přes jih na východ, tedy v protivném směru denního otáčení nebeské báně.

Abychom příkladem určili polohu *Aldebarana*, jehož deklinace $\delta = 16^1/_4{}^0$, rektascense $\alpha = 67^1/_2{}^0 = 4^h\ 30^m$, veďme z bodu o_1 přímku o_1K_1, tvořící s přímkou P_6 úhel $90^0 - \delta = 73^3/_4{}^0$; průsečíkem K_1 s paprskem P'_0 proložme kružnici, v jejímž jednom bodu musí býti obraz *Aldebarana*. Bod tento



Obr. 7.

bude průsečíkem onoho paprsku P, který s P_0 tvoří úhel $67^1/_2{}^0$. Paprsek P obdržíme nejsnadněji, odpočítáme-li od P_0 v pravo na hodinovém rozdělení $4^h\ 30^m = 67^1/_2{}^0$.

Týmž způsobem stanovena byla poloha ostatních hvězd i poloha slunce v různých dnech ročních, jichž datum jest u každé polohy připsáno.

Povšimnutí zasluhuje, že všechny obrazy slunce jsou na přímce E; dále pak, že v každém bodu přímky E jsou obrazy dvou poloh slunečních, jeden pro kladnou, druhý pro touž, ale zápornou deklinaci.

A. Příklady o slunci.

1. *V kolik hodin vychází a zapadá slunce 1. května a 11. srpna nebo 7. února a 3. listopadu na 10.° severní i jižní šířky?*

Bodem, ve kterém je slunce v daných dnech, proložme kružnici a průsečíky jejími s horizonty daných zeměpisných šířek veďme poloměry, které na rozdělení hodinovém stanoví dobu, kdy slunce vychází nebo zapadá. Pro dni zimního pololetí, kdy deklinace sluneční jest záporná, denní oblouk sluneční jest pod horizontem, bod východu v pravo, západu v levo.

Obdržíme tyto výsledky:

Zem. šířka:	Datum:	Slunce vychází:	Slunce zapadá:
10° s.,	1./V., 11./VIII.,	v $5^h\ 49^m$,	v $6^h\ 11^m$;
10° j.,	„	v $6^h\ 11^m$,	v $5^h\ 49^m$;
10° s.,	4./II., 3./XI.,	v $6^h\ 11^m$,	v $5^h\ 49^m$;
10° j.,	„	v $5^h\ 49^m$,	v $6^h\ 11^m$.

2. *Kterého dne vychází slunce v* **Kairu** *($\varphi = 30°$) v $5^h\ 25^m$?*

Bod, jímž vyznačena jest tato hodina, spojme se středem a průsečíkem l s horizontem 30.° s. š. proložme kružnici, jež určuje příslušné δ; v deklinačních tabulkách najde se den.

Zde prochází kružnice polohou slunce dne 1. května a 11. srpna, kteréžto dva dni vyhovují úloze.

Dne 1. května a 11. srpna vychází slunce v **Kairu** v $5^h\ 25^m$.

3. *Kde vychází slunce dne 21. června v 5^h ráno?*

Bodem, kterým jest vyznačena poloha slunce dne 21. června, veďme kružnici, jež protíná poloměr směřující k páté hodině ranní v bodu m; horizontem, jenž prochází tímto bodem stanovena jest zeměpisná šířka φ, zde 30^0.

4. *Kde jest nejdelší den (21. červen) jen $6^1/_2{}^h$ dlouhý?*

Slunce vychází v $9^1/_4{}^h$ ráno. Ostatní jako v příkladě předešlém. *Na 60.⁰ j. š.*

5. *Jak dlouhý jest nejdelší den na 50.⁰ j. š.?*

Nejdelší den na jižní polokouli jest 21. prosince, kdy $\delta = -23^1/_2{}^0$. Je-li deklinace záporná, pak denní oblouk jest pod příslušným horizontem. Slunce vychází ve $3^h\ 56^m$, zapadá v $8^h\ 4^m$, tedy v týž čas, jako u nás 21. června.

Na 50.⁰ stupni j. š. jest 21. prosince den tak dlouhý, jako u nás 21. června; $16^h\ 8^m$.

B. Denní a noční oblouk hvězd.

1. *Jak dlouho jest* **Aldebaran** *nad obzorem na 40.⁰ s. š., jak dlouho na 40.⁰ j. š.?*

Aldebaranem proložme kružnici, jež protíná horizont 40.⁰ s. šířky v bodech a_1 a a_2; poloměry těchto bodů směřují jednak k páté, jednak k sedmé hodině ranní; půl denního oblouku rovná se 7^h, celý 14^h. Na 40.⁰ j. š. rovná se denní oblouk Aldebarana 10^h.

2. *Na které zeměpisné šířce jest* **Pollux** *jen $8^1/_2{}^h$ nad obzorem?*

Má-li býti hvězda jen $8^1/_2{}^h$ nad obzorem, musí půl denního oblouku rovnati se $4^1/_4{}^h$.

Průsečíkem dráhy, kterou opisuje *Pollux*, s poloměrem směřujícím k $4^1/_4$ hodině odpolední, veďme přímku vodorovnou, jež stanoví zeměp. šířku $\varphi = -40^0$.

3. *Která hvězda jest u nás $15^h\ 20^m$ nad obzorem?*

Bodem n, v němž horizont 50.⁰ s. š. protíná poloměr směřující k bodu $7^h\ 40^m$ večer, proložme kružnici, jíž jest stanovena příslušná deklinace. Všechny hvězdy, jichž obrazy jsou na této kružnici, jsou u nás $15^h\ 20^m$ nad obzorem; jednou z nich jest *Arctur.*

C. Východ, západ a kulminování hvězd.

V kolik hodin vychází a zapadá hvězda α v **Andromedě** *dne 12. května na 60.⁰ s. š.?*

Úhel, sevřený poloměry procházejícími jmenovanou hvězdou a sluncem, rovná se rozdílu rektascensí obou stálic.

Máme-li za to, že tento rozdíl po celý den se nemění, bude tak veliký i tenkrát, až α *Andromedy* na své denní dráze dospěje do polohy α, ve které na 60.° s. š. vychází; slunce dospěje do s_1, při čemž $\widehat{P_1 P'_1} = \widehat{P_2 P'_2}$.

Ale slunce jest v bodu s_1 v $10^h\ 35^m$, a proto vychází α *Andromedy* dne 12. května na 60.° s. š. v $10^h\ 35^m$.

Zapadá-li hvězda α v *Andromedě* na 60.° s. š., jest v bodu α_2, slunce současně v s_2 (rozdíl rektascensí zase týž) v $6^h\ 55^m$.

2. *V kolik hodin vychází u nás* **Pollux** *dne 31. května?*

Vychází-li u nás *Pollux*, jest v bodě p_1, ale slunce téhož okamžiku jest v bodě s_3, kamž dospěje v $6^h\ 40^m$ ráno. I zde obdrželi jsme polohu slunce, učinivše $\widehat{P_3 P_4} = \widehat{P_3' P'_4}$.

3. *Na které zeměpisné šířce zapadá Arctur dne 21. června o půlnoci?*

Dne 21. června jest slunce o půl noci v bodu s_4, *Arctur* v bodu a_3; $(\widehat{P_5 P_6} = \widehat{P'_0 P'_6})$.

Bodem a_3 prochází horizont, jemuž přísluší hledaná zeměpisná šířka, zde 57° j. š.

4. *Kterého dne kulminuje* **Deneb** *a) v poledne, b) o půlnoci?*

a) Kulminuje-li hvězda v poledne, kulminuje současně se sluncem; její rektascense se musí rovnati rektascensi sluneční, právě tak, jako dvě místa na povrchu zemském mají současně poledne, mají-li touž zeměpisnou délku. Najděme v tabulkách, kdy má slunce tak velkou rektascensi jako hvězda; toho dne kulminují současně. Z obrazce jde na jevo, že tomu tak dne 27. ledna.

b) Liší-li se zeměpisná délka dvou míst o 180°, má jedno místo poledne, když ve druhém místě jest půlnoc. Liší-li se rektascense sluneční a hvězdná o 180°, má hvězda poledne (t. j. kulminuje), když slunce má půlnoc.

Rektascense sluneční a *Denebova* liší se, jak z obr. 7. plyne, o 180° dne 31. července; toho dne kulminuje Deneb o půlnoci

5. *V kolik hodin kulminuje Denebola dne 11. srpna?*

Kulminující *Denebola* jest v bodu d_1, slunce v bodu s_8 a to ve $2^h\ 20^m$.

6. *Na které rovnoběžce a) vychází, b) zapadá Arctur a Denebola současně?*

Otočme spojnici S obou hvězd do polohy vodorovné jednou pod bod c (S_1) podruhé nad něj (S_2). Takto otočená spojnice stane se horizontem, jemuž přísluší určitá zeměpisná šířka φ, jež vyhovuje úloze. Zde jest $\varphi = 71^0$.

Je-li otočená přímka v poloze S_1, jsou obě hvězdy v levo od přímky P_0, obě vycházejí; z toho plyne, že na 71.⁰ s. š. obě hvězdy současně vycházejí; (snadno se možno přesvědčiti, že současně tam nezapadají).

Je-li otočená přímka v poloze S_2, jsou obě hvězdy v pravo od přímky P_0 svislé, současně zapadají. Jest to na 71.⁰ j. š.

7. *Na které zeměpisné šířce* **Pollux** *zapadá, když* **Algol** *vychází?*

Otočme přímku, spojující obě hvězdy do polohy vodorovné pod bod c, což se nejsnadněji stane tím, že otočíme patu v_1 kolmice, z bodu c na spojnici spuštěné, do přímky svislé do v_2 a v_3. *Algol* přijde v levo, *Pollux* v pravo od přímky P_0. *Algol* vychází, *Pollux* zapadá.

Jest to na 49.⁰ s. š.

Na 49.⁰ j. š. *Pollux* vychází, když *Algol* zapadá.

8. *Kde vychází* **Aldebaran** *současně se sluncem dne* 10. června?

Řešení jako v př. 7. Na 55.⁰ s. š. současně vycházejí, na 55.⁰ j. š. současně zapadají.

10. *Kde vychází slunce dne 21. června, když Arctur zapadá?*

Spojnice *Arctura* se sluncem (21./VI.) otočena jsouc do polohy vodorovné, sjednocuje se s horizontem 50⁰ s. š., kterýž vyhovuje úloze. *Dne 21. června vychází Arktur na 50.⁰ s. š., když slunce zapadá.* Na 50.⁰ j. š. *Arctur* toho dne vychází, když slunce zapadá.

(Pokračování.)

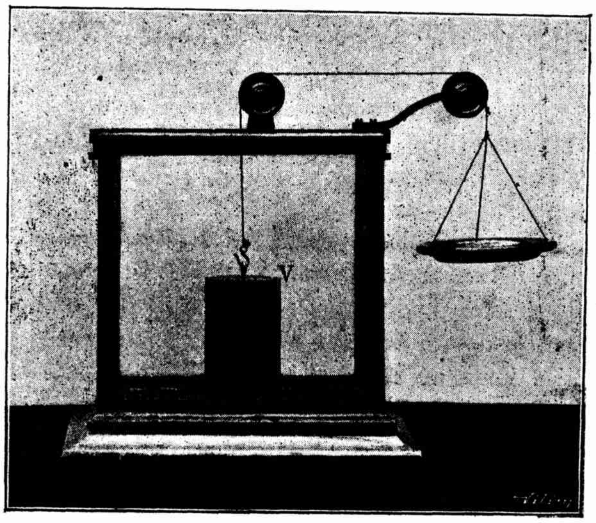
Dva nové strojky.

Podává

Jar. Simonides,
professor v Kroměříži.

V následujících řádcích podávám popis dvou jednoduchých strojků, jež jsem zhotoviti dal pro fysikální sbírku zdejšího ústavu doufaje, že snad jeden neb druhý pány kollegy uznán bude praktickým pro školní potřebu.

Strojek první (obr. 1.) skládá se ze skleněné nádoby, k jejímuž dnu přitmelena vybroušená skleněná deska a z válce dřevěného V, k jehož spodnímu základu přitmelena jest jiná



Obr. 1.

vybroušená deska skleněná, v základu horním upevněn jest kroužek, jímž provlečeno vlákno kolem dvou kladek vedené a kovovou misku nesoucí. Válec jest rozměrů takových, že na vodě plove.

Položíme-li válec na zmíněnou desku a přitlačíme-li jej k ní, můžeme závažím do misky vloženým určiti přilnavost skla ke sklu. Válec mého stroje váží 12 *dg*, miska 4 *dg*; vložíme-li do misky 9 *dg*, odtrhne se ihned válec od desky, vložíme-li do mísky závaží na př. o 2 *dg* menší, odtrhne se také válec, *ne však ihned*, úkaz jest tedy dynamický. Devět *dg* do misky vložených odtrhne válec okamžitě, jest tedy přilnavost menší než 1 *dg*.

Odstraníme-li dále mísku a nahradíme ji závažím 1 *dg* přilnavost skla ku sklu v našem případě zcela rušící, přitlačíme-li dále válec k desce a naplníme nádobu téměř až po kraj vodou a pustíme-li pak *opatrně* válec, nevyplove vzhůru, nýbrž zůstane chvíli na dně i tehdy, přidáme-li k závaží 1 *dg*, třeba ještě jiné větší závaží — bez vztlaku není plování. Válec zůstane několik vteřin na dně, pak se počne šinouti z místa na místo, vnikáť patrně voda pozvolna pod válec, až vyplove vzhůru. Pokus tento lze i bez válce popsaného provésti. Vložíme-li na desku, odšoupnuvše napřed rámec s kladkami stranou, hranol neb kostku dřevěnou (ze sbírky stereom.), jejíž podstava jest dosti hladká a nepoškrabaná, již zatížíme závažím a nalejeme-li do nádoby vody, nevyplove těleso ihned po odstranění závaží.

Navlhčíme-li skleněnou desku pod válcem vodou, odtrhne jej od desky rovněž navlhčené teprve závaží $17^1/_2$ *dg*, natřeme-li obě desky čistým olejem, jest nám k témuž účeli do mísky vložiti 42 *dg*.

Vrstvou oleje můžeme vnikání vody pod válec zameziti Namažeme-li základ válce olejem, přidržíme-li jej v nádobě a naplníme tuto vodou, nevyplove válec vzhůru, byť jsme i do mísky vložili závaží 45 *dg*, t. j. závaží o 3 *dg* větší, než to, jež by váhu válce i přílnavost oleje k oleji vyvážilo.

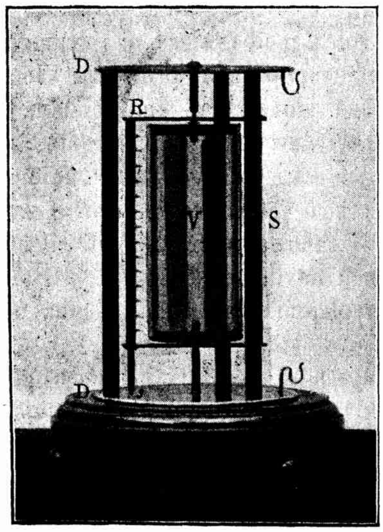
Strojek druhý nazval bych reakčním turbilonem elektrickým, jímž lze demonstrovati rovnost akce a reakce, jakož i princip o zachování ploch.

D D (obr. 2.) jsou dvě dobře vyhlazené mosazné desky, spojené třemi sloupy ebonitovými S, desky tyto nesou ložiska svislé osy rámce R, jehož dvě vodorovná ramena R jsou rovněž z ebonitu, kdežto druhá dvě svislá ramena tvoří kovové hřebeny, v deskách R spočívá osa skleněného polepy opatřeného válce V. Hřebeny prodlouženy jsou jeden dolů, druhý nahoru*) přes příčky R kovovými tyčemi, nesoucími kovové štětky *s*, *s*.

---

*) Druhý hřeben v obraze kryt jest sloupkem S.

Spojíme-li desky D D se svodiči elektriky, přechází štětci kladná elektřina k jednomu, záporná k druhému hřebenu, z nichž proudí na válec. Odpuzováním se stejnojmenných elektřin snaží se válec otáčeti jedním, rámec směrem opačným. Napřed počne se otáčeti válec patrně proto, že svou váhou spočívá v rámci. Ihned po válci počne i rámec směrem opačným se otáčeti a sice rychlostí ustavičně rostoucí, takže za krátko otáčí se mnohem rychleji, než válec mnohem těžší tak, jak to



Obr. 2.

z principu zachování ploch bylo lze očekávati. Jest patrno, že připevněním malých závaží souměrně na př. na horní příčce R upevněných lze rychlost rámce učiniti $\gtreqless$ rychlosti válce.

Strojek lze každou malou Winter-ovou neb influenční elektrikou uvésti v činnost, chceme-li užiti elektrik o značném doskoku jisker, nutno otáčeti tak pomalu, aby při R od konců hřebenů k deskám D nepřeskakovaly jiskry.

Oba strojky zhotovil mně dle zaslaných náčrtků p. Boh. Zukriegel (Praha, Náprstkova ul. č. 274—I.) velmi vkusně a dovedně a lze je u něho obdržeti a sice první za 10 zl., druhý za 12 zl.

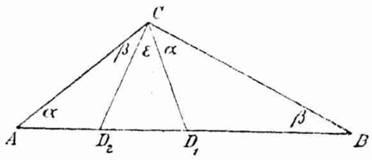
Zobecnění věty Pythagorovy pro každý trojúhelník.

Napsal

Vavřinec Jelínek,

professor v Novém. Městě u Vídně.

I. Strany trojúhelníka ABC (obr. 1.) jmenujme, jak obyčejně, a, b, c a jim protilehlé úhly α, β, γ.



Obr. 1

Odečteme-li od úhlu γ směrem ku A úhel α, směrem ku B úhel β, a prodloužíme-li nová ramena až k průsečíkům D_1 a D_2 se stranou c, najdeme:

V trojúhelníku D_1CD_2 jsou úhly δ_1 ležící proti $CD_2 = d_2$, a δ_2 proti $CD_1 = d_1$ zevnějšími úhly sousedních trojúhelníků; tedy

$$\delta_1 = \alpha + \beta = 180^0 - \gamma, \quad \delta_2 = \alpha + \beta = 180^0 - \gamma,$$

pročež

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta$$

a tedy také příčky

(1) $$d_1 = d_2 = d.$$

Každý z obou trojúhelníků, omezených nerozdělenou stranou, přilehlým úsekem rozdělené strany a příslušnou příčkou d, jest pro rovnost úhlů podoben danému trojúhelníku; jsou tedy oba i sobě podobny.

(2) $\triangle BCD_1 \sim \triangle ABC$, $\triangle ACD_2 \sim \triangle ABC$, $\triangle BCD_1 \sim \triangle ACD_2$.

Nazveme-li úseky $BD_1 = c_1$ a $AD_2 = c_2$, najdeme z prvých dvou párů těchto podobných trojúhelníků úměry

$$(3) \qquad c : a = a : c_1, \quad c : b = b : c_2.$$

Jest tedy každá nerozdělená strana trojúhelníka střední měřickou úměrnou mezi celou rozdělenou stranou a jejím úsekem, přilehlým k nerozdělené straně.

Z třetí dvojice podobných trojúhelníků pak plyne

$$(4) \qquad c_1 : d_1 = d_2 : c_2$$

a poněvadž dle (1) jest $d_1 = d_2$, tvoří každá příčka d střední měřickou úměrnou obou úseků rozdělené strany.

Proměníme-li úměry (3) v rovnice:

$$a^2 = cc_1, \quad b^2 = cc_2,$$

najdeme součtem

$$(5) \qquad a^2 + b^2 = c(c_1 + c_2)$$

a součinem

$$ab = c\sqrt{c_1 c_2};$$

tedy vzhledem ku (4)

$$(6) \qquad ab = cd,$$

kterýžto vztah také přímo vychází z prvních neb druhých dvou podobných trojúhelníků uvedených v (2).

Učiníme-li $D_1D_2 = e$, jest dle obr. 1.

$$(7) \qquad c = c_1 + c_2 + e.$$

Z rovnice této obdržíme, násobíme-li ji hodnotami c_1, c_2 neb c:

$$\begin{aligned} cc_1 &= c_1^2 + c_1c_2 + c_1e, \\ cc_2 &= c_2^2 + c_1c_2 + c_2e, \\ c^2 &= cc_1 + cc_2 + ce \end{aligned}$$

a vůči úměrám (3) a (4)

$$(8) \qquad \begin{aligned} a^2 &= c_1^2 + d^2 + c_1e, \\ b^2 &= c_2^2 + d^2 + c_2e, \\ c^2 &= a^2 + b^2 + ce. \end{aligned}$$

V prvních dvou rovnicích poznáváme hned na první pohled větu Carnotovu; jesti e dvojím průmětem strany d na c_1 i na c_2.

Smysl třetí rovnice (8) seznáme takto: Vyměnivše v součinu ce přímku c dle (6), obdržíme

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab \cdot \frac{e}{d} \tag{9}$$

a z trojúhelníka D_1CD_2, kde

$$\varepsilon = \gamma - (\alpha + \beta) = \gamma - (180^0 - \gamma) = 2(\gamma - 90^0),$$

najdeme

$$\frac{e}{d} = 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} = -2 \cos \gamma,$$

takže ona rovnice zní

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \tag{10}$$

Jest tedy i třetí rovnice v (8) větou Carnotovou. Hodnota posledního členu jejího jest v našem případě pro $\gamma > 90^0$ ovšem kladná.

Správnost rovnic (1) až (6) není nijak podmíněna velikostí úhlu γ. Rovnice tyto platí tedy pro každý trojúhelník.

V rovnicích (7) až (9) jest však pro hodnotu přímky

$$e = -2d \cos \gamma$$

rozeznávati různé případy:

a) Je-li $\gamma > 90^0$, jako v našem obrazci, jest e kladné; úseky c_1 a c_2 souvisejí přímkou e. Pro tento případ platí horní rovnice.

b) Je-li $\gamma = 90^0$, jest $e = 0$; úseky c_1 a c_2 souvisejí jen svými konci, příčky d_1 a d_2 splývají v jedinou a to ve výšku na přeponu. Rovnice (7) až (9) znějí pak:

$$c = c_1 + c_2,$$
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

c) Je-li $\gamma < 90^0$, jest e záporné; úseky c_1 a c_2 částečně se kryjí a horní rovnice se mění na

$$c = c_1 + c_2 - e,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - ce,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - ab \frac{e}{d}.$$

Odvození Pythagorovy věty podmíněno je tím, lze-li jedinou příčkou odečísti dva úhly trojúhelníka od úhlu třetího. Neomezujeme-li toto odčítání počtem odčítacích příček, nýbrž odečteme-li vůbec, shledáme, že Pythagorova věta ve všech svých výrocích platí pro každý trojúhelník. I zdánlivě různící se věty

$$a^2 + b^2 = c^2,$$
$$a^2 + b^2 = c(c_1 + c_2)$$

jsou totožné, vyslovíme-li je takto:

„Součet čtverců nad dvěma stranami trojúhelníka se rovná obdélníku ze strany třetí a součtu obou jejích úseků."

II. Ježto v předešlém uvedeno bylo několik posud neobvyklých úseček c_1, c_2, d, e, ukážeme ještě, jak lze jich použiti při řešení trojúhelníka.

$$\sin\gamma = \sin\left(\frac{\varepsilon}{2} + 90^0\right) = \cos\frac{\varepsilon}{2} = \frac{v}{d} = \frac{v}{\sqrt{c_1c_2}}$$
$$= \frac{\sqrt{4d^2 - e^2}}{2d} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4c_1c_2 - e^2}{c_1c_2}},$$

kde v znamená výšku na c. Pak

$$\cos\gamma = \cos\left(\frac{\varepsilon}{2} + 90^0\right) = -\sin\frac{\varepsilon}{2} = -\frac{e}{2d}$$
$$= -\frac{e}{2\sqrt{c_1c_2}} = -\frac{c - c_1 - c_2}{2\sqrt{c_1c_2}},$$

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c = \sqrt{c_1} : \sqrt{c_2} : \sqrt{c},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha + \beta}{2} : \operatorname{tang}\frac{\alpha - \beta}{2} = \left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right) : \left(\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}\right);$$

plochy trojúhelníků $p = ABC$, $p_1 = BCD_1$, $p_2 = ACD_2$, $p_3 = D_1CD_2$ jsou v relaci

$$p : p_1 : p_2 : p_3 = c : c_1 : c_2 : e.$$

Příklad 1. Dány: c, c_1, c_2.

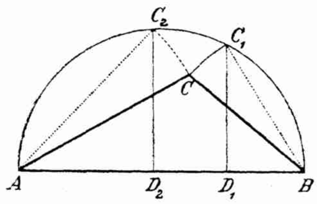
Najdeme

$$a = \sqrt{cc_1}, \quad b = \sqrt{cc_2}, \quad d = \sqrt{c_1 c_2}, \quad e = c - (c_1 + c_2),$$

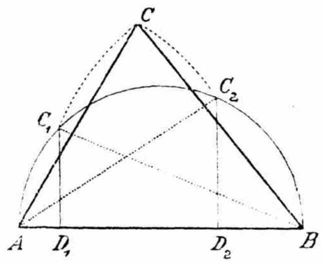
$$p = c\sqrt{s\,(s - \sqrt{c})\,(s - \sqrt{c_1})\,(s - \sqrt{c_2})}, \text{ kde } 2s = \sqrt{c} + \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}.$$

Sestrojení. Odečteme od $c = \mathrm{AB}$ protivnými směry $c_1 = \mathrm{BD}_1$ a $c_2 = \mathrm{AD}_2$. Tu rozeznávati dlužno tyto případy:

a) Oba konce D_1 a D_2 úseků c_1 a c_2 vpadají do $\mathrm{AB} = c$. (Obr. 2. a 3.) Sestrojíme nad $\mathrm{AB} = c$ jakožto průměrem polokružnici, pak $\mathrm{D}_1\mathrm{C}_1 \perp \mathrm{AB}$ a $\mathrm{D}_2\mathrm{C}_2 \perp \mathrm{AB}$ a shledáme, že $\mathrm{BC}_1 = a$, $\mathrm{AC}_2 = b$.

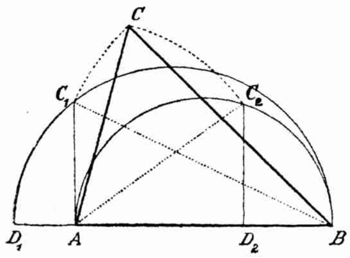


Obr. 2.

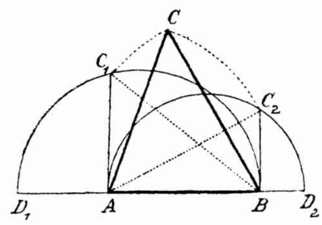


Obr. 3.

b) Jeden neb oba konce D_1 a D_2 úseků padají na prodlouženou $\mathrm{AB} = \mathrm{c}$. (Obr. 4. a 5.) Sestrojíme polokružnice nad každou



Obr. 4.



Obr. 5.

delší přímkou c, c_1, c_2 jakožto průměrem (nejkratší z nich jest již obsažena v každé delší) a pokračujeme jako v případě prvém.

Příklad 2. Dány: c_1, c_2, $\pm e$.

Vypočteme:

$$c = c_1 + c_2 \pm e, \quad a = \sqrt{c_1(c_1 + c_2 \pm e)}, \quad b = \sqrt{c_2(c_1 + c_2 \pm e)},$$
$$d = \sqrt{c_1 c_2}, \quad p = \frac{1}{4}(c_1 + c_2 \pm e)\sqrt{4c_1c_2 - e^2}.$$

Sestrojení. Je-li $e = D_2D_1$ kladné, přičteme ku e (obr. 2.), je-li záporné $e = D_1D_2$, odečteme od e (obr. 3.) protivnými směry úsek $c_1 = D_1B$ a úsek $c_2 = D_2A$. Pokaždé obdržíme $c = AB$ a pokračujeme jako v příkladě 1.

Podmínka: $c_1c_2 > \left(\frac{e}{2}\right)^2$.

Příklad 3. Dány: a, c_1, d.

Vypočteme:

$$c_2 = \frac{d^2}{c_1}, \quad c = \frac{a^2}{c_1}, \quad b = \frac{ad}{c_1}, \quad e = \frac{a^2 - c_1^2 - d^2}{c_1},$$
$$p = \left(\frac{a}{c_1}\right)^2 \sqrt{s(s-a)(s-c_1)(s-d)}, \text{ kde } 2s = a + c_1 + d.$$

Sestrojení. Sestrojíme trojúhelník o stranách $a = BC$, $c_1 = BD_1$ a $d = CD_1$ (obr. 1.). Jeho úhel ležící proti a se rovná úhlu γ hledaného trojúhelníka; přeneseme jej tedy do C ku straně a.

Příklad 4. Dány: a, c_2, d.

Najdeme:

$$c_1 = \frac{d^2}{c_2}, \quad b = \frac{a}{d}c_2, \quad c = \left(\frac{a}{d}\right)^2 c_2,$$
$$p = \left(\frac{a}{d}\right)^2 \sqrt{s(s-b)(s-c_2)(s-d)},$$

kde $b = \frac{a}{d}c_2$ a $2s = b + c_2 + d$.

Sestrojení. Sestrojivše b dle úměry $d : a = c_2 : b$ neb c_1 dle $c_1 : d = d : c_2$, pokračujeme podobně jako v příkl. 3.

Příklad 5. Dány: c_1, c_2, a.

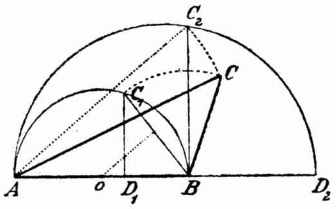
Najdeme:

$$d = \sqrt{c_1c_2}, \quad b = a\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \quad c = \frac{a^2}{c_1},$$
$$p = \left(\frac{a}{c_1}\right)^2 \sqrt{s(s-a)(s-c_1)(s-d)},$$

vypočítáme-li napřed d a klademe-li pak

$$2s = a + c_1 + d.$$

Sestrojení. Sestrojme pravoúhlý trojúhelník BC_1D_1 (obr. 6.) o odvěsně $BD_1 = c_1$ a přeponě $BC_1 = a$, opíšeme polokružnici, jejíž střed o leží v (prodloužené) odvěsně c_1 a obvod prochází



Obr. 6.

body B a C_1. Kružnice tato protne prodlouženou odvěsnu ještě v A. Jest $AB = c$. Nanesme pak úsek $c_2 = AD_2$ na AB a pokračujme jako v příkl. 1. *b*.

Příklad 6. Dány: a, b, d.

Vypočteme:

$$c = \frac{ab}{d}, \quad c_1 = \frac{ad}{b}, \quad c_2 = \frac{bd}{a},$$

$$p = (ab)^2 \sqrt{s\left(s - \frac{1}{a}\right)\left(s - \frac{1}{b}\right)\left(s - \frac{1}{d}\right)},$$

znamená-li

$$2s = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

Sestrojení. Potřebí jen c, které dle úměry $d : a = b : c$ snadno sestrojíme.

Příklad 7. Dány: a, b, $\pm e$.

Najdeme z rovnice (8)

$$c = \frac{1}{2}\left[\pm e + \sqrt{e^2 + 4(a^2 + b^2)}\right],$$

pak

$$c_1 = \frac{2a^2}{\pm e + \sqrt{e^2 + 4(a^2 + b^2)}},$$

$$c_2 = \frac{2b^2}{\pm e + \sqrt{e^2 + 4(a^2 + b^2)}},$$

$$d = \frac{2ab}{\pm e + \sqrt{e^2 + 4(a^2 + b^2)}}.$$

Vypočítavše stranu c, použijeme pro plochu vzorce Heronova

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Sestrojení. Jedná se jen o stranu c, kterou sestrojíme dle

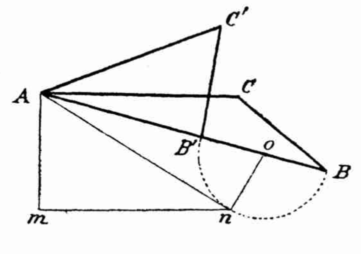
$$c = \sqrt{(a^2+b^2) + \left(\frac{e}{2}\right)^2} \pm \frac{e}{2}.$$

V obr. 7. jest $Am = a$, $mn = b$, $Am \perp mn$, tedy

$$An = \sqrt{a^2 + b^2};$$

pak $no \perp An$, $no = \frac{e}{2}$, tedy

$$Ao = \sqrt{a^2 + b^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2}.$$



Obr. 7.

Opíšeme-li ještě kolem o kružnici o poloměru $\frac{e}{2}$, dostaneme obě strany: delší $c = AB$, kratší $c' = AB'$.

Příklad 8. Dány: c, d, e.

Strany a a b obdržíme řešením rovnic (6) a (8):

$$a = \frac{1}{2}\left[\sqrt{c(c+2d-e)} \pm \sqrt{c(c-2d-e)}\right] = b;$$

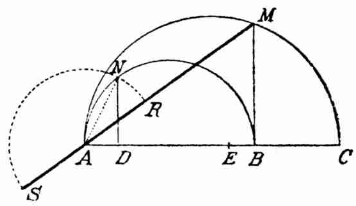
$$p = \frac{c}{4}\sqrt{(2d+e)(2d-e)}.$$

Sestrojení stran a a b provedeme dle vzorce

$$\sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{e}{2}+d\right)} \pm \sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{e}{2}-d\right)}.$$

V obr. 8. jest $AB = \frac{c}{2}$, $BE = \frac{e}{2}$, $CE = DE = d$; tedy

$$AC = \frac{c}{2} - \frac{e}{2} + d, \quad AD = \frac{c}{2} - \frac{e}{2} - d.$$



Obr. 8.

Sestrojíme-li polokružnice o průměrech AC a AB a protneme-li je kolmicemi BM $\perp$ AC a DN $\perp$ AB, bude tětiva

$$AM = \sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{e}{2}+d\right)}$$

a tětiva

$$AN = \sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{e}{2}-d\right)},$$

pročež MS jest delší, MR kratší stranou z obou a a b.

Podmínky: $2d > e$, $c > (2d+e)$.

Kdyby byla přímka e záporná, změnil by se ovšem obvod, nikoliv však plocha p trojúhelníka.

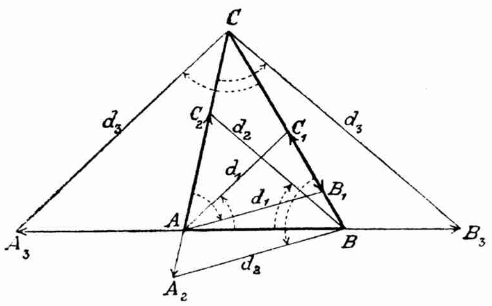
O trojúhelníku, od jehož každého úhlu ostatní dva jsou odečteny.*)

Pojednává

Vavřinec Jelínek,

professor v Novém Městě u Vídně.

Odečtěme od každého úhlu trojúhelníka ostatní dva jeho úhly, přenášejíce úhel, který odečítáme, ku protilehlé straně. Z každého vrcholu budou vycházeti ku protilehlé straně dvě sobě rovné odčítací příčky, které tuto stranu rozdělí na dvě odčetné přímky a zbytek.



Odčítací příčky nazveme krátce „příčkami" a poznamenáme je písmenou d, rozeznávajíce je indexem dle vrcholu, z něhož vycházejí neb dle strany, kterou protínají. Na př.: $d_1 = AB_1 = AC_1$ jest příčka vycházející z prvního vrcholu A a protínající první stranu a. Pravíme tedy: d_1 jest příčka úhlu α nebo strany a.

Odčetné přímky, krátce „úseky" nazvané, poznamenáme písmenem strany, od níž přímka byla useknuta, a ježto na každé straně nastanou úseky dva, připojíme k tomuto písmenu ještě index souhlasný s úhlem, jehož odečtením úsek vznikl. Na př.: $b_1 = CA_2$ a $b_3 = AC_2$ jsou úseky téže strany b, první vznikl odečtením úhlu α, druhý odečtením úhlu γ od úhlu β. Index tento také udává vrchol, ku kterému úsek směřuje. Vrchol troj-

---

*) Předpokládá se částečně pojednání: „Zobecnění věty Pythagorovy pro každý trojúhelník", str. 79.

úhelníka, z něhož úsek vychází, vyčteme ze symbolu pro úsek, přidáme-li scházející tu číslo: b znamená 2. stranu, 3 třetí úhel; v symbolu b_3 schází číslo 1; vychází tedy $b_3 = AC_2$ z vrcholu A.

Dva úseky ($a_2 = CB_1$, $b_1 = CA_2$) na různých stranách (a, b), vycházející ze společného vrcholu (C), nazveme „horními" úseky dvou stran. Dva úseky ($a_3 = BC_1$, $b_3 = AC_2$), směřující ku společnému průsečíku (C) jejich stran (a, b), jmenujeme „dolními" úseky těchto stran.

Představíme-li si každou stranu jakožto základnu trojúhelníka před sebou od levé k pravé ruce, rozeznáváme její úseky na „levý" a „pravý" úsek dle polohy vrcholu, z něhož úsek vychází; na př. $c_2 = AB_3$ jest levý, $c_1 = BA_3$ pravý úsek strany c. Úseky téže strany jsou protisměrné. Všechny levé úseky jsou stejnosměrné a vznikly odečtením různých úhlů, jsou tedy různoúhlé; taktéž pravé úseky. Dva horní úseky jsou různoúhlé, dva dolní jsou stejnoúhlé.

Vzdálenost od konce jednoho úseku ku konci úseku druhého téže strany zoveme „úsekem" této strany a znamenáme písmenem e, jehož index souhlasí s příslušnou stranou čili s protilehlým úhlem; na př. $e_2 = A_2C_2$ jest úsekem strany b a leží tedy proti úhlu β.

Přímky: a, d_1, c_1, b_1, e_1, jsou stejnoúhlé, všechny náleží úhlu α.

Mimo úhly napočteme tedy v tomto trojúhelníku 15 přímek, jichž vzájemné vztahy stanoviti hodláme.

Z rovnosti úhlů následují podobnosti trojúhelníků:

$$\begin{aligned} ABC &\sim AB_1C \sim ABC_1 \\ &\sim A_2BC \sim ABC_2 \\ &\sim A_3BC \sim AB_3C \end{aligned}$$

a tudíž úměry

$$\begin{aligned} a:b:c &= b\ :a_2:d_1 = c\ :d_1:a_3 \\ &= b_1:a\ :d_2 = d_2:c\ :b_3 \\ &= c_1\ :d_3:a\ = d_3:c_2:b \\ &= \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Jsou-li tedy z těchto hodnot dány tři na sobě nezávislé, lze dle uvedených úměr vypočítati všechny ostatní.

Na př. jsou-li dány tři strany, najdeme

z poměru 1. a 2. . . . . a_2, d_1,
1. a 3. . . . . a_3,
1. a 4. . . . . b_1, d_2,
1. a 5. . . . . b_3,
1. a 6. . . . . c_1. d_3,
1. a 7. . . . . c_2,
1. a 8. . . . . α, β, γ.

Místo abychom podobným způsobem řešili trojúhelník pro ostatní kombinace jmenovaných hodnot, upozorníme zvláště na některé výsledky úměr v (1) a odvodíme ještě jiné rovnice, jimiž se řešení trojúhelníka zjednoduší.

Poměry 2. a 3., 4. a 5., 6. a 7. dávají rovnice

$$(2) \qquad d_1 = \sqrt{a_2 a_3}\,, \quad d_2 = \sqrt{b_1 b_3}\,, \quad d_3 = \sqrt{c_1 c_2}\,,$$

kteréž praví, že každá příčka jest střední měřickou úměrnou mezi oběma úseky své strany.

Dle 2. a 4. poměru jest: $ab = a_2 b_1$,
„ 1. a 7. „ „ $ab = cd_3$,
„ 2. a 6. „ „ $ab = c_1 d_1$,
„ 4. a 7. „ „ $ab = c_2 d_2$.

Z rovnic těchto a jiných obdobně sestavených následuje:

$$(3) \qquad \begin{aligned} ab &= a_2 b_1 = cd_3 = c_1 d_1 = c_2 d_2, \\ ac &= a_3 c_1 = bd_2 = b_1 d_1 = b_3 d_3, \\ bc &= b_3 c_2 = ad_1 = a_2 d_2 = a_3 d_3, \end{aligned}$$

t. j. součin dvou stran se rovná součinu jejich horních úseků neb součinu třetí strany s její příčkou aneb součinu z příčky některé této strany se stejnoúhlým úsekem strany třetí.

Násobíme-li součiny na 1., 2. neb 3. řádce v (3) funkcemi: $\frac{1}{2}\sin\gamma$, $\frac{1}{2}\sin\beta$ neb $\frac{1}{2}\sin\alpha$, obdržíme tolikéž různých výrazů pro plochu trojúhelníka.

Z úměr v (1)

$$a : b = b_1 : a, \quad a : c = c_1 : a, \quad a : d_2 = d_3 : a$$

a z jiných obdobně sestavených vychází

$$(4)\qquad \begin{aligned} a^2 &= bb_1 = cc_1 = d_2d_3,\\ b^2 &= cc_2 = aa_2 = d_1d_3,\\ c^2 &= aa_3 = bb_3 = d_1d_2, \end{aligned}$$

t. j. každá strana jest střední měřickou úměrnou mezi druhou stranou a přilehlým úsekem této, i mezi příčkami obou druhých stran.

Součtem dvou a dvou rovnic v (4) najdeme

$$(5)\qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 &= c(c_1 + c_2),\\ a^2 + c^2 &= b(b_1 + b_3),\\ b^2 + c^2 &= a(a_2 + a_3), \end{aligned}$$

t. j. součet zdvojmocněných dvou stran se rovná součinu třetí strany se součtem jejích úseků. Je-li některý úhel pravým, jest součet úseků protilehlé strany roven této straně a případná rovnice v (5) přejde do věty Pythagorovy.

Součin stejnomístných členů v rovnicích (4)

$$a^2b^2c^2 = abc\,.\,a_3b_1c_2 = abc\,.\,a_2b_3c_1 = d_1^2d_2^2d_3^2$$

dá, hledíme-li k tomu, že o sobě jest $abc = d_1d_2d_3$, souvislý vztah mezi stranami, stejnosměrnými úseky a příčkami

$$(6)\qquad abc = a_3b_1c_2 = a_2b_3c_1 = d_1d_2d_3.$$

Abychom našli podobný vztah mezi skupinami tří sousedních úseků ku stranám a příčkám, násobme stejnomístné členy dvou rovnic v (4)

$$a^2b^2 = bc\,.\,b_1c_2 = ac\,.\,a_2c_1 = d_1d_2d_3^2$$

a nahraďme součiny stran (zde bc a ac) dle (3) součinem jejich horních úseků, pak obdržíme z této i z obdobně sestavených rovnic

$$(7)\qquad \begin{aligned} (ab)^2 &= b_1b_3c_2^2 = a_2a_3c_1^2 = d_1d_2d_3^2,\\ (ac)^2 &= a_2a_3b_1^2 = c_1c_2b_3^2 = d_1d_2^2d_3,\\ (bc)^2 &= b_1b_3a_2^2 = c_1c_2a_3^2 = d_1^2d_2d_3. \end{aligned}$$

Násobíme-li první tři členy každé rovnice v (4) stranou buď a neb b neb c:

$$a^3 = ab \,.\, b_1 = ac \,.\, c_1,$$
$$b^3 = bc \,.\, c_2 = ab \,.\, a_2,$$
$$c^3 = ac \,.\, a_3 = bc \,.\, b_3$$

a nahradíme-li pak každý součin dvou stran každou jeho hodnotou dle (3), obdržíme:

$$\begin{aligned} a^3 &= a_2 b_1^2 = a_3 c_1^2 \\ &= bc_1 d_2 = cb_1 d_3 \\ &= b_1 c_2 d_2 = b_3 c_1 d_3 \\ &= b_1 c_1 d_1; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b^3 &= b_3 c_2^2 = b_1 a_2^2 \\ &= ac_2 d_1 = ca_2 d_3 \\ &= a_2 c_1 d_1 = a_3 c_2 d_3 \\ &= a_2 c_2 d_2; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} c^3 &= a_3^2 c_1 = b_3^2 c_2 \\ &= ab_3 d_1 = ba_3 d_2 \\ &= a_2 b_3 d_2 = a_3 b_1 d_1 \\ &= a_3 b_3 d_3. \end{aligned}$$

(Dokončení.)

Úlohy.

Úloha 1.

Řešiti rovnici

$$x^3(x^2+1) - 8x^2(x-1) = \frac{4(x^3+1) - x^2(x-1)}{4}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 2.

Kolik kladných celistvých řešení má rovnice

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{8} + \frac{z}{6} = 1?$$

Týž.

Úloha 3.

Které úhly nepřesahující 360^0 činí zadost rovnici

$$tg\,x + tg^3x + tg^5x + \ldots = \frac{1}{2}\sqrt{sin^2x + sin^4x + sin^6x + \ldots}.$$

Týž.

Úloha 4.

Sestrojiti úhel x dle úměry

$$\sin 2x : \sin 3x = m : n.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 5.

Ustanoviti úhel x dle úměry

$$tg\, 2x : tg\, 3x = m : n.$$

Týž.

Úloha 6.

Nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka sestrojeny „měsíčky Hypokratovy" a do každého vepsána největší kružnice. Dokázati jest:

a) Poloměr každé této kružnice rovná se průměru kružnice vepsané v daný trojúhelník.

b) Vzdálenost středu každé této kružnice od středu přepony rovná se $\frac{1}{4}$ obvodu daného trojúhelníka.

Týž.

Úloha 7.

Úhlopříčky pravidelného osmiúhelníka omezují dva menší pravidelné osmiúhelníky. V kterém poměru jsou obsahy všech tří osmiúhelníků?

Týž.

Úloha 8.

Do kružnice vepsán čtyrúhelník, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo. Součet dvou protějších stran jest 89, součet druhých dvou stran 91; součet dvou sousedních stran jest o 10 větší než součet druhých dvou stran. Ustanoviti jest strany, úhlopříčky a obsah čtyrúhelníka, jakož i poloměr kružnice opsané.

Týž.

Úloha 9.

a) Bod o v rovině má od vrcholů pravoúhlého trojúhelníka abc vzdálenosti

$$\overline{oa} = x,\ \overline{ob} = y,\ \overline{oc} = z.$$

Které podmínce činí zadost tyto vzdálenosti, jsou-li odvěsny trojúhelníka

$$\overline{ca} = b,\ \overline{cb} = a?$$

b) Je-li

$$a = \sqrt{3},\ b = \sqrt{6},\ x = \sqrt{13},\ y = \sqrt{10},$$

vypočítati jest z.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 10.

Do válce kruhového vepsána koule dotýkající se základny obliny jeho. Který úhel tvoří se základnou válce tečná rovina koule, odtíná-li od válce část rovnou n-násobnému obsahu koule?

Týž.

Úloha 11.

Na průměru $\overline{ab}$ sestrojena polokružnice K a k ní v bodě b tečna T. Vésti bodem a sečnu protínající K v bodě c a T v bodě d tak, aby otočí-li se celý tento útvar kolem osy $\overline{ab}$, úseč na tetivě $\overline{ac}$ vytvořila těleso téhož obsahu jako je těleso vzniklé otočením se plochy omezené úsečkami $\overline{bd}$, $\overline{cd}$ a obloukem $\widehat{bc}$. *Týž.*

Úloha 12.

Která jest pravděpodobnost, že polopaprsek vycházející z bodu s dopadá na povrch koule středu o, je-li $\overline{os} = v = 17$ a poloměr koule $r = 8$? *Týž.*

Úloha 13.

Bodem $(1{\cdot}5,\ 3)$ stanoviti přímku, jejíž úseky na osách souřadných mají součet 10. *Týž.*

Úloha 14.

Stanoviti kružnici K_2 souměrnou s kružnicí

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 12x - 26y + 180 = 0$$

dle přímky

$$P \equiv x + 3y - 30 = 0;$$

vyšetřiti pak průsečíky a úhel obou kružnic. Řed. *A. Strnad.*

Úloha 15.

Stanoviti kružnici, která jest stejně vzdálena od bodů

$$a\left(6\frac{1}{4}, -1\right), \quad b\left(5, 2\frac{3}{4}\right),$$

$$c\left(0, 5\frac{1}{4}\right), \quad d\left(-3, 1\frac{1}{4}\right).$$

Týž.

Úloha 16.

Vyšetřiti podmínku, aby spojnice bodů

$$m\,(a \cos \alpha,\ b \sin \alpha), \quad n\,(a \cos \beta,\ b \sin \beta)$$

procházela ohniskem ellipsy

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Týž.

Dodatek o řešení úloh z předešlého ročníku.

Správné řešení úloh zaslali též pp.:

Brinkmann Emerich, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 16., 29., 46., 59.
Holzmann František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 6. až 9., 11. až 13., 16. až 18., 20., 22., 24., 25.
Hrdlička Alois, stud. VI. tř. gymn. v Brně, úl. 1. až 4., 7., 12., 16.
Hrubý Frant., stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 1., 2., 3., 6., 7., 8., 10., 11., 16., 17.
Janďourek Václav, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 31., 36., 37., 49., 52., 62.
Kamenický Jindřich, stud. g. v Křemencové ulici v Praze, úl. 1. až 4., 7., 9., 16., 17., 18., 23.
Kapras Jan, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 29. až 68.
Kačer Frant., stud. VII. tř. g. v Budějovicích, úl. 8., 20.
Kafka Miloslav, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1., 3., 4., 7., 16., 17., 22., 24.
Kallus Milan, stud. VI. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 11.
Klobouček Bohumil, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 3., 4., 6. až 10., 16., 17., 23.
Knobloch Josef, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 1., 7., 16., 18.
Mucha Josef, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 56. až 68.

Pospíšil Jan, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 1. až 8., 16., 17., 18.
Prokeš Karel, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 20.
Pštros Jan, stud. V. tř. akad. g. v Praze, úl. 3.
Racek Jindřich, stud. VIII. tř. g. v Žitné ul. v Praze, úl. 1., 4., 6. až 10., 16., 17., 18., 23., 24.
Roubíček Jos., stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, ul. 1., 2., 3., 5., 17.
Siegel Frant., stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1., 9., 18., 24.
Spurný František, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 35., 56., 62., 67., 68.
Tereba Frant., stud. VIII. tř. g. v Křemencové ul. v Praze, úl. 35., 36., 40., 43., 47., 49., 52., 53., 58., 62., 63., 67.
Válka František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 24., 31., 57.
Vitáček F., stud. VII. tř. g. v Klatovech, úl. 24. až 43., 46.
Vitěka Antonín, stud. VII. tř. g. v Budějovicích, 1., 2., 3., 5. až 8.
Vojtěch Jan, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 31. až 68.
Přiřknutí ceny. Stud. Janu Kaprasovi z VIII. tř. g. v Brně byla dodatečně přisouzena 1. cena vypsaná za řešení úloh minulého ročníku.

Oznámení.

Myšlénka vydávání „Sborníku Jednoty českých mathematiků v Praze“, o němž v „Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky“ roč. XXVII. str. 322. zpráva podána byla, dochází prvního svého uskutečnění. Vyšlať právě jako I. číslo: *Eduarda Weyra „Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu.“* (200 stran vel. 8°, 112 obr.)

Aby kniha tato co možná největšího rozšíření došla, ustanovil výbor Jednoty cenu prodejnou *velmi nízkou:* 2 zl. 40 kr., pro pp. členy Jednoty 1 zl. 80 kr., poštou o 10 kr. více. Objednati ji lze v knihkupectví, pro pp. členy pod adressou: „Jednota českých mathematiků“ v Praze-II, Na Struze čís. 3.

Ponechávajíce si podrobnou recensi na dobu pozdější, doporučujeme tuto výbornou a z mnoha stran s napjetím očekávanou knihu slovutného učence našeho pp. čtenářům co nejvřeleji.

Opravy

z Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky roč. XXVII.

V Oznámení „Sborník Jednoty českých mathematiků“
na str. 323. řádka 12. s hora místo 1891 čti 1898,
na str. 324. řádka 9. s hora místo svazků čti archů.

Vyčíslení jistých Eulerových integrálů neomezených.

Napsal

Augustin Pánek.

Eulerovo známé dílo „Institutionum calculi integralis...", jehož německý překlad pořízen J. Salomonem, skýtá vyčíslení integrálů substitucemi zvláštními, mnohdy podivuhodnými. V úvahu volíme si některé integrály irracionálních differenciálů, uveřejněné poprvé Eulerem ve Sborníku Akademie věd v Petrohradě a v jeho díle reprodukované.*) K jich vyčíslení zvolíme substituci *téhož tvaru*, t. j. při uvažovaných integrálech položíme za symbolem integračním vyskytující se odmocninu z příslušné funkce proměnné x rovnou px, znamená-li litera p novou proměnnou, Eulerem užívanou. I seznáme methodu, jakým charakteristickým postupem možno snadně jisté integrály algebraických irracionálních differenciálů převésti na integrály algebraických differenciálů racionálních.

I. Abychom vyčíslili integrál

$$V = \int \frac{dx}{(a + bx^n)\sqrt[2n]{a + 2bx^n}}, \tag{1}$$

užijeme substituce

$$\sqrt[2n]{a + 2bx^n} = px, \tag{2}$$

kdež p značí novou proměnnou.

Z rovnice (2) plyne

*) Životopis slavného Eulera jest pisatelem této stati podán v „Ottově Naučném Slovníku" ovšem tak, jak jej možno napsati v rámci Slovníku samého. Poznamenáváme, že Eulerův „Inst. calculi integr." vydán Petrohradskou Akademií věd svaz. I. r. 1768, sv. II. r. 1769, svaz. III. r. 1770 a sv. IV. r. 1794. Slavný Euler zemřel r. 1783, tedy před vydáním sv. IV. Překlad Salomonův vyšel ve Vídni 1828—1830.

(2') $$a + 2bx^n = p^{2n}x^{2n},$$

načež dělením x^{2n} obdržíme

(2'') $$ax^{-2n} + 2bx^{-n} = p^{2n};$$

differencujeme-li tuto rovnici a zkrátíme-li ji pak — $2n$, nabudeme

$$(ax^{-2n-1} + bx^{-n-1})\,dx = -p^{2n-1}dp,$$

z níž

(3) $$dx = -\frac{x^{2n+1}p^{2n-1}}{a+bx^n}\,dp.$$

Dosadíme-li hodnoty z (2) a (3) do (1), bude

(4) $$dV = -\frac{x^{2n}p^{2n-2}}{(a+bx^n)^2}\,dp.$$

Abychom tu na pravé straně x vyjádřili funkcí p, násobíme rovnici (2'') konstantou a a k součinu tomu přičteme b^2, tedy sestrojíme výraz

(5) $$b^2 + ap^{2n} = \frac{(a+bx^n)^2}{x^{2n}},$$

který (4) promění přímo ve tvar

(4') $$dV = -\frac{p^{2n-2}dp}{b^2 + ap^{2n}},$$

což vede na integrál differenciálu racionálního

(1') $$\int \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[2n]{a+2bx^n}} = -\int \frac{p^{2n-2}}{b^2+ap^{2n}}\,dp.$$

Jest-li na př. $a = -1$, $b = 1$, obdržíme jakožto zvláštní vzorec

(6) $$\int \frac{dx}{(1-x^n)\sqrt[2n]{2x^n-1}} = \int \frac{p^{2n-2}}{1-p^{2n}}\,dp;$$

je-li ještě $n = 2$, bude integrál, Eulerem uvedený,

(7) $$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{2x^2-1}} = \int \frac{p^2dp}{1-p^4},$$

jenž, jak známo, vede k integrálům základním, a to k

$$\frac{1}{2}\left(\int \frac{dp}{1-p^2} - \int \frac{dp}{1+p^2}\right),$$

t. j.

$$\frac{1}{4} l \frac{1+p}{1-p} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,ctg} p,$$

kde

$$p = \frac{\sqrt[4]{2x^2-1}}{x},$$

takže konečně

$$(7') \qquad \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{2x^2-1}} = \frac{1}{4} l \frac{x+\sqrt[4]{2x^2-1}}{x-\sqrt[4]{2x^2-1}} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt[4]{2x^2-1}}.$$

Poslední integrál lze transformovati na známý integrál differenciálu irracionálního, položíme-li

$$(8) \qquad x = \sqrt{\frac{1+z^4}{2}},$$

kde z jest nová proměnná, načež

$$(9) \qquad dx = \sqrt{2}\frac{z^3 dz}{\sqrt{1+z^4}}.$$

Dosadíme-li hodnoty z (8) a (9) do integrálu (7′), obdržíme relaci

$$(10) \qquad \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{2x^2-1}} = 2\sqrt{2}\int \frac{z^2 dz}{(1-z^4)\sqrt{1+z^4}}.$$

Integrál na pravé straně jest totiž jeden ze čtyř význačných integrálů Eulerových,*) který jsme přímo vyčíslili co nejjednodušší

*) Viz Aug. Pánek: „*O některých integrálech Eulerových.*" Rozpravy české akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění v Praze, roč. II., 1893.

substitucí *algebraickou*, když jsme kladli příslušnou odmocninu, rovnou řečenému typickému součinu

$$\sqrt{1+z^4} = pz,$$

kde p je nová proměnná.*)

Zmíněný integrál zvšeobecníme v odstavci následujícím.

II. Při stanovení integrálu

$$V = \int \frac{x^2 dx}{(a - cx^4)\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} \tag{1}$$

vede k cíli uvedená substituce

$$\sqrt{a + bx^2 + cx^4} = px \tag{2}$$

aneb

$$a + bx^2 + cx^4 = p^2x^2. \tag{2'}$$

Určíme dx, když rovnici (2′) dělíme především x^2, tedy

$$ax^{-2} + b + cx^2 = p^2,$$

načež differencováním, krátíme-li ihned 2, dostaneme

$$-\frac{a - cx^4}{x^3}\,dx = pdp,$$

tudíž

$$dx = -\frac{x^3 pdp}{a - cx^4}. \tag{3}$$

Dosazením hodnot z (2) a (3) do (1) nabýváme

$$dV = -\frac{x^4 dp}{(a - cx^4)^2}. \tag{4}$$

Abychom tu vyloučili x, uvažme, že dle (2′)

$$a + cx^4 = x^2(p^2 - b), \tag{2''}$$

což zdvojmocněno

$$(a + cx^4)^2 = x^4(p^2 - b)^2,$$

---

*) Srovnej Aug. Pánek: „*O vyčíslení některých integrálů Eulerových společnou substitucí algebraickou.*" Věstník král. české společnosti nauk. V Praze, 1893.

a odečteme-li od toho na obou stranách $4acx^4$, zjednáme si

$$(a-cx^4)^2=x^4[(p^2-b)^2-4ac].$$

Tato hodnota, vložená do vzorce (4), poskytuje tvar differenciálu

$$(4') \qquad dV=-\frac{dp}{(p^2-b)^2-4ac},$$

tudíž V čili

$$(1') \int\frac{x^2dx}{(a-cx^4)\sqrt{a+bx^2+cx^4}}=\int\frac{dp}{4ac-(p^2-b)^2}.$$

Jest tedy integrál předložený vyjádřen integrálem differenciálu racionálního.

Klademe-li tu $a=c=1$, $b=0$, nabudeme tvar Eulerova integrálu (10), v odst. I. na pravé straně vytčeného, totiž

$$(5) \qquad \int\frac{x^2dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}=\int\frac{dp}{4-p^4},$$

při čemž dle původní substituce bude

$$(6) \qquad p=\frac{\sqrt{1+x^4}}{x}.$$

Když rovnici (6) zdvojmocníme a násobíme ji (5), to jest rovnicí

$$(5') \qquad \frac{x^2dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}=\frac{dp}{4-p^4},$$

obdržíme

$$\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx=\frac{p^2dp}{4-p^4},$$

čímž nabudeme jiného význačného integrálu Eulerova, vyjádřeného integrálem differenciálu racionálního

$$(7) \qquad \int\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}=\int\frac{p^2dp}{4-p^4}.$$

Můžeme si též zjednati obecný tvar integrálu (7), když (1′), t. j.

$$\frac{x^2 dx}{(a - cx^4)\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} = \frac{dp}{4ac - (p^2 - b)^2},$$

znásobíme rovnicí (2''), t. j.

$$\frac{a + cx^4}{x^2} = p^2 - b,$$

čímž dospíváme integrálního vzorce

$$(8)\quad \int \frac{a + cx^4}{a - cx^4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} = \int \frac{(p^2 - b)\,dp}{4ac - (p^2 - b)^2}.$$

Jest-li tu $a = c = 1$, $b = 0$, obdržíme integrál (7).

Úvaha tato vede k tomu, že možno rázem oba integrály (5) a (7) dostati z obecnějšího integrálu, jak jest konstruován v odstavci následujícím.

III. Chceme-li vyčísliti integrál

$$(1)\qquad V = \int \frac{x^{m+n-1}dx}{(a - cx^{2n})\sqrt[n]{(a + bx^n + cx^{2n})^m}},$$

zavedeme opět sprostředkující rovnici

$$(2)\qquad \sqrt[n]{a + bx^n + cx^{2n}} = px$$

neboli

$$(2')\qquad a + bx^n + cx^{2n} = p^n x^n,$$

načež dělením x^n

$$ax^{-n} + b + cx^n = p^n.$$

Differencujeme-li tuto rovnici a krátíme-li n, vzejde

$$-\frac{a - cx^{2n}}{x^{n+1}}\,dx = p^{n-1}dp,$$

z čehož

$$(3)\qquad dx = -\frac{x^{n+1}p^{n-1}}{a - cx^{2n}}\,dp.$$

Vložíme-li hodnoty z (2) a (3) do (1), povstane

$$(4)\qquad dV = -\frac{x^{2n}p^{n-m-1}}{(a - cx^n)^2}\,dp.$$

Z rovnice (2′) plyne

$$a + cx^{2n} = x^n (p^n - b),$$

a zdvojmocníme-li tuto rovnici,

$$(a + cx^{2n})^2 = x^{2n} (p^n - b)^2,$$

načež, odečítáme-li na obou stranách $4acx^{2n}$, nabudeme

$$(a - cx^{2n})^2 = x^{2n} [(p^n - b)^2 - 4ac].$$

Tato hodnota, dosazená do (4), vede k integrálu žádanému

$$(1') \quad \int \frac{x^{m+n-1} dx}{(a - cx^{2n}) \sqrt[n]{(a + bx^n + cx^{2n})^m}} = \int \frac{p^{n-m-1} dp}{4ac - (p^n - b)^2}.$$

Klademe-li do tohoto integrálu $m = 1$, $m = 2$, obdržíme integrál (1′) odst. II. a tím také nabýváme integrálu (5) v témže odstavci.

Jest-li však $m = -1$, $n = 2$, obdržíme z (1′) jakožto speciální případ integrál

$$(5) \quad \int \frac{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}}{a - cx^4} dx = \int \frac{p^2 dp}{4ac - (p^2 - b)^2};$$

a je-li tu $a = c = 1$, $b = 0$, dospějeme integrálu (7) odst. II.

K význačným integrálům Eulerovým (5) a (7) odst. II., které jsou nyní zvláštními případy vzorce (1′), druží se ještě dva jiné, a to

$$\int \frac{(1 + x^2)\, dx}{(1 - x^2) \sqrt{1 + x^4}} \quad \text{a} \quad \int \frac{(1 - x^2)\, dx}{(1 + x^2) \sqrt{1 + x^4}}.$$

Abychom tyto integrály vyčíslili, sestrojíme především výraz

$$\frac{(1 \pm x^2)^2}{x^2} = \frac{1 + x^4 \pm 2x^2}{x^2},$$

který vyjádříme proměnnou p, rovnicí (6) odst. II. uvedenou

$$\frac{1 + x^4}{x^2} = p^2,$$

takže máme

$$(6) \qquad \frac{(1 \pm x^2)^2}{x^2} = p^2 \pm 2 .$$

Volíme-li hořejší znaménko v rovnici této a znásobíme-li ji rovnicí (5′) odst. II., vzejde konečně po zřejmé redukci

$$(7) \qquad \int \frac{(1 + x^2)\, dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 + x^4}} = \int \frac{dp}{2 - p^2} .$$

Přihlížejíce k dolnímu znaménku v rovnici (6) a násobíce týmže způsobem, obdržíme integrál

$$(8) \qquad \int \frac{(1 - x^2)\, dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}} = - \int \frac{dp}{2 + p^2} .$$

Poznámka k odstavcům předchozím. Z úvah vytčených poznáváme, že z úvodního integrálu

$$(\alpha) \qquad \int \frac{dx}{(a + bx^n)\sqrt[2n]{a + 2bx^n}}$$

nabudeme speciálně integrál

$$(\beta) \qquad \int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt[4]{2x^2 - 1}} ,$$

jenž souvisí s integrálem tvaru

$$(\gamma) \qquad \int \frac{x^2 dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + x^4}} ,$$

který možno snadně uvésti na tvary integrálů

$$(\delta) \qquad \int \frac{\sqrt{1 + x^4}}{1 - x^4}\, dx ,$$

$$(\varepsilon) \qquad \int \frac{(1 + x^2)\, dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 + x^4}} ,$$

$$(\zeta) \qquad \int \frac{(1 - x^2)\, dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}} .$$

Když Euler*) vyčísloval integrál (ε), položil

$$(m) \qquad \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}=p$$

a při vyčíslení integrálu (ζ) kladl

$$(n) \qquad \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}=q,$$

pak sečtením integrálů (ε) a (ζ) násobených $\frac{1}{2}$ obdržel integrál (δ) a odečtením integrálů (ε) od (ζ) násobených $\frac{1}{4}$ zjednal si integrál (γ) **).

O substituci (m) praví Euler, že nelze jí vyčísliti integrály (γ), (δ), (ζ), a podobně vyslovuje se o substituci (n), že nelze jí použiti při vyčíslení integrálů (γ), (δ), (ε). Dokázali jsme však, že oběma substitucemi možno vyčísliti všecky čtyři integrály (γ), (δ), (ε), (ζ), a že jsou tedy dotčené substituce všem těmto integrálům společny. ***)

IV. Integrály Eulerovy (γ), (δ), (ε), (ζ), v předchozí poznámce uvedené a před tím na integrály differenciálů racionálních převedené, mají vesměs odmocninu z příslušné funkce x tvaru

$$\sqrt{1+x^4}\,.$$

Vyčíslení těchto čtyř integrálů společnou substitucí při obecnějším rázu uvedené odmocniny jest jen tehdy možné, má-li po našem soudu odmocnina z funkce x podobu $\sqrt{1+\mu x^2+x^4}$. Zároveň supponujeme, že jeden z těchto integrálů přímo vyčíslíme a ostatní tři zbývající zjednáme si pak z tohoto nejrychleji snadnými obraty.

---

*) Viz Euler: „*Inst. calculi integr.*“, 4. díl, str. 22. aneb Salomonův německý překlad, 4. díl, str. 22.

**) Substituce, Eulerem zavedené (m) a (n) k vyčíslení příslušného integrálu, najdeme též ve známých spisech auktorů jako: *Bertrand, Studnička, Schnuse* aneb ve známých „Sbírkách úloh“ auktorů: *Brahy, Frenet, Láska.*

***) Viz Pánek: „O některých integrálech Eulerových“. Rozpravy české Akademie, roč. II., 1893.

Budiž na př. předložen integrál

$$(1') \qquad V = \int \frac{x^2 dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + \mu x^2 + x^4}},$$

o jehož vyčíslení jde, i klademe dle zavedené substituce

$$(a) \qquad \sqrt{1 + \mu x^2 + x^4} = px,$$

a dle dřívějšího výkladu rovnici tuto zdvojmocňujeme, délíme ji pak x^2, načež differencováním obdržíme

$$(b) \qquad dx = -\frac{x^3 p dp}{1 - x^4}.$$

Hodnoty z (a), (b), vloženy do (1), stanoví

$$(c) \qquad dV = -\frac{x^4 dp}{(1 - x^4)^2}.$$

Z rovnice (a) plyne

$$(a') \qquad 1 + x^4 = x^2 (p^2 - \mu),$$

což zdvojmocněno

$$(1 + x^4)^2 = x^4 (p^2 - \mu)^2,$$

a odečteme-li na obou stranách této rovnice $4x^4$, dostaneme

$$(1 - x^4)^2 = x^4 [(p^2 - \mu)^2 - 4].$$

Dosadivše tuto hodnotu do vzorce (c), dospíváme konečně integrálu předloženého, vyjádřeného integrálem differenciálu racionálního

$$(1) \qquad \int \frac{x^2 dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + \mu x^2 + x^4}} = \int \frac{dp}{4 - (p^2 - \mu)^2}.$$

Tento integrální vzorec můžeme ovšem dostati z (1') odst. II., položíme-li tam

$$a = c = 1, \ b = \mu.$$

Běží nyní o stanovení zbývajících tří integrálů.

Z rovnice (a') jde

$$(d) \qquad \frac{1+x^4}{x^2} = p^2 - \mu.$$

Znásobíme-li (1) s (d), obdržíme

$$(2) \qquad \int \frac{1+x^4}{1-x^4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+\mu x^2 + x^4}} = \int \frac{(p^2-\mu)\,dp}{4-(p^2-\mu)^2},$$

což plyne též ze vzorce (8) odst. II. opětně při hodnotách

$$a = c = 1,\ b = \mu.$$

Abychom další dva integrály si zjednali, sestrojíme především výraz

$$\frac{(1 \pm x^2)^2}{x^2} = \frac{1+x^4}{x^2} \pm 2,$$

který, vyjádřen proměnnou p rovnicí (d), podává

$$\frac{(1 \pm x^2)^2}{x^2} = p^2 - \mu \pm 2.$$

Volíme-li hořejší znaménko a násobíme-li rovnici tuto rovnicí (1), obdržíme integrál

$$(3) \qquad \int \frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+\mu x^2+x^4}} = \int \frac{dp}{2+\mu-p^2},$$

a volíme-li dolní znaménko, nalezneme

$$(4) \qquad \int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+\mu x^2+x^4}} = -\int \frac{dp}{2-\mu+p^2}.$$

Klademe-li $\mu = 0$ do (1), (2), (3), (4), obdržíme Eulerovy integrály (γ), (δ), (ε), (ζ), v předchozí poznámce odst. III. vytčené.

Poznámka 1. Jest-li ve vzorci (1′) odst. III. položíme

$$a = c = 1,\quad b = \mu,\quad n = 2,$$

obdržíme pro $m = +1$ identický integrál s (1) a z toho pro $\mu = 0$ integrál (γ) odst. III. Pro $m = -1$ však nabýváme z téhož vzorce integrálu

$$\int \frac{\sqrt{1+\mu x^2+x^4}}{1-x^4}\,dx = \int \frac{p^2 dp}{4-(p^2-\mu)^2},$$

tedy tvaru jiného než jest (2), avšak i z tohoto jde pro $\mu = 0$ integrál (δ) odst. III.

Poznámka 2. Z téhož vzorce (1′) odst. III. lze si zjednati několik známých integrálův.

Položíme-li tam na př. $n = 3$, obdržíme

$$(1)\qquad \int \frac{x^{m+2}dx}{(a - cx^6)\sqrt[3]{(a + bx^3 + cx^6)^m}} = \int \frac{p^{2-m}dp}{4ac - (p^3 - b)^2},$$

a je-li tu $b = 0$,

$$(2)\qquad \int \frac{x^{m+2}dx}{(a - cx^6)\sqrt[3]{(a + cx^6)^m}} = \int \frac{p^{2-m}dp}{4ac - p^6}.$$

Dejme tomu, že $m = -1$, povstane

$$(3)\qquad \int x \frac{\sqrt[3]{a + cx^6}}{a - cx^6} dx = \int \frac{p^3dp}{4ac - p^6},$$

a položíme-li $x^2 = z$, jest $xdx = \frac{1}{2} dz$, i nabýváme

$$(4)\qquad \int \frac{\sqrt[3]{a + cz^3}}{a - cz^3} dz = 2 \int \frac{p^3dp}{4ac - p^6}$$

a pro $a = 1$, $c = -1$ dostaneme

$$(5)\qquad \int \frac{\sqrt[3]{1 - z^3}}{1 + z^3} dz = -2 \int \frac{p^3dp}{4 + p^6}.$$

Vzorec (1′) odst. III. uvedeme dále ve tvarech obecnějších, jichž poskytuje odstavec následující.

V. Vzorec (1′) odst. III. pišme v podobě

$$(\alpha)\qquad \frac{x^{m+n-1}dx}{(a - cx^{2n})\sqrt[n]{(a + bx^n + cx^{2n})^m}} = -\frac{p^{n-m-1}dp}{(p^n - b)^2 - 4ac},$$

kde souvislost nové proměnné p s původní proměnnou x vyjadřuje rovnice

$$(\beta)\qquad \sqrt[n]{a + bx^n + cx^{2n}} = px,$$

a další vztahy v témže odstavci byly

$$(\gamma) \qquad a + cx^{2n} = x^n(p^n - b),$$

$$(\delta) \qquad (a + cx^{2n})^2 = x^{2n}(p^n - b)^2,$$

$$(\varepsilon) \qquad (a - cx^{2n})^2 = x^{2n}[(p^n - b)^2 - 4\,ac].$$

Zmocníme-li poslední dvě rovnice na mocninu k-tou, bude

$$(\zeta) \qquad \frac{(a + cx^{2n})^{2k}}{x^{2kn}} = (p^n - b)^{2k},$$

$$(\eta) \qquad \frac{(a - cx^{2n})^{2k}}{x^{2kn}} = [(p^n - b)^2 - 4ac]^k.$$

Dělíme-li rovnici (α) rovnicí (η) a integrujeme-li, obdržíme nový vzorec integrální

$$(1) \int \frac{x^{(2k+1)n+m-1}\,dx}{(a - cx^{2n})^{2k+1}\sqrt[n]{(a + bx^n + cx^{2n})^m}} = -\int \frac{p^{n\ m+1}\,dp}{[(p^n - b)^2 - 4ac]^{k+1}}$$

Klademe-li tu $k = 0$, nabudeme integrál (1′) odst. III.

Znásobíme-li rovnice (γ), (ζ), obdržíme

$$(\vartheta) \qquad \frac{(a + cx^{2n})^{2k+1}}{x^{(2k+1)n}} = (p^n - b)^{2k+1},$$

a když dělíme differenciál (1) rovnicí (ϑ), nabýváme pak integrujíce

$$(2) \qquad \int \frac{x^{2(2k+1)n+m-1}\,dx}{(a^2 - c^2x^{4n})^{2k+1}\sqrt[n]{(a + bx^n + cx^{2n})^m}}$$

$$= -\int \frac{p^{n-m-1}\,dp}{(p^n - b)^{2k+1}[(p^n - b)^2 - 4ac]^{k+1}}.$$

Násobíme-li differenciál (1) rovnicí (ϑ), nalezneme

$$(3)\qquad \int x^{m-1}\left(\frac{a+cx^{n}}{a-cx^{2n}}\right)^{2k+1}\frac{dx}{\sqrt[n]{(a+bx^{n}+cx^{2n})^{m}}}$$

$$=-\int\frac{(p^{n}-b)^{2k+1}p^{n-m-1}\,dp}{[(p^{n}-b)^{2}-4ac]^{k+1}},$$

kde pro všechny integrály (1), (2), (3) jsou k a m čísla celistvá, buď kladná nebo záporná, a ve zvláštních případech poskytují řadu integrálů známých, které se různými substitucemi vyčíslují.

Pouhý pohled na integrální vzorce (1), (2), (3) vede k tomu, že m může býti též zlomek $m=\frac{m_1}{m_2}$. Tu třeba, aby byl na pravé straně integrál differenciálu racionálního, zavésti substituci

$$p=q^{m_2}$$

a

$$dp=m_2q^{m_2-1}dq,$$

i musila tedy býti na levé straně, jak patrno, zavedena substituce

$$\sqrt[n]{a+bx^{n}+cx^{2n}}=q^{m_2}x.$$

Aby na levé straně v (1), (2), (3) lomený exponent proměnné x byl odstraněn, třeba klásti $x=z^{m_2}$. Tímto však způsobem zvláštní všeobecnosti integrálů těch se nedocílí.

(Pokračování.)

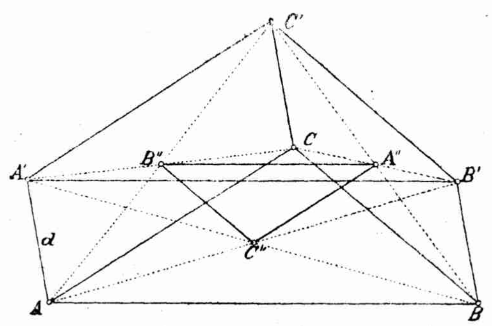
O větě Pappusově.

Podává

Dr. Karel Zahradník,

ř. professor mathematiky při universitě v Záhřebě.

1. Pošineme-li trojúhelník ABC do polohy A′B′C′ (obr. 1.), opíšou strany trojúhelníka rovnoběžníky; součet ploch jejich rovná se nulle. Znásobíme-li totiž



Obr. 1.

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \check{\mathrm{C}}\mathrm{A} \bumpeq 0$$

relací

$$\mathrm{AA'} \bumpeq \mathrm{BB'},$$

obdržíme

$$\mathrm{AB} \,.\, \mathrm{AA'} + \mathrm{BC} \,.\, \mathrm{BB'} + \mathrm{CA} \,.\, \mathrm{AA'} \bumpeq 0. \tag{1}$$

Dle Grassmanna*) jest

$$\mathrm{AB}\ \overline{\mathrm{AA'}} = \overline{\mathrm{AB}} \,.\, \overline{\mathrm{AA'}} \sin \mathrm{BAA'}$$

*) Srovnej: *Grassmann: „Die lineare Ausdehnungslehre,“* 2. Au . 1878, pg. 65. Tato věta jest ostatně zvláštní případ věty: Plocha, již opíše otevřený mnohoúhelník v rovině, rovná se ploše, již opisuje strana mnohoúhelník uzavírající. L. c. § 29., pg. 49. Důkaz pomocí ekvipolencí viz *Bellavitis-Zahradník: „Methoda ekvipolencí,“* Praha, 1874, pg. 29.

vnější*) součin přímek AB i AA' a jest roven ploše rovnoběžníka ABB'A'; můžeme nyní vztah (1) psáti:

$$ABB'A' + BCC'B' + CAA'C' \simeq 0$$

aneb

$$ABB'A = ACC'A' + CBB'C'. \tag{2}$$

Vztah (1) vyjadřuje *Pappusovu* větu obecně.

Ostatně je planimetrický důkaz této věty zcela jednoduchý.**) Ježto

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C',$$

jest

$$ABB'C'A'A - ABC = ABB'C'A'A - A'B'C',$$

tudíž

$$ABB'A' = ACC'A' + CBB'C'.$$

2. Zajímavou tuto větu, v níž jest obsažena věta Pythagorova jakožto speciální případ, dokážeme též trigonometricky, ve kterémž důkaze postup odstavce 1. se obráží. Pošiňme trojúhelník ABC o délku $d = AA'$ ve směru $\Theta = \sphericalangle BAA'$. Označíme-li délky stran AB, BC, CA postupně c, a, b, jest, jak známo,

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

Znásobíme-li tuto relaci $d\sin\Theta$, t. j. výškou rovnoběžníka ABB'A', obdržíme, ježto,

$$\begin{gathered}\cos\alpha\sin\Theta = \sin(\Theta - \alpha) + \sin\alpha\cos\Theta\\ \cos\beta\sin\Theta = \sin(\Theta + \beta) - \sin\beta\cos\Theta,\\ dc\sin\Theta = ad\sin(\Theta + \beta) + bd\sin(\Theta - \alpha)\\ - d\cos\Theta\,(a\sin\beta - b\sin\alpha).\end{gathered}$$

Dle poučky sinusové jest

$$a\sin\beta - b\sin\alpha = 0,$$

tudíž:

$$dc\sin\Theta = ad\sin(\Theta + \beta) + bd\sin(\Theta - \alpha),$$

t. j.

$$ABB'A' = CBB'C' + ACC'A'.$$

*) Viz *A. Libický*: *„Základové geometrického počtu Grassmannova.“* Časop. pro pěst. mathem. a fys., ročník XXV. pg. 268.

**) Viz *Henrici-Treutlein*: *„Lehrbuch der Elementar-Geometrie.“* Leipzig 1891. I. Theil pg. 98. *Hoffmann*: Zeitschrift f. math. u. nat. Unterr. díl XXVI. pg. 257.

α) Je-li $\Theta = 90^0$, jest

$$cd = ad \cos\beta + bd \cos\alpha.$$

Píšeme-li

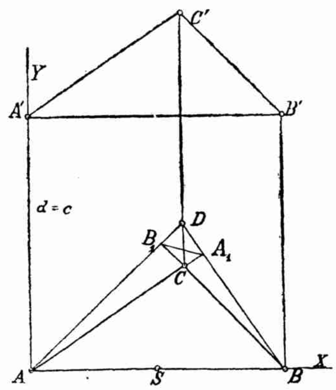
$$d \cos\beta = k_1, \quad d \cos\alpha = k,$$

máme

$$cd = ak_1 + bk. \tag{3}$$

β) Je-li mimo to $d = c$ (obr. 2), najdeme

$$c^2 = ac \cos\beta + bc \cos\alpha.$$



Obr. 2.

Spustíme-li kolmice $BA_1 \perp AC$, $AB_1 \perp BC$, obdržíme

$$c \cos\alpha = AA_1 = a + a_1$$
$$c \cos\beta = BB_1 = b + b_1,$$

kdež jsme položili $a_1 = \overline{CA_1}$, $b_1 = \overline{CB_1}$, tudíž

$$c^2 = a^2 + b^2 + aa_1 + bb_1.$$

Pro čtyřúhelník ABA_1B_1 jest v platnosti

$$\overline{AC} \cdot \overline{CA_1} = \overline{BC} \cdot \overline{CB_1},$$

t. j.

$$aa_1 = bb_1,$$

načež svrchu uvedená relace přechází ve tvar

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2aa_1, \tag{4}$$

což jest známá věta Pythagorova pro trojúhelník kosoúhlý, jíž můžeme opět, píšeme-li

$$a_1 = \mathrm{AC} \cos (\Pi - \gamma) = - b \cos \gamma,$$

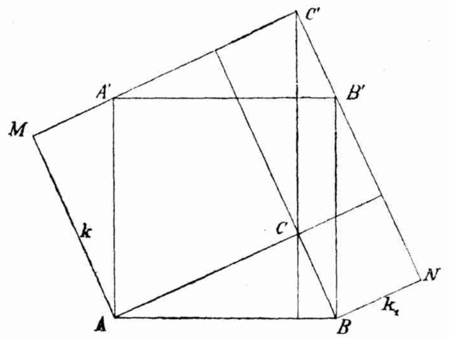
dáti tvar trigonometrický

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \tag{5}$$

8. Je-li ve zvláštním případě daný trojúhelník pravoúhlý, takže úhel při C, t. j. $\gamma = 90^0$, (obr. 3.) jest v platnosti

$$k = \mathrm{AM} = \mathrm{AA}' \cos \alpha = \mathrm{AB} \cos \alpha = \mathrm{AC} = b$$
$$k_1 = \mathrm{BN} = \mathrm{BB}' \cos \beta = \mathrm{AB} \cos \beta = \mathrm{BC} = a$$

a relace (3) nebo (5) přechází v obyčejnou větu Pythagorovu.



Obr. 3.

3. Označíme-li průsek kolmic AB_1, BA_1 písmenem D (průsek to výšek trojúhelníka ABC), můžeme říci: Kruh opsaný čtyřúhelníku A_1B_1AB, jakož i kruh čtyřuhelníku A_1DB_1C opsaný mají společnou tetivu A_1B_1. Kolmice ve středu této tetivy je centralou obou kruhů, spojnice středů délek AB i CD půlí tudíž délku A_1B_1 kolmo. Úhel ADB je supplementem úhlu ACB (obr. 2.).

Trojúhelník Pappusův.

4. Budiž (obr. 1.) C″ těžiště rovnoběžníka ABB′A′, podobně A″, B″ pro rovnoběžníky BB′C′C, ACC′A′, i pokládejme

vrchol A za počátek pravoúhlých souřadnic, stranu AB za osu X. Úsečka bodu B bude c. Dále buďtež ξ, η souřadnice vrcholu C. Potom najdeme

$$A'(d\cos\Theta,\ d\sin\Theta),\quad A''\left(\frac{\xi+c+d\cos\Theta}{2},\ \frac{\eta+d\sin\Theta}{2}\right),$$

$$B'(c+d\cos\Theta,\ d\sin\Theta),\ B''\left(\frac{\xi+d\cos\Theta}{2},\ \frac{\eta+d\sin\Theta}{2}\right),$$

$$C'(\xi+d\cos\Theta,\ \eta+d\sin\Theta),\ C''\left(\frac{c+d\cos\Theta}{2},\ \frac{d\sin\Theta}{2}\right).$$

Trojúhelník A″B″C″ pojmenujeme *Pappusovým trojúhelníkem*, jehož těžiště má souřadnice

$$T''\left(\frac{\xi+c}{3}+\frac{d\cos\Theta}{2},\ \frac{\eta}{3}+\frac{d\sin\Theta}{2}\right).$$

Vlastnosti Pappusova trojúhelníka.

α) Strany jeho nejsou závisly ani na velikosti pošinutí d, ani na směru pošinutí Θ. Platí totiž

$$A''B''=\frac{AB}{2},\quad B''C''=\frac{BC}{2},\quad C''A''=\frac{CA}{2}.$$

β) Strany daného trojúhelníka jsou rovnoběžné se stranami trojúhelníka Pappusova.

γ) Následkem *β)* jest $\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$; poměr podobnosti jest $\frac{1}{2}$.

δ) Trojúhelník Pappusův má čtyřnásobnou plochu daného trojúhelníka.

ε) Trojúhelníky ABC, A″B″C″ jsou v poloze perspektivné.

ζ) Je-li d konstantou, jest geom. místo (T″) těžišť Pappusových trojúhelníků kruh, jehož poloměr je $\frac{d}{2}$ a jehož střed leží v těžišti T trojúhelníka ABC.

η) Je-li Θ konstantou, jest geom. místo (T″) těžišť Pappusových trojúhelníků přímka, jež jde těžištěm T daného trojúhelníka ABC, majíc daný směr Θ, tudíž

$$y - \frac{\eta}{3} = \operatorname{tg}\Theta \left(x - \frac{c+\xi}{3}\right).$$

ϑ) Opisují-li A′, B′, C′ kruhy, mající poloměr d a středy postupně A, B, C, opisují A″, B″, C″ kruhy o poloměru $\frac{d}{2}$ a o středech $\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\right)$, $\left(\frac{\xi}{2}, \frac{\eta}{2}\right)$, $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$, a těžiště T″ opisuje kruh o poloměru $\frac{d}{3}$ a středu $\left(\frac{\xi+c}{3}, \frac{\eta}{3}\right)$, t. j. kruh mající těžiště trojúhelníka daného za svůj střed.

ι) Je-li T′ těžiště trojúhelníka A′B′C′, bude

$$TT'' = T''T',$$

t. j. T″ je střed délky TT′.

O involutorní příbuznosti kvadratické.

5. Přihlédněme nyní blíže k obrazci 2. Kolmice BA_1, AB_1 na strany AC a BC protínají se v bodě D. Spojnice DC musí býti kolmou na AB, neboť kolmice z C na AB jde bodem D, průsečíkem to výšek trojúhelníka ABC. Bodu C odpovídá tím docela určitý bod D, ale i naopak toutéž konstrukcí přicházíme od bodu D k bodu C, t. j. vyjdeme-li od trojúhelníka ABD místo od trojúhelníka ABC. Body C i D nalézají se tudíž v příbuznosti involutorní, biracionální i, jak ihned dokážeme, kvadratické.

Předpokládáme-li soustavu souřadnic jako v odst. 4., najdeme souřadnice bodu D

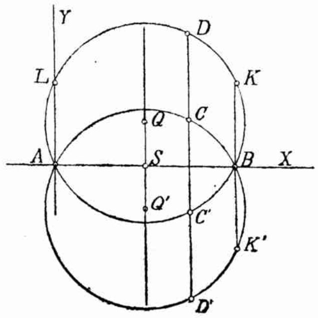
$$x = \xi \qquad y = \frac{\xi(c-\xi)}{\eta}. \tag{6}$$

Z těchto rovnic jde

$$\xi = x \qquad \eta = \frac{x(c-x)}{y}. \tag{7}$$

Již pohled na tyto rovnice dokazuje naše tvrzení. Hlavní body obou soustav bodů (C) i (D) jsou bod A, bod B a úběžný bod osy Y.

Opisuje-li na př. proměnlivý vrchol C trojúhelníka ABC přímku *Π*, která nejde hlavním bodem, jest na základě zmíněné příbuznosti sdružená křivka hyperbola, která jde body A, B a která má jednu asymptotu kolmou na přímku AB, druhou asymptotu kolmou na přímku *Π*. Křivka sdružená přímce, která jde bodem A, rozpadá se na osu Y a na přímku, která jde bodem B a stojí kolmo na danou přímku atd.



Obr. 4.

Vidíme tudíž, že máme zde co činiti se zvláštním případem kvadratické inverse, kterouž vyložil *Hirst*)* ve svém pojednání *„On the quadric inversion of plane curves."* *London*, 1865.

6. Body sdružené ve stálé vzdálenosti d, tedy $CD = d$, leží na dvou kružnicích

---

*) Pojednání toto přeložil na jazyk italský slavný L. Cremona: *Hirst-Cremona*: *„Sull' inversione quadratica delle curve piane."* — Anali di matematica pura ed applicata T. VII, *Battaglini*: „Giornale di matematica" vol. IV. Hirst béře základní kuželosečku i střed inverse S_1. Bod M_1 bodu M sdružený obdrží jako průsek spojnice S_1M s polarou bodu M vzhledem k základní kuželosečce. V našem případě je střed inverse úběžný bod osy Y a základní kuželosečka jest kruh sestrojený nad AB jakožto průměrem. Srovnej *A. Strnad*: *„Úvod do theorie kvadratických transformací rovinných."* Progr. vyšší realky v Králové Hradci, 1886/7 pg. 8.

$$x^2 + y^2 - cx \pm dy = 0,$$

jež jsou symmetricky položeny k ose x (obr. 4.). Bodům oblouku LDK odpovídá oblouk ACB druhého kruhu, oblouku LD'K prvního kruhu odpovídá oblouk AC'B druhého kruhu. Je-li d proměnlivo, obdržíme svazek kruhů, jejichž osou stejných mocností jest osa X a souměrné kruhy tohoto svazku vzhledem k ose stejných mocností spadají k témuž d. Pro $d = 0$, je $C \equiv D$. Kruh opsaný nad AB jakožto průměrem je samodružná kuželosečka této kvadratické transformace.

6. S transformací touto nebudeme se blíže obírati, dostačí, poukážeme-li na práci Hirst-ovu. Uvedeme pouze, že se obecně křivka C^2 transformuje na racionálnou křivku C^4, která má v hlavních bodech transformace své dvojné body. Jde-li C^2 bodem A, skládá se transformovaná křivka z osy Y a z racionální křivky C^3, kteráž má jednu neb tři asymptoty reálné, dle toho, je-li C^2 ellipsa neb hyperbola. Prochází-li C^2 body A, B, rozpadá se transformovaná křivka na osu Y, na přímku, která jde bodem A kolmo na přímku AB a mimo to na kuželosečku.

Budiž ještě uvedena *transformace cissoidy*

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a_1 - x}}.$$

Transformovaná křivka jest dvojnásobná osa Y a racionální křivka třetího stupně, kteráž má reálný dvojný bod pro $a_1 > c$, isolovaný dvojný bod pro $a_1 < c$. Je-li $a_1 = c$, obdržíme opět cissoidu kongruentní s danou, pootočenou pouze kolem kolmice ve středu S strany $\overline{AB}$ vztýčené.

O racionálné příbuznosti kvadratické reciproké.

8. V odst. 5. seznali jsme, že se body $D(\xi, \eta)$ i $D(x, y)$ nacházejí v příbuznosti biracionální kvadratické, a opíše-li tudíž bod C přímku $\Pi(u, v)$, že sdružený bod D opíše hyperbolu

$$H \equiv x(uy - vx) + cvx + y = 0,$$

kteráž prochází, jak již řečeno, hlavními body soustav (C) i (D).

Jedna asymptota hyperboly H je rovnoběžná s osou Y druhá stojí kolmo na přímce Π. Naopak, každá hyperbola, jejíž jedna asymptota jest rovnoběžna s osou Y a která prochází počátkem souřadnic i bodem B $(c, 0)$, může se transformovati na přímku.

Je-li totiž hyperbola

$$\mathrm{H} \equiv x(mx + ny) + px + y = 0,$$

jsou souřadnice dotyčné přímky $(m, -n)$ a $\mathrm{AB} = c = -\frac{p}{m}$.

Označme nyní písmenem S′ střed hyperboly H a x', y' jeho souřadnice, najdeme

$$(8) \qquad \begin{aligned} x' &= -\frac{1}{u} \\ y' &= -\frac{(2+cu)v}{u^2}. \end{aligned}$$

Střed S′ leží vždy na přímce kolmé k ose X v jejím průseku s přímkou Π. Obráceně, vytkneme-li si některý bod S′ jakožto střed hyperboly H, je tím již hyperbola H určena (známe totiž tři její body a střed její); řešení rovnic (8) podává

$$(9) \qquad \begin{aligned} u &= -\frac{1}{x'} \\ v &= -\frac{y'}{(2x'-c)x'}, \end{aligned}$$

známe tedy u, v a tím i hyperbolu H.

Přímka Π (u, v) a bod S′ (x', y') jsou dle toho v příbuznosti kvadratické reciproké.

Křivka n-ho stupně, která nejde hlavními body, transformuje se na křivku $2n$-té třídy a naopak: Křivka n-té třídy, která se nedotýká hlavních přímek, transformuje se na křivku $2n$-tého stupně. Píšeme-li rovnici křivky n-té třídy

$$C_n \equiv \varphi_n + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_1 + \varphi_0 = 0,$$

kdež značí φ_k homogenní funkci v souřadnicích tangenciálných u, v, jest rovnice transformované křivky

$$(10) \quad \begin{aligned} C^{2n} \equiv \Phi_n + x'(2x' - c)\Phi_{n-1} + \dots \\ + x'^{n-1}(2x'-c)^{n-1}\Phi_1 + x'^n(2x'+c)^n\Phi_0 = 0, \end{aligned}$$

kdež opět Φ_k značí resultat substituce $-(2x'-c)$, $-y'$ postupně za u a v do funkce φ_k, tudíž polynom k-tého stupně vzhledem k x', y', totiž

$$\varphi_k \equiv \sum_{h=0}^{k} (-1)^k m_h y'^h (2x'-c)^{k-h}.$$

Hlavní body jsou bod $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$ a úběžný bod osy Y, v němž se spojují dva hlavní body. Z této vlastnosti úběžného bodu osy Y vychází rovnoběžnost asymptot s osou Y, což i rovnice (10) podává.

Podobně bychom při transformaci křivky n-tého stupně C^n pomocí rovnic substitučních (8) postupovali.

9. Nechť se nyní přímka Π otáčí kolem svého bodu (x_0, y_0). V každé poloze této přímky platí

$$x_0u + y_0v + 1 = 0$$

a zmíněný střed $S'(x', y')$ sdružené hyperboly H obdržíme pomocí rovnic (9)

$$(11) \qquad 2x'^2 - (2x_0 + c)x' - y_0y' + cx_0 = 0.$$

Otáčí-li se přímka Π kolem svého bodu (x_0, y_0), mění sdružený střed S' hyperboly své místo na parabole P dané rovnicí (11); t. j. svazku paprsků (x_0, y_0) sdružena je parabola P, která probíhá hlavními body transformace.

Dvěma bodům (x_0, y_0), (x_1, y_1) přísluší jako vrcholům svazků paprsků dvě paraboly, jež mají společné hlavní body transformace a mimo to se protínají v bodě, jejž bychom obdrželi jakožto bod sdružený ku spojnici bodů (x_0, y_0), (x_1, y_1) po zákonu (9)

10. Uvažujme nyní obráceně přímku Π jakožto místo bodu $S'(x', y')$; platí tudíž

$$u_0x' + v_0y' + 1 = 0.$$

Pohybuje-li se bod S′ po přímce (u_0, v_0), obaluje přímka Π sdružená bodu S′ parabolu

(12) $$u(u - cv_0 v) - u_0 u - 2v_0 v = 0.$$

Že kuželosečka (12) jest parabolou, vidno již z toho, že vyhovuje rovnici (12) $u = 0$, $v = 0$, t. j. že kuželosečky se dotýká přímka úběžná.

11. Vrchol V (ξ, η) paraboly P, která odpovídá svazku přímek (x_0, y_0), jest

(13) $$\xi = \frac{2x_0 + c}{4}$$
$$\eta = -\frac{(2x_0 - c)^2}{8y_0}.$$

Řešením těchto rovnic dle x_0, y_0 obdržíme

(14) $$x_0 = \frac{4\xi - c}{2}$$
$$y_0 = -\frac{(2\xi - c)^2}{2\eta}.$$

Je-li tudíž dán vrchol T (ξ, η) jakožto vrchol svazku paprskového, je tím jednoznačně i vrchol V paraboly P určen a obráceně ku každému bodu (ξ, η) jakožto vrcholu paraboly P přísluší bod (x_0, y_0), jakožto vrchol svazku paprsků. Body (x_0, y_0), (ξ, η) nacházejí se tím v příbuznosti birracionální a to, jak ze tvaru rovnic (18) neb (14) patrno, kvadratické. Našli jsme tím, že je soustava bodů T i soustava bodů V v příbuznosti Cremonově; taktéž soustava bodů C se soustavou bodů D.

Dle toho lze vždy určiti přímku, která jde bodem T, pro nějž S′ ≡ V.

Místo bodů (T), pro něž je délka VT konstantní, jest křivka čtvrtého stupně.

Označíme-li patu kolmice s bodu S′ na přímku Π spuštěné písmenem N, najdeme geometricky aneb analyticky ihned, že je geometrické místo bodů (S′), které mají od sdružené přímky stálou vzdálenost d, křivkou čtvrtého stupně

$$C^4 \equiv y'^4 - d^2[(2x' - c)^2 + y'^2] = 0.$$

Obálka přímek Π, které mají od sdruženého bodu stálou vzdálenost d, jest křivka šesté třídy

$$C_6 \equiv u^4 (u^2 + v^2) d^2 - (2 + cu)^2 v^4 = 0.$$

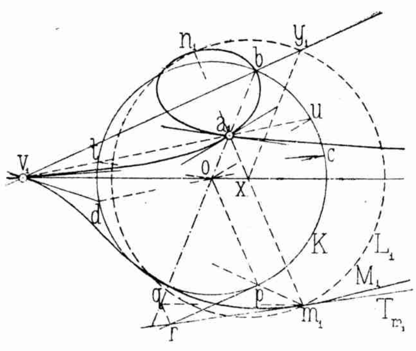
O křivce, která souvisí s conchoidou Nicomedovou a strophoidou.

Napsal

V. Jeřábek,

professor při c. k. vyšší realné škole v Brně.

Buďtež dány dvě různoběžky v_1x_1, v_1y_1 a v jejich rovině π bod a_1. Veďme v úhlu těchto různoběžek příčku $\overline{x_1y_1}$ ve směru daném a učiňme na paprsku a_1x_1 délku $\overline{x_1m_1} = \overline{x_1n_1} = \overline{x_1y_1}$. Geom. místem bodů m_1, n_1 jest křivka M_1, o níž v následujících řádcích krátce pojednáme.



1. *Křivka M_1 jest stupně čtvrtého.* Abychom tvrzení toto dokázali, veďme v úhlu $x_1v_1y_1$ příčku oa_1b rovnoběžně s $\overline{x_1y_1}$ a sestrojme v rovině π různoběžek v_1x_1 a v_1y_1 ze středu o poloměrem ob kružnici K. Kružnice tato budiž stopou plochy kuželové P_k, jejíž vrchol v promítá se na průmětnu π do bodu v_1. Veďme bodem a_1 rovnoběžku A s promítajícím paprskem v_1v

a považujme $\overline{vo}$ a A za přímky a průmětnu π za rovinu řídící hyp. paraboloidu P_h.

Průmětu x_1 přináleží v přímce středové vo plochy P_k bod x. Položme bodem x rovinu σ rovnoběžně s průmětnou π. Rovina σ seče povrchovou přímku $\overline{vb}$ plochy P_k v bodu y ($\overline{xy} \parallel \overline{x_1 y_1} \parallel ob$, $\overline{xy} = \overline{x_1 y_1}$) a plochu P_k v kružnici L, jejímž středem jest bod x a poloměrem úsečka xy. Rovina σ seče zároveň přímku A v bodu a' a plochu hyp. paraboloidu P_h v přímce $a'x$ rovnoběžné s jejím průmětem $a_1 x_1$. Body m, n, v nichž $\overline{a'x}$ a L se protínají, přináležejí křivce proniku M ploch stupně druhého P_h a P_k, pročež jest M křivkou stupně čtvrtého. Kružnice L má svůj průmět na π v kružnici L_1 sestrojené ze středu x_1 poloměrem $\overline{x_1 y_1}$, a ježto $x_1 m_1 = x_1 n_1 = x_1 y_1$, prochází kružnice L_1 body m_1, n_1, které zároveň přináležejí průmětu $a_1 x_1$ přímky $\overline{a'x}$. Body m_1, n_1 jsou tedy průměty bodů m, n a geom. místem jejich jest průmět M_1 křivky M, pročež jest M_1 křivkou stupně čtvrtého. Snadno lze poznati, že křivka M_1 má své dvojné body v a_1 a v_1.

2. *Tečna křivky M_1.* Rovina tečná τ_m položená v bodu m ku ploše kuželové P_k, seče rovinu tečnou τ'_m, která v témž bodu m se dotýká hyp. paraboloidu P_h, v tečně T_m křivky M, jejíž průmět T_{m_1} dotýká se geom. místa M_1 v bodu m_1. Určíme-li stopu r tečny T_m v průmětně π, bude spojnice rm_1 tečnou křivky M_1. Přímka $\overline{vm}$ má svou stopu na průmětně π v bodu p, v němž $\overline{v_1 m_1}$ stopu K tak seče, že $\overline{op} \parallel \overline{x_1 m_1}$. Tečna $\overline{pr}$ kruhu K jest stopou roviny tečné τ_m. Rovina tečná τ'_m hyp. paraboloidu P_h v bodu m jest stanovena jeho přímkou $\overline{mr}$ jedné soustavy a přímkou $\overline{mq}$ druhé soustavy jdoucí bodem m rovnoběžně s promítající rovinou přímky $\overline{vo}$. Vedeme-li bodem m_1 přímku $m_1 q$ rovnoběžně s $\overline{v_1 o}$, obdržíme průmět přímky mq, která má svou stopu na průmětně π v průsečíku q průmětu $m_1 q$ se stopou ob hyp. paraboloidu P_h. Protože přímka $\overline{mx}$ jest s průmětnou π rovnoběžna, jest přímka qr vedená stopou q rovnoběžně s $\overline{mx}$ a tedy i s $\overline{m_1 x_1}$ a $\overline{op}$, stopou roviny tečné τ'_m. Známými stopami rovin τ_m, τ'_m jest určena stopa r tečny T_m, pročež jest spojnice $\overline{rm_1}$ tečnou T_{m_1} křivky M_1 v bodu m_1.

3. *Tečny bodu dvojného a_1.* Bod a_1 jest průmětem dvou

bodů a a ${}^1a$ křivky M, a přímky va, v^1a mají na π své stopy v bodech u, t, ve kterých v_1a_1 a K se protínají. Ježto rovina tečná τ'_a hyp. paraboloidu P_h v bodu a obsahuje promítající paprsek a_1a, jest promítající rovinou tečny T_a v bodu a, pročež jest stopa roviny tečné τ'_a jednou tečnou bodu dvojného a_1. Tak jako dříve stopa roviny tečné τ_m byla rovnoběžna s poloměrem op, tak jest i nyní stopa roviny tečné τ'_a rovnoběžna s poloměrem $\overline{ou}$. Vedeme-li tedy dvojným bodem a_1 rovnoběžku s poloměrem $\overline{ou}$, obdržíme jednu tečnu bodu dvojného a_1. Druhá tečna dvojného bodu a_1 jest obdobně rovnoběžna s poloměrem $\overline{ot}$.

4. *Tečny bodu dvojného* v_1. Rovina tečná τ'_v hyp. paraboloidu P_h ve vrcholu v obsahuje přímku $\overline{vo}$ a rovnoběžku vedenou vrcholem v s přímkou v_1a_1, pročež prochází stopa roviny τ'_v stopou o přímky $\overline{vo}$ a jest rovnoběžna s v_1a_1. Buďtež c a d body, ve kterých stopa roviny tečné τ'_v seče kružnici K. Položme ku ploše kuželové P_k rovinu tečnou τ_v podél přímky vc. Rovina τ'_v seče rovinu τ_v v přímce vc, pročež jest vc tečnou křivky M v bodu v. Ježto však v_1c jest průmětem tečny vc, jest v_1c jednou tečnou bodu dvojného v_1. Druhá tečna bodu dvojného v_1 jest $\overline{v_1d}$.

5. Je-li přímka $\overline{v_1y_1}$ rovnoběžna s $\overline{v_1x_1}$, jest M_1 conchoidou Nicomedovou, leží-li v_1 na kružnici K, jest M_1 strophoidou, čímž souvislost těchto křivek na jevo vychází. Strophoida má v_1 za bod dvojný a a_1 za ohnisko. Tečny bodu dvojného stojí na sobě kolmo.

Poznámka o vzorci pro součet kladných a celistvých mocnin čísel přirozené řady.

Napsal

Vilém Jung,

professor v Praze.

V roč. XXVII. (seš. 3., pag. 191.—198.) tohoto Časopisu jsme dokázali na základě *Studničkova* nezávislého vyjádření *Bernoulliových* čísel determinanty deduktivně vzorec

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{(p)_1}{2} B_1 n^{p-1} - \frac{(p)_3}{4} B_2 n^{p-3}$$
$$+ \frac{(p)_5}{6} B_3 n^{p-5} - \frac{(p)_7}{8} B_4 n^{p-7} + \ldots,$$

značí-li B_r čísla Bernoulliova.

Máme-li tohoto vzorce užiti k vyjádření $\sum_{k=1}^{n} k^p$, musíme rozeznávati *dva* případy:

1. pro *sudé* $p = 2\mu$ platí vzorec

$$(2)\quad \sum_{k=1}^{n} k^{2\mu} = \frac{n^{2\mu+1}}{2\mu+1} + \frac{n^{2\mu}}{2} + \sum_{r=1}^{\mu} (-1)^{r+1} \frac{(2\mu)_{2r-1}}{2r} B_r n^{2\mu+1-2r},$$

2. pro *liché* $p = 2\mu + 1$ platí vzorec

$$3)\quad \sum_{k=1}^{n} k^{2\mu+1} = \frac{n^{2\mu+2}}{2\mu+2} + \frac{n^{2\mu+1}}{2}$$
$$+ \sum_{r=1}^{\mu} (-1)^{r+1} \frac{(2\mu+1)_{2r-1}}{2r} B_r n^{2\mu+2-2r}.$$

K tomu ještě dlužno podotknouti, že pro $\mu = o$ nutno vzíti ve vzorci (2) pouze *první* člen, čímž se obdrží

$$\sum_{k=1}^{n} k^0 = n$$

a ve vzorci (3) pouze *první dva* členy, čímž se obdrží

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

Věstník literární.

B. Niewenglowski, Cours de Géométrie analytique à l'usage des élèves de la classe des Mathématiques spéciales et des Candidats aux Ecoles du Gouvernement. Tome III. Géométrie dans l'espace, avec une Note sur les transformations en Géométrie, par Emile Borel. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

V tomto třetím svazku díla, o jehož druhém svazku jsme učinili oznámení v XXV. roč. t. časopisu, vyloženy základy analytické geometrie v prostoru a to asi v rozsahu, v jakém se k ní u nás přihlíží ve výkladech na vysokých školách; přihlédnuto k různým druhům souřadnic, jak bodu, tak roviny a přímky, k útvarům imaginarným, k theorii křivosti čar a ploch, ku geometrickým místům, k plochám obalujícím, k theorii komplexů přímkových a konečně k theorii ploch druhého stupně, zvláště k jich redukci na hlavní osy, při čemž poukázáno k významu invariantů v této theorii. Poukázáno na theorii kvaternionů a některé zajímavé dodatky, sepsané dle přednášek prof. Darboux-a, zakončují dílo, jemuž přidána stať výborného analysty p. Borela, o transformacích v geometrii. V této poukázáno k významu nejjednodušších transformací ve smyslu Lie-ovy theorie grup transformačních a vytknuty základy této theorie.

Také tento třetí svazek, jenž jest obohacen velkým počtem příkladů a cvičení a jenž jest, jako první dva svazky, psán jasným a přesným způsobem, lze studujícím co nejvřeleji doporučiti; dosti značný rozsah knihy — čítá 558 str. velké osmerky — připustil prohloubení každé poněkud těžší věci, čímž kniha začátečníkům velice usnadňuje uvedení do analytické geometrie prostoru.

Ed. Weyr.

Геометрия за горнитѣ класове на гимназиялнитѣ училища. *Съставилъ А. Стрнадъ, прѣвелъ А. В. Шоурекъ. Пловдивъ 1896.* Poněkud opozděnou, ač ne zcela nezajímavou ohlašujeme zprávu, že Geometrie, kterou pro střední školy sestavil podepsaný referent, vyšla z větší části též v bulharském překladě. Pořídil jej chvalně známý krajan náš, professor A. V. Šourek v Sofii, vydav ve třech svazcích pro potřeby gymnasií bulharských planimetrii, rovinnou trigonometrii a stereometrii. Překlad přidržuje se celkem českého vydání pro reálky; liší se od něho tím, že ku konci každého svazku přidán podrobný ukazatel věcný, s terminologií bulharskou, francouzskou a německou; spolu připojen přehled nejdůležitějších formulí, což obé jest přídavkem velmi cenným. Také vnější úprava jest velmi vhodná, vynikajíc větší přehledností a zřetelností nad poněkud těsnou úpravu originalu.

A. Strnad.

Geometrijska vježbenica za više razrede srednjih učilišta. *Sastavili Dr. Karlo Zahradnik i Dr. David Segen. I. dio. Zagreb 1896.* Čekali jsme na druhý díl této geometrické cvičebnice, abychom mohli o ní v celku zpraviti české čtenáře. Nechtějíce však dále odkládati, aspoň stručně upozorníme na pěkné toto dílko, jemuž podobného v naší literatuře bohužel postrádáme. Na 62 stranách obsaženo tu 540 úloh z planimetrie, 341 úloh ze stereometrie; na dalších 40 stranách nalézáme řešení všech těchto úloh. Úlohy jsou dílem početní, dílem strojné; tyto přirozeně převládají v planimetrii, ony ve stereometrii, ač nikdy ne jedny na úkor druhých. Úlohy o sestrojování trojúhelníků a čtyrúhelníků formulovány stručně a přesně užitím vhodného označení. V planimetrii pojato též sestrojování lineárných výrazů, jakož i řešení úloh na základě rozboru algebraického; novější geometrie zastoupena jest naukou o harmonickém dělení a o transversálách trojúhelníka.

Ve stereometrii rádi setkáváme se s poučkami i úlohami rázu obecného, po kterých teprve následuje výpočet povrchů a obsahů tělesných.

V celé knížce patrna jest obezřelost i záliba, s níž byla sestavena; úlohy jsou voleny velmi případně, jsou rozmanité, zajímavé a instruktivní. Těšíme se na úlohy z trigonometrie a geometrie analytické, kterou prof. Zahradník s tolikerým zdarem pěstuje. *A. Strnad.*

Revue semestrielle des publications mathématiques *rédigée sous les auspices de la société mathématique d' Amsterdam par P. H. Schoute etc Amsterdam. 1898.* Rozsáhlost i rozptýlenost mathematické literatury našich dnů činí nanejvýš potřebnými a záslužnými díla, podávající přehled prací v různých oborech nauky vykonaných, se stručným vytčením výsledků, jichž bylo dosaženo. Ve směru tom působí známý Ohrtmannův Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik; k němu druží se revue svrchu jmenovaná, ač jest rozměrů menších a obsahu omezenějšího. Vznikla roku 1893 přičiněním mathematiků hollandských, z nichž zvláště Schoute, professor university v Groningách, proslulý četnými pracemi geometrickými, obezřelou a úsilovnou snahou jakožto hlavní redaktor přivedl amsterodamskou revui k dnešní její podobě a úplnosti. V díle tom podává se přehled pojednání, obsažených v časopisech a sbornících mathematických, jakož i ve zprávách společností učených; v díle VI. právě vydaném zastoupeno jest celkem 217 periodických publikací mathematických, z nichž připadá na Italii 34, Ameriku 33, Francii 32, Německo 25, Anglii 22, Rusko 14, Rakousko-Uhersko 11 atd. Autorů, o jichž pracích referováno, jest přes 700. U každého pojednání uveden jest titul, počet stran a stručné udání obsahu, který naznačen též v čelo každého titulu položenou značkou klassifikační dle soustavy přijaté na mezinárodním kongresu mathematicko-bibliografickém v Paříži r. 1889. Tituly a zprávy podány jsou v řeči autorů, u prací slovanských francouzsky.

Z českých sborníků jsou v revui pojaty: Rozpravy a Věstník české akademie, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Věstník král. české společnosti nauk; o prvních třech referuje pisatel této zprávy, o posledním prof. Dr. Sucharda; mimo to píše Janssen van Raaij o internacionálním Bulletinu české akademie, Korteweg o Jahresberichtu král. české společnosti nauk. O pracích polských podává zprávy Dickstein, o ruských Bolotov, Mlodziejovský, Tichomandrický a Vasiljev. Redakce vůbec jeví účinný zájem pro literatury slovanské a vyzývá v tom směru k účastenství. Odporučujeme výborný Schouteův sborník všem našim vědeckým pracovníkům. *A. Strnad.*

Prof. Dr. *V. Strouhal*: **Fysika experimentální.** Přednášky prof. Dra V. Strouhala o fysice experimentální, jichž vycházení ve vydání lithografickém jsme na str. 208 předešlého ročníku oznámili, jsou ukončeny. Hledíc k počtu archů připadajících na jednotlivé obory fysiky a k počtu obrazců textový výklad provázejících jeví se statistický přehled následující:

Mechanika:	počet archů	56,	počet obrazců	347
Akustika:	„ „	15,	„ „	102
Thermika:	„ „	27,	„ „	105
Elektřina:	„ „	49,	„ „	371
Optika:	„ „	51,	„ „	270

Úhrnem počet archů 198, počet obrazců 1195.

Rozsahem svým řadí se tudíž tato fysika k obšírnějším spisům fysikalním cizojazyčným, převyšujíc je relativně značným počtem obrazců. Z těchto jsou obrazce apparatů fysikalních kresleny dle originalů ve sbírkách c. k. ústavu fysikalního chovaných, kteréž, pocházejíce vesměs z let nedávných, jsou úpravy moderní. Rovněž i uspořádání experimentů jest kresleno a popisováno dle disposic skutečných. Co se obsahu textového týče, jest část stupně vyššího oddělena určitou značkou ([*) od části stupně nižšího, čímž usnadněno jest studium pro chemiky, přírodopisce, mediky a j., kteří studují fysiku jen jako předmět vedlejší. Výklad hledí všude jasnosti a přesnosti. Četné poznámky historické usnadňují porozumění a činí studium zajímavějším.*) *R.*

*) Objednávky vyřídí prof. dr. Jakub Čečka, ředitel Jednoty českých mathematiků v Praze. Cena celku jest 10 zl. r. m.

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

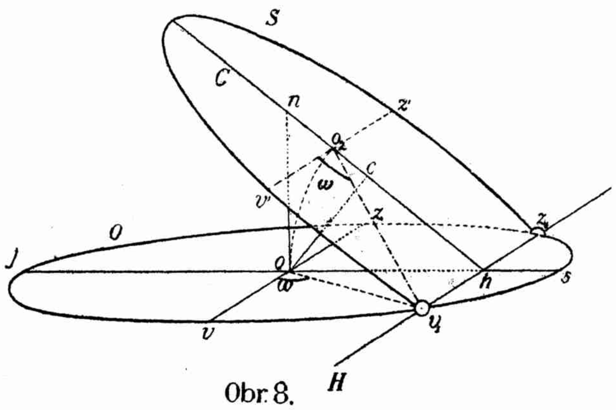
Základní úlohy mathematického zeměpisu a sférické astronomie řešené konstrukcí.

Podává
Adolf Mach,
professor c. k. vyšší reálky v Jičíně.

(Pokračování.)

III. Ranní a večerní vzdálenost hvězd.

Oblouk horizontu mezi bodem východním a bodem, v němž hvězda vychází, jest *ranní vzdálenost* hvězdy; oblouk mezi bodem západním a bodem, ve kterém hvězda zapadá, jest její *večerní vzdálenost*.



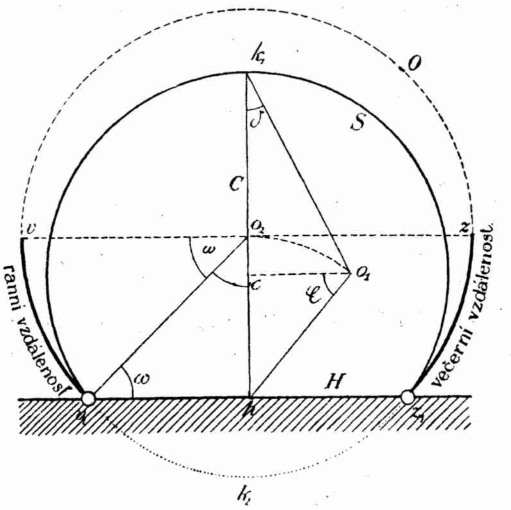
Obr. 8.

V obr. 8. jest obloukem $v\,v_1$, jemuž přísluší středový úhel ω, stanovena ranní vzdálenost, obloukem zz_1 večerní vzdálenost.

Abychom oblouk vv_1, a tím i $\sphericalangle\ \omega$ obdrželi v pravé velikosti, otočme horizont O kolem přímky H jako osy, až se ztotožní s rovinou nebeské rovnoběžky S.

Při tomto otáčení opíše bod o kruhový oblouk oo_2, jehož střed jest v bodu h a jehož poloměr $= ho$. Při tomto otáčení nevybočí bod o z trojúhelníka hon, poněvadž rovina tohoto trojúhelníka jest kolmá k přímce H, což jest též příčinou, že otočený bod o_2 nemůže jinam padnouti než do přímky C.

Poněvadž $vz \| v_1z_1$, kteráž rovnoběžnost se otáčením horizontu nezrušila, jest i $v'z' \| v_1z_1$, načež $\sphericalangle \omega = \sphericalangle v_1o_2v'$.



Obr. 9.

Je-li v obr. 9. rovina papíru rovinou rovnoběžky S, φ výška pólu místa pozorovacího, δ deklinace, v_1 a z_1 body, ve kterých hvězda vychází a zapadá, o_1 kolem přímky hn do roviny σ otočený střed o, pak obdržíme o_2 jako průsečík přímky C s kruhovým obloukem, který poloměrem ho_1 z h jest opsaný. Kružnice O, opsaná z bodu o_2 poloměrem o_2v_1, jest otočený horizont O, body v a z otočené body východní a západní.

I jest oblouk vv_1 *ranní vzdálenost* hvězdy, jež počtem stupňů rovná se $\sphericalangle\ v_1o_2v = hv_1o_2$; zz_1 jest *večerní vzdálenost*.

Z obrazce jest patrno, že vzdálenost ranní rovná se vzdálenosti večerní.

Obrazcem 9. řešena jest úloha: *Jak daleko od bodu východního vychází u nás hvězda α v Andromedě* ($\delta = 28^1/_2{}^0$)?

Poněvadž $\sphericalangle \omega = 45^0$, vychází u nás tato hvězda v severovýchodu.

Mathematický vzorec pro ω vyplývá z následující úvahy:

Je-li $co_1 = 1$,

jest

$$ho_1 = ho_2 = \sec\varphi,$$
$$k_1 o_1 = \operatorname{cosec}\delta;$$

ale

$$k_1 o_1 = v_1 o_2,$$

jsouť to, jak z obr. 8. vysvítá, dva poloměry nebeské koule, proto i

$$v_1 o_2 = \operatorname{cosec}\delta.$$

V trojúhelníku $v_1 h o_2$ jest

$$\sin\omega = \frac{ho_2}{v_1 o_2} = \frac{\sec\varphi}{\operatorname{cosec}\delta}$$

čili

$$\sin\omega = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

Rozbor.

A. Ranní vzdálenost na téže zeměpisné šířce.

a) Pro určitou zeměpisnou šířku jest přímka H stálá a jen kružnice S mění poloměr. Ranní vzdálenost roste, roste-li deklinace, neboť pak zmenšuje se poloměr ck_1 a bod v_1 posouvá se na přímce H v pravo, čímž ω se stále zvětšuje.

Proto také v zimě a z jara, kdy deklinace sluneční přibývá, přibývá i ranní vzdálenosti slunce.

b) Je-li deklinace rovna nulle, posune se bod k_1 na přímce C do nekonečna, bod v_1 posune se též do nekonečna na přímce H, načež rameno $o_2 v_1$ se stotožní s ramenem $o_2 v$, t. j. $\omega = 0$.

Hvězdy, jež jsou v nebeském rovníku, vycházejí v bodu východním, zapadají v bodu západním.

Sluneční deklinace rovná se nulle 20. března a 22. září; v ty dny vychází slunce všude v bodu východním, zapadá v bodu západním. Kdyby slunce v tyto dni zanechalo za sebou světelnou stopu, byl by jí vyznačen na obloze *nebeský rovník*.

c) Je-li δ záporné, pak jest denní oblouk vyznačen obloukem $v_1 k_2 z_1$, bod východu jest z_1, bod západu v_1; hvězda vychází v pravo od bodu východního, ale velikostí absolutní rovná se ranní vzdálenosti při témž, ale kladném δ.

Na podzim a v zimě vychází u nás slunce v pravo od bodu východního, poněvadž v té době jest deklinace sluneční záporná.

B. Ranní vzdálenost pro touž deklinaci a různou pólovou výšku.

Při témž δ nemění se velikost kružnice S.

a) Ranní vzdálenost roste, roste-li φ, neboť pak přímka H posouvá se rovnoběžně dolů, bod v_1 postupuje v pravo, ω se zvětšuje.

Táž hvězda má na 20.° s. š. menší ranní vzdálenost než na 30.°, na tomto zase menší než na 50.° atd.

b) Je-li $\varphi = 90^0 - \delta$, přímka H stane se tečnou v bodu k_2.

Zapadající hvězda dotkne se horizontu v bodu severním, načež opět vychází.

c) Je-li $\varphi = 0$, přímka H se sjednotí s přímkou co_1, a poněvadž v tomto případě $co_1 = co_2$, jest trojúhelník $ho_2 v_1 \cong co_1 k_1$, t. j. $\sphericalangle \omega = \sphericalangle \delta$.

Na rovníku rovná se ranní vzdálenost deklinaci.

Všude jinde jest ranní vzdálenost větší než deklinace. Proč?

d) Ranní vzdálenost pro libovolné místo jižní polokoule zemské jest tak veliká jako ranní vzdálenost místa o téže severní šířce zeměpisné.

e) Je-li $\varphi = -(90^0 - \delta)$, pak je přímka H tečnou v bodu k_1. Vycházející hvězda dotkne se horizontu v bodu jižním a zapadne v příštím okamžiku.

Je-li řešiti příklady, týkající se téže zeměpisné šířky, pak jednou pro vždy sestrojme si na příslušném horizontu body odpovídající určitým ranním vzdálenostem a postupující třeba po 1^0 nebo po 2^0.

To provedeno jest v obr. 7., kde pro náš horizont (50.°) vyznačeny jsou ranní vzdálenosti pokračující od 23.°—40.° po jednom stupni, od 40.°—90.° po dvou stupních body, v nichž paprsky vycházející z o_2 v úhlech, rovnajících se doplňku ranní vzdálenosti, protínají horizont 50.°.

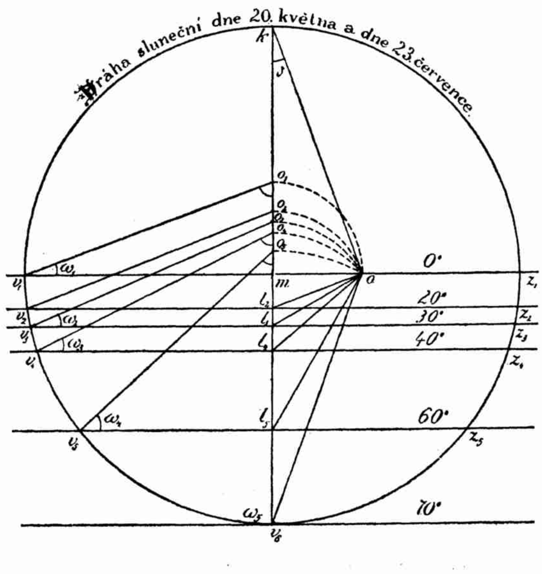
Pak možno beze všeho dalšího sestrojování určiti:

1. *Ve kterém bodu horizontu vychází u nás slunce*

a) dne 21. června a 21. prosince;

b) dne 20. května a 23. července, dne 21. listop. a 20. ledna?

Kružnice proložené polohou slunce v jmenovaných dnech stanoví na horizontu příslušné ranní vzdálenosti.



Obr. 10.

Seznáme, že slunce vychází:

a) dne 21. června $38^1/_4{}^0$ severně, dne 21. prosince $38^1/_4{}^0$ jižně od bodu východního.

b) dne 20. května a 23. července $32^1/_2{}^0$ s.,

„ 21. listop a 20. ledna $32^1/_2{}^0$ j.

2. *Která jest u nás ranní vzdálenost Arctura?*

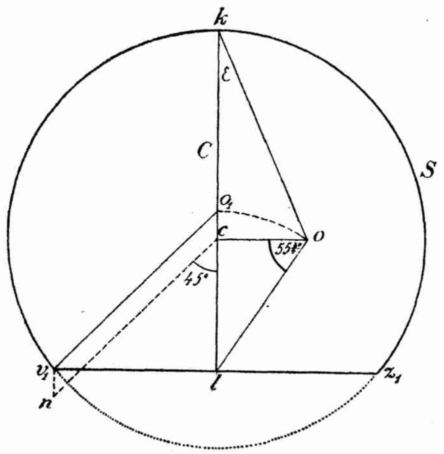
Kružnice Arcturem proložená protíná horizont v bodu $31^1/_4$. *Arctur* vychází $31^1/_4{}^0$ severně od bodu východního.

3. ***Které hvězdy vycházejí u nás v severovýchodu?***

Vzdálenost bodu severovýchodního od východního jest 45^0; kružnice proložená bodem 45 prochází hvězdou *α v Andromedě* a *Polluxem,* kteréž u nás vycházejí v severovýchodu.

4. *Jak veliká jest ranní vzdálenost sluneční dne 20. května nebo 23. července* ($\delta = 20^0$) *na rovníku, na 20.*^{0}, *30.*^{0}, *40.*^{0}, *60.*^{0} a *70.*^{0} *s. š.*?

V obr. 10. jest řešení. Změříme-li úhly ω_1, ω_2, ..., seznáme, že ranní vzdálenost $= 20^0$, $21^1/_2{}^0$, $23^1/_4{}^0$, $26^1/_2{}^0$, 43^0 a 90^0.



Obr. 11.

5. ***Která jest první rovnoběžka, počínajíc od rovníka, na které slunce může vycházeti v severovýchodu?***

Největší ranní vzdálenost má slunce 21. června, proto tento den jest vzíti v úvahu.

Opišme (obr. 11.) kružnici S, k přímce C a vrcholu c nanesme 45^0, učiňme $cn = ok$, bodem n veďme $nv_1 \parallel C$; přímka $v_1z_1 \perp C$ stanoví zeměpisnou šířku φ, jež se rovná $55^3/_4{}^0$; na této rovnoběžce leží *Moskva.*

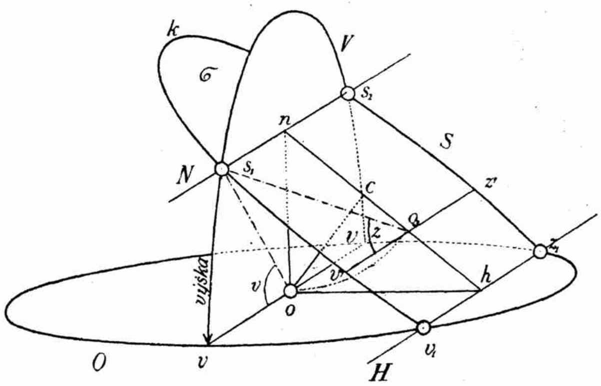
IV. Hvězdy v prvním vertikálu.

První vertikál jest hlavní kruh na obloze, jehož obvod prochází zenithem, bodem východním a západním.

Vstoupí-li hvězda do prvního vertikálu, jest právě nad bodem východním; vstoupí-li zapadající hvězda do prvního vertikálu, jest nad bodem západním.

a) Má se vyšetřiti, v kolik hodin před kulminací vstoupí hvězda do prvního vertikálu.

V obr. 12. jest ellipsa V šikmý průmět prvního vertikálu; přímka N jest průsečnice jeho s rovinou hvězdné dráhy σ. Jakmile hvězda vstoupí do N, jest v prvním vertikálu. Jde tu tedy především o sestrojení přímky N.



Obr. 12.

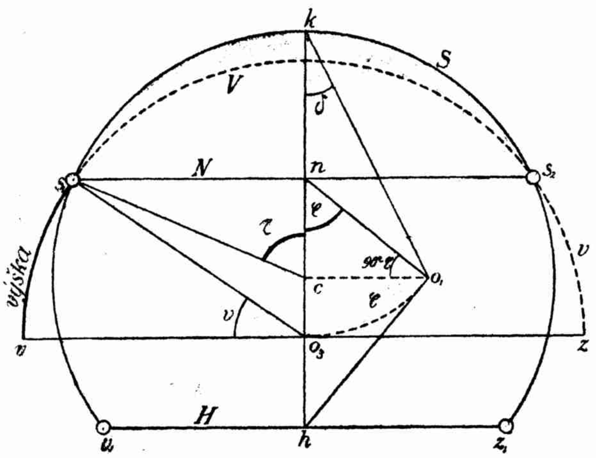
Jest na jevě, že přímka N jest rovnoběžná s přímkou H, neboť horizont, první vertikál i nebeský rovník protínají se v přímce vz a poněvadž rovina σ jest rovnoběžná s rovinou nebeského rovníka, musí průsečnice její s rovinou horizontální a vertikální býti rovnoběžny s vz, poněvadž průsečnice dvou rovnoběžných rovin s rovinou třetí jsou rovnoběžny; tedy

$$H \parallel N \parallel vz.$$

Z dřívějších úvah jest již známo, jak se určí přímka H pomocí φ a δ.

Abychom stanovili přímku $N \parallel H$, třeba stanoviti její jeden bod n, jenž jest vrcholem pravoúhlého trojúhelníka hon.

Za tou příčinou otočme nejdříve pravoúhlý trojúhelník hoc do roviny σ kolem strany hc, obdržíme (obr. 13.) $\triangle ho_1c$, vztyčíme-li pak v bodu o_1 kolmici o_1n na ho_1, jest n hledaný bod, jímž prochází přímka $N \parallel H$. Průsečíky s_1 a s_2 s S jsou polohy hvězdy vstoupivší do prvního vertikálu; $\sphericalangle\ s_1ck$ jest hledaný úhel τ, jímž stanovena jest doba, za kterou hvězda po vstupu svém do prvního vertikálu bude kulminovati.



Obr. 13.

Mathematický vzorec:
Budiž $co_1 = 1$, pak jest

$$\text{v } \triangle cno_1, \text{ jehož úhel } cno_1 = \varphi,$$
$$cn = \operatorname{cotg} \varphi,$$
$$\text{v } \triangle cko_1, \text{ jehož úhel } cko_1 = \delta,$$
jest
$$ck = \operatorname{cotg} \delta,$$
$$\text{v } \triangle cns_1, \text{ v němž } cs_1 = ck = \cot \delta,$$

$$\cos \tau = \frac{cn}{cs_1} = \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{\operatorname{cotg} \delta}$$

čili

$$\cos \tau = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

b) Kterou výšku má hvězda, vstoupivší do prvního vertikálu?

Výška hvězdy jest oblouk vertikální kružnice, jdoucí od hvězdy k horizontu.

V obr. 12. jest výška hvězdy s_1 rovna oblouku $s_1 v$, jejž možno vyjádřiti též středovým úhlem v.

Abychom oblouk $s_1 v$, tedy i $\measuredangle v$ obdrželi v pravé velikosti, otočme první vertikál kolem přímky N do roviny σ.

I v tomto případě opíše bod o v rovině $\triangle hno$ kruhový oblouk oo_3, jehož střed jest v n a jehož poloměr se rovná úsečce no.

Přímka vz, jsouc i po otočení rovnoběžna s N i H, zaujme polohu $v'z'$, a poněvadž bod s_1 při otáčení jest stálý, jest úhel $v'o_3 s_1$ otočený úhel v.

Sjednotí-li se zase rovina σ s rovinou papíru, pak pohyb bodu o jest vyznačen obloukem $o_1 o_3$ (obr. 13.) a bod o_3 jest středem otočeného vertikálu V, jehož poloměr $= o_3 s_1$; bod v jest otočený bod východní, oblouk $s_1 v$ pravá velikost výšky, jež počtem stupňů rovná se $\measuredangle\, v o_3 s_1 = v$.

Mathematický vzorec pro výšku lze odvoditi z $\triangle\, o_3 n s_1$ v němž

$$o_3 n = o_1 n = \operatorname{cosec} \varphi,$$
$$o_1 k = \operatorname{cosec} \delta;$$

poněvadž $o_3 s_1 = o_1 k$, jako poloměry téže nebeské koule, plyne z $\triangle\, o_3 n s_1$:

$$\cos (90 - v) = \frac{o_3 n}{o_3 s_1} = \frac{\operatorname{cosec} \varphi}{\operatorname{cosec} \delta}$$

čili

$$\sin v = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}.$$

Rozbor.

A. Pro touž zeměpisnou šířku φ.

a) Zmenšuje-li se při témž φ deklinace δ, zvětšuje se kružnice S a bod s_1 pohybuje se na levo; τ se zvětšuje, v se zmenšuje.

b) Je-li $\delta = 0$, ustoupí bod k do nekonečna, totéž učiní bod s_1; $\tau = 90^0$, $v = 0$.

Dne 20. března a 22. září slunce vycházejíc, vstupuje do prvního vertikálu.

c) Je-li δ záporné, pak denní oblouk hvězdy jest pod přímkou H, z čehož vysvítá, že hvězda vstoupí do prvního vertikálu pod horizontem, slunce v noci.

B. **Pro určitou deklinaci** δ.

Kružnice S jest stálá, přímka N posouvá se rovnoběžně s původní polohou.

a) Zmenšuje-li se φ, posouvá se N nahoru, s_1 v pravo; τ se zmenšuje, v zvětšuje.

V jižních krajinách vstupuje táž hvězda později do prvního vertikálu než u nás, majíc při tom větší výšku než u nás.

b) Je-li $\varphi = \delta$, pak přímka N dotýká se kružnice S v bodu k; $\tau = 0$, $v = 90^0$.

Hvězda kulminuje v zenithu.

V *Rivě* kulminuje hvězda *Kapella* v zenithu, poněvadž zeměpisná šířka Rivy $= 45^0 53'$ a deklinace hvězdy rovná se též $45^0 53'$.

Slunce kulminuje dne 20. května ($\delta = 20^0$) na 20.^{0} s. š. v zenithu.

c) Je-li $\varphi < \delta$, pak přímka N neprotíná kružnici S, aniž se jí dotýká, z čehož plyne, že hvězda do prvního vertikálu nevstoupí.

Hvězda β v *Cassiopeji*, jejíž deklinace $= 58^0 36'$, nevstoupí u nás do prvního vertikálu. Slunce nevstoupí dne 31. května ($\delta = 22^0$) ve všech místech povrchu zemského do prvního vertikálu, jichž zeměpisná šířka jest menší než 22^0.

d) Je-li φ záporné, pak přímka N objeví se pod přímkou H. Z toho plyne, že při kladném δ protíná hvězda na jižní polokouli zemské první vertikál pod horizontem, při záporném δ nad horizontem.

Poněvadž $\sphericalangle co_1 n = 90^0 - \varphi$, jest přímka N též horizontem pro jižní zeměpisnou šířku rovnou $90^0 - \varphi$, takže příkladem v obr. 7. jest horizont pro 40.^{0} j. š. zároveň přímkou N pro

50.° s. š. Z té příčiny připsány jsou k těmto přímkám písmena N s příslušnou zeměpisnou šířkou, načež lze v obr. 7. řešiti úlohy jako:

1. *V kolik hodin vstoupí slunce do prvního vertikálu dne 1. května na 20.° a 50.° s. š.?*

Poloměry, jdoucí průsečíky dráhy sluneční s přímkami N_{20} a N_{50}, ukazují hledané hodiny.

Na 20.° s. š. v $9\frac{1}{4}^h$ a ve $2\frac{3}{4}^h$;
na 50.° s. š. v 6^h 55^m a v 5^h 5^m.

2. *V kolik hodin jest* **Pollux** *dne 31. července u nás v prvním vertikálu?*

Je-li *Pollux* v prvním vertikálu na 50.° s. š., dospěl, otáčeje se, do bodů p_2 a p_3, slunce v týchž okamžicích jest v s_9 a v s_{10}; v s_9 v $6\frac{3}{4}^h$, v s_{10} ve $3\frac{1}{4}^h$, při čemž zase jest míti jen na paměti, že úhel paprsků proložených *Polluxem* a polohou slunce dne 31. července velikost nemění.

V. Osvětlení svislých stěn.

A. Svislá stěna má směr od východu k západu.

Na základě předešlého odstavce lze též řešiti úlohy, týkající se osvětlení stěny svislé, jež jde od východu k západu, neboť rovina této stěny sjednocuje se s prvním vertikálem.

Severní strana stěny bude osvětlena přímými paprsky slunečními od okamžiku, kdy slunce vyjde (obr. 12.), do okamžiku, kdy vstoupí do prvního vertikálu; pak začne slunce ozařovati jižní stranu stěny, tak dlouho, pokud slunce podruhé nevstoupí do prvního vertikálu, neboť pak opět přichází řada na stranu severní, která osvětlena bude nepřetržitě až do západu slunce.

Místo celé stěny lze i zde v úvahu vzíti jen průsečnici N sluneční dráhy σ s prvním vertikálem, poněvadž jakmile slunce vstoupí do přímky N, nastává osvětlení oné stěny, jež před tím byla ve stínu.

Poněvadž přímky N pro některé horizonty jsou sestrojeny v obr. 7., lze hned řešiti některé zajímavé úlohy.

1. *V kolik hodin dopoledne přestává býti severní strana*

stěny u nás osvětlena dne 20. května nebo 23. července; v kolik hodin odpoledne začíná býti opět ozařována přímými paprsky?

Sluneční dráha ve zmíněných dnech protíná přímku N_{50} v bodu s_{11}, jehož poloměr směřuje k $7^1/_4{}^h$, a v bodu s_{12}, jehož poloměr směřuje ke $4^3/_4{}^h$.

Ve čtvrt na osm přestává a ve $^3/_4$ na 4 odp. zase začíná býti ozařována přímými paprsky slunečními.

2. *Kolik hodin jest osvětlena severní, kolik hodin jižní strana stěny dne 21. června a) na 20.°, b) na 50.°, c) na 70.° s. š.?*

a) Kružnice, jíž znázorněna jest dráha sluneční dne 21. června, neprotíná přímku N_{20}, jež přísluší 20.° s. š., což znamená, že severní strana osvětlena jest přímými paprsky slunečními po celý den; strana jižní po celý den jest ve stínu.

b) U nás vychází slunce dne 21. června ve $3^h\ 56^m$; od této chvíle až do okamžiku, kdy slunce vstoupí do přímky N_{50}, což se stane v $7^h\ 29^m$ dopoledne, jest severní strana stěny osvětlena; od $7^h\ 29^m$ dopoledne až do $4^h\ 32^m$ odpoledne jest osvětlena jižní strana; pak zase až do západu slunce v $8^h\ 4^m$ večer padají paprsky sluneční na stranu severní.

Jest tedy strana severní osvětlena celkem $7^h\ 3^m$, strana jižní $9^h\ 2^m$.

c) Soudíme-li podobně ve třetím případě, shledáme, že strana severní jest dne 21. června na 70.° s. š. osvětlena $13^h\ 12^m$, strana jižní $10^h\ 48^m$.

3. *Vertikální hodiny sluneční umístěny jsou na jižní straně stěny východozápadní. V kolik hodin začnou a kdy přestanou ukazovati čas 12. května nebo 1. srpna?*

Dokud slunce na své denní dráze dne 12. května nepostoupí do s_{13}, dotud jižní strana stěny jest ve stínu a ručička slunečních hodin nemůže vrhati stínu. Do s_{13} dospěje slunce v $7^h\ 2^m$ ráno; od této hodiny počínajíc až do $4^h\ 58^m$ odpoledne, kdy opět jižní strana začíná býti ve vlastním stínu, ukazují sluneční hodiny čas.

4. *Kterého dne jest Hybernská ulice v Praze, jež má směr východozápadní, ve $4^h\ 55^m$ odpoledne bez stínu?*

Poněvadž lze míti za to, že průčelí domů na obou stranách ulice jsou v rovině prvního vertikálu, nebudou vrhati stínu v 4^h 55^m odp. v onen den, kdy slunce v tuto hodinu dosáhne prvního vertikálu čili přímky N_{50}.

Spojíme-li tedy bod, jenž stanoví danou hodinu odpolední se středem, a proložíme-li jejím průsečíkem s N_{50} kružnici, stanoví tato kružnice deklinaci δ, pro niž v tabulkách deklinačních najdeme příslušný den.

Zde prochází kružnice polohou slunce dne 12. května a 1. srpna, kteréžto dni odpovídají úloze.

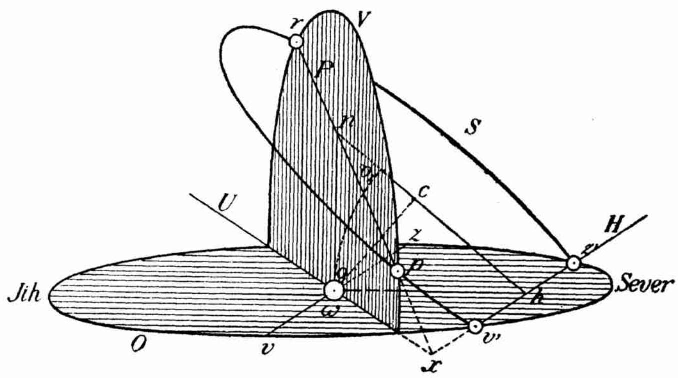
5. *Na které rovnoběžce zemské jest dne 31. května nebo 11. července jižní strana 6 hodin osvětlena?*

Má-li býti osvětlena 6 hodin, t. j 3^h dopoledne, 3^h odpoledne, musí slunce vstoupiti do prvního vertikálu v 9^h ráno.

Průsečíkem kružnice, kterou slunce vykoná v daných dnech s poloměrem směřujícím k deváté hodině ranní, proložme přímku N vodorovně; úhel $o_1 h_2 c$ stanoví zeměpisnou šířku.

Zde sjednocuje se přímka N s přímkou N_{30}, kteráž přísluší zeměpisné šířce $= 30^0$.

B. Vertikální stěna tvoří se směrem východním libovolný úhel ω.



Obr. 14.

Rozeznávejme i u této stěny stranu severní a jižní.

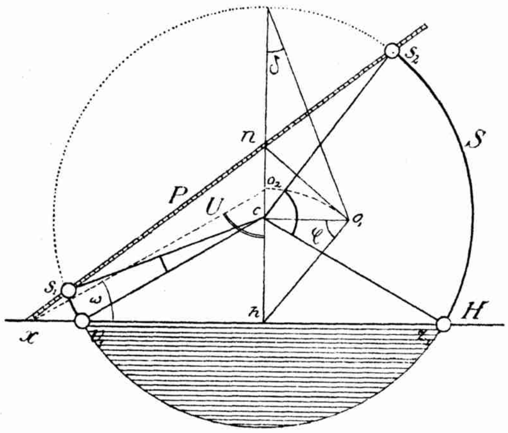
V obr. 14. protíná svislá stěna V horizont v přímce U, jejíž odchylka od směru východozápadního jest ω.

Vycházející slunce osvětluje severní stranu stěny dotud, dokud nevstoupí do její roviny, t. j. dokud nevkročí do bodu p

přímky P, v níž rovina dráhy sluneční σ protíná rovinu svislé stěny; potom začne slunce osvětlovati jižní stranu stěny, a to tak dlouho, dokud slunce podruhé nedospěje k přímce P v bodu r, kdy na řadu přichází opět severní strana.

Lze tedy i zde místo celé stěny v úvahu vzíti jen přímku P, kterou určíme body n a x, jež se k tomu nejlépe hodí.

Poloha bodu n se stanoví známým již způsobem, vysvětleným při prvním vertikálu. Jest jen třeba otočiti pravoúhlý trojúhelník hoc kolem hc do roviny σ, v otočeném bodu o_1 vztyčiti kolmici na odvěsnu ho_1, jež protne přímku svislou v hledaném bodu n.



Obr. 15.

Bod x jest společný všem třem rovinám, tedy i jejím průsečnicím H, U a P.

Stanovíme-li průsečík přímek H a U, obdržíme bod x, jehož spojnice s bodem n jest hledaná přímka P.

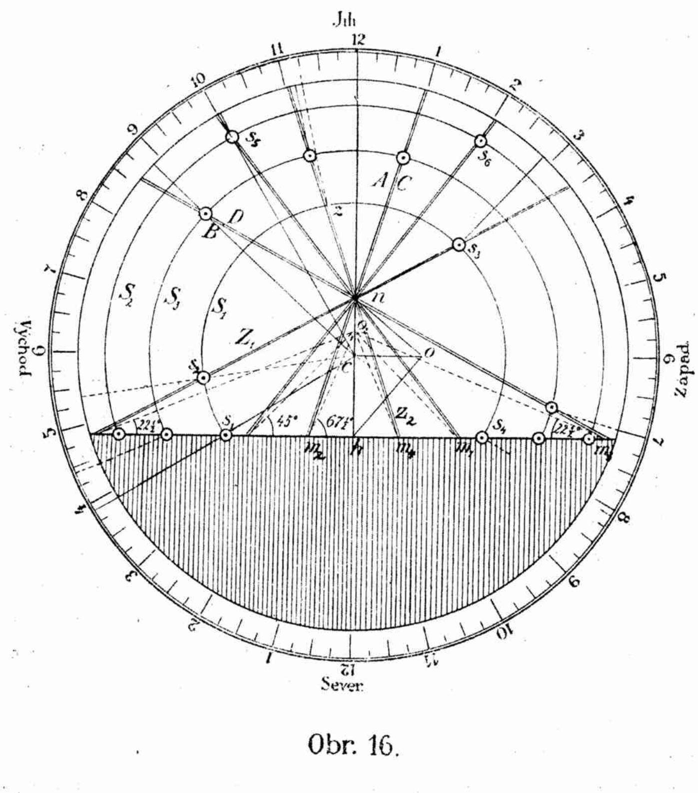
O sestrojení přímky H netřeba se blíže zmiňovati, to známo z předcházejícího.

Ale i přímku U jsme sestrojovali určujíce ranní vzdálenost (obr. 9.). Otočme horizont O kolem H do roviny σ, při čemž bod o přijde do polohy o_2, a naneseme-li k přímce C a vrcholu o_2 $\sphericalangle\ \omega$, obdržíme přímku U jako druhé rameno tohoto úhlu.

V obr. 15. jest $\omega = 30^0$, $\varphi = 50^0$, $\delta = 22^0$ (11. července);

jest jím tedy řešena úloha: *Jak dlouho jest osvětlena severní strana stěny svislé, která se směrem východním tvoří úhel 30°, dne 11. července?*

Toho dne jest severní strana stěny tak dlouho osvětlena, dokud vycházející slunce nevykoná oblouku $v_1 s_1$ a zapadající slunce oblouku $s_2 z_1$.



Obr. 16.

A poněvadž oblouk $v_1 s_1$ obsahuje 8°, oblouk $s_2 z_1$ 83°, ozařuje slunce severní stranu stěny ráno 32^m, odpoledne $5^h\ 32^m$, dohromady za celý den $6^h\ 4^m$.

1. *Jak dlouho jest osvětlena dne 21. června a) severní, b) jižní strana stěny, jež má směr VSV?*

Stěna, jež má směr VSV, tvoří se směrem východním úhel $22^1/_2$°. V obr. 16. znázorněna jest přímkou Z_1. Dráha sluneční dne 21. června znázorněna jest kružnicí S_1, jejíž poloměr se obdrží známým způsobem.

Slunce vychází v bodu s_1 ve 3^h 56^m, kterouž dobu ukazuje poloměr cs_1 na hodinovém rozdělení. Jakmile slunce vystoupí nad obzor, začne osvětlovati severní stranu stěny, a to tak dlouho, dokud nepřijde do polohy s_2, kdy řada přichází na stranu jižní; to stane se v 5^h 22^m ráno, kterouž dobu na hodinovém rozdělení ukazuje poloměr cs_2.

Jižní strana požívá přímých paprsků slunečních do 2^h 53^m, neboť v tom okamžiku přišlo slunce do polohy s_3 (poloměr cs_3 ukazuje na 2^h 53^m), jižní strana octne se ve vlastním stínu, severní strana začíná v tom okamžiku býti podruhé osvětlena a to až do západu slunce v 8^h 4^m.

Severní strana stěny jest celkem osvětlena 6^h 37^m, jižní strana 9^h 31^m.

2. *Do oken prvního pokoje jistého bytu zaslalo slunce dne 21. července poslední paprsky v 10^h ráno, do oken druhého pokoje ve 2^h odpol. Kterým směrem jdou okenní stěny těchto pokojů?*

Sluneční dráha vyznačena jest kružnicí S_2. Poloměr, směřující k 10^h ranní, protíná ji v s_5. Spojnicí s_5n jest znázorněna okenní stěna prvního pokoje. Odchylka její od směru východního $=$ úhlu $ho_2m = 45^0$. Stěna jde od *severozápadu* k *jihovýchodu*; pokoj má stranu severní.

Týmž způsobem seznáme, že okenní stěna druhého pokoje jde od *severovýchodu* k *jihozápadu* a že pokoj má stranu jižní.

3. *O samotě stojící dům má tvar obdélníka. Delší strany směřují k SSV, kratší k ZSZ. Na každé straně budovy jest byt. Kolik hodin jest osvětlen každý přímými paprsky slunečními dne 11. května nebo 1. srpna?*

Nazveme tyto byty A, B, C a D.

Stěny bytů A a C směřují k SSV. Znázorněny jsou dvojitou přímkou AC. Úhel $hm_2o_2 = 67^1/_2{}^0$.

Z bytu A jest viděti jižní stranu, z C severní stranu horizontu.

Stěny bytů B a D směřují k ZSZ. Úhel $hm_3o_2 = 22^1/_2{}^0$.

Z bytu B jest viděti severní, z bytu D jižní stranu horizontu.

Dráha sluneční jest znázorněna kružnicí S_3. Slunce vychází ve 4^h 25^m, zapadá v 7^h 35^m. Jakmile vystoupí nad obzor, začne osvětlovati byt A a B. Byt B do 8^h 53^m, byt A do 12^h 53^m.

Odpoledního slunce byt A nemá, kdežto do bytu B svítí slunce od 7^h do západu.

Byt D jest ozářen od 8^h 53^m ráno do 7^h večer, byt C od 12^h 53^m do západu.

Má tedy byt A 7^h 35^m, B 4^h 38^m, C 5^h 17^m a D 10^h 7^m slunce.

4. *Stěna má směr SSZ. Kterého dne padne na severní její stranu u nás poslední paprsek v $11\frac{1}{2}^h$?*

Stěna jest znázorněna přímkou Z_2.

Úhel $hm_4o_2 = 67\frac{1}{2}^0$. Poloměr směřující k hodině $11\frac{1}{4}$ protíná přímku Z_2 v bodě z; poloměr dráhy sluneční $= cz$. Kružnice tímto poloměrem opsaná sjednocuje se s kružnicí S_1, jíž vyhovuje 21. červen. (Dokončení.)

O trojúhelníku, od jehož každého úhlu ostatní dva jsou odečteny.

Pojednává

Vavřinec Jelínek,

professor v Novém Městě u Vídně.

(Dokončení.)

Rovnice posledně uvedené lze čísti takto: Trojmoc strany obdržíme, násobíme-li

1. některý její úsek dvojmocí sousedního úseku druhé strany,
2. druhou stranu příčkou této a úsekem třetí přilehlým k straně hledané,
3. odlehlý úsek druhé strany přilehlým úsekem a příčkou třetí strany,
4. příčku této strany dolními úseky obou druhých stran.

Dle některých předešlých rovnic poznáváme také, které tři přímky na sobě závisejí, jimiž tedy trojúhelník určen není. Jsou to tyto skupiny:

1. dle (2) oba úseky a příčka téže strany,
2. dle (4) některá strana a příčky obou druhých stran,
3. dle (4) dvě strany a horní úsek některé z těchto stran,
4. dle (8) dva horní úseky a některá jich strana.

Posud odvozené rovnice dávají vztahy mezi přímkami několika druhů; v následujícím sestavíme ještě poměry mezi hodnotami druhu jen dvojího.

1. Strany a příčky.

Dle prvního a třetího členu každé rovnice v (3) nalezneme příčky

$$d_1 = \frac{bc}{a}, \quad d_2 = \frac{ac}{b}, \quad d_3 = \frac{ab}{c} \tag{9}$$

a tedy jejich poměr

$$d_1 : d_2 : d_3 = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} \tag{10}$$

čili, znamenají-li v_1, v_2 a v_3 výšky trojúhelníka,

$$d_1 : d_2 : d_3 = v_1^2 : v_2^2 : v_3^2.$$

Z rovnice (4) najdeme

$$a = \sqrt{d_2 d_3}, \quad b = \sqrt{d_1 d_3}, \quad c = \sqrt{d_1 d_2}. \tag{11}$$

2. Strany a úseky.

Mimo výsledky rovnic (4):

$$a = \sqrt{bb_1} = \sqrt{cc_1}, \quad b = \sqrt{aa_2} = \sqrt{cc_2}, \quad c = \sqrt{aa_3} = \sqrt{bb_3}$$

a rovnic (8)

$$a = \sqrt[3]{a_2 b_1^2} = \sqrt[3]{a_3 c_1^2}, \quad b = \sqrt[3]{b_3 c_2^2} = \sqrt[3]{b_1 a_2^2},$$
$$c = \sqrt[3]{c_1 a_3^2} = \sqrt[3]{c_2 b_3^2}$$

najdeme ještě tyto úměry:

Z 2. a 3. členů rovnic (4) plyne

$$\begin{aligned} a_3 : b_3 &= b : a, \\ a_2 : c_2 &= c : a, \\ b_1 : c_1 &= c : b, \end{aligned} \tag{12}$$

t. j. dolní úseky dvou stran se mají k sobě jako zvratně tyto strany.

Ze skupin rovnic v (4):

$$b^2 = aa_2, \qquad a^2 = bb_1, \qquad a^2 = cc_1,$$
$$c^2 = aa_3; \qquad c^2 = bb_3; \qquad b^2 = cc_2$$

vycházejí úměry

$$(13) \qquad \begin{aligned} a_2 : a_3 &= b^2 : c^2, \\ b_1 : b_3 &= a^2 : c^2, \\ c_1 : c_2 &= a^2 : b^2, \end{aligned}$$

t. j. úseky některé strany se mají k sobě jako dvojmoce druhých k těmto úsekům přilehlých stran.

Z prvních řádek rovnic (8) lze vyčísti (arciť přeurčené) úměry

$$(14) \qquad \begin{aligned} a_2 : b_1 &= b^3 : a^3, \\ a_3 : c_1 &= c^3 : a^3, \\ b_3 : c_2 &= c^3 : b^3, \end{aligned}$$

dle nichž se mají horní úseky dvou stran k sobě jako zvratné trojmoce těchto stran.

Dosadíme-li do úměr (13) na místo některé strany její hodnotu dle rovnic (4), obdržíme úměry mezi stranou, některým jejím úsekem a oběma úseky strany druhé:

$$(15) \qquad \begin{aligned} a : a_2 &= c_1 : c_2, \text{ neb } & a : a_3 &= b_1 : b_3, \\ b : b_1 &= c_2 : c_1, & b : b_3 &= a_2 : a_3, \\ c : c_1 &= b_3 : b_1 & c : c_2 &= a_3 : a_2; \end{aligned}$$

učiníme-li tak též v úměrách (12), nabudeme úměry mezi některou stranou, jejími úseky a úsekem strany druhé:

$$(16) \qquad \begin{aligned} a : a_2 &= b_3^2 : a_3^2, \text{ neb } & a : a_3 &= c_2^2 : a_2^2, \\ b : b_1 &= a_3^2 : b_3^2, & b : b_3 &= c_1^2 : b_1^2, \\ c : c_1 &= a_2^2 : c_2^2 & c : c_2 &= b_1^2 : c_1^2. \end{aligned}$$

Nahradíme-li v každé první řádce rovnic (8) jednoduchého činitele součinů jeho hodnotou z úměr (15), bude každá strana vyjádřena třemi úseky druhých stran, kteréžto úseky však nejsou ni sousední, ni stejnosměrné:

$$(17)\qquad a^2 = \frac{c_2}{c_1} b_1^2 = \frac{b_3}{b_1} c_1^2, \quad b^2 = \frac{a_3}{a_2} c_2^2 = \frac{c_1}{c_2} a_2^2,$$
$$c^2 = \frac{b_1}{b_3} a_3^2 = \frac{a_2}{a_3} b_3^2.$$

Abychom vyjádřili stranu třemi sousedními úseky, dosaďme do každé třetí řádky rovnic (8) místo příčky její hodnotu z rovnic (2) a najdeme

$$(18)\qquad \begin{aligned} a^6 &= b_1^3 b_3 c_2^2 = c_1^3 c_2 b_3^2, \\ b^6 &= a_2^3 a_3 c_1^2 = c_2^3 c_1 a_3^2, \\ c^6 &= b_3^3 b_1 a_2^2 = a_3^3 a_2 b_1^2. \end{aligned}$$

Pravidlo v těchto součinech je zřejmé: Šestou mocninu některé strany obdržíme, násobíme-li trojmoc sousedního úseku některé druhé strany druhým úsekem téže strany a dvojmocí úseku následujícího.

Dle rovnice (6) vyjádříme strany jednosměrnými úseky, spojíme-li ji rovnicemi (4), takto: Do

$$abc = a_3 b_1 c_2$$

dosaďme ze (4)

$$c = \frac{b^2}{c_2} \text{ a } b = \frac{a^2}{b_1}, \text{ tedy } c = \frac{a^4}{b_1^2 c_2},$$

a obdržíme

$$a \cdot \frac{a^2}{b_1} \cdot \frac{a^4}{b_1^2 c_2} = a_3 b_1 c_2.$$

Z této rovnice a podobným způsobem nabudeme

$$(19)\qquad \begin{aligned} a^7 &= a_3 c_2^2 b_1^4 = a_2 b_3^2 c_1^4, \\ b^7 &= b_1 a_3^2 c_2^4 = b_3 c_1^2 a_2^4, \\ c^7 &= c_2 b_1^2 a_3^4 = c_1 a_2^2 b_3^4. \end{aligned}$$

Vyjdeme-li z hledané strany opačným směrem daných úseků, najdeme sedmou její mocninu, násobíme-li úsek této strany dvojmocí úseku druhé a čtvrtou mocninou úseku třetí strany.

Pozn. Kdo by ze tří přímek uvedených v součinech na 2., 3. neb 4. řádce rovnic (8) neb ze tří sousedních neb ze tří stejnosměrných úseků sestrojil příslušný trojúhelník, našel by 3., 6. neb 7. kořen dané hodnoty graficky.

3. Příčky a úseky.

Vztah tří příček k některému úseku obdržíme z rovnic obsažených v (4). Dosadíme-li na př. do rovnic této skupiny

$$cc_1 = d_2 d_3 \text{ neb } cc_2 = d_1 d_3$$

místo c jeho hodnotu z rovnice $c^2 = d_1 d_2$ téže skupiny rovnic, najdeme tu, jakož i obdobně:

$$\begin{aligned} d_1 : d_2 &= d_3^2 : c_1^2 \quad \text{neb} \quad d_1 : d_2 = c_2^2 : d_3^2, \\ d_1 : d_3 &= d_2^2 : b_1^2, \qquad\quad\; d_1 : d_3 = b_3^2 : d_2^2, \\ d_2 : d_3 &= d_1^2 : a_2^2, \qquad\quad\; d_2 : d_3 = a_3^2 : d_1^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Úměry mezi dvěma příčkami a úseky třetí strany plynou z posledních dvou členů rovnic (3):

$$\begin{aligned} d_1 : d_2 &= c_2 : c_1, \\ d_1 : d_3 &= b_3 : b_1, \\ d_2 : d_3 &= a_3 : a_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Vyjádříme-li ve (12) strany příčkami dle (11), obdržíme úměry mezi příčkami dvou stran a dolními úseky těchto stran:

$$\begin{aligned} d_1 : d_2 &= a_3^2 : b_3^2, \\ d_1 : d_3 &= a_2^2 : c_2^2, \\ d_2 : d_3 &= b_1^2 : c_1^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Učiníme-li tak též v (14), nabudeme úměry mezi příčkami dvou stran a horními úseky týchž stran:

$$\begin{aligned} d_1^3 : d_2^3 &= a_2^2 : b_1^2, \\ d_1^3 : d_3^3 &= a_3^2 : c_1^2, \\ d_2^3 : d_3^3 &= b_3^2 : c_2^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Zbývá stanoviti vztah jedné příčky k úsekům. Náležejí-li úseky i příčka téže straně, udává jich vztah rovnice (2). Patří-li úseky více stranám, dlužno rozeznávati seskupení těchto úseků.

Úměry mezi příčkou, některým úsekem jeho strany a dolními úseky obou druhých stran dávají druhý a čtvrtý neb druhý a poslední člen rovnic (3):

$$
\begin{array}{ll}
d_1 : a_2 = b_1 : c_1, \text{ neb } & d_1 : a_3 = c_1 : b_1\,, \\
d_2 : b_1 = a_2 : c_2, & d_2 : b_3 = c_2 : a_2\,, \\
d_3 : c_1 = a_3 : b_3 & d_3 : c_2 = b_3 : a_3\,.
\end{array}
\tag{24}
$$

Z úměr (14) a z trojmoce případných úměr v (1) na př.:

$$b^3 : c^3 = a_2^3 : d_1^3 = d_1^3 : a_3^3$$

obdržíme vztah mezi příčkou, některým úsekem její strany a horními úseky obou druhých stran:

$$
\begin{array}{ll}
d_1^3 : a_2^3 = b_3 : c_2, \text{ neb } & d_1^3 : a_3^3 = c_2 : b_3\,, \\
d_2^3 : b_1^3 = a_3 : c_1, & d_2^3 : b_3^3 = c_1 : a_3\,, \\
d_3^3 : c_1^3 = a_2 : b_1 & d_3^3 : c_2^3 = b_1 : a_2\,.
\end{array}
\tag{25}
$$

Dosadíme-li ve (22) na místo některé příčky její hodnotu z (2), obdržíme vztah příčky k některému úseku její strany a k oběma úsekům druhé strany, která s úsekem první strany nesousedí:

$$
\begin{array}{ll}
c_1 : d_1^2 = c_2^3 : a_2^4, \text{ neb } & b_1 : d_1^2 = b_3^3 : a_3^4\,, \\
c_2 : d_2^2 = c_1^3 : b_1^4\,, & a_2 : d_2^2 = a_3^3 : b_3^4\,, \\
b_3 : d_3^2 = b_1^3 : c_1^4 & a_3 : d_3^2 = a_2^3 : c_2^4\,.
\end{array}
\tag{26}
$$

Učiníme-li tak též v úměrách (23), najdeme vztah příčky ku třem sousedním úsekům, z nichž první tato příčka utíná:

$$
\begin{array}{ll}
d_1^6 : a_2^4 = b_3^3 : b_1\,, \text{ neb } & d_1^6 : a_3^4 = c_2^3 : c_1\,, \\
d_2^6 : b_1^4 = a_3^3 : a_2\,, & d_2^6 : b_3^4 = c_1^3 : c_2\,, \\
d_3^6 : c_1^4 = a_2^3 : a_3 & d_3^6 : c_2^4 = b_1^3 : b_3\,.
\end{array}
\tag{27}
$$

Porovnejme ještě hodnoty téhož úseku, vypočtené z úměr (24), (26) a (27)

$$a_2^4 = \frac{c_1^4\, d_1^4}{b_1^4} = \frac{c_2^3\, d_1^2}{c_1} = \frac{b_1\, d_1^6}{b_3^3}$$

a obdržíme vztah příčky k stejnoúhlému úseku některé druhé strany a oběma úsekům strany třetí:

$$
\begin{array}{ll}
d_1^2 : c_2^3 = b_1^4 : c_1^5\,, \text{ neb } & d_1^2 : b_3^3 = c_1^4 : b_1^5\,, \\
d_2^2 : a_3^3 = c_2^4 : a_2^5\,, & d_2^2 : c_1^3 = a_2^4 : c_2^5\,, \\
d_3^2 : a_2^3 = b_3^4 : a_3^5 & d_3^2 : b_1^3 = a_3^4 : b_3^5\,.
\end{array}
\tag{28}
$$

Abychom našli vztah příčky ke třem sousedním úsekům, z nichž žádný příčka tato neutíná, vyměníme v úměrách (28) třetí člen dle úměry (21), na př. člen b_1 v úměře první takto:

$$b_1^4 = \frac{b_3^4\, d_3^4}{d_1^4} = \frac{b_3^4\, c_1^2\, c_2^2}{d_1^4} \quad [\text{viz } (2)],$$

tedy

$$d_1^2 : c_2^3 = \frac{b_3^4\, c_1^2\, c_2^2}{d_1^4} : c_1^5$$

a obdržíme takto i obdobným způsobem:

$$(29) \qquad \begin{array}{ll} d_1^6 : c_2^5 = b_3^4 : c_1^3\,, \text{ neb } & d_1^6 : b_3^5 = c_2^4 : b_1^3\,, \\ d_2^6 : a_3^5 = c_1^4 : a_2^3\,, & d_2^6 : c_1^5 = a_3^4 : c_2^3\,, \\ d_3^6 : a_2^5 = b_1^4 : a_3^3 & d_3^6 : b_1^5 = a_2^4 : b_3^3\,. \end{array}$$

Poměr příčky ke třem stejnosměrným úsekům najdeme, dosadíme-li do úměr (24) na místo v nich obsaženého protisměrného úseku jeho hodnotu z úměr (27), vyjádřenou touže příčkou. Na př.: V první úměře (24) jest úsek b_1 k ostatním úsekům protisměrný; jeho hodnota jest dána touže příčkou d_1 z první úměry (27):

$$b_1 = \frac{a_2^4\, b_3^3}{d_1^6}\,,$$

zní tedy první úměra v (24):

$$d_1 : a_2 = \frac{a_2^4\, b_3^3}{d_1^6} : c_1\,,$$

a spořádáme-li ji, obdržíme, jakož i obdobným způsobem:

$$(30) \qquad \begin{array}{ll} d_1^7 : a_2^5 = b_3^3 : c_1\,, \text{ neb } & d_1^7 : a_3^5 = c_2^3 : b_1\,, \\ d_2^7 : b_1^5 = a_3^3 : c_2\,, & d_2^7 : b_3^5 = c_1^3 : a_2\,, \\ d_3^7 : c_1^5 = a_2^3 : b_3 & d_3^7 : c_2^5 = b_1^3 : a_3\,. \end{array}$$

4. *Úseky.*

Vztahy mezi skupinami tří stejnosměrných a mezi skupinami tří sousedních úseků dávají rovnice (6) a (7).

Ze součinů v prvních řádkách rovnic (8) obdržíme úměry mezi čtyřmi sousedními úseky, z nichž dva a dva vycházejí z jednoho vrcholu:

$$(31)\qquad \begin{aligned} a_2 : a_3 &= c_1^2 : b_1^2 , \\ b_1 : b_3 &= c_2^2 : a_2^2 , \\ c_1 : c_2 &= b_3^2 : a_3^2 ; \end{aligned}$$

mají se tedy úseky některé strany k sobě jako zvratné dvojmoce dolních úseků na přilehlých druhých stranách.

Spojíme-li úměry (12) s úměrami (14), najdeme úměry mezi čtyřmi sousedními úseky, z nichž však dva a dva náležejí jedné straně:

$$(32)\qquad \begin{aligned} a_2 : b_1 &= a_3^3 : b_3^3 , \\ a_3 : c_1 &= a_2^3 : c_2^3 , \\ b_3 : c_2 &= b_1^3 : c_1^3 , \end{aligned}$$

t. j. horní úseky dvou stran se mají k sobě, jako trojmoce dolních úseků na týchž stranách.

Vztah mezi úseky některé strany a horními úseky druhých stran dají spojené úměry (13) a (14)

$$(33)\qquad \begin{aligned} a_2^3 : a_3^3 &= c_2^2 : b_3^2 , \\ b_1^3 : b_3^3 &= c_1^2 : a_3^2 , \\ c_1^3 : c_2^3 &= b_1^2 : a_2^2 , \end{aligned}$$

t. j. trojmoce úseků některé strany se mají k sobě jako zvratné dvojmoce horních úseků na přilehlých stranách čili jako dvojmoce stejnoúhlých úseků na druhých stranách.

Dosadíme-li do (33) za třetí neb čtvrtý člen hodnotu z (31), najdeme vztah mezi třemi stejnosměrnými úseky a některým protisměrným:

$$(34)\qquad \begin{aligned} a_2^7 : c_2^6 &= a_3^3 : b_1^2 , \text{ neb } & a_3^7 : b_3^6 &= a_2^3 : c_1^2 , \\ b_1^7 : c_1^6 &= b_3^3 : a_2^2 , & b_3^7 : a_3^6 &= b_1^3 : c_2^2 , \\ c_1^7 : b_1^6 &= c_2^3 : a_3^2 & c_2^7 : a_2^6 &= c_1^3 : b_3^2 , \end{aligned}$$

kde člen v 7. mocnině znamená úsek protivného směru.

5. *Úhly a přímky.*

Poměr strany k některému jejímu úseku dává součin dvou úměr z (1):

$$\begin{aligned} a : b &= \sin\alpha : \sin\beta , \\ b : a_2 &= \sin\alpha : \sin\beta ; \end{aligned}$$

tedy

$$(35)\qquad a : a_2 = \sin^2\alpha : \sin^2\beta$$

a podobně

$$a : a_3 = \sin^2\alpha : \sin^2\gamma, \text{ a. t. d.}$$

Poměr strany k její příčce najdeme též součinem dvou případných úměr z (1):

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$
$$b : d_1 = \sin\alpha : \sin\gamma;$$

tedy

$$a : d_1 = \sin^2\alpha : \sin\beta \sin\gamma$$

a podobně

(36)
$$b : d_2 = \sin^2\beta : \sin\alpha \sin\gamma,$$
$$c : d_3 = \sin^2\gamma : \sin\alpha \sin\beta.$$

Poněvadž dle (1) jest

$$a^2 : b^2 : c^2 = \sin^2\alpha : \sin^2\beta : \sin^2\gamma,$$

jest dle (10) také

$$d_1 : d_2 : d_3 = \frac{1}{\sin^2\alpha} : \frac{1}{\sin^2\beta} : \frac{1}{\sin^2\gamma}$$

neb

(37)
$$d_1 \sin^2\alpha = d_2 \sin^2\beta = d_3 \sin^2\gamma.$$

Dosadíme-li do úměr (12), (13) neb (14) místo poměrů stran poměry úhloměrných funkcí dle (1), obdržíme poměr dolních úseků dvou stran:

(38)
$$a_3 : b_3 = \sin\beta : \sin\alpha,$$
$$b_1 : c_1 = \sin\gamma : \sin\beta,$$
$$a_2 : c_2 = \sin\gamma : \sin\alpha$$

neb poměr úseků téže strany:

(39)
$$a_2 : a_3 = \sin^2\beta : \sin^2\gamma,$$
$$b_1 : b_3 = \sin^2\alpha : \sin^2\gamma,$$
$$c_1 : c_2 = \sin^2\alpha : \sin^2\beta$$

neb poměr horních úseků dvou stran:

(40)
$$a_2 : b_1 = \sin^3\beta : \sin^3\alpha,$$
$$a_3 : c_1 = \sin^3\gamma : \sin^3\alpha,$$
$$b_3 : c_2 = \sin^3\gamma : \sin^3\beta.$$

Poměr stejnosměrných úseků najdeme takto: Dle (1) jest

$$a_2 = \frac{b \sin\beta}{\sin\alpha}, \quad b_3 = \frac{c \sin\gamma}{\sin\beta}, \quad c_1 = \frac{a \sin\alpha}{\sin\gamma};$$

tedy

$$a_2 : b_3 : c_1 = \frac{b \sin\beta}{\sin\alpha} : \frac{c \sin\gamma}{\sin\beta} : \frac{a \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

a násobíme-li tuto úměru úměrou v (1)

$$b : c : a = \sin\beta : \sin\gamma : \sin\alpha,$$

obdržíme

$$(41) \qquad a_2 : b_3 : c_1 = \frac{\sin^2\beta}{\sin\alpha} : \frac{\sin^2\gamma}{\sin\beta} : \frac{\sin^2\alpha}{\sin\gamma}.$$

Zde souhlasí úhel v čítateli s úhlem úseku a úhel ve jmenovateli s úhlem strany, ku které úhel náleží.

Úměr (35) až (41) užijeme, řešíce trojúhelník, jehož dvě přímky a některé této přímce náležející úhel neb dva úhly a některému tomuto úhlu příslušná přímka dány jsou. Úměry tyto jsou vesměs zvláštní případy věty sinusové.

Jsou-li však dány dvě přímky a třetí úhel, užijeme věty tangentové

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = (a+b) : (a-b),$$

do které dle potřeby na místo poměru stran dosaditi jest poměr daných přímek, abychom našli ostatní dva úhly. Potřebnou výměnu provedeme dle rovnic (1). Mimo to lze dáti

a) místo některé strany úsek druhé dle (4):

$$(42) \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = (a+\sqrt{aa_2}) : (a-\sqrt{aa_2})$$

$$= (\sqrt{a}+\sqrt{a_2}) : (\sqrt{a}-\sqrt{a_2})$$

neb

$$= (\sqrt{bb_1}+b) : (\sqrt{bb_1}-b)$$

$$= (\sqrt{b_1}+\sqrt{b}) : (\sqrt{b_1}-\sqrt{b});$$

b) místo stran příčky dle (11):

$$(43) \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = (\sqrt{d_2d_3}+\sqrt{d_1d_3}) : (\sqrt{d_2d_3}-\sqrt{d_1d_3})$$

$$= (\sqrt{d_2}+\sqrt{d_1}) : (\sqrt{d_2}-\sqrt{d_1});$$

c) místo stran jejich dolní úseky dle (12):

$$(44)\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=(b_3+a_3):(b_3-a_3);$$

d) místo stran úseky třetí strany dle (13):

$$(45)\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}):(\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2};$$

e) místo stran jejich horní úseky dle (14):

$$(46)\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=(\sqrt[3]{b_1}+\sqrt[3]{a_2}):(\sqrt[3]{b_1}-\sqrt[3]{a_2}).$$

Abychom vypočítali úhly trojúhelníka, jsou-li dány tři různým úhlům příslušné přímky, řídíme se dle vzorce

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

do kterého dosadíme místo stran jich hodnoty, vyjádřené danými přímkami.

Z příček d_1, d_2 a d_3 najdeme

$$(47)\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\left(s-\frac{1}{\sqrt{d_2}}\right)\left(s-\frac{1}{\sqrt{d_3}}\right)}{s\left(s-\frac{1}{\sqrt{d_1}}\right)}},$$

ze sousedních úseků

$$(48)\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-\sqrt{a_2})(s-\sqrt{a_3})}{s(s-\sqrt[6]{a_3c_1^2})}}=\sqrt{\frac{(s-\sqrt{a_2})(s-\sqrt{a_3})}{s(s-\sqrt[6]{a_2b_1^2})}},$$

ze stejnosměrných úseků

$$(49)\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-\sqrt[7]{a_3c_2^3})(s-\sqrt[7]{a_3^3b_1})}{s(s-\sqrt[7]{b_1^3c_2})}},$$

kde všude s znamená poloviční součet menšitelů.

6. *Výseky* jsou zbytky stran po odečtení jejich úseků. Dle této definice jest

$$
(50) \qquad \begin{aligned} e_1 &= a - a_2 - a_3, \\ e_2 &= b - b_1 - b_3, \\ e_3 &= c - c_1 - c_2, \end{aligned}
$$

a dle obrazce na str. 88.

$$
\begin{aligned} e_1 &= BC - BC_1 - CB_1 \\ &= BC - (BC - CC_1) - (B_1C_1 + CC_1) \\ &= - B_1C_1, \\ e_2 &= AC - AC_2 - CA_2 \\ &= AC - (AC - CC_2) - (CC_2 + A_2C_2) \\ &= - A_2C_2, \\ e_3 &= AB - AB_3 - BA_3 \\ &= AB - (AB + BB_3) - (A_3B_3 - BB_3) \\ &= - A_3B_3. \end{aligned}
$$

Výseky stran jsou tedy vůbec záporny.

Jest však výsek také základnou rovnoramenného trojúhelníka, jehož rameny jsou příčky jeho strany a jehož úhel při základně jest roven úhlu původního trojúhelníka, ležícího proti téže straně. (Viz obraz na str. 88.) Jest tedy výsek

$$
(51) \quad e_1 = - 2d_1 \cos \alpha, \; e_2 = - 2d_2 \cos \beta, \; e_3 = - 2d_3 \cos \gamma
$$

dvojnásobným průmětem příslušné příčky na svou stranu a jest kladným, je-li protilehlý úhel trojúhelníka tupým, neb rovná se nulle, je-li tento úhel pravým. Může tedy býti jen jeden výsek kladným neb může též zmizeti.

Násobíme-li každou rovnici (50) některým v ní obsaženým úsekem, nabudeme, přihlížejíce zároveň k rovnicím (3), vztahů některé strany ku příčce, úseku a výseku druhé strany:

$$
(52) \qquad \begin{aligned} a^2 &= d_2^2 + b_1^2 + b_1e_2 = d_3^2 + c_1^2 + c_1e_3, \\ b^2 &= d_1^2 + a_2^2 + a_2e_1 = d_3^2 + c_2^2 + c_2e_3, \\ c^2 &= d_1^2 + a_3^2 + a_3e_1 = d_2^2 + b_3^2 + b_3e_2 \end{aligned}
$$

a násobíme-li tytéž rovnice stranou v nich obsaženou, najdeme vztahy mezi všemi stranami a výsekem některé:

$$
(53) \qquad \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 + ae_1, \\ b^2 &= a^2 + c^2 + be_2, \\ c^2 &= a^2 + b^2 + ce_3. \end{aligned}
$$

Že rovnice (52) dávají Carnotovu větu, v níž úhloměrná funkce nahrazena jest výsekem, shledáme, dosadíme-li do nich hodnoty výseků dle (51). Význam třetího členu v rovnicích (53) najdeme, násobíme-li každou rovnici (51) příslušnou stranou výseku, přihlížejíce zároveň k rovnicím (3); obdržímeť takto:

$$
ae_1 = -2bc \cos \alpha, \; be_2 = -2ac \cos \beta, \; ce_3 = -2ab \cos \gamma
$$

a tedy z rovnic (53) zase Carnotovy věty.

Jiné vztahy výseků najdeme ještě takto: Výška v_1 trojúhelníka ABC na stranu a jest zároveň výškou trojúhelníka AB_1C_1, jehož základnou jest výsek e_1 téže strany. Z prvního trojúhelníka nabudeme

$$
v_1 = b \sin \gamma = c \sin \beta
$$

a z druhého

$$
v_1 = -\frac{e_1}{2} \operatorname{tg} \alpha.
$$

Z rovnic těchto a jiných podobně sestavených vycházejí vztahy

$$
(54) \qquad \begin{aligned} 2b \sin \gamma &= 2c \sin \beta = -e_1 \operatorname{tg} \alpha, \\ 2a \sin \gamma &= 2c \sin \alpha = -e_2 \operatorname{tg} \beta, \\ 2a \sin \beta &= 2b \sin \alpha = -e_3 \operatorname{tg} \gamma, \end{aligned}
$$

dle nichž každá strana jest dána výsekem některé jiné strany. Abychom našli vztah mezi stranou a jejím výsekem, dosaďme do (51) hodnotu pro příčku z úměr (36) a vzniknou rovnice

$$
(55) \qquad \begin{aligned} 2a \sin \beta \sin \gamma &= -e_1 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha, \\ 2b \sin \alpha \sin \gamma &= -e_2 \sin \beta \operatorname{tg} \beta, \\ 2c \sin \alpha \sin \beta &= -e_3 \sin \gamma \operatorname{tg} \gamma. \end{aligned}
$$

Vyjádříme-li konečně dle úměr (1) poměr příčky v (51) k některému úseku její strany příslušnými funkcemi, obdržíme vztahy úseku k výseku téže strany:

$$
(56)\quad \begin{aligned}
2a_2 \cos\alpha \sin\gamma &= -e_1 \sin\beta, & 2a_3 \cos\alpha \sin\beta &= -e_1 \sin\gamma,\\
2b_3 \cos\beta \sin\alpha &= -e_2 \sin\gamma, & 2b_1 \cos\beta \sin\gamma &= -e_2 \sin\alpha,\\
2c_1 \cos\gamma \sin\beta &= -e_3 \sin\alpha, & 2c_2 \cos\gamma \sin\alpha &= -e_3 \sin\beta.
\end{aligned}
$$

Porovnáme-li ještě součiny rovnic (51), (55) a každé skupiny rovnic (56), najdeme zase souvislý vztah (6), doplněný výseky a úhly:

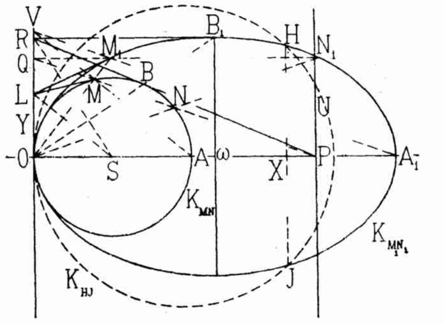
$$
(57)\quad abc = d_1 d_2 d_3 = a_2 b_3 c_1 = a_3 b_1 c_2 = \frac{-e_1 e_2 e_3}{8 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}.
$$

Řešení některých úloh geometrických.

Žákům středních škol podává

Václav Jeřábek,
professor při c. k. vyšší realné škole v Brně.

I. Jest dán kruh dotýkající se osy OY v počátku O. Pevným bodem P (p, o) vedený paprsek seče kruh v bodech M, N a osu OY v bodu Q (o, q). Přímky OM, ON protínají rovnoběžku vedenou bodem Q s osou OX v bodech M_1, N_1. Jaké jest geom. místo bodů M_1, N_1, a v jakém vztahu jest kružnice ke geom. místu?



Obr. 1.

Řešení. Budiž S (α, o) středem daného kruhu K_{MN}, jenž má rovnici

$$
(1)\qquad x^2 - 2\alpha x + y^2 = 0.
$$

Znamenáme-li

$$\mathrm{OP} = p = \frac{1}{u}, \qquad \mathrm{OQ} = q = \frac{1}{v},$$

jest rovnice přímky PQ

$$(2) \qquad ux + vy - 1 = 0,$$

kdež u má hodnotu stálou a v proměnlivou.

Abychom obdrželi rovnice přímek OM, ON, učiňme rovnice (1) a (2) pomocnou proměnnou λ stejnoměrné, i bude rovnice

$$x^2 - 2\lambda ax + y^2 = 0$$

značiti proměnlivou kružnici K_{MN} a druhá

$$ux + vy - \lambda = 0$$

při stálých hodnotách u, v proměnlivou přímku PQ. Vyloučením λ z posledních dvou rovnic, obdržíme rovnici geom. místa bodů M, N, v nichž proměnlivá kružnice K_{MN} a přímka PQ se protínají. Rovnice přímek jest tedy

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - 2ax\,(ux + vy) = 0.$$

Položíme-li v rovnici (2) $x = 0$, bude

$$(4) \qquad vy - 1 = 0$$

značiti rovnici přímky vedené bodem Q rovnoběžně s osou OX.

Vyloučíme-li z rovnic (3), (4) proměnlivý parametr v, obdržíme rovnici

$$(5) \qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2aux^2 = 0.$$

Hledaným geom. místem bodů M_1, N_1 jest kuželosečka dle osy OX souměrně položená a mající s kružnicí danou K_{MN} v počátku styk čtyřbodový, pročež jest K_{MN} kruhem křivosti ve vrcholu jejím O.

Píšeme-li rovnici (5) ve tvaru

$$x^2\,(1 - 2\,au) + y^2 - 2ax = 0,$$

pak poznáváme, že kuželosečka jest ellipsa, parabola nebo hyperbola, je-li charakteristický binom této rovnice

$$B^2 - AC = 1 - 2au$$

kladný, roven nulle nebo záporný.

1. Budiž $1 - \alpha u > 0$ aneb $p > 2\alpha$ (ellipsa).

Splynou-li přímky OM, ON v jedinou přímku OB, splynou i body M, N v jediný bod B a M_1, N_1 v jediný bod B_1. Tečna PR jest mezní polohou sečny PQ a R mezní polohou bodu Q. Přímka QM_1N_1 stane se tečnou RB_1 ellipsy v bodu B_1 a ježto osa OX jest s RB_1 rovnoběžná, jest B_1 vrcholem ellipsy.

K témuž výsledku dospějeme i počtem, když rovnici (3) dáme tvar

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\alpha v\left(\frac{y}{x}\right) + 1 - 2\,\alpha u = 0$$

a uvážíme, že přímky OM, ON splynou v přímku jedinou, jest-li diskriminant této rovnice

$$\alpha^2 v^2 - 1 + 2\,\alpha u = 0. \tag{6}$$

V tomto případě jest

$$\frac{y}{x} = \alpha v$$

a vyloučíme-li v z posledních dvou rovnic, obdržíme rovnici přímky OB_1

$$\frac{y}{x} = \sqrt{1 - 2\,\alpha u}\,. \tag{7}$$

Obdobně plyne z rovnice (4) a (6) rovnice přímky RB

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 2\,\alpha u}}$$

Řešíme-li poslední dvě rovnice dle x, bude

$$x_{B_1} = \frac{\alpha}{1 - 2\,\alpha u}$$

úsečkou bodu B_1.

Vrcholy ellipsy na ose OX položené jsou:

$$O(0,\ 0),\ A_1\left(\frac{2\alpha}{1 - 2\,\alpha u},\ 0\right),$$

pročež jest

$$x_\omega = \frac{a}{1 - 2au}$$

úsečkou středu ω ellipsy, a protože $x_{B_1} = x_\omega$, jest B_1 vrcholem ellipsy.

Směrnice přímky OB_1 (7) jest

$$\frac{\omega B_1}{O\omega} = \sqrt{1 - 2au}$$

a přímka RS má směrnici

$$\frac{OR}{OS} = -\frac{y_R}{y_S} = -\frac{1}{\sqrt{1 - 2au}},$$

jest tedy přímka RS kolmá ku OB_1 a na tom zakládá se známé sestrojení středu S kruhu křivosti ellipsy ve vrcholu O, je-li ellipsa dána svými osami: *Sestrojíme-li totiž z poloos ellipsy obdélník $O\omega B_1 R$, protne kolmice, spuštěná s vrcholu R na úhlopříčku OB, osu $O\omega$ ve hledaném středu křivosti S.*

2. Budiž $1 - 2au = 0$ aneb $p = 2a$ (parabola). Rovnice kuželosečky (5) přejde v rovnici

$$y^2 = 2ax,$$

pročež jest parametr a paraboly roven poloměru kruhu křivosti ve vrcholu O a sestrojení kruhu křivosti jest patrné.

3. Nechť jest $1 - 2au < 0$ aneb $p < 2a$ (hyperbola). V tomto případě jsou přímky OM, ON, jakož i body B, B_1 imaginárné.

Přímka jdoucí bodem $P\left(\frac{1}{u}, 0\right)$ protíná kruh K_{MN} v bodech EF. Rovnice přímek OE, OF plyne z rovnice (3), položíme-li v ní $v = 0$,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 - 2au = 0$$

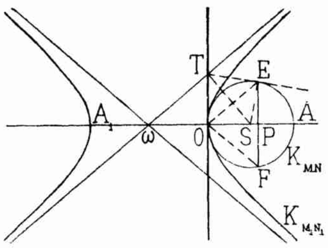
a protože touž rovnici lze obdržeti z kvadratické části rovnice kuželosečky (5), jsou přímky OE, OF rovnoběžny s asymptotami hyperboly.

Ježto hyperbola má své realné vrcholy v bodech O (0, 0),

$A_1\left(\frac{2\alpha}{1-2\alpha u}, 0\right)$, jest střed její v bodu $\omega\left(\frac{\alpha}{1-2\alpha u}, 0\right)$ a asymptoty budou míti rovnice

$$y = \pm\sqrt{2\alpha u - 1}\left(x - \frac{\alpha}{1-2\alpha u}\right),$$

z nichž jedna protíná osu OY v bodu T $\left(0, \frac{\alpha}{2\alpha u - 1}\right)$.



Obr. 2.

Směrnice přímky OE jest

$$\frac{PE}{OP} = \frac{y}{x} = \sqrt{1-2\alpha u}$$

a přímky ST

$$\frac{OT}{OS} = -\frac{y_T}{y_S} = -\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha u}},$$

z čehož vysvítá, že ST stojí kolmo na OE i ωT, pročež:

Spustíme-li s bodu T, v němž asymptota hyperboly seče její tečnu vrcholovou, kolmici na asymptotu, protne kolmice tato realnou osu ve středu S kruhu křivosti ve vrcholu O.

Pošineme-li při ellipse a hyperbole počátek O do středu $\omega\left(\frac{\alpha}{1-2\alpha u}, 0\right)$, t. j. píšeme-li $\left(x + \frac{\alpha}{1-2\alpha u}\right)$ místo x do rovnice (5), obdržíme po několika redukcích rovnici

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\alpha}{1-2\,\alpha u}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{\alpha^2}{1-2\,\alpha u}} = 1$$

aneb. učiníme-li

$$(8) \qquad a^2 = \left(\frac{\alpha}{1-2\,\alpha u}\right)^2, \qquad \pm b^2 = \frac{\alpha^2}{1-2\,\alpha u},$$

dle toho, je-li $1 - 2\,\alpha u \lesseqgtr 0$, dostaneme rovnici ellipsy a hyperboly

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vyloučíme-li u z rovnic (8), bude

$$\pm b^2 = \alpha a,$$

z kteréžto známé relace plyne již dříve uvedené sestrojení středu kruhu křivosti ve vrcholu ellipsy nebo hyperboly.

2. *Geometrické řešení.* Budiž rovina kruhu K_{NM} průmětnou π (obr. 1.) a kružnice stopou plochy kuželové, jejíž vrchol o má svůj průmět v bodu O. Položme osou OY rovinu ϱ rovnoběžně s přímkou oP, která má svou stopu na průmětné v bodu P. Přímkou PQ a vrcholem o určená rovina seče rovinu ϱ v přímce Qm_1n_1 rovnoběžné s oP a touž rovinou protnuta jest plocha kuželová v přímkách oM, oN. Body m_1, n_1, v nichž Qm_1n_1 protíná přímky oM, oN, přináležejí kuželosečce $K_{m_1n_1}$, ve které rovina ϱ seče plochu kuželovou. Ježto QM_1N_1 jest průmětem přímky Qm_1n_1 a ježto přímky oM, oN mají své průměty v přímkách OM, ON, jest geom. místo bodů M_1, N_1 průmětem $K_{M_1N_1}$ kuželosečky $K_{m_1n_1}$ a tedy též kuželosečkou, která jest s kružnicí K_{MN} v centrálné kollineaci dle osy OQ a středu O.

Rovina s průmětnou rovnoběžná nechť protíná plochu kuželovou v kružnici K_{hi} a rovinu ϱ v přímce hi rovnoběžné se stopou OQ roviny ϱ. Roviny OoP a ϱ sekou se v přímce Oa_1 rovnoběžné s oP. Přímka hi a kružnice K_{hi} mají společné dva body h, i, které jsou dle přímky Oa_1 souměrně položeny a kuželosečce $K_{m_1n_1}$ náležejí. Protože přímka hi jest rovnoběžna s průmětnou π, jsou průměty H, J bodů h, i souměrně sdruženy dle osy oP a náležejí průmětu $K_{M_1N_1}$ kuželosečky $K_{m_1n_1}$. Bod O jest jedním vrcholem kuželosečky $K_{M_1N_1}$, druhý vrchol A_1 jest v centr. kollineaci s bodem A, v němž OP a K_{MN} se protínají. Spojíme-li tedy bod V, v němž AM osu kollineace OQ seče, s bodem M_1, protne spojnice tato osu OP v druhém vrcholu A_1 kuželosečky $K_{M_1N_1}$.

Tečny stejnolehlé v bodech M, M_1 protínají se v bodu samodružném L na ose kollineace OQ. Ježto trojúhelník OMV jest pravoúhlý a LO, LM jsou tečny kruhu K_{MN}, jest

$$LO = LM = LV.$$

Tím jsme geometricky dokázali známou vlastnost:

Tečna kuželosečky půlí část tečny *omezenou jedním vrcholem a bodem, v němž přímka, spojující druhý vrchol s bodem dotyčným, protíná tečnu vrcholovou.*

Je-li kuželosečka parabolou, jest A_1 v nekonečnu a přímka M_1V jest s osou paraboly rovnoběžna.

Dříve jsme seznali, že kružnice K_{hi} má s kuželosečkou $K_{m_1n_1}$ dva body společné h, i a že i její průmět K_{HJ} protíná kuželosečku $K_{M_1N_1}$ ve dvou bodech H, J, které jsou průměty bodů h, i. Kromě toho dotýká se kružnice K_{HJ} kuželosečky $K_{M_1N_1}$ ve vrcholu O. Splyne-li však rovina kruhu K_{hi} s průmětnou, stotožní se kruh K_{hi}, jakož i jeho průmět K_{HJ} s kruhem K_{MN}, přímky hi, HJ splynou s osou kollineace OQ a body H, J s vrcholem O. Kruh K_{MN} a kuželosečka $K_{M_1N_1}$ mají tedy ve vrcholu O styk čtyřbodový a proto jest K_{MN} kruhem křivosti kuželosečky $K_{M_1N_1}$ ve vrcholu O. Snadno lze nahlédnouti, že přímka LS stojí kolmo na tetivě OM a AV na tetivě OM_1, pročež:

Vedeme-li v kterémkoliv bodu M_1 kuželosečky tečnu LM_1 až k bodu L tečny vrcholové OQ, a spustíme-li s bodu L kolmici na tetivu OM_1 bodu dotyčného, jest průsečík S této kolmice s osou hlavní kuželosečky středem kruhu křivosti ve vrcholu O.

Spojíme-li kterýkoliv bod M_1 kuželosečky s jedním vrcholem A_1 přímkou A_1M_1 a spustíme-li s bodu V, ve kterém AM_1 a tečna druhého vrcholu se protínají, kolmici na tetivu OM_1, protne kolmice tato hlavní osu v bodu A a úsečka OA jest průměrem kruhu křivosti kuželosečky ve vrcholu O.

Rovina položená přímkou oP rovnoběžně s rovinou ϱ má v průmětně π svou stopu v přímce PU (úběžnici) rovnoběžné s OQ. Má-li úběžnice s kružnicí K_{MN} společné dva různé body imaginárné, dva body v jediný bod A splývají aneb dva různé body realné E, F, jest kuželosečka $K_{M_1N_1}$ ellipsou, parabolou nebo hyperbolou.

Je-li kuželosečka ellipsou, jest tečna PB kružnice K_{MN} v bodu B v centr. kollineaci s tečnou vrcholu B_1 a proto průsečík R těchto tečen leží v ose kollinearné OQ. Ježto body B_1 a R jsou zvláštní polohy bodů M_1 a L, jest RS kolmo na OB_1 a na tom zakládá se sestrojení středu křivosti S.

Při hyperbole jest tečna kruhu K_{MN} (obr. 2.) v bodu E v centr. kollineaci s asymptotou hyperboly, která jest s přímkou OE rovnoběžna a prochází bodem T, ve kterém tečna osu kollinearnou OQ seče. V tomto případě jest bod T význačnou polohou bodu L a přímka OE význačnou polohou přímky OM_1, pročež protíná kolmice v bodu T na asymptotu postavená realnou osu hyperboly ve středu křivosti S.

II. Jest dán kruh K, na jeho průměru OA kdekoliv bod P a tečna AQ. Bodem P vedená přímka protíná kružnici K v bodech M, N a tečnu AQ v bodu Q. Nalézti geom. místo bodů M_1, N_1, v nichž přímky OM, ON protínají přímku, jdoucí bodem Q rovnoběžně s OA.

Řešení. Zvolme O za počátek, OA za osu X pravoúhlé soustavy souřadnic a znamenejme $\overline{OA} = 2a$, $\overline{OP} = p = \frac{1}{u}$.

Rovnice kruhu a přímky MN jsou

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0, \tag{1}$$

$$ux + vy - 1 = 0, \tag{2}$$

kdež u, v značí převrácené hodnoty úseků, které přímka MN na osách OX, OY utíná.

Rovnice přímek OM, ON obdržíme, učiníme-li rovnice kruhu a přímky MN pomocnou proměnnou stejnoměrné a vyloučíme-li tuto proměnnou z obou rovnic. Rovnice přímek zmíněných bude

$$x^2 + y^2 - 2ax\,(ux + vy) = 0. \tag{3}$$

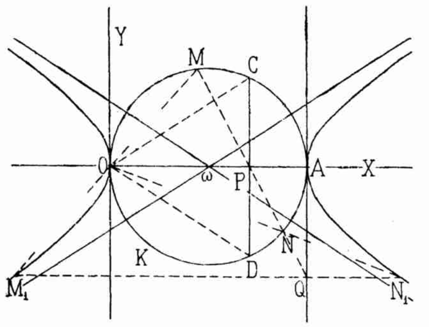
Položíme-li v rovnici (2) $x = 2a$, obdržíme rovnici přímky M_1N_1

$$vy = 1 - 2au.$$

Vyloučíme-li z této rovnice a rovnice (3) proměnný parametr v, nabudeme rovnici

$$x^2(1 - 2au) + y^2 - 2a(1 - 2au)x = 0,$$

která jest rovnicí geom. místa bodů M_1, N_1 a značí kuželosečku.



Obr. 3.

Pošineme-li nyní počátek O do středu ω kružnice K, nezměníce směry os souřadných, t. j. píšeme-li v rovnici poslední $(x + a)$ místo x, dospějeme po několika redukcích k rovnici

$$x^2(1 - 2au) + y^2 = a^2(1 - 2au)$$

aneb

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - 2au)a^2} = 1$$

a položíme-li $(1 - 2au)a^2 = \pm b^2$, obdržíme

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Geom. místem bodů M_1, N_1 jest tedy $\begin{matrix}\text{ellipsa}\\ \text{hyperbola}\end{matrix}$ dle toho, je-li $1 - 2au \gtrless 0$.

Je-li u kladné, jest

$$\frac{1}{u} - 2a \gtrless 0$$

čili $$p - 2a \gtrless 0$$
aneb $$p \gtrless 2a.$$

Leží-li tedy bod P mimo kruh v prodlouženém průměru OA, jest geom. místem ellipsa, nalezá-li se však bod P na průměru uvnitř, jest geom. místo hyperbola.

Je-li u záporné, jest i p záporné a výraz $(1 - 2au)$ kladný, pročež jest vždy geom. místem ellipsa, leží-li bod P v prodlouženém průměru AO.

Položíme-li do rovnice kruhu

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$x = p = \frac{1}{u}$, bude

$$y = \pm \frac{\sqrt{2au - 1}}{u}$$

a $$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{2au - 1} = \pm\sqrt{\mp \frac{b^2}{a^2}},$$

tedy $$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a} i, \quad \frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}$$

značí přímky rovnoběžné s asymptotami kuželosečky (4). Přímky dotčené spojují počátek O s body C, D, v nichž kolmice postavená v bodu P na OA kolmo, seče kružnici danou.

2. *Geom. řešení.* Rovina kruhu K budiž průmětnou π (obr. 3.) a O průmětem vrcholu o plochy kuželové, jejíž stopou v průmětně π jest kružnice K. Body P, Q mějme za stopy rovnoběžných přímek oP a m_1Q majících své průměty v přímkách OP a M_1Q. Přímku PQ, která kružnici K seče v bodech M, N lze míti za stopu roviny σ přímkami oP a m_1Q položené. Rovina σ protíná plochu kuželovou v přímkách oM, oN a přímky tyto seče přímka m_1Q v bodech m_1, n_1, které jsou zároveň průsečíky přímky m_1Q s plochou kuželovou. Ježto OM, ON, M_1Q jsou průměty přímek oM, oN a m_1Q, jsou i body M_1, N_1, v nichž M_1Q seče přímky OM, ON, průměty bodů m_1, n_1.

Položíme-li přímkou AQ rovinu ϱ rovnoběžně s přímkou oP, bude ϱ obsahovati též přímku m_1Q a ježto m_1, n_1 jsou dvěma body společnými rovině ϱ a ploše kuželové, jest geom. místem bodů m_1, n_1 průsek roviny ϱ s plochou kuželovou a geom. místem bodů M_1, N_1 průmět tohoto řezu. Nyní jest patrno, že hledaným geom. místem jest kuželosečka.

Rovina položená vrcholem o plochy kuželové rovnoběžné s rovinou ϱ seče průmětnu π v přímce CD, jdoucí bodem P rovnoběžně se stopou AQ. Má-li tedy přímka CD (úběžnice) a kružnice K dva $\begin{matrix}\text{realné}\\ \text{imaginárné}\end{matrix}$ body společné, což nastane tehdy, je-li bod P $\begin{matrix}\text{uvnitř}\\ \text{mimo}\end{matrix}$ kruhu K, jest průsek kužele a tedy i hledané geom. místo $\begin{matrix}\text{hyperbolou}\\ \text{ellipsou.}\end{matrix}$

Zároveň poznáváme, že kuželosečka a kružnice jsou v centr. kollineaci dle středu O a osy AQ.

III. Bodem A (a, o) jdoucí dvě přímky určují na ose souřadné OY body B (o, b), C $(o, -b)$. Počátkem O pravoúhlých souřadnic vedený paprsek OM seče přímku AB v bodu M_1 a přímku AC v bodu M_2. Budiž $OM = \varrho$, $OM_1 = \varrho_1$, $OM_2 = \varrho_2$.

a) Nalézti geom. místa bodu M, je-li

$$\varrho^2 = \varrho_1 \varrho_2 ;$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_2^2} .$$

b) Jaké jest geom. místo bodu, v němž se nalezená geom. místa protínají, je-li a stálé a b proměnlivé?

Řešení: Přímky AB a AC mají rovnice

$$AB \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 ,$$

$$AC \equiv \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1 .$$

Ježto bod M_1 (x_1, y_1) leží v přímce AB a M_2 (x_2, y_2) v přímce AC, jest

$$\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} = 1 ,$$

$$\frac{x_2}{a} - \frac{y_2}{b} = 1 .$$

Zvolíme-li O za pol, OX za osu polárnou a φ za odchylku paprsku OM od osy OX, bude

$$x_1 = \varrho_1 \cos\varphi\,,\quad y_1 = \varrho_1 \sin\varphi\,,$$
$$x_2 = \varrho_2 \cos\varphi\,,\quad y_2 = \varrho_2 \sin\varphi\,,$$

pročež

$$\varrho_1 \left(\frac{\cos\varphi}{a} + \frac{\sin\varphi}{b}\right) = 1,$$
$$\varrho_2 \left(\frac{\cos\varphi}{a} - \frac{\sin\varphi}{b}\right) = 1.$$

1. Podmínku první lze též psáti

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2}\,,$$

i bude
$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}$$

aneb
$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2\varphi - a^2 \sin^2\varphi}\,.$$

Tím jsme obdrželi polárnou rovnici geom. místa bodu M. Přejdeme-li k souřadnicím pravoúhlým, užitím transformačních vzorců $\cos\varphi = \frac{x}{\varrho}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\varrho}$, obdržíme

(1)
$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2\,.$$

Z rovnice této, jakož i z rovnice polární jest patrno, že geom. místem bodu M jest hyperbola.

2. Podmínka druhá

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_2^2}$$

vede nás k rovnici

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{2 \sin\varphi \cos\varphi}{ab}$$

aneb
$$\varrho^2 = \frac{ab}{2 \sin\varphi \cos\varphi}$$

a přejdeme-li k souřadnicím pravoúhlým, bude

(2)
$$xy = \frac{1}{2} ab\,.$$

Geom. místem bodu M jest rovnoramenná hyperbola, mající osy souřadné za asymptoty.

3. Vyloučíme-li b z rovnic (1) a (2), dospějeme k rovnici třetího místa geometrického

$$x = \pm a\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}}.$$

Geom. místo skládá se ze dvou realných a dvou imaginárných přímek s osou OY rovnoběžných.

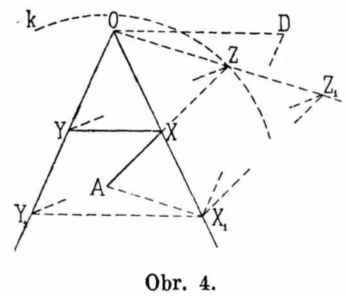
Poznámka. Obdobně lze řešiti úlohu, je-li

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2},\ \varrho^2 = \varrho_1^2 \pm \varrho_2^2,\ \varrho = \varrho_1 \pm \varrho_2,\ \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} \pm \frac{1}{\varrho_2}.$$

IV. V úhlu XOY jest dán bod A; má se vésti v daném směru příčka XY tak, aby součet AX + XY rovnal se dané délce a.)*

Řešení: Budiž XY příčka hledaná a AX + XY $= a$.

Prodlužme AX o XZ = XY a sestrojme k trojúhelníku XYZ podobně položený trojúhelník $X_1X_1Z_1$ dle bodu O tak, aby $X_1Y_1 = X_1Z_1 = a$. Protože AZ a X_1Z_1 jsou rovnoběžny a stejny, jest paprsek OZZ_1 s AX_1 rovnoběžný. Nyní známe pro Z dvě místa geometrická a to OZ_1 a kružnici ze středu A poloměrem AZ $= a$ sestrojenou, pročež lze bod Z, jakož i AXZ sestrojiti a XY v daném směru vésti.



Obr. 4.

Sestrojení: Veďme přímku OD v daném směru YX a učiňme OD $= a$, bodem D jdoucí rovnoběžka s OY seče OX v bodu X_1. Sestrojme vrcholem O přímku OZ_1 rovnoběžně s AX_1 a ze středu A poloměrem a kružnici k. Je-li Z průsečíkem

*) Ve zvláštním případě může A ležeti na rameni OY (Viz Petersen, Methoden u. Theorien etc., úl. 186.)

kružnice k s polopaprskem OZ_1, protne přímka AZ rameno OX v bodu X, kterým lze vésti příčku XY ve směru daném DO.

Důkaz: Dle sestrojení jest příčka XY směru daného, polopaprsek OZZ_1 jest s AX_1 rovnoběžný a $AZ = a$. Veďme rovnoběžně X_1Z_1 s XZ a X_1Y_1 s XY. V rovnoběžníku AX_1Z_1Z jest

$$X_1Z_1 = AZ = a,$$
$$X_1Y_1 = DO = a,$$

tedy
$$X_1Y_1 = X_1Z_1.$$

Z podobných trojúhelníků XYZ a $X_1Y_1Z_1$ plyne

$$XY : XZ = X_1Y_1 : X_1Z_1 = 1,$$

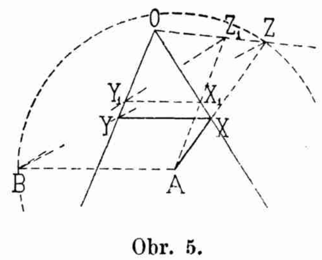
pročež
$$XY = XZ$$

a ježto
$$AX + XZ = a,$$

jest též
$$AX + XY = a,$$

což bylo dokázati.

Omezení. Seče-li kružnice K polopaprsek ve dvou bodech, v jednom aneb v žádném, má úloha dvojí, jedno anebo žádné řešení. Dotýká-li se polopaprsek kružnice, jest jenom jedno řešení.



Obr. 5.

Druhé řešení. Příčka v daném směru vedená protínejž ramena OX, OY v bodech X, Y tak, že $AX + XY = a$. Prodlužme AX o $XZ = XY$ a k trojúhelníku XYZ sestrojme kterýkoliv stejnolehlý trojúhelník $X_1Y_1Z_1$ dle středu O a osy homologie (kollineace) AB rovnoběžné s XY. Budiž B průsečíkem stejnolehlých stran YZ a Y_1Z_1. Ježto příčka XY jest rovnoběžna s AB, jest

$$AB : AZ = XY : XZ = 1,$$

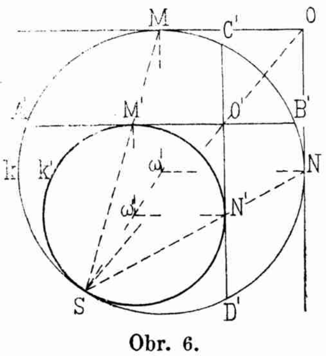
pročež
$$AB = AZ = a.$$

Poloha bodu B jest tedy daným směrem a délkou $AB = a$ určena. Nyní jest patrno, že trojúhelník $X_1Y_1Z_1$ lze snadno sestrojiti a že OZ_1 jest jedním geom. místem pro bod Z. Druhým geom. místem bodu Z jest kružnice sestrojená ze středu A poloměrem $AZ = a$. Místy těmito jest určen vrchol Z trojúhelníka XYZ, jehož další dva vrcholy X, Y snadno lze sestrojiti.

Rozborem předešlým vedeni jsme k následujícímu sestrojení: Veďme AB rovnoběžně s XY a učiňme $AB = a$. Sestrojíme-li v úhlu XOY kteroukoliv příčku X_1Y_1 s AB rovnoběžnou, protnou se AX_1 a BY_1 v bodu Z_1. Seče-li kružnice, ze středu A poloměrem $AB = a$ sestrojená, polopaprsek OZ_1 v bodu Z a je-li X průsečíkem přímky AZ s ramenem OX_1 a Y průsečíkem přímky BZ s ramenem OY_1, jest XY příčkou hledanou.

Kolik řešení vyhovuje úloze, lze poznati jako při řešení předešlém.

V. *Sestrojiti kruh, který se dotýká kruhu daného a dvou přímek daných.*



Obr. 6.

Buďtež dány dvě přímky, na př. tetivy A′B′ a C′D′ v kruhu k. Kruh k' nechť se dotýká kruhu daného k v bodu S a tetiv A′B′, C′D′ v bodech M′, N′. Považujeme-li S za neznámý bod podobnosti, protnou paprsky SM′, SN′ kružnici k v bodech M, N stejnolehlých ku M′, N′. Tečny kruhu k v bodech M, N protínají se v bodu O stejnolehlém ku průsečíku O′ přímek A′B′, C′D′. Paprsek podobnosti OO′ protíná kruh k ve hledaném bodu podobnosti S. Znajíce nyní bod S, můžeme ku známému bodu dotyčnému M sestrojiti stejnolehlý bod dotyčný M′ kruhu k', odkudž sestrojení kruhu k' jest patrné. Při neomezených přímkách, má úloha 8 řešení. K téže konstrukci přichází Machovec vztahy prostorovými ve článku „O úloze Apollonické v deskriptivní geometrii. (Pátá roční zpráva obecní vyšší realné školy v Karlíně za šk. r. 1879., str. 10.)

Úlohy.

Úloha 17.

Najděte součet čísel mezi 1000 a 2000, která nejsou dělitelna ani 2ma ani 5ti.

Prof. *Ad. Mach.*

Úloha 18.

Mezi čísla 3 a 18 vložte dvě čísla, aby z těchto čtyř čísel první tři tvořila řadu geometrickou, poslední tři řadu arithmetickou.

Týž.

Úloha 19.

Sečtěte

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2.$$

Týž.

Úloha 20.

Sečtěte n členů řady

$$3 + 33 + 333 + 3333 + \ldots.$$

Týž.

Úloha 21.

Kolik let jest osobě, jejíž stáří rovná se letos součtu číslic onoho roku, ve kterém se narodila?

Týž.

Úloha 22.

V nějakém městě umírá ročně $\frac{1}{90}$ *obyvatelstva, jež bylo na počátku roku;* $\frac{1}{60}$ *téhož obyvatelstva ročně se narodí. Za kolik roků se zdvojnásobí obyvatelstvo tohoto města?*

Týž.

Úloha 23.

Dokázati, že pro m a n mající stejná označení jest

$$\sqrt{2m^2 + 2n^2 + 12mn} - 2\sqrt{mn} \geqq m + n.$$

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Úloha 24.

Dokázati, že pro realná x v počtu n jest

$$n\,\Sigma\, x^2 \geqq (\Sigma\, x)^2.$$

Týž.

Úloha 25.

Do trojúhelníka abc vepsati jest trojúhelník a′b′c′ tak, aby bylo

$$ab' = ac',\ bc' = ba',\ ca' = cb'.$$

Jsou-li α, β, γ úhly trojúhelníka abc, kterou velikost mají úhly trojúhelníka a′b′c′? (Vrchol a′ leží ve straně bc, b′ v ca, c′ v ab).

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 26.

Nad stranami trojúhelníka abc sestrojeny vně trojúhelníka abc trojúhelníky rovnostranné abc′, bca′, cab′. Dokažte, že

a) spojnice aa′, bb′, cc′ jsou stejné,

b) protínají se v jediném bodě,

c) tvoří pravidelný svazek trojpaprskový.

Týž.

Úloha 27.

Dokázati jest vztahy úlohy předešlé pro případ, když vrcholy a,a′ leží na téže straně přímky bc, vrcholy b,b′ na téže straně přímky ca, vrcholy c,c′ na téže straně přímky ab.

Týž.

Úloha 28.

V trojúhelníku rovnoramenném budiž $BC = 2a$ podstavou, $AD = v$ výškou.

Učiňme $AE = v - a$ *na* AB,

$AF = v + a$ *na* AC;

dokázati jest, že příčka EF tvoří s podstavou BC úhel 45^0.

Prof. *V. Jeřábek.*

Úloha 29.

Sestrojiti čtyrúhelník ABCD, jsou-li dány jeho strany AB, BC, CD, úhlopříčka AC a délka příčky EF, která spojuje středy E, F úhlopříček AC, BD.

Týž.

Úloha 30.

V pravidelném n-úhelníku P jest vrchol A spojen se středem M strany BC, vrchol B se středem N strany CD, vrchol C se středem O strany DE atd. Přímkami AM, BN, CO, . . . omezen jest pravidelný n-úhelník P', jehož vrcholy jsou P, Q, . . .

Je-li a stranou, α úhlem n-úhelníka P, jest

$$P' = \frac{na^2}{4}\, tg\, \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{(1 - 2\cos\alpha)^2}{5 - 4\cos\alpha}.$$

Jakou hodnotu má P' pro n = 3, 4 nebo 6?

Prof. *V. Jeřábek.*

Úloha 31.

Přímému trojbokému hranolu jest vepsána koule všech stěn se dotýkající. Jak veliký jest krychlový obsah hranolu, jsou-li dány úhly podstavy

$$\alpha = 62^0 42' 30'', \ \beta = 44^0 16' 12''$$

a poloměr r = 5·1429 kruhu podstavě opsaného?

Týž.

Úloha 32.

Dán jest pravidelný osmistěn o hraně h a bod mající od středu jeho vzdálenost k. Dokažte, že součet zčtvercovaných vzdáleností bodu toho od vrcholů osmistěnu jest

$$S = 9h^2 + 6k^2.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 33.

Jsou-li a, b, c délky hran pravoúhlého rovnoběžnostěnu a k vzdálenost bodu nějakého od středu rovnoběžnostěnu, který jest součet zčtvercovaných vzdáleností bodu toho od vrcholů rovnoběžnostěnu?

Týž.

Úloha 34.

Bodem (3, 6) vésti přímku tak, aby trojúhelník omezený osami X, Y a touto přímkou měl plochu minimální.

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Úloha 35.

Do čtverce o straně a vepsány jsou čtyry paraboly, které dotýkají se vždy dvou a dvou stran čtverce ve vrcholech. Spo-

jíme-li přímkami průsečné body těchto parabol, dostaneme čtverec, do něhož vepsány opět paraboly. Pokračujeme li tak dále, jak velký jest součet ploch všech čtverců?

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Úloha 36.

Do ellipsy jest vepsán kruh středem procházející. a) Jak velký jest poloměr kruhu toho, jsou-li a, b poloosy ellipsy? b) V kterém poměru jsou osy ellipsy, má-li kruh vepsaný lineárnou výstřednost za průměr?

Prof. *V. Jeřábek.*

Úloha 37.

Ustanoviti jest plochu rovnoběžníka omezeného tečnami kolmými k asymptotám hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 38.

Dána jest hyperbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$; *v ní vytčeny body protější*

$$m\,(x_1, y_1),\ n\,(-x_1, -y_1).$$

Bodem m vedena přímka M kolmá k jedné asymptotě, bodem n přímka N kolmá ke druhé asymptotě; které jest geom. místo průsečíku p přímek M a N?

Týž.

Úloha 39.

V rouře barometrické o průřezu 1 cm² stojí rtuť do výše 75 cm; prostor prázdný nad rtutí obnáší 10 cm. Jak klesne sloupec rtuťový, když vnikne do roury 1 cm³ vzduchu?

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Úloha 40.

Úhel inklinační magnetky na jistém místě jest i. Zavěsíme-li na konec nad horizontem vyčnívající m gramů, uzavírá magnetka úhel α s rovinou vodorovnou. Jaké závaží nutno zavěsiti, aby magnetka stála horizontálně?

Týž.

Vyčíslení jistých Eulerových integrálů neomezených.

Napsal

Augustin Pánek.

(Pokračování.)

VI. Chceme-li vyčísliti integrál

$$V = \int \frac{dx}{(a + bx^n)\sqrt[2n]{ax^n + 2bx^{2n}}}, \tag{1}$$

položíme zase

$$\sqrt[2n]{x^n(a + 2bx^n)} = px, \tag{2}$$

z kteréž rovnice plyne

$$a + 2bx^n = p^{2n} x^n \tag{3}$$

aneb dělením x^n

$$ax^{-n} + 2b = p^{2n}.$$

Když tuto rovnici differencujeme a krátíme n, dostaneme

$$- ax^{-n-1} dx = 2p^{2n-1} dp,$$

tedy

$$dx = -\frac{2}{a} x^{n+1} p^{2n-1} dp. \tag{4}$$

Z rovnice (3) jde přímo

$$a + bx^n = - x^n(b - p^{2n}). \tag{5}$$

Dosadíme-li (2), (4) a (5) do předloženého integrálu, nabývá tvaru integrálu differenciálu racionálního

$$\int \frac{dx}{(a + bx^n)\sqrt[2n]{x^n(a + 2bx^n)}} = \frac{2}{a} \int \frac{p^{2n-2} dp}{b - p^{2n}}. \tag{1'}$$

Jest-li

$$a = -1,\ b = 1,$$

obdržíme

(6) $$\int \frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{(1 - x^n)\sqrt[2n]{2x^n - 1}} = 2\int \frac{p^{2n-2}dp}{1 - p^{2n}}.$$

Kdybychom chtěli integrál (6) vyčísliti přímo, kladli bychom dle substituce (2)

$$\sqrt[2n]{2x^n - 1} = p\sqrt{x}.$$

VII. Integrál tvaru

(1) $$V = \int \frac{dx}{(a + bx^n)\sqrt[3n]{a^2 + 3abx^n + 3b^2x^{2n}}}$$

vyčíslíme, zavedeme-li novou proměnnou p rovnicí

(2) $$\sqrt[3n]{a^2 + 3abx^n + 3b^2x^{2n}} = px$$

aneb

(2') $$a^2 + 3abx^n + 3b^2x^{2n} = p^{3n}x^{3n}.$$

Z této rovnice stanovíme dx, dělíme-li ji především x^{3n}, takže

$$a^2x^{-3n} + 3abx^{-2n} + 3b^2x^{-n} = p^{3n},$$

načež obdržíme

$$(a^2x^{-3n-1} + 2abx^{-2n-1} + b^2x^{-n-1})\,dx = -\,p^{3n-1}dp$$

a násobením celé rovnice x^{3n+1} povstane

$$(a^2 + 2abx^n + b^2x^{2n})\,dx = -\,x^{3n+1}p^{3n-1}\,dp,$$

z čehož

(3) $$dx = -\frac{x^{3n+1}p^{3n-1}}{(a + bx^n)^2}\,dp.$$

Dosadíme-li hodnoty z (2) a (3) do (1), bude

(4) $$dV = -\frac{x^{3n}p^{3n-2}}{(a + bx^n)^3}\,dp.$$

Vzhledem k rovnici (2′) lze ve vzorci (4) jmenovatele upraviti takto:

$$(5)\qquad \begin{aligned}(a+bx^n)^3 &= a(a^2+3abx^n+3b^2x^{2n})+b^3x^{3n}\\ &= ap^{3n}x^{3n}+b^3x^{3n}\\ &= x^{3n}\,(ap^{3n}+b^3).\end{aligned}$$

Vložíme-li tuto hodnotu do (4), vyloučí se tím původní proměnná i nabudeme

$$(4')\qquad dV = -\frac{p^{3n-2}\,dp}{b^3+ap^{3n}},$$

tudíž V neboli

$$(1')\qquad \int \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[3n]{a^2+3abx^n+3b^2x^{2n}}} = -\int \frac{p^{3n-2}dp}{b^3+ap^{3n}}.$$

Jest-li

$$a = b = n = 1,$$

dostaneme integrál

$$(6)\qquad \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{1+3x+3x^2}} = -\int \frac{p\,dp}{1+p^3}.\;^{*})$$

---

*) Kdybychom do integrálu

$$V = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{1+3x+3x^2}}$$

kladli

$$x = \frac{p}{1-p},$$

vznikl by z něho integrál

$$V = \int \frac{dp}{\sqrt[3]{1-p^3}}.$$

A tento integrál možno vyčísliti zavedením vytčené typické substituce

$$(\alpha)\qquad \sqrt[3]{1-p^3} = pu,$$

znamená-li u novou proměnnou.

Ztrojmocníme-li rovnici (α) a dělíme-li ji p^3, vzejde

$$p^{-3}-1 = u^3,$$

VIII. Abychom vyčíslili integrál

$$(1) \qquad V = \int \frac{dx}{(a + bx^n)\sqrt[4n]{a^3 + 4a^2bx^n + 6ab^2x^{2n} + 4b^3x^{3n}}},$$

zavedeme podobně jako dříve substituci téhož tvaru, píšíce

$$(2) \qquad R = \sqrt[4n]{a^3 + 4a^2bx^n + 6ab^2x^{2n} + 4b^3x^{3n}} = px,$$

kdež pro jednoduchost označujeme příslušnou odmocninu písmenem R.

Povýšíme-li tuto rovnici na $4n$ a dělíme-li ji pak x^{4n}, nabudeme

$$a^3x^{-4n} + 4a^2bx^{-3n} + 6ab^2x^{-2n} + 4b^3x^{-n} = p^{4n}.$$

Differencujeme-li a krátíme-li ihned $-4n$,

$$(a^3x^{-4n-1} + 3a^2bx^{-3n-1} + 3ab^2x^{-2n-1} + b^3x^{-n-1})dx = -p^{4n-1}dp$$

a znásobíme-li celou tuto rovnici x^{4n+1}, vzejde

$$(a^3 + 3a^2bx^n + 3abx^{2n} + b^3x^{3n})dx = -x^{4n+1}p^{4n-1}dp,$$

z čehož

$$(3) \qquad dx = -\frac{x^{4n+1}p^{4n-1}}{(a + bx^n)^3}\,dp.$$

---

z čehož differencováním a krácením 3, vznikne

$$- \quad {}_4dp = u^2du,$$

a tedy

$$(\beta) \qquad dp = -p^4u^2du.$$

Vložíme-li hodnoty z (α) a (β) do posledního integrálu, bude

$$dV = -p^3udu.$$

Vzhledem k substituci

$$p^3 = \frac{1}{1 + u^3}$$

nabudeme

$$V = -\int \frac{udu}{1 + u^3},$$

což jest tvar integrálu differenciálu racionálního (6).

Klademe-li hodnoty z (2) a (3) do (1), dostaneme

(4) $$dV = -\frac{x^{4n}p^{4n-2}}{(a+bx^n)^4}\,dp.$$

Přihlížejíce k rovnici (2), můžeme ve vzorci (4) psáti jmenovatele

(5) $$\begin{aligned}(a+bx^n)^4 &= a^4 + 4a^3bx^n + 6a^2b^2x^{2n} + 4ab^3x^{3n} + b^4x^{4n}\\ &= aR^{4n} + b^4x^{4n}\\ &= x^{4n}(ap^{4n} + b^4).\end{aligned}$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce (4), bude

(4′) $$dV = -\frac{p^{4n-2}}{b^4 + ap^{4n}}\,dp$$

a tedy V neboli

(1′) $$\int \frac{dx}{(a+bx^n)\,R} = -\int \frac{p^{4n-2}}{b^4 + ap^{4n}}\,dp\,,$$

což jest opět tvar integrálu differenciálu racionálního. V tomto vzorci integrálním znamená ovšem R odmocninu vyjádřenou (2).

Přihlédneme-li k integrálům (1′) v odst. I., VII. a VIII., je z nich patrný zákon, jak možno integrály vytčených typů přímo napsati jako integrály differenciálů racionálních.

IX. Integrál tvaru

(1) $$V = \int \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[\lambda n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}}$$

vyčíslíme, položíce zase

(2) $$\sqrt[\lambda n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}} = px$$

aneb

(2′) $$(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n} = p^{\lambda n}x^{\lambda n}.$$

Dělíme-li celou tuto rovnici $x^{\lambda n}$, bude

$$(ax^{-n} + b)^\lambda - b^\lambda = p^{\lambda n},$$

což differencujeme a krátíme ihned λn,

$$-a\,(ax^{-n}b)+^{\lambda-1}x^{-n-1}dx=p^{\lambda n-1}dp,$$

z čehož

(3) $$dx=-\frac{x^{\lambda n+1}p^{\lambda n-1}}{a\,(a+bx^n)^{\lambda-1}}\,dp\,.$$

Vložíme-li hodnoty z (2) a (3) do integrálu (1), vzejde

(4) $$dV=-\frac{x^{\lambda n}p^{\lambda n-2}}{a\,(a+bx^n)^{\lambda}}\,dp\,.$$

Dle substituce (2′) však jest

(5) $$(a+bx^n)^{\lambda}=x^{\lambda n}\,(b^{\lambda}+p^{\lambda n})$$

a tato hodnota, vložena do vzorce (4), promění jej v

(4′) $$dV=-\frac{p^{\lambda n-2}dp}{a\,(b^{\lambda}+p^{\lambda n})}$$

a proto V, t. j.

(1′) $$\int\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[\lambda n]{(a+bx^n)^{\lambda}-b^{\lambda}x^{\lambda n}}}=-\frac{1}{a}\int\frac{p^{\lambda n-2}}{b^{\lambda}+p^{\lambda n}}\,dp\,,$$

což jest opět integrál differenciálu racionálního.

Je-li $\lambda=\frac{2}{n}$, jest

(6) $$\int\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt{(a+bx^n)^{\frac{2}{n}}-b^{\frac{2}{n}}x^2}}=-\frac{1}{a}\int\frac{dp}{b^{\frac{2}{n}}+p^2}$$

$$=-\frac{1}{ab^{\frac{1}{n}}}\text{ arc ctg }\frac{p}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{ab^{\frac{1}{n}}}\text{ arc tg }\frac{b^{\frac{1}{n}}x}{\sqrt{(a+bx^n)^{\frac{2}{n}}-b^{\frac{2}{n}}x^2}}\,.$$

Klademe-li do vzorce tohoto podobně jako Euler $n=4$, $a=b=1$, obdržíme integrál

(7) $$\int\frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2}}=\text{arc tg }\frac{x}{\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2}}\,*)$$

---

*) Integrál tento lze vyčísliti též takto:

a položíme-li v témže vzorci $n = 6$, $a = b = 1$, dostaneme

$$(8)\quad \int \frac{dx}{(1+x^6)\sqrt{(1+x^6)^{\frac{1}{3}} - x^2}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{(1+x^6)^{\frac{1}{3}} - x^2}}.$$

Integrál (6) odst. I. není obsažen v integrálním vzorci (1'), ježto nelze tu upraviti příslušnou odmocninu na realný tvar $\sqrt[2n]{2x^n - 1}$. Udělíme proto integrálu (1') podobu, aby byl integrál (6) odst. I. zvláštním jeho případem, což vytkneme v odstavci následujícím.

X. Chceme-li vyčísliti integrál

$$(1)\qquad V = \int \frac{dx}{(hx^n - k)\sqrt[\lambda n]{h^\lambda x^{\lambda n} - (hx^n - k)^\lambda}},$$

lze toho podobně dosíci substitucí

$$(2)\qquad \sqrt[\lambda n]{h^\lambda x^{\lambda n} - (hx^n - k)^\lambda} = px$$

Klademe

$$z = \frac{x}{\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}} - x^2}}$$

a differencujeme-li tuto substituční rovnici,

$$(a)\qquad dz = \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}\left[(1+x^4)^{\frac{1}{2}} - x^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

načež, sestrojíme-li výraz

$$(b)\qquad \frac{1}{1+z^2} = \frac{(1+x^4)^{\frac{1}{2}} - x^2}{\sqrt{1-x^4}},$$

obdržíme násobením (a) s (b)

$$\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}} - x^2}}$$

a integrujíce obě strany, dospějeme ke vzorci (7).

aneb

$$(2') \qquad h^\lambda x^{\lambda n} - (hx^n - k)^\lambda = p^{\lambda n} x^{\lambda n}.$$

Dělíme-li celou tuto rovnici $x^{\lambda n}$, vzejde

$$h^\lambda - (h - kx^{-n})^\lambda = p^{\lambda n},$$

a přímým differencováním dostaneme, krátíme-li ihned λn,

$$-(h - kx^{-n})\, kx^{-n-1} dx = p^{\lambda n - 1} dp,$$

z čehož

$$(3) \qquad dx = -\frac{x^{\lambda n+1} p^{\lambda n-1}}{k\,(hx^n - k)^{\lambda-1}}\, dp\,.$$

Dosadíce hodnoty z (2) a (3) do (1), nabýváme

$$(4) \qquad dV = -\frac{x^{\lambda n} p^{\lambda n-2}}{k\,(hx^n - k)^\lambda}\, dp.$$

Z rovnice (2') však plyne

$$(hx^n - k)^\lambda = x^{\lambda n}\,(h^\lambda - p^{\lambda n}),$$

což dosadíme do (4), i bude

$$(4') \qquad dV = -\frac{p^{\lambda n-2} dp}{k\,(h^\lambda - p^{\lambda n})}\,.$$

Integrál V jest tedy vyjádřen integrálem racionálního differenciálu

$$(1') \qquad \int \frac{dx}{(hx^n - k)\sqrt[\lambda n]{h^\lambda x^{\lambda n} - (hx^n - k)^\lambda}} = -\frac{1}{k}\int \frac{p^{\lambda n-2}}{h^\lambda - p^{\lambda n}}\, dp\,.$$

Klademe-li tu $h = k = 1$, $\lambda = 2$, obdržíme integrál (6) odst. I.

XI. Zvolme ještě obecnější integrál než jest (1) v odst. IX., a to

$$(1) \qquad V = \int \frac{x^{m-1} dx}{(a + bx^n)\sqrt[\lambda n]{[(a + bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}]^m}}\,.$$

Tu zavedeme opětně substituci identickou s (2) odst. IX. totiž

$$(2) \qquad \sqrt[\lambda n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}} = px\,,$$

čímž se nezmění tamější rovnice (3), takže jest v platnosti

$$(3) \qquad dx = -\frac{x^{\lambda n+1} p^{\lambda n-1}}{a\,(a+bx^n)^{\lambda-1}}\, dp\,.$$

Vložíme-li hodnoty (2) a (3) do (1), nabýváme

$$(4) \qquad dV = -\frac{x^{\lambda n} p^{\lambda n-m-1}}{a\,(a+bx^n)^\lambda}\, dp$$

a vzhledem k rovnici (5) odst. IX. konečně

$$(4') \qquad dV = -\frac{p^{\lambda n-m-1}}{a\,(b^\lambda + p^{\lambda n})}\, dp,$$

což vede k integrálu V, t. j.

$$(1') \int \frac{x^{m-1}\, dx}{(a+bx^n)\sqrt[\lambda n]{[(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}]^m}} = -\frac{1}{a}\int \frac{p^{\lambda n-m-1}}{b^\lambda + p^{\lambda n}}\, dp.$$

Píšeme-li $-m$ místo m, obdržíme z (1') integrál tvaru

$$(5) \qquad \int \frac{\sqrt[\lambda n]{[(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}]^m}}{x^{m+1}(a+bx^n)}\, dx = -\frac{1}{a}\int \frac{p^{\lambda n+m-1}}{b^\lambda + p^{\lambda n}}\, dp.$$

Pro $m=1$ obdržíme z (1') známý integrál (1') odst. IX. a z (5) nabýváme

$$(6) \qquad \int \frac{\sqrt[\lambda n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}}{x^2(a+bx^n)}\, dx = -\frac{1}{a}\int \frac{p^{\lambda n}\, dp}{b^\lambda + p^{\lambda n}}\,.$$

Klademe-li $m=\lambda$, dostaneme z (1')

$$(7) \int \frac{x^{\lambda-1} dx}{(a+bx^n)\sqrt[n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}} = -\frac{1}{a}\int \frac{p^{\lambda n-\lambda-1}}{b^\lambda + p^{\lambda n}}\, dp$$

a z (5) obdržíme

$$(8) \qquad \int \frac{\sqrt[n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}}{x^{\lambda+1}(a+bx^n)}\, dx = -\frac{1}{a}\int \frac{p^{\lambda n+\lambda-1}}{b^\lambda + p^{\lambda n}}\, dp.$$

V integrálu (1′) může m býti též číslo lomené. V případě, že $m = \frac{\alpha}{\beta}$, jest především pravá strana vzorce (1′)

$$-\frac{1}{a}\int \frac{p^{\lambda n - \frac{\alpha}{\beta} - 1}}{b^\lambda + p^{\lambda n}}\, dp\,,$$

a klademe-li tu $p = z^\beta$, $dp = \beta z^{\beta-1} dz$, nabýváme integrál differenciálu racionálního, takže jest

$$(9) \quad \int \frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}dx}{(a+bx^n)\sqrt[\beta\lambda n]{[(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}]^\alpha}} = -\frac{\beta}{a}\int \frac{z^{\beta\lambda n-\alpha-1}}{b^\lambda + z^{\beta\lambda n}}\, dz.$$

XII. Vyčíslíme nyní důležitý integrál rázu obecného

$$(1) \qquad V = \int \frac{(A_1 + A_2 x^{\alpha\omega n})^r}{(B_1 + B_2 x^{\beta\omega n})^s} \cdot \frac{x^{\omega m - 1}dx}{\sqrt[n]{(a+bx^{\omega n})^m}}\,,$$

při čemž supponujeme, že α, β, m, n, r, s jsou čísla celistvá, kladná nebo záporná a že ω jest číslo kladné nebo záporné, buď celistvé nebo lomené.

Zvolíme nejjednodušší možnou algebraickou substituci, kladouce dle typické substituce, která byla při vyčíslení předchozích integrálů zavedena,

$$(2) \qquad \sqrt[n]{a + bx^{\omega n}} = px^\omega$$

aneb

$$(2') \qquad a + bx^{\omega n} = p^n x^{\omega n},$$

kde p jest nová integrační proměnná.

Dělíme-li rovnici (2′) $x^{\omega n}$, bude

$$(2'') \qquad ax^{-\omega n} + b = p^n,$$

z čehož differencováním jde

$$-\omega\frac{a}{x^{\omega n}}\frac{dx}{x} = p^{n-1}dp\,,$$

a ježto faktor $\frac{a}{x^{\omega n}}$ dle rovnice (2″) rovná se $p^n - b$, jest

$$-\omega(p^n - b)\frac{dx}{x} = p^{n-1}dp\,,$$

a tedy

(3) $$\frac{dx}{x} = -\frac{p^{n-1}dp}{\omega(p^n - b)}\,.$$

Umocníme-li rovnici (2) na m, bude

$$\sqrt[n]{(a + bx^n)^m} = p^m x^{\omega m},$$

z níž obdržíme

(4) $$\frac{x^{\omega m}}{\sqrt[n]{(a + bx^n)^m}} = \frac{1}{p^m}\,.$$

Násobením rovnic (3) a (4) dostaneme

(5) $$\frac{x^{\omega m-1}dx}{\sqrt[n]{(a + bx^n)^m}} = -\frac{p^{n-m-1}dp}{\omega(p^n - b)}\,.$$

Vyjádříme nyní první zlomek za integračním znaménkem jakožto funkci p, když z rovnice (2″) plynoucí

$$x^{\omega n} = \frac{a}{p^n - b}$$

dosadíme do výrazu

(6) $$(A_1 + A_2 x^{\alpha\omega n})^r = \left[A_1 + A_2\frac{a^\alpha}{(p^n - b)^\alpha}\right]^r$$
$$= \frac{[A_1(p^n - b)^\alpha + A_2 a^\alpha]^r}{(p^n - b)^{\alpha r}}\,,$$

a dle tohoto jest přímo výraz

(7) $$(B_1 + B_2 x^{\beta\omega n})^s = \frac{[B_1(p^n - b)^\beta + B_2 a^\beta]^s}{(p^n - b)^{\beta s}}\,,$$

tedy podíl obou dá žádaný zlomek

(8) $$\frac{(A_1 + A_2 x^{\alpha\omega n})^r}{(B_1 + B_2 x^{\beta\omega n})^s} = \frac{[A_1(p^n - b)^\alpha + A_2 a^\alpha]^r}{[B_1(p^n - b)^\beta + B_2 a^\beta]^s}\cdot\frac{1}{(p^n - b)^{\alpha r - \beta s}}\,.$$

Znásobíme-li rovnice (5) a (8) a integrujeme-li, dospějeme k integrálu předloženému, který jest vyjádřen integrálem racionální funkce $p \,.\, dp$, t. j.

$$(1') \quad \int \frac{(A_1 + A_2 x^{\alpha\omega n})^r}{(B_1 + B_2 x^{\beta\omega n})^s} \cdot \frac{x^{\omega m-1} dx}{\sqrt[n]{(a + b x^{\omega n})^m}}$$

$$= -\frac{1}{\omega} \int \frac{[A_1 (p^n - b)^\alpha + A_2 a^\alpha]^r}{[B_1 (p^n - b)^\beta + B_2 a^\beta]^s} \cdot \frac{p^{n-m-1} dp}{(p^n - b)^{\alpha r - \beta s + 1}} \,.$$

Píšeme-li $-m$ místo m, nabudeme z (1') integrál

$$(9) \quad \int \frac{(A_1 + A_2 x^{\alpha\omega n})^r}{(B_1 + B_2 x^{\beta\omega n})^s} \cdot \frac{\sqrt[n]{(a + b x^{\omega n})^m}}{x^{\omega m+1}} dx$$

$$= -\frac{1}{\omega} \int \frac{[A_1 (p^n - b)^\alpha + A_2 a^\alpha]^r}{[B_1 (p^n - b)^\beta + B_2 a^\beta]^s} \cdot \frac{p^{m+n-1} dp}{(p^n - b)^{\alpha r - \beta s + 1}} \,.$$

Integrální vzorec (1') je tím pozoruhodný, že možno z něho dostati řadu integrálů známých, různými způsoby vyčíslovaných.

Klademe-li do (1') především $\alpha = \beta = 1$, obdržíme jakožto zvláštní vzorec

$$(10) \quad \int \frac{(A_1 + A_2 x^{\omega n})^r}{(B_1 + B_2 x^{\omega n})^s} \cdot \frac{x^{\omega m-1} dx}{\sqrt[n]{(a + b x^{\omega n})^m}}$$

$$= -\frac{1}{\omega} \int \frac{(aA_2 - bA_1 + A_1 p^n)^r}{(aB_2 - bB_1 + B_1 p^n)^s} \cdot \frac{p^{n-m-1} dp}{(p^n - b)^{r-s+1}}$$

a jest-li tu $r = 0$, dostaneme

$$(11) \quad \int \frac{x^{\omega m-1} dx}{(B_1 + B_2 x^{\omega n})^s \sqrt[n]{(a + b x^{\omega n})^m}}$$

$$= -\frac{1}{\omega} \int \frac{(p^n - b)^{s-1} p^{n-m-1} dp}{(aB_2 - bB_1 + B_1 p^n)^s} \,.$$

Dosadíme-li dále $m = \omega = s = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = -1$, $a = b = 1$, nabudeme

$$(12) \quad \int \frac{dx}{(1 - x^n) \sqrt[n]{1 + x^n}} = \int \frac{p^{n-2} dp}{2 - p^n} \,.$$

Položíme-li do (12) $n = 3$ a pak $n = 4$, obdržíme dva známé integrály

$$(13) \qquad \int \frac{dx}{(1 - x^3)\sqrt[3]{1 + x^3}} = \int \frac{pdp}{2 - p^3} \text{*)}$$

a

$$(14) \qquad \int \frac{dx}{(1 - x^4)\sqrt[4]{1 + x^4}} = \int \frac{p^2dp}{2 - p^4} .$$

Jest-li v integrálním vzorci (11)

$$m = \omega = s = 1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 0,$$

dospějeme k integrálu

$$(15) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt[n]{a + bx^n}} = \int \frac{p^{n-2}dp}{b - p^n} .$$

Položíme-li tu $n = 3$, $a = b = 1$, vzejde

$$(16) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}} = \int \frac{pdp}{1 - p^3} ,$$

píšeme-li však $n = 3$, $a = 1$, $b = -1$, bude

$$(17) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^3}} = - \int \frac{pdp}{1 + p^3} ,$$

což jsou známé integrály, z nichž druhý byl již vytčen na str. 179.

---

*) Při vyčíslení tohoto integrálu klade se $x = \frac{1}{z}$ a v novém integrálu s proměnnou z zavádí se substituce $\sqrt[3]{1 + z^3} = p$, čímž nabýváme tvar integrálu (13) na pravé straně uvedeného. Ale tato dvojnásobná substituce jest v naší obsažena, neboť dosadíme-li z prvé substituce $z = \frac{1}{x}$ do substituce druhé, povstane námi užívaná charakteristická substituce, $\sqrt[3]{1 + x^3} = px$, kterou možno tedy integrál ten přímo vyčísliti.

Ostatně integrál (15) náleží k integrálům binomických differenciálů, které se píší v obvyklé formě

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx .$$

Aby takový integrál mohl býti racionalisován, supponuje se, jak známo, že

$$\frac{m+1}{n} \quad \text{anebo} \quad \frac{m+1}{n} + p$$

jest číslo celistvé, kladné nebo záporné.

Z těchto dvou method vede patrně druhá k cíli, neboť vzhledem k integrálu (15) jest

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0,$$

a proto vyčíslení téhož integrálu vyžaduje substituci

$$\sqrt{a + bx^n} = px.$$

Klademe-li do vzorce (11) $\omega = \frac{1}{2}$, bude

$$(18) \quad \int \frac{x^{\frac{m}{2}-1} dx}{\left(B_1 + B_2 x^{\frac{n}{2}}\right)^s \sqrt[n]{\left(a + bx^{\frac{n}{2}}\right)^m}} = -2 \int \frac{(p^n - b)^{s-1} p^{n-m-1} dp}{(aB_2 - bB_1 + B_1 p^n)^s}$$

a je-li pak $m = 1$ a n nahradíme-li $2n$, nabudeme

$$(19) \quad \int \frac{dx}{(B_1 + B_2 x^n)^s \sqrt[2n]{x^n (a + bx^n)}}$$

$$= -2 \int \frac{(p^{2n} - b)^{s-1} p^{2n-2} dp}{(aB_2 - bB_1 + B_1 p^{2n})^s} .$$

Když tu místo b napíšeme $2b$ a $s = 1$, $B_1 = a$, $B_2 = b$, obdržíme

$$\int \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[2n]{x^n(a+2bx^n)}} = \frac{2}{a}\int \frac{p^{2n-2}}{b-p^{2n}}\,dp,$$

identický to vzorec s (1') odst. VI. str. 177.

(Pokračování.)

Osmotická theorie článků koncentračních. I.

Vykládá

Dr. O. Šulc v Praze.

Před nedlouhou dobou bylo v tomto časopise ukázáno *), kterak na základě moderních názorů o roztocích, zejména však na základě theorie o povaze tlaku osmotického v roztocích a rovněž theorie o elektrolytické dissociaci elektrolytů, rozpuštěných v neelektrolytech lze cestou nad míru jednoduchou, zejména když se použije thermodynamické obdoby mezi tlakem osmotickým a tlakem plynů, dospěti k rovnici fundamentální pro nauku o veškerých zjevech tknoucích se vzniku sil elektromotorických mezi vodiči řádu prvého (kovy) a vodiči řádu druhého (elektrolyty).

Základní ona rovnice, na místě uvedeném blíže objasněná podává jednoduchý výraz pro sílu elektromotorickou π ve tvaru

$$\pi = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{P}{p}.$$

Máme-li hned na mysli elektrodu *zvratnou*, jest P elektrolytický tlak kovu, p osmotický tlak kovu v roztoku elektrolytu, n_e počet nábojů na jednom iontu soustředěných, tedy veličina dle zákona *Faradayova* srovnalá s mocenstvím (valencí) iontů, T absolutní teplota, konstanty pak mají obvyklý význam, a sice:

R jest veličina stálá ze zákona o plynech dokonalých, jejíž hodnota jest v míře thermické

$$R = 1{\cdot}96 \text{ cal.},$$

a poněvadž jest

---

*) Roč. XXVII. str. 12.

$$1 \text{ cal.} = 4{\cdot}24 \text{ volt} \times \text{coulomb},$$

jest v míře elektrické

$$R = 8{\cdot}31 \text{ volt} \times \text{coulomb};$$

ε_0 jest stálá veličina ze zákona *Faradayova*

$$\varepsilon_0 = 96540 \text{ coulomb}.$$

Zvratnými pak elektrodami rozumíme takové elektrody, jichž povaha se při převrácení pohybu iontů nemění. Příklady jsou kovy v roztocích svých solí. Na př. měď ponořená v roztok síranu měďnatého, stříbro ponořené v roztok dusičnanu stříbrnatého. Buď elektroda vysílá kovové ionty v roztok, kov se rozpouští, aneb ionty kovové vylučují se na elektrodě. Když prvý případ nastane, ana jest elektroda součástí článku galvanického, v činnosti jsoucího, nastane druhý, když se článkem propouští proud opačného směru, což jest vlastně v podstatě elektrolyse. Ježto jest elektrolytický tlak P kovu veličinou stálou, jest patrno, že elektromotorická síla takové elektrody zvratné závisí jen na osmotickém tlaku p kovu v roztoku jsoucího. Pokud nejdeme ku koncentracím příliš vysokým, zůstáváme tedy v oboru roztoků dostatečně zředěných, pro něž platí ještě se žádanou přesností obdoba s plyny, jest osmotický tlak úměrný koncentraci roztoku, a tudíž i elektromotorická síla na tom tlaku závislá, jest funkcí koncentrace iontů. Články sestavené na těchto jednoduchých základech slovou *články koncentrační*, jichž theorii první rozvinul *H. Helmholtz* *). Úkolem následujících řádků jest načrtnouti krátce a přehledně hlavní typy těchto článků i podati theoretický rozbor o nich.

Rozlišení typů článků koncentračních.

Vyjděme zprvu od úvahy zcela obecného rázu. Představme si, že spojeny jsou v článek dvě zvratné elektrody, pro které tudíž vzhledem k silám elektromotorickým platí rovnice:

---

*) *Helmholtz* 1878. Wied. Ann. 3. 201.

$$\pi_1 = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{P_1}{p_1},$$

$$\pi_2 = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{P_2}{p_2},$$

kde pro jednoduchost jest předpokládána na obou elektrodách stejná teplota T a stejné mocenství kovů n_e tamtéž.

Při nejjednodušší této možné kombinaci v článek koncentrační jest patrně *a priori* dvojí v podstatě různý, ale význačný případ možný, a sice:

I. Buď platí

$$p_1 = p_2 = p,$$

to jest, osmotický tlak kovu jest na obou elektrodách článku stejný, a sice o hodnotě p, za to však

$$P_1 \gtrless P_2$$

různí se od sebe tlaky elektrolytické kovů, aneb

II. tyto tlaky elektrolytické jsou na obou elektrodách článku stejné

$$P_1 = P_2 = P$$

o hodnotě P, kdežto tlaky osmotické elektrolytu se navzájem různí

$$p_1 \gtrless p_2.$$

ad I. Na prvý pohled by se mohlo zdáti, že případ prvý uskutečniti nelze při témž kovu, neboť tlak elektrolytický jest pro každý kov veličina určitá a stálá (jejíž hodnota později bude vyšetřena), kdežto vyslovená podmínka vyžaduje na obou elektrodách různý elektrolytický tlak kovu. Leč možnost vyhověti tomu požadavku dávají nám *amalgamata* kovů. Zředěná amalgamata možno považovati za roztoky, kde rtuť jest rozpustidlem, kov látkou rozpuštěnou. Amalgamata různé koncentrace představují pak elektrody z téhož kovu o různém elektrolytickém tlaku. Elektrolytem jest roztok libovolné soli onoho kovu, který ve rtuti jest rozpuštěn.

Máme tudíž obecné schéma žádané kombinace toto:

Amalgama kovu koncentrované	Roztok soli kovu	Amalgama kovu zředěné

Mohla by se položiti otázka, zda při článcích s amalgamaty nehraje též rtuť úkol, to jest, zda elektrolytický tlak její nepřichází k platnosti. Tomu není tak, pokud rozpouštíme ve rtuti kovy „méně ušlechtilé“, jakými jest většina kovů obyčejných, jichž elektrolytický tlak jest menší než elektrolytický tlak rtuti, kdežto jen kovy vzácné, stříbro, zlato, platina a j. mají tlak elektrolytický ještě menší než jest tlak rtuti. A tu, jsou-li dva různé kovy jakožto slitina v dotyku s kapalinou, působí elektromotoricky účinně jen ten kov, který má větší elektrolytický tlak. Máme-li na př. slitinu zinku a kadmia jakožto elektrodu, kteréžto kovy jednotlivě oproti normálným roztokům svých síranů dávají vznik potenciálným rozdílům:

$$Zn/ZnSO_4 = +0{\cdot}524 \text{ volt}$$
$$Cd/CdSO_4 = +0{\cdot}162 \text{ „}$$

tu při styku té slitiny s kyselinou sírovou zředěnou rozpouští se zprvu zinek, i obdržíme (téměř přesně) z počátku pouze elektromotorickou sílu zinku příslušnou. Teprve později počne se rozpouštěti kadmium. Jsou-li zinkové ionty v roztoku už předem přítomny, když tedy místo do kyseliny sírové noříme slitinu do roztoku síranu zinečnatého, nic se na věci nemění, i kdyby jejich osmotický protitlak způsobil, že by se kadmium snáze rozpouštěti mohlo. Neboť jakmile přijdou kadmiové ionty v roztok, sráží se jich tolik na druhé elektrodě a nahradí se v roztoku ionty zinkovými, kolik jest za stávající elektromotorické síly možno.*)

Aby úvaha byla jednoduchá nutno při článcích s amalgamaty předpokládati ještě splnění dalších dvou podmínek, jichž oprávněnost se vycítí dle obdoby s úvahami thermodynamickými.

Předně musí býti amalgama dostatečně zředěné, aby

*) Podrobnou studii o potenciálných rozdílech slitin kovových v roztocích solí kovových přinesl *M. Herschkowitsch*, Zeitschr. f. physik. Chem. XXVII. 123. — Že rtuť hraje v amalgamatech, pokud jde o elektromotorické síly, úlohu pouhého rozpustidla, ukázal *V. Türin*, Zeitschr. f. physik. Chem. V. 340., VII. 221.

množství iontů v roztok vyslané neb z něho vyloučené oproti velikému množství rtuti nepadalo na váhu (nemělo tepelné zabarvení za následek), po druhé množství elektrolytu ve styku s amalgamatem jsoucího má býti velmi značné, neboť jinak současně s převodem iontů kovových nastává pohyb iontů elektrolytu, čímž se nová práce v pochod zavádí, která však může býti pokládána za nulle rovnou, když změna koncentrace roztoku pohybem iontů elektrolytu může se zanedbati

Za podmínek vyložených uvažujme nyní zvláštní příklad podrobněji: článek z dvojího amalgamata zinku různé koncentrace v roztoku síranu zinečnatého:

Zn	$ZnSO_4$	Zn
amalg. konc.	roztok	amalg. zředěné.

$$\longrightarrow$$

Tlak osmotický v roztoku síranu zinečnatého jest vzhledem k oběma elektrodám stejný a sice hodnoty p, ale osmotický tlak částiček zinkových ve rtuti rozpuštěných v obou amalgamatech nestejný. Učiňme hypothesi, že elektrolytický tlak zinku P_1 a P_2 na obou elektrodách jest tlaku osmotickému poměrný, pak můžeme, ježto povaha vzorců toho připouští, jeden tlak položiti za druhý, takže jest pro obě elektrody:

$$\pi_1 = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{P_1}{p},$$

$$\pi_2 = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{P_2}{p},$$

když zase předpokládáme stejnou teplotu T na obou elektrodách (mocenství n_e jest v obou případech stejné, to jest vzhledem k zinku $n_e = 2$). Dejme tomu, že

$$P_1 > P_2,$$

tedy, že amalgama na první elektrodě má větší osmotický, tedy i elektrolytický tlak zinku, pak jest

$$\pi_1 > \pi_2,$$

to jest, potenciálná difference na prvé elektrodě jest vyšší oproti druhé, tedy zinek (v článku) v koncentrovanějším amalgamatu kladný oproti zinku v amalgamatu méně koncentrovaném. Výsledná elektromotorická síla π celé kombinace jest tudíž

$$\pi = \pi_1 - \pi_2 = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{P_1}{P_2} .$$

Leč osmotické tlaky jsou (při roztocích dostatečně zředěných) poměrny koncentracím roztoků:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{C}{C_2} ,$$

a poněvadž o tlacích elektrolytických předpokládáme poměrnost tlakům osmotickým, jsou i tlaky elektrolytické poměrny koncentracím. Lze tudíž koncentrace amalgamat přímo do vzorce zavésti a psáti

$$\pi = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{C_1}{C_2} .$$

Elektromotorická síla uvažovaného článku závisí tudíž při dané teplotě a daném kovu na poměru koncentrací iontů na elektrodách.

Důsledek ten lze opříti ještě jinou cestou, s obejitím pojmu elektrolytického tlaku. Představme si na chvíli článek v činnosti. Ta činnost spočívá v tom, že se zinek z koncentrovanějšího amalgamata rozpouští, kdežto v méně koncentrovaném se hromadí, tedy ion zinkový ve směru proudu (šipkou naznačeno) převádí z koncentrace vyšší C_1 na koncentraci nižší C_2, neboť jsme předpokládali

$$C_1 > C_2.$$

Nyní lze zase užiti thermodynamické úvahy platné o tlacích osmotických. Maximální práce L, která se vykoná, když se 1 gram-molekula látky převede z osmotického tlaku P_1 na nižší tlak P_2 neb z koncentrace C_1 na koncentraci C_2, jest

$$L = RT\, l \frac{C_1}{C_2} ;$$

táž práce jest však pro 1 gram-atom vyjádřena v míře elektrické (srovn. úvahu v XXVII. roč. tohoto Časopisu str. 18. a 19.):

$$L = n_e \varepsilon_0 \,.\, \pi,$$

z čehož vzhledem k nutné rovnosti obou prací plyne:

$$\pi = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0}\, l \frac{C_1}{C_2},$$

tedy v úplné shodě s výrazem předešlým (ukázalať zkušenost, že molekuly rtuti i kovů v ní rozpuštěných jsou jednoatomové).

Ad II. Druhý případ jest realisován, jsou-li dvě elektrody z téhož kovu ve styku s dvěma nestejně koncentrovanými roztoky soli toho kovu. Tedy obecné schéma jest:

Kov	Roztok soli kovu koncentrovaný	Roztok soli kovu zředěný	Kov.

Podmínka, aby oba roztoky soli byly ve skutečnosti značně zředěné, aby tedy na ně bylo lze užiti jednoduchých zákonů platných o tlaku osmotickém, i zde jest v platnosti. Pro jednoduchost zanedbáváme dále potenciálný rozdíl při styku obou nestejně koncentrovaných roztoků soli kovové, ježto z pravidla jest velmi nepatrný. Za těch zjednodušení uvažujme určitý případ zase, na př. dvě elektrody zinkové v roztocích síranu zinečnatého různé koncentrace:

Zn	$ZnSO_4$ roztok koncentrovaný	$ZnSO_4$ roztok zředěný	Zn.

Poněvadž elektrolytický tlak zinku P jest na obou elektrodách stejný, máme rovnice ve tvaru:

$$\pi_1 = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} \,.\, l \frac{P}{p_1},$$

$$\pi_2 = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} \,.\, l \frac{P}{p_2}.$$

Dejme tomu, že jest

$$p_1 > p_2,$$

tedy, že tlak osmotický roztoku síranu zinečnatého na první elektrodě jest větší než na druhé. Pak jest

$$\pi_2 > \pi_1,$$

to jest, potenciálná difference na druhé elektrodě jest vyšší první, tedy zinek (v článku) ve zředěnějším roztoku kladný oproti zinku v roztoku méně zředěném, jakož i šipkou naznačeno. Výsledná elektromotorická síla π celé kombinace jest

$$\pi = \pi_2 - \pi_1 = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{p_1}{p_2}.$$

Z důvodů výše vytknutých lze poměr osmotických tlaků (pro dostatečné zředění) nahraditi poměrem koncentrací elektrolytu na obou elektrodách:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

takže obdržíme vzorec srovnalý formou s případem pod I. uvedeným:

$$\pi = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{c_1}{c_2}.$$

Také tento důsledek lze ještě thermodynamicky opodstatniti, lépe jest však zatím upustiti od toho, neboť později bude ta úvaha podána i zřetelem k stupni elektrolytické dissociace elektrolytu, což nevyhnutelno jest k docílení přesné shody mezi theorií a skutečností.

Jak patrno, došli jsme při obou za základ zvolených typech článků koncentračních jednotného vzorce

$$\pi = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{C_1}{C_2},$$

dle něhož elektromotorická síla jest funkcí poměru koncentrací iontů na elektrodách, ať už se ty koncentrace C_1 a C_2 vztahují

I. na nestejné koncentrace *látek ionty vysílajících*, neb

II. na nestejné koncentrace *elektrolytu* obklopujícího elektrody.

Experimentálné opodstatnění.

Prve než přejdeme k dalšímu podrobnému vyšetřování důležitých případů oběma zmíněným typům příslušných, buď několik poznámek přičiněno.

Pro praktické úvahy jest pohodlno vyčísliti konstanty v původním vzorci a přejíti od přirozených logarithmů k obecným, takže

$$\pi = \frac{4{\cdot}24 \,.\, 1{\cdot}96}{0{\cdot}4343 \,.\, 96540 \,.\, n_e} \,.\, T \,.\, \lg \frac{P}{p}$$

čili

$$\pi = \frac{0{\cdot}0002}{n_e} \,.\, T \,.\, \lg \frac{P}{p} \text{ *)},$$

kde ovšem na místo tlaku P a p kladou se, kde potřeba káže, příslušné koncentrace, tedy obecně

$$\pi = \frac{0{\cdot}0002}{n_e} \,.\, T \,.\, \lg \frac{C_1}{C_2} \,.$$

Předem ze vzorce patrno, že mění se elektromotorická síla π řadou arithmetickou, když poměr koncentrací C_1, C_2 mění se řadou geometrickou. Když

$$C_2 = 10^x \,.\, C_1 \,,$$

jest změna elektromotorické síly dána výrazem

$$\pi = \frac{0{\cdot}0002}{n_e} \,.\, T \,.\, x \,.$$

Jedná-li se o úvahy při téže teplotě, a zvolíme pro zaokrouhlení za teplotu střední 17°, takže

$$T = 290,$$

jsou zaokrouhlené změny $\Delta\pi$ elektromotorické síly, když koncentrace se v poměru $1 : 10^x$ změní:

při jednomocném kovu ($n_e = 1$) . . . $\Delta\pi = 0{\cdot}0580 \,.\, x$ volt,
při dvoumocném kovu ($n_e = 2$) . . . $\Delta\pi = 0{\cdot}0290 \,.\, x$ „

Dále jest ze vzorce základního patrno, že elektromotorická síla uvažovaných dvou typů článků koncentračních závisí jen (při dané teplotě):

α) na mocenství kovu,

---

*) Přesnější hodnota číselného součinitele jest 0·0001982, pro většinu úvah praktických stačí však pohodlnější hodnota zaokrouhlená 0·0002.

β) na poměru koncentrací iontů na elektrodách,
nezávisí však

α) na kvalitě zvoleného kovu,

β) na aniontu zvoleného elektrolytu.

Veškery tyto důsledky byly způsobem přesvědčujícím dotvrzeny pokusy, a sice při obou uvažovaných typech článků koncentračních.

Nenáleží v rámec této úvahy theoretické hromaditi data experimentálná, než přece několik přesvědčivých ukázek nutno uvésti, aby realný význam celé theorie podané lépe vynikl.

Pokud jde o různě koncentrovaná amalgamata, poučné jsou výsledky, jichž došel *G. Meyer* *). Z práce jeho mějž tu místo několik číselných výsledků:

Amalgama zinku, Elektrolyt $ZnSO_4$.

$T - 273^0$	C_1	C_2	π poz.	π poč.
11·6	3366	113	0·0419 volt	0·0416 volt
12·4	2280	61	0·0474	0·0425
60·0	„	„	0·0520	0·0519

Amalgama kadmia. Elektrolyt CdI_2.

16·3	1771	53	0·0433 volt	0·0440 volt
13·0	594	70	0·0260	0·0262

Amalgama mědi. Elektrolyt $CuSO_4$.

17·3	387	96	0·0181 volt	0·0176 volt
20·8	447	166	0·0124	0·0125

Souhlas sluší nazvati vzhledem k malým hodnotám elektromotorických sil, jež nesnadno se přesně měří, uspokojivý. I jednoduchými prostředky lze získati značného přiblížení skutečnosti k theorii. *B. Mašek* získal v laboratoři referentově:

Amalgama kadmia. Elektrolyt $CdSO_4$.

$T - 273^0$	C_1	C_2	π poz.	π poč.
15·0	1500	20	0·0504	0·0540.

V sloupcích pod C_1 a C_2 jsou zaznamenány relativné koncentrace amalgamat, ježto o absolutní hodnoty neběží.

*) *Meyer*, 1891. Zeitschr. f. physik. Chem. VII. 477.

Pokud jde o kovy v roztocích jich solí za různé koncentrace, postupuje se nejlépe tak, že měříme elektromotorické síly elektrod kovových postupně v roztoku soli o normalitě $^1/_1$, $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$ ... oproti elektrodě normálné, jejíž elektromotorická síla je známá a stálá (na př. elektroda „kalomelová"). Poněvadž elektromotorické síly se sčítají, značí rozdíly jednotlivých hodnot síly elektromotorické článků koncentračních se stejnými elektrodami kovovými, leč s roztoky elektrolytu o poměru koncentrací 1 : 10.

Za příklad podávám hodnoty z měření vlastních:

	Normalita roztoku $AgNO_3$	El. mot. síla π	Rozdíly $\Delta\pi$
Kombinace $Ag/AgNO_3$ roztok	$^1/_{10}$	—1·016 volt	
	$^1/_{100}$	—0·964 „	0·052 volt
	$^1/_{1000}$	—0·910 „	0·054 „
		Střed	0·053 volt
		Theorie	0·058 „

	Normalita roztoku $CuSO_4$	π	$\Delta\pi$
Kombinace $Cu/CuSO_4$ roztok	$^1/_1$	—0·584 volt	
	$^1/_{10}$	—0·559 „	0·023 volt
	$^1/_{100}$	—0·532 „	0·027 „
	$^1/_{1000}$	—0·502 „	0·030 „
		Střed	0·027 volt
		Theorie	0·029 volt.

I zde jest souhlas uspokojivý, a rozdíly, které se posud jeví, spadají na vrub té okolnosti, že zředěním v poměru 1 : 10 při roztocích koncentrovanějších elektrolytická dissociace nestoupne v témž poměru, o čemž později stane se zmínka obšírnější.

Po všeobecných těchto úvahách lze předvésti v pořadí některé hlavní kombinace příslušné oběma typům článků koncentračních. Tato úvaha omezí se na typ první, příští bude věnována typu druhému.

Články s nestejnou koncentrací iontů v elektrodách.

1. Články s amalgamaty různé koncentrace byly v předešlém zevrubně vyloženy. Zde buď ještě dodatkem poznamenáno, že z elektromotorických sil takových článků lze stanoviti molekulovou veličinu kovů ve rtuti rozpuštěných (*Türin*); ukázalo se obecně, že kovy ve rtuti rozpuštěné přítomny jsou jako jednotlivé atomy, tedy že jsou v amalgamatech v témž stavu, jako když jsou ve skupenství plynné proměněny (*Meyer, Nernst*). Podrobnosti těchto důsledků nenáleží sem vykládati.

2. Omezení, aby kov ve rtuti rozpuštěný měl větší elektrolytický tlak než rtuť, není naprosto nutné. Též z amalgamat kovů vzácných lze pořídìti články koncentrační. Obecné schéma jest toto:

Rtuť | Sůl rtutičnatá*) | Amalgama vzácného kovu.
$\longrightarrow$

Jen, že při tomto uspořádání nepřevádí se kov, nýbrž rtuť, a sice trval by tento převod tak dlouho, až by veškerá čistá rtuť se rozpustila a na druhé elektrodě se s amalgamatem spojila. Je-li tedy článek v činnosti, jest směr proudu v článku oproti případu s amalgamaty kovů obyčejných opačný, tedy směřuje v článku od rtuti k amalgamatu. Snadno pochopitelná obdoba přítomného případu jest tato: V uzavřeném prostoru buď jedna nádoba s vodou, druhá s roztokem vodním. Voda se z prvé nádoby vypařuje a v nádobě s roztokem sráží, neboť nad roztokem jest menší tense par než nad vodou pouhou. Rozdíl obou tensí jest zcela obdobný potenciálné differenci mezi rtutí a amalgamatem kovu vzácného. Elektrolytický tlak hraje úkol tense páry. Držíce se této obdoby, předpokládejme, že se elektrolytický tlak (P_1 tlak rtuti, P_2 tlak amalgamata) ve stejném smyslu snižuje rozpuštěním kovu ve rtuti, jako tense par roztoku rozpouštěním n molekul látky v N molekulách rozpustidla, totiž, že

$$\frac{P_1 - P_2}{P_1} = \frac{n}{N}.$$

*) Nutně musí se užiti soli rtutičnaté; soli rtuťnaté redukují se ve styku se rtutí dříve neb později ve rtutičnaté.

Leč pro elektromotorickou sílu článku, jehož elektrodám přísluší elektrolytické tlaky P_1 a P_2, kde $P_1 > P_2$, jsme v předchozích úvahách opodstatnili vzorec

$$\pi = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{P_1}{P_2}$$

čili

$$\pi = -\frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{P_2}{P_1}.$$

Přechod ku vzorci supponovanému jest velmi snadný. Použijeme-li stejniny, ježto se $\frac{P_2}{P_1}$ málo od jednotky liší,

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{P_1 - P_2}{P_1}$$

a rozvineme v řadu dle

$$l(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$$

přestavše na členu prvém, máme

$$-l \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 - P_2}{P_1} = \frac{n}{N},$$

takže jest elektromotorická síla dána výrazem:

$$\pi = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} \cdot \frac{n}{N},$$

aneb, vztahujeme-li vše na počet N_1 molekul rtuti přítomných na každou 1 molekulu kovu, tedy pro

$$\frac{n}{N} = \frac{1}{N_1},$$

též

$$\pi = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{N_1}.$$

Že jde tu o článek koncentrační, plyne i z této úvahy: Rozpuštěním látky v rozpustidle se všeobecně (a nehledě k výminkám, jako jest na př. akce chemická) zvětšuje objem rozpustidla, tedy zmenšuje se jeho koncentrace vzhledem k jednotce objemové. Rtuť i amalgama rtuti představují tudíž na obou elektrodách rtuť o různé koncentraci. Osmotická práce, která se in maximo vykoná při převodu N_1 molekul rtuti z jedné elektrody na druhou, když osmotický tlak roztoku jest p, objem, v němž jest 1 gram-molekula kovu rozpuštěna, jest v, dána jest součinem pv [když množství roztoku jest tak značné, že změnu koncentrace lze zanedbati], pro který však platí

$$pv = \mathrm{RT}.$$

Jest tudíž maximálná práce osmotická

$$\mathrm{L} = \mathrm{RT}.$$

Táž práce v míře elektrické, když se N_1 molekul rtuti převede z jedné elektrody na druhou, jest však též dána výrazem

$$\mathrm{L} = \mathrm{N}_1 n_e \varepsilon_0 \pi.$$

Z nutné rovnosti obou výrazů plyne

$$\pi = \frac{\mathrm{RT}}{n_e \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\mathrm{N}_1},$$

tedy v úplné shodě s vývodem předchozím.

Myšlénky k uvedené kombinaci článku koncentračního podal *V. Türin*, článek sám však nebyl posud experimentálně blíže studován. Theorie však předzvídá, že jeho elektromotorická síla jest nezávislá na jakosti rozpuštěného kovu ani na aniontu užité soli rtutičnaté. Absolutní hodnotu síly té snadno jest určiti. Z důvodů četných jsme nuceni míti za to, že rtuť vystupuje zde monoatomicky, že tedy jest

$$n_e = 1,$$

takže, poněvadž $\mathrm{R} = 8{\cdot}31$ volt $\times$ coulomb., závisí elektromotorická síla jen na teplotě a koncentraci:

$$\pi = \frac{8{\cdot}31}{96540} \cdot \mathrm{T} \cdot \frac{1}{\mathrm{N}_1}$$

čili

$$\pi = 86{\cdot}08 \,.\, 10^{-6} \,.\, \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{N}_1}.$$

Kdybychom tudíž volili $N_1 = 100$, tedy na př. 100 molekul rtuti na 1 molekulu rozpuštěného zlata, bude při obyčejné teplotě (17°), kdy $T = 290$, elektromotorická síla článku tak pořízeného

$$\pi = 247{\cdot}6 \,.\, 10^{-6} \text{ volt.}$$

V těchto nepatrných obnosech ovšem spočívá obtíž pro experimentálnou kontrolu theoretických důsledků.

3. Osmotická theorie sil elektromotorických potvrzena jest na základech velmi širokých. Ukázalo se, že jakkoli přivoděná změna v koncentraci iontů elektrody má za následek vznik síly elektromotorické. Mechanická změna koncentrace působí právě tak, jako změny koncentrace při pochodech výše vypsaných. Zajímavé uspořádání toho druhu podal *Th. des Coudres* *). Jest v podstatě toto:

Rtuť pod vyšším tlakem	Sůl rtutičnatá roztok	Rtuť pod obyč. tlakem.

Uspořádání provedeno takto: do roztoku dusičnanu rtutičnatého kolmo ponořena roura skleněná, na spodním konci pergamenovým papírem ovázaná. Do roury nalito rtuti do výše odpovídající žádanému tlaku. Druhou elektrodou byla rtuť v témž roztoku dusičnanu rtutičnatého umístěná, jejíž povrch byl ve stejné výši jako povrch pergamenového papíru. Papír ten ve skutečnosti tvořil blánu, nepropouštějící rtuť kovovou, leč propouštějící ionty rtuťové. Proudem rtuť se převádí od elektrody o vyšším tlaku k elektrodě o tlaku nižším (jak směrem šipky jest naznačeno). Obdoba tlaku elektrolytického s tlakem hydraulickým jest tu do krajností zřetelna. Také jest potenciálný rozdíl funkcí výšky sloupce rtuťového, jak jednoduchá úvaha učí. Když se totiž převede 1 gram-atom rtuti z výšky l (kde l značí kolmý rozdíl povrchů rtuti na obou elektrodách) na výšku 0, jest mechanická práce tím vykonaná dána výrazem

$$L = 200\, g \,.\, l,$$

když g jest urychlení tíže v míře absolutní. L jest vyjádřeno ergy, a poněvadž

---

*) *Des Coudres*, 1892. Wied. Ann. 46. 292.

$$10^7 \text{ erg} = 1 \text{ volt} \times \text{coulomb},$$

nutno výraz hořejší násobiti činitelem 10^{-7}, aby byla práce vyjádřena v míře elektrické. Když tak učiníme, lze ji srovnati s prací elektrickou, která jest

$$L = \pi n_e \varepsilon_0 ,$$

takže z rovnosti obou výrazů pro L [ježto jest pro rtuť zase $n_e = 1$], plyne

$$\pi = 200 \,.\, 10^{-7} \,.\, \frac{g}{\varepsilon_0} \,.\, l,$$

aneb, když vyčíslíme použivše

$$g = 980 \text{ cm} \,.\, \text{sec}^{-2},$$
$$\varepsilon_0 = 96540 \text{ coulomb},$$

shledáme elektromotorickou sílu přímo úměrnou tlaku sloupce rtuťového (kde l jest vyjádřeno v centimetrech):

$$\pi = 0{\cdot}203 \,.\, 10^{-6} l,$$

tedy asi 0·2 mikrovolt pro rozdíl v tlaku o 1 *cm*. Tato nepatrná hodnota činí ovšem nemalé nesnáze při měření, leč přece řádová shoda mezi počtem a pozorováním, které se dodělal *Des Coudres*, jest skvělým dokladem pevného theoretického základu, z něhož se vyšlo. Na ukázku té shody stůjtež tu čísla:

tlak:	$10^6 \,.\, \pi$ poč.	$10^6 \,.\, \pi$ poz.
36 *cm*	7·2 volt	7·4 volt
46 „	9·3 „	10·5 „
113 „	23·0 „	21·0 „

4. Posléze lze sestrojiti články koncentrační prvého typu, když užijeme za látky ionty vysílající plynů. To jest ovšem jen zvláštním experimentálným obratem možno, který v podstatě jest velmi jednoduchý: elektrody platinové platinovou černí pokryté (poplatinované) aneb ještě lépe elektrody zlaté pokryté černí palladiovou zataví se pomocí drátku do rourek skleněných, jichž spodní otevřený konec se do elektrolytu ponořuje tak, aby malá část plechu platinového neb zlatého byla v kapalině ponořena, ostatní však byla obklopena plynem v uzavřeném prostoru rourek

obsaženým, nejlépe vodíkem, neboť známa jest ochota, s kterou čerň platinová nebo palladiová se tímto plynem nasycuje. Taková elektroda se skutečně chová jako elektroda plynová, kov slouží jen jako vodič (s jistou reservou řečeno), čerň však hraje úlohu rozpustidla pro plyn (jako na př. rtuť činila při amalgamatech) umožňujíc přechod částic plynových z elektrody ve stav ionisace a naopak. I mají tyto elektrody plynové, jak *Le Blanc**) experimenty zjistil, povahu elektrod *zvratných*. Omezíme se zde, kde běží jen o principy článků koncentračních, na nejjednodušší případ možný: dvě elektrody vodíkové, kde vodík jest pod různým tlakem, ponořené v elektrolyt, který chová týž ion (vodík), tedy ve zředěnou kyselinu, na př. kyselinu sírovou. Máme tedy v konkretním případě na mysli článek:

Vodík pod vyšším tlakem	SO_4H_2 zředěná	Vodík pod nižším tlakem.

Budiž na prvé z elektrod tlak vodíku p_1, na druhé p_2, takže platí nerovnost

$$p_1 > p_2.$$

Vzorec pro elektromotorickou sílu dá se opět pomocí tlaku elektrolytického, i bez něho dle obdoby thermodynamické odvoditi, neboť tu jde o přechod molekul vodíkových z vyššího tlaku na nižší tlak. Obdoba s amalgamaty jest tu úplná. Pokud se vodíku plynného týče, jest práce vykonaná přechodem z tlaku p_1 na tlak p_2 dána výrazem

$$L = RT\, l \frac{p_1}{p_2}\,;$$

práce pak elektrická, poněvadž jedna molekula vodíku dva jednomocné ionty poskytuje ($n_e = 2$), jest

$$L = 2\varepsilon_0 \pi,$$

a z rovnosti obou prací plyne

$$\pi = \frac{RT}{2\varepsilon_0}\, l \frac{p_1}{p_2}\,.$$

*) *Le Blanc*, 1893. Zeitschr. f. physik. Chem. XII. 333.

Oproti vnějšímu tlaku plynu mimo elektrodu působí tlak elektrolytický plynu v elektrodách (v černi platinové neb palladiové), kde však na zřeteli nutno míti ne molekuly plynu H_2, nýbrž jednotlivé ionty vodíkové. Když elektrolytický tlak na elektrodách nazveme P_1 a P_2, a sice zase tak, že

$$P_1 > P_2,$$

vyplyne obdobnou úvahou výraz chudší toliko o faktor $\frac{1}{2}$ (ponévadž $n_e = 1$), tedy

$$\pi = \frac{RT}{\varepsilon_0} l \frac{P_1}{P_2}.$$

Ježto oba výrazy touž veličinu vyznačují, plyne z jich rovnosti podmínka pro vztah tlaku elektrolytického a vnějšího na elektrodách plynových:

$$\frac{1}{2} l \frac{p_1}{p_2} = l \frac{P_1}{P_2}$$

čili

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{P_1^2}{P_2^2}.$$

Podmínka tato jest v plné shodě s názory moderní chemie na rovnovážné stavy soustav plynných. Při zvratných elektrodách plynových jde o *reakci zvratnou*, spočívající v tom, že molekuly vodíkové štěpí se v ionty, což naznačujeme schématem

$$H_2 \rightleftarrows \overset{+}{H} + \overset{+}{H}.$$

Reakce probíhá tak dlouho ve smyslu od levé ruky k pravé, až jest vyhověno podmínce: koncentrace části nedissociované (zde jest to vodík) lomena součinem z koncentrací částí dissociovaných (zde jsou to ionty vodíkové, oba ve stejné koncentraci, ježto vznikají ve stejném množství) jest veličinou stálou na absolutních hodnotách koncentrace nezávislou. Při plynech koncentrace nahraženy jsou jednoduše tlaky, takže máme na jedné elektrodě:

$$\frac{p_1}{P_1^2} = \text{konst.}$$

a na elektrodě druhé

$$\frac{p_2}{P_2^2} = \text{konst.},$$

kde p k vodíku, P k iontům se vztahuje, takže, poněvadž vzhledem k výše vytčené nezávislosti na absolutních hodnotách konstanty mají hodnotu stejnou, plyne

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{P_1^2}{P_2^2},$$

kterýž důsledek, srovnalý s theorií o chemické rovnováze na zcela jiných než elektrických základech založené, řadí se důstojně mezi jiné elegantní důsledky elektrochemie.

Poznámka k „Příspěvku k theorii kuželoseček“ od prof. dr. K. Zahradníka, str. 37.

Napsal **J. Pour**,
prof. na c. k. Malostranské reálce v Praze.

1. Protneme-li kružnici a její dvě tečny přímkou rovnoběžnou se spojnicí bodů dotyčných, jsou části sečny obsažené mezi kružnicí a tečnami stejné. Tento vztah, založený na souměrnosti kružnice a daných tečen k průměru vedenému průsečíkem tečen, přísluší ovšem i ostatním kuželosečkám.

Neboť, promítneme-li svrchu vytčený útvar centrálně do roviny se sečnou rovnoběžné, nemění se projekcí dělící poměr bodů, v nichž sečna dané útvary protíná.

Že ovšem uvedený vztah přísluší též sečně, která protíná kuželosečku v bodech diametrálných k bodům dotyčným daných tečen (jak pod názvem „Nová vlastnost kuželosečky“ ve článku dole citovaném se předvádí), jest zřejmo.

Přejde-li sečna v tečnu, nabudeme věty: Část tečny kuželosečky, obsažená mezi dvěma tečnami, které sestrojeny jsou v krajních bodech některé, s tečnou rovnoběžné tětivy, půlena jest bodem dotyčným.

Poněvadž úběžné přímce roviny nelze přisouditi určitý směr, plyne z předešlého též známá vlastnost hyperboly: Části sečny obsažené mezi hyperbolou a asymptomami jsou stejné. Část tečny obsažená mezi asymptomami půlena jest bodem dotyčným.

2. Z centrálného průmětu dříve pořízeného plyne i jinak známá vlastnost: Průměr kuželosečky, který prochází průsečíkem dvou jejích tečen, rozpoluje tětivu bodů dotyčných. Odtud odvoditi lze konstrukci tečny (tamtéž, *obr. 1.*) takto:

Spojíme-li bod M, kterým tečna se vésti má, s bodem dotyčným Q dané tečny T_Q, protíná průměr kuželosečky, který tětivu MQ rozpoluje, tečnu T_Q v bodě M_1', jímž tečna bodu M prochází.

Označíme-li O' bod souměrný dle středu S k bodu Q, leží střední příčka $\triangle O'MQ$ v průměru SM_1' a jest tudíž $SM_1' \parallel O'M$.

Přímka SM_1' jest Pascalovou přímkou do kuželosečky vepsaného šestiúhelníku $MMO'QQN$, označíme-li N druhý krajní bod průměru bodu M.

Věstník literární.

Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu. Napsal *Eduard Weyr.* V Praze 1898. Nákladem Jednoty českých mathematiků.

Když r. 1870 Jednota českých mathematiků vydala svou „První zprávu", upoutal k sobě pozornost uveřejněný v ní na prvém místě článek „Z novější geometrie", jejž napsal technik Ed. Weyr. Pěkná a svěží tato práce byla záslužnou v té příčině, že poprvé jazykem českým pojednávala o předmětu té doby v literatuře naší novém, pro který zájem buditi se snažila a pro jehož zpracování bylo třeba příslušnou terminologii a fraseologii teprve vytvořiti. Ve zprávě druhé a třetí uveřejněno pokračování tohoto pojednání zpracované prof. Emilem Weyrem.

Úplný celek novější geometrie křivek a ploch 2. řádu podalo společné dílo bratří Emila a Eduarda Weyra „Základové vyšší geometrie", uveřejněné v musejním sborníku Živě ve třech svazcích roku 1871, 1874 a 1878.

Když pak nyní Jednota českých mathematiků věrna úkolu svému přistoupila k vydávání vědeckého Sborníku, zahájila činnost svou v tomto směru opět spisem dávného a slovutného svého člena, dvorního rady professora Eduarda Weyra. Jako druhdy skromný článek tak nyní obšírné dílo téhož autora má účelem šířiti u nás známost moderních nauk geometrických.

Přehlédněmež stručně obsah Projektivné geometrie, kteráž právě vyšla jakožto I. číslo Sborníku Jednoty českých mathematiků. Dílo toto čítajíc VIII + 189 stran velké osmerky, typograficky vkusně vypravené a 112ti sličnými obrazci opatřené, rozděleno jest v úvod a 12 kapitol.

Úvod obsahuje výklad některých pojmů z analytické geometrie, zejména: bodů a přímek pomyslných, křivek druhého řádu, bodů a čar pomyslně sdružených.

V kap. I. vyložen perspektivný a projektivný vztah základních útvarů prvého řádu, totiž přímé řady bodové, svazku paprskového a svazku rovin. Hned z počátku přihlíženo k prvkům nekonečně vzdáleným. Vztah perspektivný založen na promítání a protínání; při tom užito názvu průmět v jiném než obvyklém smyslu, tak na př. nazván průmětem bodu jeho paprsek promítací. Projektivný vztah definován takto: Dána-li řada základních útvarů prvého řádu a souvisí-li každý perspektivně s následujícím, jest první projektivný s posledním. Kapitola II. poukazujíc k reciprocitě v rovině, jedná o úplném čtyrrohu a čtyrstranu, o trojúhelnících homologických a některých důsledcích vztahu perspektivního. Kapitola III. vyšetřuje soumístné útvary projektivné a jich prvky samodružné, končí počtářským stanovením projektivnosti řad i svazků; involuční útvary projektivné jsou předmětem kap. IV. Vykládaje v kap. V. projektivné vlastnosti kružnice a jich užití ku strojení prvků samodružných, přechází autor v kap. VI. ku čarám i kuželům druhého řádu. Kuželosečky pojaty jsou jakožto křivky homologické s kružnicí; ztvrzeno pak o nich, že jsou totožny s křivkami druhého stupně vytvořenými dvěma projektivnými svazky i s křivkami druhé třídy vytvořenými dvěma projektivnými řadami. Následuje potom sestrojení kuželosečky určené 5ti body neb 5ti tečnami, věta Pascalova i věta Brianchonova. Posléze přeneseny dosažené výsledky na kužel druhého stupně a druhé třídy. Kapitola VII. zabývá se stanovením průsečíků přímky s kuželosečkou a vedením tečen z bodu daného; uvažuje projektivné řady i svazky druhého řádu, zvláště involuci bodovou i paprskovou na kuželosečce, čímž zjednán základ k theorii polů a polár i polárných vlastností kuželoseček.

Význačnou pro směr spisu jest kap. VIII., v níž pojednáno o strojení kuželoseček z pomyslných prvků, o involucích adjungovaných a o sestrojení průsečíku přímek neb spojnice bodů pomyslně sdružených. Svazek a řada kuželoseček, k nim se vztahující věta Desarguesova a její zobecnění i použití jsou předmětem kap. IX., kdežto v kap. X. vyšetřují se střed, sdružené průměry, osy, ohniska a řídicí přímky kuželoseček, imaginárné body kruhové v nekonečnu, kuželosečky konfokálné a homothetické. Projektivné řady bodů nebo svazky rovin o mimoběžných osách jsou základem k vytvoření soustavy přímek náležející hyperboloidu jednodílnému neb hyperbolickému paraboloidu; o těch promluveno v kap. XI., načež ukončen spis kapitolou XII. uvažující obecně o projektivnosti útvarů základních nejen prvního, ale i druhého řádu.

Ze stručného tohoto nástinu jest zřejmým rozsah látky obsažené v Projektivné geometrii; že zpracována jest úplně, dokonale a přesně, za to ručí již jméno proslulého autora. Chceme jen k jedné věci poukázati, která spis charakterisuje. P. spisovatel nenutí se do toho, aby pojmy, které původem svým i povahou náležejí geometrii analytické, vyvinoval způsobem synthetickým; zmiňuje se o nich v úvodě, přijímá je jakožto známé a pracuje jimi bez úzkostlivosti. Nezakládá si na vědecké ryzosti methody, ale snaží se, aby didaktické podání učinilo spis jeho snadným, tak aby čtenář vpravil se bez obtíží v ducha moderní geometrie. To se mu také zplna podařilo a spočívá v tom zásluha i cena díla.

Že k sepsání tohoto kompendia propůjčil se učenec, jenž proslul tolika výtečnými pracemi původními zvláště v jiných směrech mathematické vědy, dlužno s povděkem přijmouti a jakožto zvláštní zásluhu jeho o českou literaturu vědeckou prohlásiti. Sepsáním druhého dílu obsahujícího theorii ploch druhého stupně a z ní vyplývající nauku o křivkách stupně třetího a čtvrtého byla by zásluha tato dovršena. *A. Strnad.*

O bouřích. Píše *Jaroslav Simonides*, gymnas. professor. V Kroměříži, 1898. Tiskem J. Slováka. — Nákladem vlastním.

Obsah uvedeného spisu jest: 1) Mrak bouřný; 2) elektřina atmosferická; 3) vznik bouří; 4) blesk; 5) účinky blesku: hrom; účinky chemické, tepelné, magnetické a elektrické, mechanické a fysiologické; 6) čeho jest se nám při bouřích vystříhati; 7) dodatek.

Jelikož spis pojednává o předmětu zajímavém, o kterém v naší literatuře nebylo dosud mnoho psáno*), hodláme o něm promluviti poněkud obšírněji. Abychom předešli všelikému nedorozumění, musíme podotknouti, že nejedná spis o *bouřích* vůbec, jak by se mohlo z nadpisu souditi, nýbrž pouze o *„bouřkách,“* elektrických to výjevech ve vzduchu.**)

---

*) Srovnej články v Ottově Slovníku naučném: *Blesk, bleskovod, bouřka, elektřina atmosferická.*

**) Z jiné strany zavádí se opět místo *bouře* ruský název *buran*, označující vichřici spojenou s metelicí sněhovou na ruských stepích a v Sibiři. V Čechách se zhoubné burany nevyskytují.

1) *Sídlem bouřky* bývá obyčejně kupový mrak (cumulus), který se působením tepla dobou letní vyvinuje snadno v mrak bouřkový (cumulo-nimbus). Spisovatel podává jaksi za úvod popis letního mraku bouřkového, avšak uznává, že panuje rozmanitost ve velkosti a v rozsahu mraků bouřkových. V některých případech vychází blesk i z malého mráčku.

Dle spisovatele nepřestupuje výška oblaků z pravidla 5000 *m* a u nás bývají oblaky mezi 1200—2000 *m*. Výšky bouřkových oblaků nemohou býti vždy stejné, jelikož poloha bodu rosného bývá závislá na různých okolnostech. Mnohdy vystupují tyto oblaky do neobyčejné výše. Riggenbach měřil v Alpách výšku základní plochy 2800 *m* a výšku vrcholku až 13000 *m*.

2) Ve stati o *elektřině atmosferické* uvádí spisovatel zevrubně první pokusy zjistiti totožnost blesku s jiskrou elektrickou a sváděti elektřinu k zemi, při čemž věnuje zvláštní pozornost *Franklinovi* a *Divišovi*, oběma vynálezcům bleskosvodu, kteří seznali, že vodiči hrotem opatření jiným tělesům elektřinu rychle odjímají.

Na str. 9. a 10. popsán a zobrazen jest Divišův stroj postavený v Přímětících na Moravě v letech 1754—60 a na str. 11. nalézá se podobizna Divišova. Jako Franklin s drakem, studoval Diviš svým strojem elektrický stav ovzduší. Stroj jeho byl o šest let dříve postaven, nežli první bleskovod toho druhu. Jest založen na základě zcela jiném, nežli bleskovod Franklinův. Neboť tento měl odváděti elektřinu blesku neškodnou cestou k zemi, kdežto hromosvod Divišův měl velkým množstvím hrotů vůbec odváděti elektřinu mraků tak, aby k výbojům ani dojíti nemohlo.*)

Prvními pokusy bylo zjištěno, že úkaz blesku jest jiskrou v ohromném rozměru a že elektrické napjetí atmosfery podléhá variacím denním a ročním. K pozorování elektřiny atmosferické slouží elektroskopy a elektrometry jako elektrometr *Peltierův*, *Thomsonův*, *Exnerův* atd.

Hypothesy k vysvětlení normální elektřiny atmosferické vůbec a elektřiny bouřkové zvláště jsou mnohé, avšak není možno všechny tyto hypothesy ve spise populárním náležitě probrati. Spisovatel omezil se na nejdůležitější, mezi nimiž přikládá největší váhu theorii *Ermanově* a *Peltierově*, již v novější době propracoval dopodrobna *F. Exner*, ačkoliv doznává, že theorie tato nedovede vysvětliti variace denní a roční.**)

---

*) Viz prof. *Nušla* přípis k České Akademii (Věstník r. 1898 č. 8.) a prof. *Pšeničky* článek o Divišovi v Ottově Slov. nauč.

**) Z hojné literatury viz: *Kollert*: Die neuesten Beobachtungen und Theorien der atmosphärischen Elektrizität. Elektro-tech. Zeitschrift 1887;

Dle této theorie není atmosfera způsobilou voditi a chovati elektřinu, nýbrž elektrickou jest pouze země a elektřina ve vzduchu zachycená a měřená jest elektřinou indukovanou. Exner pokládá zemi dle různých úkazů za negativně elektrickou a určuje pokusem svah potenciálu v suchém vzduchu na 1300 voltů pro metr a z toho absolutní potenciál země — $9 \cdot 10^9$ voltů a celý náboj země — $2 \cdot 10^{16}$ abs. jednotek elektrostatických. Hustota by se rovnala — 0·0035 el. jed. a elektrický tlak na 1 cm^2 činí $7 \cdot 10^{-8}$ *gr* čili 0·0000 72dyn. Odpařováním oddělují se stále částice od povrchu zemského, které přivádějí jistou část náboje do atmosfery. Svah potenciálu jest v úzkém spojení s množstvím páry vodní ve vzduchu se nalézajícím; při větším nahromadění páry vodní může klesnouti na 0 a měniti znaménko, jakož se děje za každého většího deště.

Kde se vytvořují silné místní difference potenciálu, nastává vybíjení elektřiny. Bouřka dle Exnera povstává nejen nahromaděním, nýbrž též zvláštní polohou oblaku v elektrickém poli, jež mívá za následek ohromné rozdíly potenciálové až $^1/_2$ mill. Dan.

3) *Vznik bouřky* vykládá se prudkým vzestupným pohybem vzduchu vlhkého. Vznik bouřky nejlépe lze pozorovati při výbuchu sopky, která chrlí páry vysoké teploty do chladného vzduchu. Páry se rychle ochlazují, nastává jich kondensace, tvoří se mrak, jenž houstne a z něhož šlehají blesky všemi směry. V atmosféře nastává bouřka tím prudčí, čím rychlejší byl vzestupný pohyb, čím náhlejší kondensace.

Příčina pohybu vzestupného v ovzduší může býti dvojí: 1. Přehřátí vrstev spodních a sice buď přímou insolací (Reye) aneb kondensací par přesycených (Bezold). 2. Přechlazení vrstev horních a sice buď přímým sáláním (Davis) aneb změnou skupenství hydrometeorů klesajících, kapek vodních aneb krystalů ledových (Leyst.)

Jelikož insolace jest nejčastěji příčinou bouřek, vznikají u nás bouřky z pravidla v létě odpoledne, za parných dnů a při bezvětří, bouřku předchází obyčejně vítr jihozápadní a západní, přinášející hojnost vlhkosti. Bouřky jsou prudčí a častější v horách, kde jest vlhkost vyšší, insolace účinnější; v krajinách tropických dostavují se téměř denně, zvlášť za slunovratu a v době dešťů.

Řadou číslic jest udáno ubývání bouřek se zeměp. šířkou od 40.° až do 65.° s. š. a poukázáno k okolnosti, že ve vyšší šířce zeměp. převládají bouřky zimní, jež prý přicházejí z pravidla

Koppe: Über atmosph. u. Gewitterelektrizität Met. Zeitschrift II.; *F. Exner:* Über die Ursachen und die Gesetze der atmosphärischen Elektrizität (Vídeň 1886); *Urbanitzky:* Die Elektrizität des Himmels und der Erde 1886.

v průvodu buranů probíhajíce nezřídka celou Evropou s prudkostí velikou. Rozdělení bouřek dle ročních dob vysvětluje spisovatel z tabulek *Kämtzových*, jež otiskuje pro celou řadu míst.

Stať o vzniku bouřek a jejich rozdělení na povrchu zemském a na roční doby nemůžeme úplně schvalovati. Při vysvětlování vzniku bouřky jest nutno přihlížeti k současným dynamickým a thermodynamickým výjevům v atmosfeře, k rozdílům vyskytujícím se mezi bouřkami vznikajícími z tepla a mezi bouřkami vírovými, ku postupu bouřky na povrchu zemském atd. Pan spisovatel nalézá se v tom ohledu na stanovisku zastaralém, jak o tom svědčí použití tabulek Kämtzových, které za našich dob nevyhovují již v žádném ohledu.*)

V novější době pozorují se v některých pokročilých státech bouřky systematicky jako ve Francii, Švédsku, v Německu, Rusku a Italii. Stanoví se příchod, trvání každé bouřky, vyznačuje se na mapách směr, kterým se ubírá a zaznamenávají se škody, jež byly bouřkou způsobeny.**)

Spisovatel mohl při této příležitosti poukázati zcela dobře na některé výsledky novějšího systematického pozorování bouřek. Nepřihlíží-li se na př. ku všeobecným poměrům atmosferickým, jsou některé krajiny zvláště příznivé vzniku bouřek, pravá *ohniska bouřková*. Vznikne-li někde bouřka, šíří se ku předu dle *Ferrariho* studií o bouřkách v Italii buď radialně aneb v podobě širokého pásma, takže plocha bouřkou proběhnutá má podobu buď kruhové výseče aneb obdélníku, jehož délka šířku značně převyšuje. Postup bouřek znázorňuje Bezold *isobrontami*, t. j. čarami spojujícími místa stejného prvního zahřmění, Ferrari *isochronami*, čarami současné nejvyšší fase za bouřky. Čáry ty bývají buď kruhovité, šíří-li se bouřka radialně, nebo přímočárné, rovnoběžné. Mrak bouřkový postupuje ku předu na způsob vlnění tím způsobem, že se ustavičně znova a znova tvoří, kde jsou poměry k tomu příznivé. Z té příčiny nepohybuje se všude se stejnou rychlostí a pravidelností, neboť dokonce některá místa úplně přeskočí. Při porovnání map znázorňujících intensitu elektrických výbojů s mapami *isohyet* a *isochron* shledává se,

---

*) Nejnovější spis o rozdělení bouřek viz: Klossovsky A.: Distribution annuelle des orages à la surface du globe terrestre. Odessa 1894. S mapou.

**) Výzkum bouřek vyžaduje zvláštního systemu pozorovacího. Z pouhého zaznamenávání bouřky jednotlivými pozorovateli nelze nabyti jasného obrazu o zajímavém tomto výjevu. Observatorium Pařížské první věnovalo bouřce již od r. 1865 zvláštní pozornost, sledujíc bedlivě rozšíření a postup bouřek ve Francii a uveřejňujíc o nich mapy, pojednání a zprávy v díle „Atlas météorologique de la France.“ Po příkladu Francie zavedeno bylo systematické pozorování bouřky i v jiných zemích. Viz *Augustin:* O potřebě zorganisovati meteorologická pozorování v Čechách. Athenaeum 1885.

že bouřka na své dráze se mění, jsouc někde jenom dešť, jinde dešť s výboji elektrickými. Někdy táhne několik bouřek za sebou, z nichž jedna na počátku a na konci bývá hlavní, ostatní vedlejšími. Obyčejné bouřky vírové skládají se dle Mohna a a Hildebrandssona mnohdy z velkého počtu bouřek lokalisovaných, seřaděných do čáry a od sebe oddělených jako řada vojáků.

Trvání bouřky určuje se průměrně na $1^1/_2$ hodiny a rychlost na 30 *km* za hodinu, takže šířka bouřkového oblaku od prvního do posledního zahřmění činí 45 *km*. Průměrná rychlost bouřek bývá však různá dle krajin, dle prudkosti a dle směru větru při bouřce panujícího. Největší rychlost mívají bouřky s krupobitím spojené.

Bouřky postupují obyčejně směrem panujícího větru, takže přicházejí u nás nejčastěji od jihozápadu a od západu. Hory a podhoří přitahují bouřky, jež se zde obyčejně déle zdržují než v nížinách. Též řeky mají účinek na postup bouřky tím způsobem, že ji někdy zastavují. V různých krajinách vyskytuje se do roka různý počet bouřek, jejž jest nutno zjistiti pravidelným pozorováním. V Čechách jest pozorování dosud tak chatrné, že nelze nikterak ustanoviti, jakým způsobem jsou bouřky rozděleny na jednotlivé části země. Každého léta vedou se stesky na škody, které bouřky spojené s lijákem a krupobitím na osení působí, ale nečiní se ničeho, aby byly všechny případy náležitě zjištěny a vyšetřeny.*)

4) *O blesku* pojednává spisovatel velmi obšírně na 19 stranách. Dle Araga rozeznávají se nyní všeobecně tři hlavní druhy blesku: *blesk klikatý, plošný* a *kulový*. Nejen ve tvarech blesků, jež bývají všelijak rozvětvené, ale i také v jejich zbarvení panuje veliká rozmanitost, již možno vysvětliti nejlépe pokusy *Lepelovými*. K vyznačení různých tvarů blesků slouží vyobr. 5., 7. a 8. a četné popisy jednotlivých blesků, zvláště blesků kulových. K tomu připojen stručný popis pokusů, jimiž *Planté***) blesky napodobil.

5) *O účincích* blesku pojednáno jest na str. 47—68. Stálým průvodcem blesku jest hrom, který vzniká tím, že vzduch se po dráze blesku rozžhaví a roztáhne a pak opět vychladne a se stáhne, načež do toho prostoru vrazí prudce vzduch okolní. Je-li jiskra krátká, slyšíme krátkou ostrou ránu, je-li dlouhá a klikatá, slyšíme déle trvající rachocení, které se sesiluje a prodlužuje odrazem od mraků, od vrstev vzduchu různě teplých a od předmětů na povrchu zemském. Znásobíme-li počet vteřin

---

*) Viz Athenaeum 1885: O potřebě zorganisovati meteorologická pozorování v Čechách.

**) Les phénomènes électriques de l'atmosphère (1888).

uplynulých mezi bleskem a hromem rychlostí zvuku ($^1/_3$ *km*), poznáme vzdálenost bouřky.

Účinky blesku rozeznává spisovatel: *chemické, tepelné, magnetické* a *elektrické*, *mechanické* a *fysiologické* a připojuje k četným zprávám o různých těchto účincích pozorování v novější době učiněné, že počet zhoubných blesků stoupá ve většině zemí evropských. *Holtz* ukázal, že v Rakousku, Německu a Švýcarsku nebezpečí blesku od roku 1854 vzrostlo asi $2^3/_4$ kráte. *Bezold* na základě dat pojišťovacích ústavů v Bavorsku dokázal, že v době od 1833—1882 počet zápalných blesků se zde ztrojnásobil. Podobně shledal *Hellman* pro sev. Německo, *Weinberg* pro Rusko a jiní. Příčina tohoto úkazu hledá se v ubývání lesů, v rozmnožování rozsáhlých železných konstrukcí, v naplňování vzduchu prachem a kouřem atd.

6) Ve zvláštní kapitole jest vylíčeno, *čeho jest se nám při bouřce vystříhati*; poukázáno k různým pověrám a na konec jsou popsány jednotlivé *části bleskovodu.*

Kniha *o bouřkách* jest prací záslužnou, přihlíží-li se k hojnosti materialu, který jest zde obsažen a ke způsobu, jakým byl zpracován a může býti při zajímavosti předmětu doporučena kruhům co nejširším. Jelikož jest první knihou toho druhu, nemůže při posuzování jejím přikládáno býti tak přísné měřítko, jako při spisech v cizích literaturách.

Spisovatel udává na konci své knihy hlavní prameny, z nichž čerpal látku ku svému spisu. Seznam tento doplnili bychom pro toho, kdo se o tento předmět zajímá, přehledem literatury o elektřině atmosf. a o bouřce, sestaveným v *Güntherově* spise „Handbuch der Geophysik" (II. dílu 2. vyd.) str. 160—163. Pro posouzení souvislosti úkazův atmosferických s bouřkou může sloužiti anglický spis R. Abercrombyho, přeložený do němčiny řed. Pernterem „Das Wetter." Z moderního stanoviska psán jest spis Dra. A Gockela: „Das Gewitter." Mimo to populární časopis meteorologický „Das Wetter", vycházející v Berlíně, přináší hojné zprávy o zajímavých případech bouřky.

Dr. *Fr. Augustin.*

Annuaire de l' Observatoire Municipal de Paris (dit Observatoire de Montsouris) pour l' année 1899. Analyse et travaux de 1897. Météorologie. — Chimie. — Micrographie. Applications a l'Hygiène. Paris Gauthier — Villars.

Observatorium města Paříže, jež jest dosud jediné tohoto druhu, vydává od r. 1872 každoročně stručnou zprávu o pracích, jež se tam konají. Annuaire na r. 1899. obsahuje přehled prací z oboru meteorologie, chemie a mikrografie vykonaných r. 1897.

1. Práce meteorologické. Získáním věže sv. Jakuba pro městskou službu meteorologickou byla práce observatoria na Montsouris valně rozšířena.

Při porovnání s hodnotami pozorovanými v parku na Montsouris, který svou polohou venkovskou vymaňuje se z působení města, mohou pozorování konaná na věži sv. Jakuba uprostřed Paříže sloužiti k ustanovení změn, které působí velké město v podnebí místním.

Tímto způsobem městské současně pozorující stanice, jichž počet se valně rozmnožil, poskytují možnost sledovati krok za krokem průběh výjevů atmosferických, vyskytujících se v této krajině, zkoumati a porovnávati jejich proměny.

Přístroje svěřené těmto stanicím byly častěji verifikovány. Na Montsouris porovnávají a zkoušejí se přístroje od mechaniků tam zasílané. Na Montsouris konají se též podrobná studia výjevů vyžadujících stálého zaznamenávání jako jest zemský magnetismus, elektřina, vypařování vody, účinek půdy na teplotu atd.

Na druhé straně terasa věže sv. Jakubské, odkud se pohled rozprostírá po celé obloze a kam paprsky sluneční pronikají bez překážky od východu až do západu slunce, jest velice výhodná pro pozorování aktinometrická, pro pozorování mlhy, oblačnosti, průhlednosti vzduchu, kouře atd.

Na vyslovené přání uveřejňuje observatorium denní pozorování. které poskytuje možnost studovati podrobné proměny klimatických činitelů; aby bylo lze poznati úplný účinek města, uveřejňují se vedle pozorování vykonaných na Montsouris, pozorování získaná uprostřed města na věži sv. Jakuba.

Na Montsouris konají se přímá pozorování v 9 h. r., v poledne, ve 3 h. a v 6 h. večer; data pro ostatní hodiny doplňují se dle záznamů přístrojů registrujících. Na věži sv. Jakuba pozoruje se každou třetí hodinu od 3 h. ráno až do půlnoci a ostatní hodiny se interpolují z běhu křivek nakreslených přístroji samočinně zapisujícími.

Podrobné výsledky meteorologického pozorování za rok 1897 jsou uveřejněny na str. 78 - 240. Popis povětrnosti v jednotlivých dobách ročních podán jest vzhledem ku zdravotnictví. Z pozorování jednotlivých klimatických elementů zasluhuje pozornost měření teploty bezprostředně nad povrchem zemským konané za tím účelem, aby se seznalo, jakým způsobem se jednotlivé druhy půdy zemské oteplují.

Vedle pozorování meteorologických za rok 1897 přináší *annuaire* též i některé poznámky o podnebí Paříže. K posouzení proměnlivých klimatických elementů v jednotlivých případech jest nutno znáti jejich normální hodnoty pro jisté doby. Z uvedených poznámek seznáváme, že normální tlak barom. v Paříži redukovaný na hladinu moře činí 762·4 *mm*, že jest norm. teplota celoroční ve městě 10·7° C a v okolí města 10° C. Prům. výška srážek vodních činí 555 *mm* za rok. Počet dní se srážkami jest 150, s bouřkou 30, dní ledových 50. Obloha jest pokryta oblaky z 60% a slunce svítí po 40% doby, po kterou mešká nad obzorem. Vítr přichází nejčastěji se strany mezi J. a Z. a průměrná rychlost větru činí ve výši 20 *m* nad zemí 4 *m* a ve výši 300 *m* 8·7 *m* za vteřinu.

2. *Úkolem služby chemické* jest analysování pařížské vody meteorické, tekoucí říčné, vody pramenité, vody zaplavující, vody ve stokách, a analysování vzduchu na různých místech Paříže. Na Montsouris pokračuje se v chemické analyse látek ve vzduchu a ve vodě podlehajících proměnám po dvacet let. Od ledna 1893 rozmnožily se značně práce pozorovací a jest program chemických prací následující:

Výzkum různých částic nerostných a organických, obsažených: a) ve vodách pramenitých, určených k pití v Paříži, b) ve vodách říčních, c) v různých pramenitých a říčních vodách mimo město; d) ve vodách pařížských studnic; e) ve vodách meteorických, v dešti, sněhu, kroupách, mlhách a rose, ježto tyto výzkumy jsou zajímavé meteorologovi, hygienikovi i rolníku. K těmto pracím druží se ještě výzkum Seiny po celé délce od přítoku Yonny až k Rouenu za účelem, aby se stanovil stupeň znečištění řeky a určily se stálé i nahodilé příčiny tohoto znečistění.

Mimo to analysují se na observatoři Montsourisské vody, jež tam bývají stále z různých obcí francouzských zasílány, dle tarifu schváleného správou města Paříže.

Na str. 248—414 jsou popsány methody, jichž se užívá při analysování vody a jsou sestaveny výsledky při chem. analysování získané.

Chemické analysování proměnlivých součástí obsažených ve vzduchu započato bylo r. 1877. Observatoř omezuje se při tom na výzkum tří hlavních proměnlivých součástí vzduchových: *ozonu, ammoniaku a kyseliny uhličité.*

Tyto analysy vzduchu započaté r. 1877 v parku na Montsouris konají se nyní stejnou dobou ve středu Paříže a ve vnitřních částech stok. O methodách, dle kterých se analysa provádí, bylo pojednáno v dřívějších ročnících.

Celkový průměr *ozonu* v parku na Montsouris jest 1·7 *mgr* ve 100 m^3 vzduchu. Průměry měsíční vykazují maximum v červnu 2·10 *mgr* a minimum 1·35 *mg* v listopadu; proměny od minima k maximu a naopak jsou pravidelné.

Ammoniaku obsahuje 100 m^3 vzduchu v parku na Montsouris 2·0 *mg* a průměry měsíční se valně od sebe neliší a v měsících zimních bývá váha ammoniaku nejmenší 1·8 *mg*. Pozorovalo se, že váha ammoniaku 2·0 *mg* jest úplně táž, jakou shledáváme v litru vody dešťové.

Kyselina uhličitá. Průměrné číslo pro množství kyseliny uhličité za dobu 8 let 1890—97 analysováním vzduchu v parku na Montsouris získané jest 31·3 litru ve 100 m^3 vzduchu, ve středu města 31·4 *l*, a ve stokách pařížských 47·1 *l*.

Od měsíce k měsíci mění se kyselina uhličitá ve vzduchu na Montsouris velmi málo, kdežto ve středu města a ve stokách shledáváme větší rozdíly. Jest množství kysličníku uhličitého

	na Montsouris	v Paříži	ve stokách
v zimě	31·5	33·0	43·4
na jaře	31·2	31.7	48·3
v létě	30·8	31·4	49·5
na podzim	31·8	33·5	47·2.

Největší množství kysličníku uhličitého na Montsouris a v Paříži shledává se na podzim s pravidelným ubýváním do léta. V době nejteplejší pozoruje se zmenšení. Výsledek tento neshoduje se s výsledkem, ku kterému dospěl *Saussure*, dle něhož připadá mnohem větší poměr kyseliny uhličité na léto nežli na podzim ať v městě nebo na venku, nad jezerem ženevským nebo v horách, ve vzduchu klidném anebo pobouřeném.

P. Reiset shledal jako na Montsouris, že se účinek tepla objevuje ve zmenšení kyseliny uhličité. Ve stokách pařížských vyskytuje se ovšem opačný úkaz, tam dostavuje se maximum v letě.

Dále shledány byly v poměru kyseliny uhličité ještě rozdíly za dne a za noci. Na Montsouris jest tento poměr za noci 31·5 *l* větší nežli za dne 30·7 *l*. Ve středu Paříže jest naopak poměr kyseliny uhličité za dne 33·4 *l* větší nežli za noci 32·1 *l* v 100 m^3 vzduchu.

3. *Služba mikrografická* obírá se hlavně sbíráním a určováním množství druhů prachu v atmosfeře volné a uzavřené obsaženého. Volný vzduch v parku na Montsouris a ve středu Paříže jest hlavně předmětem bedlivého studia vzhledem k bakteriím a plísním. Ze vzduchu uzavřeného vzduch v pařížských obydlích, ve školách a stokách se systematicky zkoumá každého téhodne.

Methoda, dle které se provádí mikrografická analysa vzduchu jakož výsledky analysou získané za rok 1897 jsou udány na str. 451 až 479. Dle toho bylo v m^3 vzduchu v okolí městské radnice obsaženo celkem 6205 bakterií a 2245 vegetabilních zárodků plísní. Vzduch na Montsouris jest naproti tomu 24kráte čistější. V průměru několikaletém bývá v m^3 vzduchu uprostřed Paříže obsaženo

	bakterií	plísní
v zimě	4115	1405
na jaře	9270	1945
v letě	10750	2490
na podzim	5790	2210
v prům. celoročním	7480	2015.

Proměny v hojnosti těchto mikroorganismů bývají značné; jsou závislé hlavně na teplotě, na vlhkosti vzduchu, na deštích a na větrech.

Vedle vzduchu analysuje se též voda pramenitá sloužící pařížskému obyvatelstvu, dále voda říční a konečně špinavá voda ve stokách a v žumpách. Bylo shledáno v cm^3 pramenité vody v různých reservoirech průměrně1065—3795 bakterií, v témže množství vody říčné z různých vodáren pařížských průměrem 57200—240450 bakterií, ve stokách prům. 16935000 bakterií.

Z uvedených prací lze seznati, že vedle observatoria na Montsouris není druhého observatoria, které by se tak všestranně a tak systematicky obíralo výzkumem vzduchu a vody ze stanoviska hygienického. Dr *F. Augustin.*

Annuaire pour l'an 1899 publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Prix 1 fr. 50 c. Paris, Gauthier-Villars.

Annuaire, jejž vydává Bureau des Longitudes v Paříži, přináší velké množství drobných zpráv a četné tabulky s číselnými hodnotami z oboru *astronomie, fysiky, zeměpisu, statistiky* atd. Na konci jsou připojeny ještě některé zajímavé články vědecké. Z bohatého obsahu této knížky podáváme zde některé ukázky.

V *kalendářní části* str. 1—70 shledáváme udaje o východu a západu slunce, měsíce, oběžnic a udaje o průchodu jich poledníkem v Paříži, jakož i udaje o deklinaci slunce pro každý den. V této části jest možno poučiti se též o kalendářích juliánském, gregoriánském, koptyckém, mohamedánském, židovském a čínském.

V *astronomické části* jsou udány hlavní úkazy, jež bude lze na obloze v Paříži r. 1899 pozorovati jako zatmění slunce a měsíce, zakrytí oběžnic a hvězd měsícem, některé úkazy ze soustavy Jupiterovy, aspekty planet, prostřední postavení hvězd měnlivých, jichž perioda jest známa a postavení hvězd měnlivých s periodou nepravidelnou a neznámou, epochy minima a maxima atd.

Udaje o různých *tělesech sluneční soustavy* obsaženy jsou na str. 137—270. Zde upozorňujeme na tabulky obsahující udaje o trvání soumraku občanského uprostřed každého měsíce na 42.° až 51.° zeměp. šířky a údaje o trvání astronomického soumraku který se zakončuje, klesne-li 18° pod obzor, pro každý 10.° zeměp. š. od 0°—60° a na tabulky k uvedení východu a západu slunce a měsíce v Paříži na východ a západ v místech mezi 0.° a 60.° sev. šířky se nalézajících.

Na str. 190—211 uvedeny jsou velmi jednoduché vzorce a pomocné tabulky pro ustanovení nadmořské výšky z pozorování barometrických, jakož i tabulky k uvedení výšek rtuťového barometru na teplotu 0° a na hladinu mořskou, jež na základě „Tables météorologiques internationales" *) upravil p. M. Mathieu.

Známe-li výšku tlakoměru na dolní stanici H a na horní stanici h, teplotu na tlakoměrech T a T′ a teplotu vzduchu t a t', dále nadmořskou výšku dolní stanice s a zeměpisnou šířku její L, ustanovíme pomocí tabulek snadno první přibližnou výšku stanice horní nad stanicí dolní dle vzorce:

$$a = 18336^m \log \frac{H}{h} - 1{\cdot}2843^m (T - T')$$

a druhou přibližnou výšku A dle vzorce:

$$A = a + a \frac{2(t + t')}{1000}$$

a konečnou výšku Z dle vzorce:

$$Z = A \left(1 + \frac{265}{10^5} \cos 2L + \frac{A + 15926}{6366198}\right) \left(1 + \frac{s}{3183099}\right).$$

Korrekce C k uvedení výšky tlakoměrné h na teplotu 0°, udává-li T′ teplotu tlakoměru, ustanovuje se následujícím vzorcem:

$$C = \frac{(\mu - \lambda) T'}{1 + \mu T'} h,$$

kde $\mu = 0{\cdot}0001818$ značí prům. koefficient roztaživosti rtuti a $\lambda = 0{\cdot}000184$ koefficient mosazi.

Korrekce pro různé výšky barometrické při různé teplotě jsou též znázorněny graficky tím způsobem, že jsou výšky barometrické h naneseny na ose úseček a teplota rtuti T′ na ose pořadnic.

Pro redukci barometrické výšky na výšku hladiny mořské byl hořejší barometrický vzorec přiměřeně upraven.

K *metrické* soustavě měr a váh připojuje pan Cornu některé poznámky o mezinárodních jedničkách *c. g. s.* Jaké měny užívá se v každém jednotlivém státě, jest udáno na str. 317—352

*) Vydány v Paříži r. 1890.

s poznámkami o ražení peněz jakož i o znaménkách, kterými se garantuje hodnota zboží zlatého a stříbrného.

Ve stati *zeměpisné a statistické* str. 379—470 p. Levasseur uvádí nové výpočty pro velkost povrchu Francie, které byly získány zeměpisným oddělením vojenským na měděných plotnách mapy generálního štábu. Lidnatost jednotlivých krajin byla vyšetřena na tomto novém základě. Dle toho vykazuje povrch Francie 536464 km^2; počet obyvatelů jest 38518000 a lidnatost 72.

Hodnoty *magnetických* elementů pro hlavní místa departementů francouzských byly uvedeny p. Moureauxem na dobu 1. ledna 1899, kdežto mapky isogon, isoklin a isodynam byly sestrojeny pro 1. leden 1896.

Mimo to obsahuje annuaire různé tabulky s četnými daty o tělesech pevných, kapalných a o plynech. V optické části jsou obsaženy různé údaje, týkající se fotometrie a délky vln světelných, které podává M. Cornu, jenž napsal též důležitý článek o elektrických jedničkách, zavedených při praktickém zužitkování elektřiny.

Na konci knížky shledáváme drobnější články o různých předmětech, jež napsali: *A. Bouquet de la Grye*: „Notice sur les ballons-sondes"; *M. Bassot*: „La Géodésie moderne en France"; *P. Gautier*: „Note sur le sidérostat a lunette de 60 *m* de foyer et de 1 *m* 25 d'ouverture"; *J. Janssen*: „Les travaux au Mont Blanc en 1898".

Z článku o balonech výzkumných, jenž jest psán na základě spisu Fonviellova vyjímáme, že pp. Hermite a Besançon, když se ukázalo, že obyčejnými balony nebylo lze dostati se do značné výše (Berson v Berlíně dostoupil nejvýše 9156 *m*), pomýšleli na to, jak by se výzkumy vyšších vrstev atmosfery mohly podnikati s balony bez průvodců. Jali se vypouštěti do vzduchu menší balony, opatřené pouze přístroji samočinně registrujícími, které vystupovaly mnohem výše, nežli balony obyčejné, řízené průvodci. Tak vystoupil balon „Aerofile I", vypuštěný dne 21. břez. 1893 do výše 15000 *m*, kde byla registrována teplota —50° C. Po příkladu francouzském vypouštějí se též v Berlíně balony bez průvodce a dostal se balon „Cirrus" do výše 16375 *m* a po druhé do výše 18450 *m*, kde shledána byla teplota —53° a —68° C. Tyto výstupy do atmosfery vedly k výsledku překvapujícímu, že již ve výši několika *km* nalézá se teplota —70° C.

Kongress meteorologický, jenž se konal r. 1889 v Paříži, rozhodl, aby se výstupy balonů podnikaly současně v různých hlavních městech v Evropě, čímž by se vyvolalo jakési závodění na všech stranách, jež by vedlo k novým výsledkům. Byla dosazena mezinárodní komise, která by řídila tyto podniky, směřující k meteorologickým výzkumům ve vyšších vrstvách atmosfery. Následkem mezinárodní úmluvy povzneslo se v různých hlavních městech celé loďstvo balonů do výše.

Mimo to věnuje se ve Francii za příčinou meteorologického výzkumu vyšších vrstev atmosferických velký náklad na zřizování horských stanic. K dosavadním observatoriím horským, opatřeným hojnými prostředky, jako jest observatorium na Pic du Midi 2877 *m* v Pyrenejích, na Puy de Dôme 1467 *m* v Auvergni, na Mont Ventoux 1908 *m* v již. Francii, druží se nové observatorium, jež bylo přičiněním Janssenovým r. 1894 zařízeno na vrcholku Mont Blancu 4810 *m*. O pracích, konaných na tomto nejvyšším observatoriu evropském r. 1898 podává Janssen krátkou zprávu, z níž vyjímáme, že měřena byla hlavně intensita paprsků slunečních a vedle toho konána studia spektroskopická. Minulého roku měřena byla též intensita tíhy na vrcholku v Grands-Mulet a v Chamaunix pomocí přístroje Sterneckova, aby se zjistilo vnitřní složení tohoto mohutného horstva. Mimo to prováděno bylo chem. analysování vzduchu. *Dr. F. Augustin.*

Opravy.

Na str. 37. v rovnici (1) místo xq^2 čti qx^2.
„ „ 37. „ „ (3) „ $y = \frac{p}{q}$ čti $y = \frac{pu}{q}$.
„ „ 41. rovnice (11) má míti tvar $A_0t^4 + 4A_1t^3 + 6A_2t^2 + 4A_3t + A_4 = 0$.
„ „ 41. v determinantu místo A_7 čti A_4.
„ „ 43. řádka 5. z dola místo O čti O'.
„ „ 102. „ 5. s hora „ $(p^2 - b^2$ čti $(p^2 - b)^2$.
„ „ 102. „ 12. z dola „ $(a - cx^n)^2$ čti $(a - cx^{2n})^2$.
„ „ 103. „ 9. s hora „ $m = 2$ čti $n = 2$.
„ „ 106. „ 8. „ „ „ (1) čti (1').
„ „ 110. „ 3. „ „ „ k a m čti k, n a m.
„ „ 122. v obrazci místo x čti x_1.
„ „ 162. řádka 4. s hora místo $\frac{\alpha}{2\alpha u} - 1$ čti $\frac{\alpha}{2\alpha u - 1}$.
„ „ 163. „ 4. „ „ „ $\lesseqgtr$ čti $\gtreqless$.
„ „ 168. „ 7. a 8. z dola místo $\equiv$ čti má.

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Základní úlohy mathematického zeměpisu a sférické astronomie řešené konstrukcí.

Podává

Adolf Mach,
professor c. k. vyšší reálky v Jičíně.

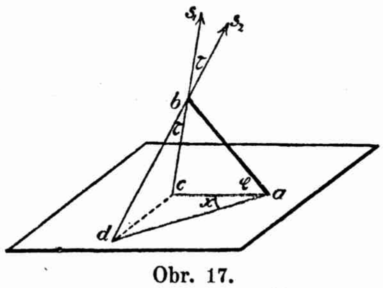
(Dokončení.)

VI. Sluneční hodiny.

A. Sluneční hodiny horizontálné.

1. *Tyčinka se světovou osou rovnoběžně postavená vrhá stín na vodorovnou desku. Jak veliký úhel opíše u nás stín v době od pravého poledne do* 2^h *odpoledne?*

Tyčinka rovnoběžná se světovou osou, směřující tudíž k severnímu pólu, odchýlena jest od roviny horizontálné o úhel, jenž rovná se výšce pólu čili zeměpisné šířce místa pozorovacího.



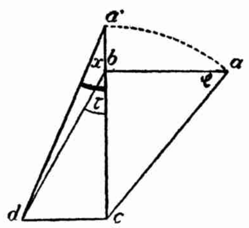
Obr. 17.

Stín takto postavené tyčinky jest v pravé poledne v přímce směřující k severnímu bodu horizontu, neboť souhrn paprsků světelných, procházejících tyčinkou, tvoří světelnou rovinu, jež v pravé poledne se ztotožňuje s rovinou meridiánu; ale průsečnice meridiánu s libovolnou rovinou horizontálnou jest přímka spojující bod jižní se severním, a proto i stín tyčinky musí se sjednotiti s touto přímkou.

Budiž slunce v pravé poledne ve směru s_1 (obr. 17.), ve 2^h odpoledne ve směru s_2, příslušné stíny tyčinky buďtež znázorněny úsečkami ac a ad; pak stín tyčinky vytvořil ve zmíněné době úhel $cad = \sphericalangle x$.

Mimo výšku pólu φ, jež rovná se úhlu bac, dán též úhel $s_1 b s_2 = cbd = \tau$, neboť tyto úhly mají tolik stupňů úhlových, kolik stupňů obloukových vykoná slunce na své denní dráze v době od pravého poledne do 2^h odpoledne; jak známo, 15^0 za hodinu, 30^0 za dvě hodiny; proto $\tau = 30^0$.

Dále nutno též uvážiti, že slunce, otáčejíc se zdánlivě kolem světové osy, vytvořuje dráhu, jejíž rovina jest k této ose a tudíž i k tyčince s ní rovnoběžné kolmá, takže naopak tyčinka stojí kolmo ke všem přímkám oné roviny, tedy i k $s_1 c$ a $s_2 d$.



Obr. 18.

Jsouť pak trojúhelníky abc a abd pravoúhlé s vrcholy pravých úhlů v b. Ale nejen tyto, nýbrž i trojúhelníky acd a bcd jsou pravoúhlé, neboť přímka cd, jsouc průsečnicí dvou rovin k rovině trojúhelníka abc kolmých, totiž vodorovné desky a roviny bcd, jest kolmá ke všem přímkám této roviny, tudíž i ke stranám ac a bc. Vrcholy pravých úhlů jsou v bodu c.

Všechny jmenované pravoúhlé trojúhelníky lze postupně sestrojiti na základě φ, τ a libovolně dlouhé úsečky ab.

Z $\triangle$ abc určíme bc a ac, z $\triangle$ bcd, jenž pak jest stanoven odvěsnou bc a úhlem τ, určíme cd, načež $\triangle$ acd jest dán oběma odvěsnami ac a cd; jeho $\measuredangle$ cad jest hledaný úhel x.

Sestrojení všech trojúhelníků lze provésti způsobem velmi jednoduchým jedním obrazcem.

Sestrojme pravoúhlý $\triangle$ abc (obr. 18.) z libovolné odvěsny ab a úhlu $\varphi = 50^0$; nad druhou odvěsnou bc vztyčme pravoúhlý $\triangle$ bcd s úhlem $\tau = 30^0$; učinivše pak $ca' = ca$ a spojivše a' s d, obdržíme pravoúhlý $\triangle$ $a'cd$, jehož úhel $ca'd = x = 24^0$ vyhovuje úloze.

Stín tyčinky opíše u nás v uvedené době $\measuredangle$ *24°.*

Z obr. 18. lze též trigonometricky stanoviti velikost úhlu x.

Je-li $ac = 1$, pak v $\triangle$ abc jest

$$bc = \sin\varphi,$$

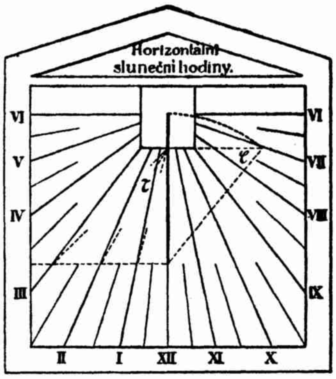
v $\triangle$ bcd jest

$$cd = \sin\varphi \operatorname{tg}\tau,$$

načež v $\triangle$ $a'cd$

$$\operatorname{tg} x = \sin\varphi \operatorname{tg}\tau.$$

Kdybychom papír otočili tak, aby přímka $a'c$ směřovala k severnímu bodu, kdybychom dále $\measuredangle$ φ učinili $= 50^0$, naší



Obr. 19.

zeměp. šířce, a tyčinku upevnili v a' tak, aby směřovala k severnímu pólu, to vše osvětlili ve 2^h odpoledne slunečními paprsky, musil by stín tyčinky se sjednotiti s přímkou $a'd$, a poněvadž tímto způsobem lze stanoviti vržený stín v libovolné době, jest konstrukcí v obr. 18. podanou dán základ k sestrojení *horizontálních hodin slunečních.*

Jestiť jen třeba kolem bodu *b* sestrojiti postupně úhly τ buď po 15^0, chceme-li míti vyznačeny jen hodiny, neb po $7^1/_2{}^0$, kdyby i půlhodiny se žádaly, aneb i po $3\frac{3}{4}{}^0$, kdyby i čtvrthodiny sluneční hodiny měly ukazovati.

Pro půlhodiny jsou sluneční hodiny horizontální sestrojeny v obr. 19.

B. Vertikální hodiny sluneční.

Vertikální sluneční hodiny zobrazují se na vertikální stěně, jdoucí obyčejně od východu k západu, obrácené tudíž přesně k jihu. Tyčinka, směřujíc i nyní k severnímu pólu, odchýlena jest od stěny o úhel $90^0 - \varphi$.

Vše ostatní jest obdobné s vývojem, provedeným v předešlém odstavci při hodinách horizontálních. Též konstrukce jest totožná, s tím toliko rozdílem, že místo úhlu φ užije se úhlu $90^0 - \varphi$.

VII. Výška hvězdy.

Výška hvězdy jest vzdálenost její od horizontu. Určuje se obloukem kružnice, jež prochází zenithem a hvězdou (kružnice vertikálná) a počítá se od horizontu k hvězdě, od 0^0 do 90^0. Výška hvězdy vycházející nebo zapadající $= 0^0$.

Poněvadž meridián místa pozorovacího prochází zenithem, jest zároveň vertikální kružnicí; jeho obloukem se určuje výška *hvězdy kulminující.*

Výška nejvyššího bodu rovníka $= 90^0 - \varphi$, neboť od pólu k horizontu jest φ^0, od pólu k nebeskému rovníku jest 90^0, zbývá tudíž od nejvyššího bodu rovníka k horizontu

$$180^0 - 90^0 - \varphi = 90^0 - \varphi.$$

U nás jest nejvyšší bod rovníka nebeského $90^0 - 50^0 = 40^0$ nad horizontem,

v *Madridě* $90^0 - 40^0 = 50^0$, v *Kairu* $90^0 - 30^0 = 60^0$.

Výška kulminující hvězdy, jejíž deklinace $= 0^0$, aneb výška slunce ve 12^h pravého času dne 20. března a 22. září, kdy $\delta = 0^0$, jest u nás 40^0, v *Madridě* 50^0, v *Kairu* 60^0.

Má-li kulminující hvězda nebo slunce deklinaci od nully se lišící, pak třeba jen tuto deklinaci k výšce nejvyššího bodu rovníka buď přičísti nebo odčísti, podle toho, je-li deklinace kladná nebo záporná.

Příklady:

1. *Jak vysoko kulminuje ve středních Čechách* **Arctur** ($\delta = 19^3/_4{}^0$), **Spica** ($-10^0 38'$), **Sirius** ($-16^0 35'$)?

$59^3/_4{}^0$, $29^0 22'$, $23^0 25'$.

2. *Jak vysoko vrcholí tyto hvězdy a) v* **Athénách** *(38^0), b) na rovníku?*

a) $71^3/_4{}^0$; $41^0 22'$; $35^0 25'$.
b) $70^1/_4{}^0$ na sever; $79^0 22'$ jižně; $73^0 25'$ jižně.

3. *Jak vysoko kulminuje slunce 20. března, 21. června, 22. září a 21. prosince a) ve* **Štýrském Hradci** *(47^0); b) v* **Dubrovníku** *(43^0); c) na rovníku; d) v* **Petrohradě** *(60^0); e) v* **Kapském Městě** (-34^0)?

a) 43^0, $66^1/_2{}^0$, 43^0, $19^1/_2{}^0$.
b) 47^0, $70^1/_2{}^0$, 47^0, $23^1/_2{}^0$.

c) 90^0, $66^1/_2{}^0$ nad sev. bodem, 90^0, $66^1/_2{}^0$ nad jižním bodem.
d) 30^0, $53^1/_2{}^0$, 30^0, $6^1/_2{}^0$.
e) 56^0 nad bodem sev., $79^1/_2{}^0$ nad bod. sev., 56^0, $32^1/_2{}^0$ též nad bodem sev.

U nás kulminuje slunce nad bodem jižním, na jižní polokouli zemské (mírný pás) nad bodem severním.

Z výsledků nahoře uvedených plyne, že ve *Štýrském Hradci* vystoupí slunce 21. června právě tak vysoko jako téhož dne na rovníku, jedině s tím rozdílem, že jest u nás nad bodem jižním, na rovníku nad bodem severním.

Poněvadž pak výška slunce rovná se také úhlu, v němž paprsky na horizontální rovinu dopadají, seznáváme, že účinnost paprsků jest toho dne na rovníku i ve *Štýrském Hradci* stejná.

4. *V jakém úhlu dopadají paprsky sluneční ve středních Čechách v pravé poledne dne 25. února ($\delta = -9^0$), 10. dubna ($+8^0$), 15. srpna ($+14^0$), 2. prosince (-22^0)?*

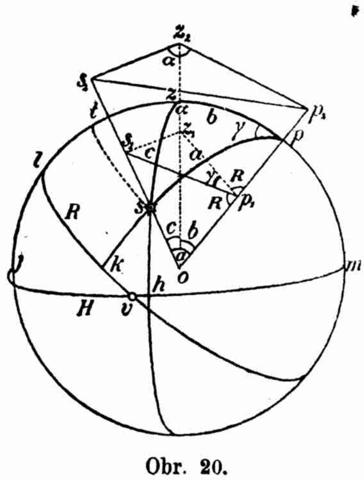
31^0, 48^0, 54^0, 18^0.

5. *Kdy dopadají v Praze paprsky sluneční v poledne v úhlu 60^0, 20^0, $16^1/_2{}^0$?*

Když deklinace sluneční $= 20^0$, -20^0, $-23^1/_2{}^0$, t. j. 20. května, 20. ledna, 21. prosince.

Nekulminuje-li hvězda, pak nelze tak jednoduchým způsobem početně její výšku stanoviti; za to podává konstrukce snadný způsob řešení, jejž na následujících příkladech objasníme.

1. *Jak vysoko jest u nás slunce dne 20. května ($\delta = 20^0$) v 9^h ráno?*



Obr. 20.

Je-li v obr. 20. p pól nebeský, R rovník nebeský, z zenith, H horizont, s poloha slunce v 9^h ráno, pak jest oblouk sh výška slunce, sz její doplněk, pm výška pólu $= \varphi$, pz její doplněk, sk deklinace, sp její doplněk.

V trojúhelníku psz jsou pak známy strany:

$$a = 90^0 - \delta = 90^0 - 20^0 = 70^0,$$
$$b = 90^0 - \varphi = 90^0 - 50^0 = 40^0;$$

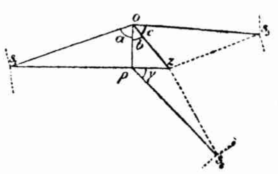
tolikéž stupňů mají však též příslušné úhly středové *pos* a *poz*. Mimo to jest také znám $\sphericalangle \gamma$, neboť jeho počet stupňů rovná se počtu stupňů oblouku *st*, který jest slunci vykonati od 9^h dopoledních do 12^h pravého času, kdy vstoupí do meridiánu. Za 3^h urazí slunce oblouk 45^0, proto $\sphericalangle \gamma = 45^0$. Ale týž úhel γ určuje též odchylku rovin *pos* a *poz*, a tu lze jiným způsobem obdržeti, jestliže v libovolném bodu průsečnice *op* jmenovaných rovin — třeba v bodu p_1 — postavíme k ní rovinu kolmou.

Vznikne tím $\triangle\, p_1s_1z_1$ o úhlu $\gamma = 45^0$, jehož strany s_1p_1 a z_1p_1 jsou kolmy k op_1, takže trojúhelníky p_1os_1 a p_1oz_1 jsou pravoúhlé s pravými úhly při vrcholu p_1.

Poněvadž úsečku op_1 si lze zvoliti libovolně dlouhou, možno po řadě sestrojiti:

1. pravoúhlý $\triangle\, op_1s_1$ z odvěsny op_1 a $\sphericalangle a$;
2. „ $\triangle\, op_1z_1$ z „ „ a $\sphericalangle b$;
3. kosoúhlý $\triangle\, p_1s_1z_1$ z úhlu γ a ze stran p_1s_1 a p_1z_1, jichž velikost vyplývá z obou trojúhelníků předešlých; konečně
4. kosoúhlý $\triangle\, os_1z_1$ ze tří stran; úhel pak ležící naproti straně s_1z_1 jest doplněk hledané výšky.

Sestrojení těchto čtyř trojúhelníků lze nejvýhodněji provésti v jednom obrazci.



Obr. 21.

Sestrojme (obr. 21.) oba první pravoúhlé trojúhelníky ops_1 a opz, aby měly společnou odvěsnu op, k níž naneseme

$$\sphericalangle a = 90^0 - \delta \text{ a } b = 90^0 - \varphi,$$

nad stranou pz sestrojme $\triangle\, ps_2z$ ze stran pz, $ps_2 = ps_1$ a úhlu jimi sevřeného γ, konečně nad stranou oz postavme $\triangle\, ozs_3$ ze stran oz, $os_3 = os_1$ a $zs_3 = zs_2$. Úhel $c = 46^1/_2{}^0$ jest doplněk výšky, a proto:

Dne 20. května jest u nás slunce v 9^h ráno $43^1/_2{}^0$ vysoko.

Sledujeme-li zdánlivý pohyb slunce na obloze po celý den, snadno seznáme, že slunce má dvakrát za den touž určitou výšku, jednou dopoledne, podruhé odpoledne. Oba okamžiky jsou od doby polední stejně vzdáleny. Z toho plyne, že má u nás slunce dne 20. května též ve 3^h odpoledne výšku $43^1/_2{}^0$.

2. *Jak velikou výšku má u nás* **Wega** *($\delta = 38^3/_4{}^0$, $AR = 18^h 33^m$) dne 29. června (AR slunce $6^h 33^m$) v 10^h večer?*

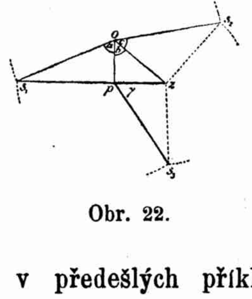
Rektascense *Wegy* jest dne 29. června o 12^h větší než rektascense slunce; to znamená, že dne 29. června *Wega* o 12^h později kulminuje než slunce. Je-li 10^h v noci, slunce kulminovalo před 10 hodinami a tudíž *Wega* bude kulminovati teprve za 2^h, takže $\sphericalangle \gamma = 30^0$. Tím převedena tato úloha na předešlou.

$$a = 90^0 - 38^3/_4{}^0 = 51^1/_4{}^0, \quad b = 90^0 - 50^0 = 40^0,$$
$$\gamma = 30^0.$$

Kdybychom úlohu řešili po způsobu konstrukce uvedené v obr. 21., seznali bychom, že $c = 29^0$ a tudíž výška $= 61^0$. *Wega jest u nás dne 29. června v 10^h večer 61^0 vysoko.*

3. *V kolik hodin jest v Madridě ($\varphi = 40^0$) slunce dne 21. června 40^0 vysoko?*

Dáno jest: $a = 90^0 - 23^1/_2{}^0 = 66^1/_2{}^0,$
$b = 90^0 - 40^0 = 50^0,$
$c = 90^0 - 40^0 = 50^0.$



Obr. 22.

Sestrojme jako v předešlých příkladech nejdříve trojúhelníky ops_1 a opz (obr. 22.), ale pak hned $\triangle ozs_2$ ze stran oz, $os_2 = os_1$ a jimi sevřeného úhlu c, pak teprve $\triangle ps_3z$, jehož

$\sphericalangle \gamma$ vyjadřuje oblouk, jejž jest slunci do 12^h vykonati. Tento oblouk známým již způsobem proměníme na čas.

$$\gamma = 56\tfrac{1}{2}^0 = 3\tfrac{3}{4}^h.$$

V Madridě jest slunce dne 21. června v $8\tfrac{1}{4}^h$ dopoledne a ve $3\tfrac{3}{4}^h$ odpoledne 40^0 vysoko.

4. *Dne 18. července ($\delta = 21^0$) jsem pozoroval, že svislá tyč metr vysoká vrhla stín též metr dlouhý. V kolik hodin to bylo?*

Tyč, její stín a paprsek nejhořejšího bodu tvoří pravoúhlý trojúhelník rovnoramenný; jest tudíž paprsek sluneční odchýlen od roviny horizontálné o úhel 45^0, takže výška slunce $= 45^0$.

Tím převedena jest úloha na předešlou:

$$a = 90^0 - 21^0 = 69^0, \quad b = 90^0 - 50^0 = 40^0,$$
$$c = 90^0 - 45^0 = 45^0.$$

Kdybychom řešili tento příklad po způsobu konstrukce uvedené v obr. 22., shledali bychom, že $\gamma = 45^0 = 3^h$, a proto:

V 9^h dopoledne a ve 3^h odpoledne vrhá dne 18. července svislá tyč stín, jehož délka rovná se délce tyče.

Mathematický vzorec pro výšku hvězdy lze vyvoditi z obr 21.

Je-li $op = 1$, pak

$$os_1 = \frac{1}{\cos a}, \quad oz = \frac{1}{\cos b},$$
$$ps_1 = \operatorname{tg} a, \quad pz = \operatorname{tg} b.$$

Z $\triangle os_3z$ plyne, že

$$\overline{s_3z}^2 = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2\frac{\cos c}{\cos a \cos b}.$$

V $\triangle ps_2z$ jest

$$\overline{s_2z}^2 = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b - 2\frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}\cos\gamma,$$

proto

$$\frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2\frac{\cos c}{\cos a \cos b} = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b$$
$$- 2\frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}\cos\gamma.$$

Ale

$$\frac{1}{\cos^2 a} - \operatorname{tg}^2 a = \frac{1 - \sin^2 a}{\cos^2 a} = 1,$$

$$\frac{1}{\cos^2 b} - \operatorname{tg}^2 b = 1,$$

takže obdržíme:

$$\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos \gamma,$$

a dosadíme-li původní hodnoty, bude

$$\cos c = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \gamma.$$

VIII. Azimut hvězdy.

Kružnice proložená zenithem a hvězdou protne horizont v určitém bodu. Oblouk horizontu mezi tímto průsečíkem a bodem jižním jest azimut hvězdy. Počítá se od bodu jižního přes západ na sever, od 0^0 do 360^0.

Cvičení:

1. *Který azimut má: a) bod jižní; b) bod západní; c) bod severní; d) bod východní?*

a) 0^0; b) 90^0; c) 180^0; d) 270^0.

2. *Který azimut má slunce a) v poledne, b) o půlnoci?*

a) 0^0; b) 180^0.

3. *Jak veliký azimut má slunce 20. března nebo 22. září a) vycházejíc, b) zapadajíc?*

a) 270^0; b) 90^0.

4. *Ranní a večerní vzdálenost slunce jednoho letního dne byla 30^0; jak veliký azimut mělo slunce a) při východu, b) při západu?*

a) 240^0; b) 120^0.

V obr. 20. stanoví úhel α odchylku meridiánu od vertikálu procházejícího hvězdou. Tato odchylka by však byla počítána od severního bodu *m*. Ale azimut se počítá od bodu jižního přes západ a sever. Z té příčiny jest k $\sphericalangle \alpha$ přidati ještě 180^0, abychom obdrželi azimut. Tuto odchylku α též obdržíme, jestliže v libovolném bodu z_2 průsečnice jmenovaných rovin vztýčíme rovinu k ní kolmou, jež vytvoří $\triangle p_2 s_2 z_2$, jehož strany $p_2 z_2$ a $s_2 z_2$ jsou kolmé k přímce oz, takže trojúhelníky $oz_2 p_2$ a $os_2 z_2$ jsou pravoúhlé.

Úhel trojúhelníka $p_2 z_2 s_2$, ležící naproti straně $p_2 s_2$, zvětšen o 180° rovná se počtem stupňů azimutu hvězdy. Je-li dána výška pólu místa pozorovacího, deklinace a výška hvězdy, pak lze po řadě sestrojiti:

1. pravoúhlý $\triangle op_2 z_2$, z libovolně dlouhé odvěsny oz_2 a úhlu $90^\circ - \varphi$,

2. pravoúhlý $\triangle oz_2 s_2$ z odvěsny oz_2 a úhlu $90^\circ - v$,

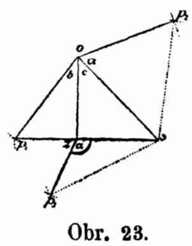
3. kosoúhlý $\triangle op_2 s_2$ z úhlu $90^\circ - \delta$ a ze stran op_2 a os_2 jichž velikost vyplývá z předešlých trojúhelníků, a konečně

4. kosoúhlý $\triangle p_2 s_2 z_2$ ze všech stran, jichž délky určeny jsou trojúhelníky předešlými.

Úhel α tohoto trojúhelníka o vrcholu z zvětšen o 180° dá hledaný azimut.

Z toho patrno, že azimut hvězdy sestrojí se podobným postupem konstrukce jako v obr. 21. výška hvězdy.

O tom netřeba tedy dále šířiti slov.



Obr. 23.

V obr. 23. jest řešena úloha:

Který azimut má u nás slunce dne 21. června, jsouc dopoledne 40° vysoko?

$$b = 40^\circ, \; c = 50^\circ, \; a = 66^1/_2{}^\circ.$$

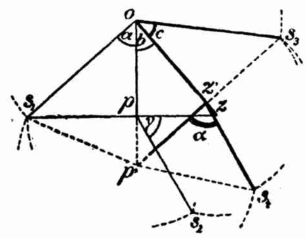
Sestrojeny byly po řadě trojúhelníky: ozp_1, ozs, osp_2 a $p_3 sz$

Zvětšíme-li $\sphericalangle \alpha$, jenž v posledním trojúhelníku leží naproti straně sp_3, o 180°, obdržíme azimut.

Poněvadž $\alpha = 116^0$ jest azimut $= 296^0$.

Sestrojení azimutu lze s výhodou spojiti s konstrukcí výšky hvězdy.

Uvážíme-li, že v obr. 21. máme úhly b a c, na jichž základě jsme azimut sestrojili, vedle sebe naneseny a že délka odvěsny oz (obr. 23.) může býti libovolná, mysleme si v obr. 24. s bodu s_3 spuštěnou kolmici na oz, jež protíná přímku oz v bodu z' a op v p', a sestrojme trojúhelník z úseček $p's_1$, $p'z'$ a s_3z; pak úhel tohoto trojúhelníka při vrcholu z' jest hledaný úhel α.



Obr. 24.

Příklady:

1. *Kterou výšku a azimut má* **Algol** *($\delta = 40^1/_2{}^0$, $AR = 3^h$) dne 25. října (AR sluneční $= 14^h$) v 9^h večer?*

Je-li 9^h večer, tu uplyne ještě 15 hodin, než opět slunce bude nahoře kulminovati čili než bude poledne. Poněvadž však rektascense *Algolu* jest dne 25. října o $14^h - 3^h = 11^h$ menší než rektascense sluneční, Algol toho dne kulminuje o 11^h dříve, t. j. za 4^h, čili musí vykonati ještě oblouk 60^0, takže $\sphericalangle\, \gamma = 60^0$.

$$a = 49^1/_2{}^0,\ b = 50^0,\ \gamma = 60^0.$$

Známým způsobem sestrojen nejdříve úhel $c = 42^0$, a na jeho základě pak úhel $\alpha = 87^0$.

Výška Algolu v 9^h večer dne 25. října $= 48^0$, azimut $= 267^0$.

2. *O jaký úhel musí střecha domovní býti odchýlena od roviny horizontálné a na kterou stranu světovou musí býti obrácena, aby na ni sluneční paprsky dopadaly dne 10. června ($\delta = 23^0$) v 10^h dopoledne kolmo?*

Kdyby střecha měla polohu vodorovnou, musily by paprsky, aby na ni dopadaly kolmo, míti polohu svislou. Odchýlí-li se střecha od roviny horizontálné o úhel α, skloní se paprsky o týž úhel α a dopadají v úhlu $90^0 - \alpha$, čemuž i výška slunce se rovná. Azimut slunce stanoví pak místo na horizontu, ke kterému musí býti střecha obrácena, aby na ni paprsky v uvedenou dobu dopadaly kolmo.

V tomto případě jest $a = 67^0$, $b = 40^0$, $\gamma = 30^0$.

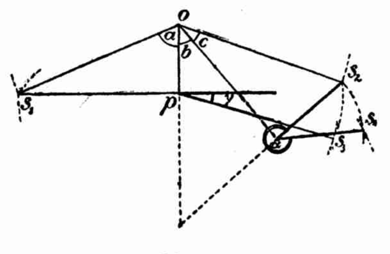
Kdybychom po způsobu konstrukce v obr. 24. uvedené sestrojili výšku a azimut, shledali bychom, že $v = 90^0 - 36^0 = 54^0$, azimut $= 305^0$.

Střecha musí býti odchýlena od roviny horizontálné o úhel 36^0 a směřovati k bodu, jenž jest od bodu jižního k východu 55^0 vzdálen.

3. *V kolik hodin dopadají sluneční paprsky dne 2. července ($\delta = 23^0$) na Zebín, kuželovitý vrch u Jičína, jehož povrchové přímky tvoří s horizontální rovinou úhel 30^0, v témž úhlu, jako dne 20. března v poledne na rovník, a která strana Zebína bude tak intensivně osvětlena a oteplena?*

Dne 20. března v poledne dopadají sluneční paprsky na rovník kolmo.

Má-li některá povrchová přímka onoho kužele býti osvětlena kolmými paprsky slunečními, musí slunce míti výšku 60^0.



Obr. 25.

V obr. 25. jest $a = 67^0$, $b = 40^0$, $c = 30^0$. Známým již způsobem sestrojen $\sphericalangle \gamma$, jenž určuje dobu, ve které sluneční paprsky dopadají na určitá místa *Zebína* kolmo; načež sestrojen *azimut* $\alpha + 180^0$, jenž určuje stranu, na kterou ona místa jsou obrácena.

$$\gamma = 17^0 = 1^h 8^m, \text{ azimut} = 325^0;$$

pročež:

V $10^h 52^m$ dopadají sluneční paprsky dne 2. července kolmo na onu část Zebína, která jest obrácena k bodu horizontu, jenž jest od bodu jižního o 35^0 k východu uchýlen.

IX. Nejkratší vzdálenost dvou míst na povrchu zemském.

Nejkratší vzdálenost dvou bodů na kulovém povrchu jest oblouk hlavní kružnice oba body spojující. Hlavní kružnice, jak známo, má střed ve středu koule a její poloměr rovná se poloměru koule.

Mezi nesčetnými hlavními kružnicemi, jež lze vésti na povrchu zemském, jsou nejdůležitější *rovník* a *meridiány*. Nepřihlížíme-li k okolnosti, že země jest na obou pólech splоštělá, pak rovná se délka meridiánu délce rovníka i délce každé jiné hlavní kružnice. Všechny hlavní kružnice povrchu zemského jsou 40000 *km* nebo 5400 zem. mil dlouhé, 1^0 hlavní kružnice rovná se 111·11 *km* nebo 15 zeměp. mílím, $1'$ hlavní kružnice rovná se 1850 *m* nebo 1 námořní míli.

Vzdálenost dvou míst na rovníku rovná se rozdílu zeměpisných délek. Vzdálenost dvou míst na témž meridiánu rovná se rozdílu zeměpisných šířek.

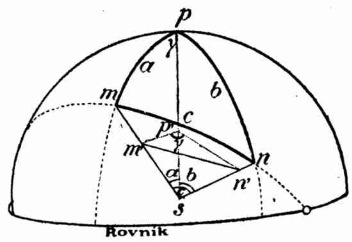
Praha a *Neapol* jsou na témž meridiánu, zeměpisnou šířkou liší se o 9^0; jejich vzdálenost rovná se tudíž

$$111{\cdot}11 \times 9 \doteq 1000 \textit{ km}.$$

Abychom stanovili nejkratší vzdálenost dvou libovolných míst m a n, musíme znáti jejich zeměpisné souřadnice φ_1, δ_1 a φ_2, δ_2.

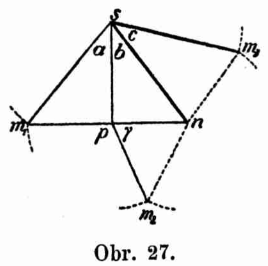
Je-li v obr. 26. p pól zemský, pak v $\triangle mnp$, utvořeném z oblouku hlavních kružnic (sférický trojúhelník), jest strana $\widehat{mp} = a = 90^0 - \varphi_1$, strana $\widehat{np} = b = 90^0 - \varphi_2$ a jimi sevřený úhel $\gamma = \delta_2 - \delta_1$.

Uvážíme-li, že úhly msp a nsp mají tolik stupňů úhlových, kolik mají strany a a b stupňů obloukových, dále pak, že odchylka rovin psm a psn rovná se též $\sphericalangle \gamma$, kterážto odchylka se jeví v $\triangle m'n'p'$, jehož rovina stojí kolmo k sp (proto $m'p' \perp sp$, $n'p' \perp sp$), konečně že úsečku $p's$ si lze zvoliti libovolně dlouhou, seznáme, že pravoúhlé trojúhelníky $m'p's$ a $n'p's$ jsou dokonale stanoveny, a poněvadž z nich vyplývá délka



Obr. 26.

úseček $n'p'$, $m'p'$, sm' a sn', jest též $\triangle m'n'p'$ určen, což má zase za následek, že i $\triangle m'n's$ je stanoven všemi stranami, takže z něho lze určiti velikost úhlu c, jenž má tolik stupňů úhlových, kolik má oblouk mn stupňů obloukových. I obdržíme délku oblouku mn, násobíme-li 111·11 km počtem stupňů úhlu c. Postupné sestrojování trojúhelníků $sm'p'$, $sn'p'$, $m'n'p'$ a $sm'n'$ zase lze jednoduchým způsobem provésti v jediném obrazci.



Obr. 27.

Sestrojme (obr. 27.) dva pravoúhlé trojúhelníky m_1ps a nps se společnou, libovolně dlouhou odvěsnou ps a přílehlými k ní úhly a a b. Nad některou z ostatních dvou odvěsen — třeba nad np — zobrazme $\triangle m_2np$, aby $pm_2 = pm_1$ a $\sphericalangle npm_2 = \gamma$. Vztyčivše konečně nad stranou sn $\triangle snm_3$ ze stran $sm_3 = sm_1$

a $nm_3 = nm_2$, obdržíme naproti straně nm_3 ležící hledaný úhel c. V obr. 27. jest tímto způsobem sestrojena vzdálenost míst, jichž zeměpisné souřadnice jsou:

$$\varphi_1 = 50^0, \quad \varphi_2 = 53^3/_4{}^0,$$
$$\delta_1 = 14^1/_2{}^0, \quad \delta_2 = 81^1/_2{}^0 \text{ } v. \text{ } od \text{ } Greenwiche.$$

(*Praha* a místo poblíž *Tomsku* v Sibíři.)

$$\sphericalangle\, a = 90^0 - 50^0 = 40^0, \quad \sphericalangle\, b = 90^0 - 53^3/_4{}^0 = 36^1/_4{}^0;$$
$$\gamma = \delta_2 - \delta_1 = 67^0.$$

Obrazec praví, že $\sphericalangle\, c = 39^1/_2{}^0$, proto jsou obě místa 4389 *km* od sebe vzdálena.

Kdybychom chtěli míti mathematický vzorec pro délku oblouku *mn*, pak bychom musili vzíti útočiště k výpočtu trigonometrickému, vyplývajícímu z řešení trojúhelníků v obrazci. Postupem, jenž vysvětlen již při mathematickém určení výšky hvězdy, přišli bychom ke vzorci

$$\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos \gamma,$$

a dosadíme-li původní hodnoty za a, b a γ, bude

$$\cos c = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\delta_2 - \delta_1).$$

Řešení úloh.

1. *Loď jedoucí z* **Montevidea** *($\varphi_1 = 35^0$ j., $\delta_1 = 56^1/_4{}^0$ z.) na* **Mys Dobré Naděje** *($\varphi_2 = 34^0$ j., $\delta_2 = 18^1/_2{}^0$ z.) po* **loxodromě** *vykoná dráhu 3740 námořních mil; oč by se zkrátila cesta, kdyby jela po oblouku největší kružnice?*

Loxodroma jest křivka na povrchu zemském, která protíná všechny meridiány ve stejném úhlu; přibližuje se šroubovitě k pólům, těchto nikdy nedosáhnouc. Rovnoběžky jsou též loxodromy.

Pro námořníky jsou tyto křivky velmi důležity; jeví se na mapách námořních (Mercatorova projekce, Kozennův atlas č. 2. „Mapa oboru zemského") každá loxodroma jako přímka. Spojíme-li na těchto mapách dva libovolné body, jest spojnice obrazem určité loxodromy, oběma místy procházející.

Ač oblouk loxodromy není nejkratší vzdáleností dvou míst, jezdí lodě po této křivce, nemohou-li z rozmanitých příčin jeti po oblouku největšího kruhu.

Má-li loď jeti z *Montevidea* na *Mys Dobré Naděje*, lodník spojí na mapě námořní obě města přímkou a řídí pak loď tak, aby její osa byla rovnoběžná s touto spojnicí; pak je jist, že žádaného cíle dosáhne.

Otázka, oč by se tato cesta zkrátila, kdyby loď jela po oblouku největšího kruhu, zodpověděla by se analogickou konstrukcí obr. 27. Shledalo by se, že nejkratší vzdálenost jest vyjádřena úhlem $c = 60^0$.

Poněvadž námořní míle rovná se obloukové minutě hlavní kružnice, jest nejkratší vzdálenost obou míst $= 60 \,.\, 60 = 3600$ nám. mil, a proto jest jízda po loxodromě o 140 mil, t. j. asi o 12^h delší než jízda po hlavní kružnici.

Podobně bychom seznali, že nejkratší vzdálenost *Valparaisa a Christchurche* na *Novém Zeelandě* je 5000 nám. mil, kdežto vzdálenost loxodromická jest *5450* mil, takže loď jedoucí po loxodromě potřebuje o 37^h delší doby než loď jedoucí po hlavní kružnici.

Sluší jen ještě, by se podotklo, že jsou též mapy, na kterých se jeví hlavní kružnice jako přímky. Jsou to mapy gnomonické projekce.

2. *Kdybych vyšel 1. ledna 1899 z Prahy ve směru východním a šel stále přímo, tak aby v každém místě mi byl východní bod směrodatný, kde ocitl bych se na konci každého z prvních šesti měsíců této cesty, uraze každý den $7^1/_2$ zem. míle?*

Pohybuje-li se někdo po ploše kulové stále „přímo“, jest jeho dráha hlavní kružnicí této koule; pohybuje-li se tudíž stále východně, není dráha jeho rovnoběžkou místa, z něhož vyšel, jak na první pohled by se zdálo.

Je-li v obr. 26. v bodu m Praha a v bodu n místo, kam dospěl bych za měsíc, pak v $\triangle\, mnp$ jest $\sphericalangle\, nmp$ pravý, poněvadž směr východní tvoří se směrem severním uhel pravý; mimo to jsou v tomto trojúhelníku známy obě odvěsny

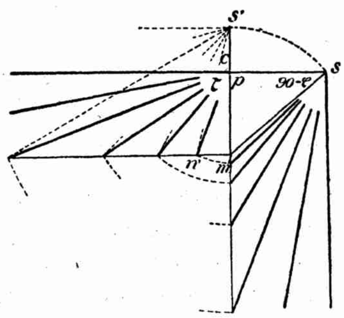
$$a = 90^0 - \varphi \text{ a } c = 15^0,$$

neboť, ujdu-li za den $7^1/_2$ zeměp. míle, ujdu za 2 dni 15 z. m. čili 1^0, za měsíc 15^0.

Myslíme-li si zase bodem *p'* položenou rovinu *m'n'p'* kolmou k *ps*, pak nejen že *m'p'* a *n'p'* jsou kolmé k *ps*, ale i *m'n'*, jsouc průsečnicí rovin *m'n's* a *m'n'p'* kolmých k rovině *m'p's*, jest též k této rovině kolmá a tudíž kolmá k přímkám této roviny *m's* a *m'p'*.

Jsouť pak všechny 4 trojúhelníky *m'p's*, *n'p's*, *n'm's* a *n'm'p'* pravoúhlé, jichž vrcholy pravých úhlů jsou vyznačeny písmenem vždy uprostřed stojícím.

Poněvadž nám jde o zeměpisné souřadnice bodu *n*, to jest o zeměpisnou šířku, jejíž doplněk jest vyjádřen úhlem *p'sn'*, a o rozdíl zeměpisných délek, jenž jest určen úhlem *m'p'n'* v $\triangle$ *m'p'n'*, jde tudíž o sestrojení těchto trojúhelníků.



Obr. 28.

Zvolíme-li si úsečku *p's* libovolně dlouhou, pak jsou $\triangle$ *m'p's* a *m'n's* dokonale stanoveny, pak seznáme též délku stran *m'p'*, *m'n'*, *sn'*, načež i hledané trojúhelníky *m'n'p'* a *n'p's* jsou určeny.

Nejvýhodnější postup při sestrojování těchto trojúhelníků by byl asi tento:

Zobrazme dvě na sebe kolmé přímky; od průsečíku p nanesme třebas v pravo libovolnou úsečku ps, k ní úhel $90^0 - \varphi$; tím obdržíme $\triangle mps$; učiníce $ms = ms'$ a $\sphericalangle ms'n' = c$, dostaneme $\triangle m'n's'$; spojíce n' s p, obdržíme $\sphericalangle m'pn'$, rozdíl to zeměpisné délky *Prahy* a místa, do kterého jsme dospěli za měsíc, čili úhel, jenž určuje, o kolik stupňů jsme východněji než před měsícem; přeneseme-li konečně pn' od bodu p dolů a spojíme-li krajní bod s bodem s, obdržíme trojúhelník, jehož ostrý úhel na odvěsně pm' jest hledaný doplněk zeměpisné šířky tohoto místa.

V obr. 28. provedena byla konstrukce současně i pro ostatních 5 měsíců.

Z obrazce tohoto vyplývá, že bychom byli

a) na konci ledna v severním cípu *Azovského moře*,

b) na konci února na hranicích *Chivy* jižně od jezera *Aralského*,

c) na konci března na hranicích indických blíže *Kašmíra*,

d) na konci dubna u *Kalkuty*,

e) na konci května na poloostrově *Malakka* a konečně na konci června bychom dorazili na rovník, na východní břeh ostrova *Sumatry*, jdouce téměř stále po suchu, vykonajíce takto právě dráhu čtvrtiny největší kružnice; takže, kdybychom i dále týmž způsobem po suchu mohli jíti, potřebovali bychom k této v pravém slova smyslu cestě kolem světa 2 roků. Kráčeli bychom přes *Jávu* a *Australii* a opustíce tuto nedaleko *Melbournu*, zavítali bychom na jižní cíp *Nového Zeelandu*; na místě, kde by pražští protinožci kráčeli — kdyby tam moře nebylo — dotkli bychom se rovnoběžky 50.⁰ j. š., vykonajíce právě polovici pouti své kolem země, a pak dále dlouhou cestou *Tichým Oceanem* do severní části *Jižní Ameriky*, pak přes *Azory* a *Paříž* nazpět do *Prahy*. Cesta trvala by právě 2 roky.

O čtyřúhelníku, jemuž lze vepsati i opsati kružnici.

Napsal

Jos. Langr v Praze.

Jest dán čtyřúhelník ABCD, jemuž je vepsána kružnice o poloměru r ze středu O, a jiná opsána o poloměru R ze středu S.

Značme

$$\overline{AD} = a, \quad \overline{AB} = b, \quad \overline{BC} = c, \quad \overline{CD} = d,$$

$$D\widehat{A}B = \alpha, \quad A\widehat{B}D = \beta, \quad B\widehat{C}D = \gamma, \quad C\widehat{D}A = \delta,$$

úhlopříčny $\overline{AC} = u$, $\overline{BD} = v$, průsečík úhlopříčen E, dotyčné body stran F, G, H, K.

Úlohou jest vyšetřiti mezi uvedenými veličinami relace.

Poněvadž jest čtyřúhelník kružnici vepsán, jest

$$(1) \qquad \alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi,$$

a poněvadž jest současně jiné opsán, jest

$$(2) \qquad a + c = b + d = s.$$

K určení úhlův vyjděme od věty Carnotovy. Dle ní jest

$$u^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$
$$u^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\gamma.$$

Srovnáním, jestliže položíme $\gamma = \pi - \alpha$, vyjde

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha,$$

z čehož

$$(a) \qquad \cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)}.$$

Připočtěme k jednotce tuto rovnici,

$$1+\cos\alpha = 1+\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}=\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{2(ab+cd)}$$

$$=\frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)}{2(ab+cd)}.$$

Vzhledem k rov. (2) obdržíme

$$(3)\qquad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{4ab}{2(ab+cd)}.$$

Položme k vůli zjednodušení

$$\begin{array}{lll} ab=\lambda_1, & cd=\lambda_2, & \lambda_1+\lambda_2=\lambda, \\ bc=\mu_1, & ad=\mu_2, & \mu_1+\mu_2=\mu, \\ ac=\nu_1, & bd=\nu_2, & \nu_1+\nu_2=\nu. \end{array}$$

Tím obdrží se z (3)

$$(3')\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}}.$$

Odečtením rovnice (a) od jednotky obdrží se rovnice, z níž dostane se

$$(4)\qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}}$$

a tedy

$$(5)\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Pro funkce celistvého úhlu vycházejí vzorce

$$(6)\qquad \sin\alpha = 2\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda},$$

$$(6')\qquad \cos\alpha=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda},$$

$$(7)\qquad \operatorname{tg}\alpha = 2\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Jest zřejmo, že $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \alpha'$, neboť jsou to úhly obvodové nad týmž obloukem. Taktéž

$$\sphericalangle \mathrm{ADB} = \sphericalangle \mathrm{ACB} = \beta'$$
$$\sphericalangle \mathrm{BAC} = \sphericalangle \mathrm{BDC} = \gamma'$$
$$\sphericalangle \mathrm{CBD} = \sphericalangle \mathrm{CAD} = \delta'.$$

Dle sinusové věty

$$a : b = \sin \alpha' : \sin \beta' = a : d = \sin \alpha' : \sin \delta',$$

odkudž

$$b : d = \sin \beta' : \sin \delta'$$

a tedy všeobecně

$$a : b : c : d = \sin \alpha' : \sin \beta' : \sin \gamma' : \sin \delta'. \tag{8}$$

Budiž $\overline{\mathrm{AE}} = u_1$, $\overline{\mathrm{EC}} = u_2$, $\overline{\mathrm{BE}} = v_1$, $\overline{\mathrm{ED}} = v_2$.

O těchto úsecích jest v platnosti

$$u_1 : v_2 = v_1 : u_2.$$

Z rovnice (8) vychází

$$(a + c) : (b + d) = (\sin \alpha' + \sin \gamma') : (\sin \beta' + \sin \delta') \tag{9}$$

a tedy

$$\sin \alpha' + \sin \gamma' = \sin \beta' + \sin \delta' \tag{10}$$

aneb

$$\sin \frac{\alpha' + \gamma'}{2} \cos \frac{\alpha' - \gamma'}{2} = \sin \frac{\beta' + \delta'}{2} \cos \frac{\beta' - \delta'}{2},$$

a uvážíme-li, že

$$\alpha' + \gamma' + \omega = \pi,$$

kdež ω jest úhel úhlopříček,

$$\beta' + \delta' = \omega,$$

dostaneme výsledek

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{\cos \frac{\beta' - \delta'}{2}}{\cos \frac{\alpha' - \gamma'}{2}}. \tag{11}$$

Máme však

$$\beta' - \delta' = \delta + \gamma - \pi, \qquad \alpha' - \gamma' = \beta + \gamma - \pi,$$

a rovnice (11) se tedy transformuje na

$$\text{(12)} \quad \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{\sin\frac{\delta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\delta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Substitucí dle (3') a (4) a úpravou obdržíme

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}}.$$

Uveďme ještě

$$\text{(14)} \qquad \sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu}}, \quad \cos\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu}},$$

$$\text{(15)} \qquad \sin\omega = \frac{2\sqrt{\nu_1\nu_2}}{\nu}, \quad \cos\omega = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu}.$$

Plošný obsah $\varDelta$ daného čtyřúhelníka

$$\varDelta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha\,(\lambda) = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}.$$

Dosadíme-li za $\lambda_1\lambda_2$ pravé hodnoty, můžeme $\varDelta$ psáti ve tvarech

$$\text{(16)} \qquad \varDelta = \sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{\mu_1\mu_2} = \sqrt{\nu_1\nu_2} = \sqrt{abcd}.$$

Poloměr r kružnice vepsané nalezneme obdobně jako při trojúhelníku; jest i zde

$$\text{(17)} \qquad r = \frac{\varDelta}{s}.$$

Položme

$$\overline{AG} = \overline{AF} = r_1, \ \overline{BG} = \overline{BH} = r_2, \ \overline{CH} = \overline{CK} = r_3, \ \overline{DF} = \overline{DK} = r_4.$$

Z $\triangle$ OAF jest

$$r_1 = r\cot\frac{\alpha}{2} = r\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{\varDelta}{s}\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}},$$

$$(18)\qquad \begin{aligned} r_1 &= \frac{\lambda_1}{s}\,; \quad r_2 = \frac{\mu_1}{s}\,; \\ r_3 &= \frac{\lambda_2}{s}\,; \quad r_4 = \frac{\mu_2}{s}\,. \end{aligned}$$

Znásobením

$$r_1 r_2 r_3 r_4 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2}{s^4} = \frac{\varDelta^4}{s^4} = r^4,$$

t. j.

$$(19)\qquad r = \sqrt[4]{r_1 r_2 r_3 r_4}\,.$$

Ukázati sluší také na relace

$$\begin{aligned} r_1 : r_2 &= r_4 : r_3 = a : c, \\ r_2 : r_3 &= r_1 : r_4 = b : d, \end{aligned}$$

což lze slovy vyjádřiti:

Spojnice protilehlých dotyčných bodů čtyřúhelníka ABCD dělí jeho strany v poměru stran přilehlých.

Důkaz provede se snadno substitucí původních hodnot z rov. (18.) za úseky r_1, r_2, r_3, r_4.

Poloměr R kružnice opsané ustanovíme touto úvahou:

Jest patrno, že

$$\sin \alpha' = \frac{a}{2\mathrm{R}}\,.$$

Z trojúhelníka ABD jde

$$v : a = \sin \alpha : \sin \alpha'$$

a tedy

$$(20)\qquad \mathrm{R} = \frac{v}{2 \sin \alpha}$$

nebo užitím druhé úhlopříčny

$$(20')\qquad \mathrm{R} = \frac{u}{2 \sin \beta}\,.$$

Znásobením

$$\mathrm{R}^2 = \frac{uv}{4 \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\varDelta}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \omega}\,.$$

Substitucí z rovnic (6) a (15) po krátké redukci vyjde vzorec

$$(21)\qquad R = \frac{\sqrt{\lambda\mu\nu}}{4\Delta} = \frac{\sqrt{\Pi}}{4\Delta},$$

jestliže $\qquad \lambda\mu\nu = \Pi.$

Z rovnic (20), (21′) obdržíme nyní úhlopříčny

$$(22)\qquad u = \sqrt{\frac{\lambda\nu}{\mu}} = \frac{\sqrt{\Pi}}{\mu}, \qquad v = \sqrt{\frac{\mu\nu}{\lambda}} = \frac{\sqrt{\Pi}}{\lambda}.$$

Znásobením obou úhlopříčen obdržíme větu Ptolemaeovu

$$(23)\qquad uv = \nu$$

a dělením úměru

$$u : v = \lambda : \mu.$$

Úhel α' se vypočte z úměry

$$v : a = \sin\alpha : \sin\alpha',$$

$$(24)\qquad \sin\alpha' = \frac{a}{v}\sin\alpha = \frac{2a\,\Delta}{\sqrt{\Pi}}.$$

Ostatní úhly analogicky se vypočtou.
Úseky úhlopříčen vyjadřují rovnice

$$(25)\qquad u_1 = \frac{b\sin\alpha'}{\sin\omega} = \frac{2ab\,\Delta\,\gamma'}{\sqrt{\Pi}\,.\,2\Delta} = \frac{\lambda_1\,\nu}{\sqrt{\Pi}}, \qquad u_2 = \frac{\nu\lambda_2}{\sqrt{\Pi}}; \qquad v_1 = \frac{\mu_1\nu}{\sqrt{\Pi}}, \quad v_2 = \frac{\mu_2\nu}{\sqrt{\Pi}}.$$

Uvedeme ještě některé výsledky.
Součet úhlopříčen

$$(26)\qquad u + v = \sqrt{\Pi}\,\frac{\mu+\lambda}{\mu\lambda} = s^2\sqrt{\frac{\nu}{\lambda\mu}},$$

nebot $$\lambda + \mu = s^2.$$

Spojnice protějších bodů dotyčných:

$$\overline{KG} = \frac{2\Delta\sqrt{\nu_1}}{\sqrt{\lambda\mu}},$$

$$\overline{FH} = \frac{2\Delta\sqrt{\nu_2}}{\sqrt{\lambda\mu}}$$

a jich poměr

$$\overline{KG} : \overline{FH} = \sqrt{\nu_1} : \sqrt{\nu_2}. \tag{27}$$

Obsah čtyřúhelníka FGHK

$$\Delta' = \frac{2\Delta^3}{\lambda\mu}. \tag{28}$$

Vzdálenost středu O od vrcholu čtyřúhelníka

$$\overline{OA} = \frac{\Delta}{s}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}}. \tag{29}$$

a součet čtverců všech čtyř spojnic jest

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{s^2} \text{*)}.$$

Příspěvek ku řešení trojúhelníka.

Napsal

Dr. Antonín Pleskot,

professor v Plzni.

V předcházejícím ročníku Časopisu tohoto uvedli jsme řešení trojúhelníka, dány-li jsou jeho strany. Řešením tím dospěli jsme k známým identickým vztahům, které platí o úhlech α, β, γ vyhovujících podmínce

*) O čtyřúhelníku tohoto druhu jedná též článek „O čtyrúhelníku dvojstředovém,“ který v XVII. ročníku Časopisu (str. 10.) uveřejnil řed. A. Strnad. Red.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Předpokládáme-li naopak známost těchto identických rovnic, které obyčejně již v goniometrii se vyvinují, tu můžeme velmi jednoduše dospěti ku vzorcům určujícím úhly daného trojúhelníka, dány-li jsou jeho strany.

Tyto identické vztahy jsou:

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma &= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \\ \sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma &= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Dle věty sinusové platí:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \lambda,$$

kdež λ jest zkrácené vyjádření kteréhokoli z předchozích poměrů.

Jest tedy

$$(\beta)\qquad \begin{aligned} \sin\alpha &= a\lambda, \\ \sin\beta &= b\lambda, \\ \sin\gamma &= c\lambda. \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnic (α), nabudeme:

$$\lambda(a + b + c) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\lambda(a + b - c) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

jichž násobením plyne:

$$\lambda^2(a + b + c)(a + b - c) = 4\sin\alpha\sin\beta\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Poněvadž

$$\sin\alpha\sin\beta = ab\lambda^2,$$

máme z předchozí rovnice

$$(a + b + c)(a + b - c) = 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2},$$

t. j. $$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}}.$$

Podobně znásobením rovnic

$$\lambda(a+b-c) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$
$$\lambda(a-b+c) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

obdržíme

$$\lambda^2(a+b-c)(a-b+c) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\gamma,$$

z čehož, ježto $\sin\beta\sin\gamma = \lambda^2 bc$,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}.$$

Úlohy.

Úloha 41.

Řešiti rovnici

$$\frac{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}{ab} + \frac{\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}}{bc}$$
$$+ \frac{\sqrt{(x^2-c^2)(x^2-a^2)}}{ca} = 1.$$

Který význam má x, značí-li a, b, c délky stran trojúhelníka?

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 42.

Vyloučiti u z rovnic

$$x + u^2 y = au$$
$$y + u^4 x = au^2.$$

Týž.

Úloha 43.

Tři cyklisté vyjeli současně z téhož bodu okružní dráhy 840 m dlouhé rychlostí 80, 72 a 59 m za minutu. Za jakou dobu setkají se všichni na témž místě? Prof. *Adolf Mach.*

Úloha 44.

Lokomotiva s tendrem, dohromady 8 m dlouhé, minuly vlak osobní za 4 sek., vrátivše se, minuly týž vlak na vedlejších kolejích za 16 minut. Jakou rychlostí jel vlak a jak byl dlouhý, jela-li lokomotiva rychlostí 50 km za hodinu?

Týž.

Úloha 45.

Čísla a, b, c, d, e mají tyto vlastnosti:
1. a, c, e tvoří řadu geometrickou,
2. a, b, c, d tvoří řadu arithmetickou,
3. součin ae jest o c větší než součin bd,
4. součet $a + b + c + d = 30$.
Která jsou to čísla? *Týž.*

Úloha 46.

Je-li

$$log_8 9 = a, \qquad log_3 5 = b,$$

čemu rovná se briggický logarithmus čísel 2, 3, 4?

Týž.

Úloha 47.

Na základě binomické poučky dokažte, že

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{3 \, . \, 5}{4 \, . \, 8} + \frac{3 \, . \, 5 \, . \, 7}{4 \, . \, 8 \, . \, 12} + \ldots \text{ in inf.} = 2\sqrt{2}\,.$$

Týž.

Úloha 48.

V trojúhelníku ABC vésti jest příčku CM, známa-li jest vzdálenost středů S_1, S_2 *kružnic opsaných o trojúhelníky ACM, BCM.* Stud. fil. *R. Hruša.*

Úloha 49.

Dán jest trojúhelník o stranách a, b, c a obsahu Δ. S bodu s spuštěny ku stranám jeho kolmé úsečky x, y, z, jichž paty určují trojúhelník obsahu Δ'. Dokázati jest, že

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} \,.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 50.

V pravoúhlém trojúhelníku abc vedena jest výška $cd \perp ab$; s paty její spuštěny kolmice k odvěsnám $de \perp bc$, $df \perp ac$. Který jest poloměr kružnice opsané čtyřúhelníku $afcb$?

Týž.

Úloha 51.

Řešiti rovnici

$$(x^2 - 1)^2 = 2x(x^2 + 1)(\cos\alpha + \cos\beta) + 4x^2 \cos\alpha \cos\beta.$$

Týž.

Úloha 52.

Dokažte, že o úhlech trojúhelníka platnou jest relace

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma} + \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha} + \frac{\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\gamma\cos\alpha + \cos\beta} = 1.$$

Týž.

Úloha 53.

Vyloučiti jest úhel x z rovnic

$$\cos x \operatorname{tg}\alpha + \sin x \operatorname{cotg}\alpha = k\sqrt{2} \,.\, \sin 2\beta$$
$$\cos x \operatorname{tg}\beta + \sin x \operatorname{cotg}\beta = k\sqrt{2} \,.\, \sin 2\alpha \,.$$

Týž.

Úloha 54.

Povrchové přímky kolmého kužele kruhového tvoří se zá-

kladnou úhel α*; v kterém úhlu k základně musí dopadati rovnoběžné paprsky světelné, aby osvětlovaly* $\frac{m}{n}$ *obliny kuželové?*

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 55.

Kolmý jehlan trojboký, jehož základna má strany $a = 51$ *cm,* $b = 68$ *cm,* $c = 85$ *cm, má pobočné hrany zdélí* $h = 110{\cdot}5$ *cm. Ustanovte poloměr koule jehlanu tomu opsané.*

Prof. *Th. Schulz* ve Vídni.

Úloha 56.

Na společné základně vepsány v kouli dva kolmé kužele, jichž obsahy jsou v poměru $m : n$*. Je-li* ϱ *poloměr společné základny, jak velký jest poloměr koule?* *Týž.*

Úloha 57.

Ve čtyrúhelníku určeném vrcholy

$$a\,(0,\,0),\quad b\,(2,\,5),\quad c\,(6,\,3),\quad d\,(6,\,-1)$$

ustanoviti jest bod s tak, aby

$$\triangle\, abs = \triangle\, bcs = \triangle\, cds\,.$$

Kterak lze bod s sestrojiti?

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 58.

V hlavní ose ellipsy dány body m, n, jimiž vedeny přímky M, N, mající směr dvou sdružených průměrů. Jest dokázati, že geometrickým místem jich průsečíků jest ellipsa podobná ellipse dané.

Stud. phil. *Karel Nečas.*

Úloha 59.

Jest analyticky dokázati, že strana čtverce vepsaného v ellipsu rovná se výšce kosočtverce určeného vrcholy ellipsy.

Prof. *Th. Schulz* ve Vídni.

Úloha 60.

V pravoúhlé soustavě souřadnic dán rovnostranný trojúhelník tak, že vrchol jeho leží v počátku a výška v ose X. Trojúhelníku opsána jest kružnice a parabola mající vrchol v počátku. Jak velká jest plocha omezená oblouky obou křivek?

Prof. *Th. Schulz* ve Vídni.

Vypsání cen za řešení úloh.

Výbor Jednoty českých mathematiků udělí těm, kteří do konce měsíce května podají nejdokonalejší a největší počet řešení úloh v letošním ročníku Časopisu obsažených, tyto ceny:

1. Pět prvních cen:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, ročník X.
Cremona-Weyr, Úvod do geometrické theorie křivek rovinných.
Řehořovský, Theorie souměrných funkcí kořenů.
Strouhal, Ocel a její vlastnosti galvanické i magnetické.
Studnička, Bohatýrové ducha.

2. Deset druhých cen:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, ročník X.
Briot-Pšenička, Mechanická theorie tepla.
Pokorný, Důchod invalidní.
Seydler, Isák Newton a jeho Principia.
Studnička, Algebra pro vyšší třídy škol středních.

3. Patnáct třetích cen:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, ročník X.
Čubr, O měření země.
Jelínek, Početní úkoly tělesoměrné.
Strnad, Mathematikové ve francouzské revoluci.
Studnička, Nauka o číslech.

Několik analytických úvah o translačních plochách vůbec a bikvadratických zvlášť.

Napsal

Dr. Ant. Sucharda, t. č. v Paříži.

1. V souřadné soustavě pravoúhlé dána budiž řídící křivka A *plochy translační**) rovnicemi

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ \varphi(x, z) &= 0, \end{aligned}$$

tvořící křivka B měj v soustavě s touto rovnoběžné, jejímž počátkem jest bod $b(q, r, t)$ křivky A, rovnice

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(x, y) &= 0 \\ \Phi(x, z) &= 0, \end{aligned}$$

tudíž v původní soustavě rovnice

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} \mathrm{F}(x - q, y - r) &= 0 \\ \Phi(x - q, z - t) &= 0. \end{aligned}$$

Poněvadž výtvarný zákon plochy žádá, aby body křivky B vykonávaly dráhy shodné a homothetické s křivkou A, bude při vytvořování plochy bod b probíhati křivku A.

Proto musí jeho souřadnice hověti rovnicím (α) a bude tedy

$$(\gamma) \qquad \begin{aligned} f(q, r) &= 0 \\ \varphi(q, t) &= 0. \end{aligned}$$

---

*) Prof. Tilšer ve svých přednáškách nazýval tyto plochy *plochami posouvání.*

Vyloučíce z rovnic (β), (γ) parametry q, r, t, obdržíme rovnici $F(x, y, z) = 0$ plochy translační.

Vložíme-lí tři k sobě příslušné linearné hodnoty q_i, r_i, t rovnicím (γ) vyhovující, do rovnic (β), obdržíme

$$(\delta) \qquad \begin{aligned} F(x - q_i, y - r_i) &= 0 \\ \Phi(x - q_i, z - t_i) &= 0 \end{aligned}$$

jako rovnice křivky B_i s B shodné a homothetické, jež náleží ploše translační.

Užitím všech trojin q_i, r_i, t_i, příslušných k sobě hodnot vyhovujících rovnicím (γ), obdržíme takto všechny křivky soustavy B.

Libovolný bod x, y, z tvořící křivky B má ve směru os X, Y, Z od bodu $b(q, r, t)$ vzdálenosti m_i, n_i, p_i, takže jest

$$x = q + m_i, \qquad y = r + n_i, \qquad z = t + p_i$$

a tudíž

$$\begin{aligned} q &= x - m_i \\ r &= y - n_i \\ t &= z - p_i . \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnic (γ) za q, r, t, obdržíme

$$(\varepsilon) \qquad \begin{aligned} f(x - m_i, y - n_i) &= 0 \\ \varphi(x - m_i, z - p_i) &= 0 \end{aligned}$$

jako rovnice křivky A_i s A shodné a homothetické, v translační ploše obsažené, tudíž křivky soustavy A.

Pro všechny trojiny m_i, n_i, p_i nabudeme tak všech křivek s A shodných a homothetických na ploše, tudíž všech křivek soustavy A.

Trojiny hodnot m_i, n_i, p_i vyhovují rovnicím křivky B pro počátek v bodě b a osy s původními rovnoběžné, tudíž rovnicím

$$(\eta) \qquad \begin{aligned} F(x + q, y + r) &= 0 \\ \Phi(x + q, z + t) &= 0. \end{aligned}$$

Zavedeme-li do rovnic (η) za x, y, z resp. m, n, p a spojíme-li je s rovnicemi (ε) psanými s vynecháním indexu i, nabudeme vyloučením m, n, p z těchto čtyř rovnic opět rovnice plochy translační. Při prvém odvozování této rovnice byla B

křivkou tvořící, při druhém jest jí křivka shodná a homothetická s křivkou A.

Velmi elegantně rovnici plochy translační odvozuje Lie*) pro případ, že souřadnice x, y, z bodů křivek A a B vyjádřeny jsou užitím proměnného parametru t resp τ.

Značí-li tu rovnice

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \varphi_1(t) \\ y &= \psi_1(t) \\ z &= \chi_1(t) \end{aligned}$$

křivku A, podobně rovnice

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= \varphi_2(\tau) \\ y &= \psi_2(\tau) \\ z &= \chi_2(\tau) \end{aligned}$$

křivku B, představují rovnice

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= \varphi_1(t) + \varphi_2(\tau) \\ y &= \psi_1(t) + \psi_2(\tau) \\ z &= \chi_1(t) + \chi_2(\tau) \end{aligned}$$

plochu translační, která vznikne, posouvá-li se křivka s jednou z daných křivek (1), (2) shodná a homothetická po křivce druhé.

Vyloučením proměnných parametrů t, τ z rovnic (3) nabudeme rovnice plochy v souřadnicích x, y, z. Parametry t a τ na sobě nezávislé lze pokládati za *křivočaré souřadnice plochy* (coordonées curvilignes), $t =$ const., $\tau =$ const. jsou křivky různých soustav plochy této.

2. Budiž tu ukázáno ještě k jinému výtvarnému zákonu ploch uvažovaných. Srov. Strnad, „Drobné zprávy“ t. Časop. roč. XIX. str. 50., k nimž však budiž pro úplnost připomenuto, že již Lie vyslovil tento zákon výtvarný pro $\lambda = 1$, jak uvádí professor *Darboux*, doyen pařížské Sorbonny, ve svých výtečných „Leçons sur la théorie genérale des surfaces“ díl I., pag. 98.

Mějme v soustavě souřadné pravoúhlé

---

*) Carl Schilling: „Die Minimalflächen fünfter Classe“, Göttingen, 1880, pag. 7.

křivku $\mathfrak{A}$ $\qquad \ldots f(x y) = 0$

$(\iota) \qquad \varphi(x z) = 0$

a křivku $\mathfrak{B}$ $\qquad \ldots F(xy) = 0$

$(\varkappa) \qquad \Phi(x z) = 0.$

Libovolný bod $\mathfrak{a}(x_1, y_1, z_1)$ křivky $\mathfrak{A}$ s libovolným bodem $\mathfrak{b}(x_2, y_2, z_2)$ křivky $\mathfrak{B}$ určuje přímku $\overline{\mathfrak{ab}}$, na níž stanoví se daným dělícím poměrem λ určitý bod p vzhledem k $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ jako bodům základním.

Souřadnice bodu p jsou

$$(\lambda) \qquad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}.$$

Spojíme-li bod $\mathfrak{a}$ s počátkem o a určíme-li na přímé spojnici té bod o' příslušný dělícímu poměru λ, budou jeho souřadnice

$$x' = \frac{x_1}{1 - \lambda}, \quad y' = \frac{y_1}{1 - \lambda}, \quad z' = \frac{z_1}{1 - \lambda}.$$

Vzhledem k bodu o' jako novému počátku nabudou souřadnice bodu p v rovnicích (λ) uvedené, ovšem hodnot jiných, totiž

$$x = \frac{-\lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{-\lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{-\lambda z_2}{1 - \lambda},$$

z nichž ihned patrno, že nyní $x : y : z = x_2 : y_2 : z_2$ na důkaz, že geometrickým místem bodů p jest tu křivka $\mathfrak{B}'$ s $\mathfrak{B}$ podobná a stejnolehlá. Považíme-li, že tak jest pro každý bod $\mathfrak{a}$ a že činitel $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$ zůstává stálým, seznáme mimo to, že jsou křivky $\mathfrak{B}'$ mezi sebou shodny. Máme-li při této transformaci na mysli kterýkoli určitý bod $\mathfrak{r}$ křivky $\mathfrak{B}$, bude mu v každé z křivek $\mathfrak{B}'$ příslušeti bod $\mathfrak{r}'$. Každý z těchto bodů bude na jedné z přímek, jež bod r spojují s body křivky $\mathfrak{A}$, i budou tyto body dle předešlého vyplňovati křivku $\mathfrak{A}'$ s $\mathfrak{A}$ podobnou a stejnolehlou. Z toho již patrno, že plocha z křivek $\mathfrak{B}'$ složená totožna jest s plochou, jež by vznikla translací libovolné křivky $\mathfrak{B}'$ po dané křivce $\mathfrak{A}'$. Jest na jevě, že bychom obdrželi i druhou soustavu křivek shodných a stejnolehlých s křivkou $\mathfrak{B}'$, kdybychom při úvahách prve vykonaných křivky $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ spolu zaměnili.

Rovnice plochy obdrží se, jestliže z rovnic (λ) a z rovnic

$$\begin{aligned} f(x_1 y_1) &= 0 \\ \varphi(x_1 z_1) &= 0 \\ \mathrm{F}(x_2 y_2) &= 0 \\ \Phi(x_2 z_2) &= 0 \end{aligned}$$

vyloučíme souřadnice $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ bodů $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$. Budiž tu ještě připomenuto, že již *Monge* se zabýval plochami translačními, neužívaje arci jména nynějšího*). Hledal totiž differenciální rovnici těchto ploch, z ní pak integrací dospěl k rovnicím

$$\begin{aligned} x - f(z - \alpha) &= \varphi(\alpha) \\ y - \mathrm{F}(z - \alpha) &= \psi(\alpha), \end{aligned}$$

z nichž vyloučením parametru α vychází rovnice translační plochy. Při tom

$$x = f(z), \; y = \mathrm{F}(z)$$

jest rovnice ***křivky tvořící***,

$$x = \varphi(z), \; y = \psi(z)$$

rovnice ***křivky řídící.***

3. Nebude, trvám, od místa poukázati ještě ke dvěma zajímavým vlastnostem ploch translačních vůbec.

---

*) Monge: „Applications de l'Analyse à la Géométrie", II. partie p. 96—117.

Každým obecným bodem plochy translační procházejí, jak známo, dvě křivky A, B různých soustav. Jsou-li tečny k oběma křivkám v tomto bodě rovnoběžny se dvěma sdruženými průměry příslušné indicatrice, díme, že tvoří křivky A, B na ploše síť křivek sdružených (réseau conjugué).

Podmínku nezbytnou a postačující, aby libovolná plocha obsahovala takovouto síť křivek sdružených, vyjadřuje *Darboux**) takto:

Dána-li plocha v soustavě souřadné pravoúhlé rovnicemi

$$
\begin{aligned}
x &= f(u, v) \\
y &= \varphi(u, v) \\
z &= \psi(u, v),
\end{aligned}
$$

kdež jsou u, v dva neodvislé parametry, tvoří křivky $u =$ const., $v =$ const. síť křivek sdružených, jestliže determinant

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}
\end{vmatrix} = 0 .
$$

K témuž výsledku dospěl již dříve Lie**), jejž ovšem Darboux citovati neopomíjí; nemýlím-li se, píše Lie determinant charakteristický s výměnou řádků za sloupce a naopak.

Je-li translační plocha dána rovnicemi (3), jež jsme uvedli v odst. 1. tohoto pojednání, kladouce t a τ jako neodvislé parametry, pozná se ihned, že tu

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0,$$

z čehož ovšem následuje, že se horní determinant totožně rovná nulle. Tím jest dokázáno, *že tvoří křivky A, B různých soustav translační plochy vždycky síť křivek sdružených.*

*) ibid I. díl pag. 101.

**) Lie: „Beiträge zur Theorie der Minimalflächen“ (Mathem. Annalen Bd. XIV.).

Měl jsem příležitost jinde*) odvoditi tuto vlastnost translačních ploch cestou geometrickou, nevěda, že známa byla již Lie-ovi a Darbouxovi. Vycházel jsem při svém důkaze od theoremu Dupinova ve formě, v které jej vyslovuje Salmon-Fiedler**), že totiž průsečnice dvou soumezných tečných rovin libovolné plochy jest přímkou sdruženou se spojnicí bodů dotyčných. Opíraje se o známou vlastnost translačních ploch, že roviny tečné podél libovolné křivky soustavy A nebo B obalují plochu válcovou***), snadně jsem dokázal vlastnost prve vyslovenou.

Pěkně vyjadřuje vlastnost, o níž tu jednáme, *Raffy* ve své poučné knize†), pravě: Mají-li tvořiti dvě soustavy křivek na libovolné ploše síť křivek sdružených, jest potřebí a postačí, oby tvořily tečny ke všem křivkám jedné soustavy v průsečných bodech s křivkou druhé soustavy plochu rozvinutelnou. Z této věty vyplývá na př., jak Raffy v zajímavých svých výkladech pověděl, že jsou-li křivoznačné křivky jedné soustavy křivkami rovinnými v rovinách rovnoběžných, jsou křivky druhé soustavy dotyčnými křivkami ploch válcových, jejichž plošné přímky jsou rovnoběžny s oněmi rovinami.

V řečené již knize své uvádí Raffy též pěkný způsob geometrický, jímž *Koenigs*, professor na Sorbonně, sestrojuje sítě sdružených křivek libovolné plochy: „Roviny svazku, jehož osou jest libovolná přímka P, protínají danou plochu v křivkách, jež tvoří síť křivek sdružených s dotyčnými křivkami kuželových ploch, opsaných dané ploše ze středů ležících na přímce P.“

K tomu dovoluji si poznamenati toto:

Při plochách, vzniklých translací rovinné křivky A po libovolné prostorové křivce B, snadno jest verifikovati způsob Koenigsův. Přímkou P jest tu úběžná přímka rovin křivek soustavy A, plochy kuželové jsou nahraženy válcovými, jež se dotýkají translační plochy v křivkách soustavy B.

*) Srov. mé pojednání „Kterak sestrojiti tečny ke křivkám intensitním ploch translačních vůbec a kuželosečkových zvlášť.“ (Rozpravy České Akad. Tř. II. roč. VI. č. 24.)

**) Analytische Geometrie d. R. II. díl 3. vyd. pag. 14.

***) Srov. prof. F. Tilšera přednášky na c. k. čes. vys. škole technické z let 80tých.

†) Raffy: „Leçons sur les applications géométriques de l'analyse“, 1897.

Jsou-li také křivky soustavy B křivkami rovinnými, jest úběžná přímka těchto rovin druhou přímkou ve smyslu Koenigově. Příslušnými plochami kuželovými jsou tu válcové plochy, jež se dotýkají plochy translační v křivkách soustavy A.

Abychom druhou zajímavou vlastnost translačních ploch dokázali, vycházejme opět od rovnice (3) tohoto pojednání a odvoďme výraz pro linearný element plochy.

Je tu zajisté

$$dx^2 = (\varphi'_1 dt + \varphi'_2 d\tau)^2$$
$$dy^2 = (\psi'_1 dt + \psi'_2 d\tau)^2$$
$$dz^2 = (\chi'_1 dt + \chi'_2 d\tau)^2,$$

pročež

$$ds^2 = (\varphi'^2_1 + \psi'^2_2 + \chi'^2_1)\, d\tau^2$$
$$+ (\varphi'^2_2 + \psi'^2_2 + \chi'^2_2)\, d\tau^2$$
$$+ 2dt\, d\tau\, (\varphi'_1\varphi'_2 + \psi'_1\psi'_2 + \chi'_1\chi'_2).$$

Předpokládáme-li nyní po příkladě *Darbouxově**), že t, τ jsou oblouky křivek A, B, rovnají se činitelé v prvních dvou závorkách posledního výrazu každý jedné a výraz nabývá jednoduššího tvaru

$$ds^2 = dt^2 + d\tau^2 + 2dt\, d\tau\, (\varphi'_1\varphi'_2 + \psi'_1\psi'_2 + \chi'_1\chi'_2);$$

zavedeme-li dále za t a τ nové parametry α, β tak, že

$$\alpha = t + \tau$$
$$\beta = t - \tau,$$

nabude výraz pro linearný element po krátké úpravě tvaru následujícího:

$$ds^2 = \frac{1}{2}(1 + \varphi'_1\varphi'_2 + \psi'_1\psi'_2 + \chi'_1\chi'_2)\, d\alpha^2$$
$$+ \frac{1}{2}(1 - \varphi'_1\varphi'_2 - \psi'_1\psi'_2 - \chi'_1\chi'_2)\, d\beta^2.$$

Srovnáme-li jej s obecným vzorcem *Darbouxovým***)

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

shledáme, že $F = 0$. Poněvadž však, jak řečený autor ukazuje,

---

*) ibid. pag. 99.
**) ibid. pag. 75.

úhel ω, v němž se protínají křivky $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, dán jest relací

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

jest v předloženém případě $\omega = R$, t. j. křivky $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ protínají se pravoúhelně. Vychází z toho zajímavý výsledek ten, *že dopouští každá plocha translační soustavu pravoúhlých souřadnic křivočarých* (système de coordonnées curvilignes rectangulaires) čili *síť isothermickou.* Křivky $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ ji rozvrhují v nekonečně malé čtverce, položíme-li $d\alpha = d\beta$.

4. Přestávajíce na úvahách o obecné ploše translační, obraťme se k oněm, jejichž řídící a tvořící křivkou jsou *centrické kuželosečky* A a B. Řídící kuželosečka A měj střed i, tvořící B střed u, obě protínejte se v bodě m. Proběhne-li bod m posouvající se křivky B celou křivku A, vznikne žádaná translační plocha P. Při tom každý bod křivky B vytvoří křivku A shodnou a stejnolehlou; také její střed u vytvoří takovou křivku, již nazveme A_s. Plocha dá se vytvořiti arci také tím způsobem, že B jest křivkou řídící a A tvořící. Bod m posouvající se křivky A proběhne pak celou křivku B a každý jiný bod křivky A křivku s B shodnou i stejnolehlou; také střed i vytvoří takovou křivku, nazývejme ji B_s. Jak patrno, obdržíme střed křivky B_s, učiníce $io \triangleq mu$; poněvadž však jest potom též $uo \triangleq mi$, poznáváme, že A_s i B_s mají společný střed v bodě o.

Jest nyní dále zřejmo, že se uvažovaná plocha P dá též vytvořiti takovou translací křivky B, při níž její střed u probíhá danou křivku A_s, nebo takovou translací křivky A, při níž její střed i protíná křivku B_s. Křivky A_s a B_s arci na ploše P neleží.

Povážíme-li, že rovina A křivky A_s dělí tu každou křivku soustavy B ve dvě klinogonalně souměrné polovice, nahlédneme, že rovina tato jest rovinou klinogonalné souměrnosti plochy P. Prohlédajíce k druhému zákonu výtvarnému, z obdobné příčiny poznáváme, že tolikéž rovina B křivky B_s jest rovinou klinogonalné souměrnosti plochy P. Roviny A a B protínají se v přímce X bodem o procházející, v níž mají kuželosečky A_s, B_s po jednom průměru.

Roviny křivek soustavy B protínají rovinu A v rovnoběžkách s X, jimiž určuje se osnova tetiv kuželosečky A_s. Konce každé z těchto tetiv jsou středy dvou kuželoseček soustavy B, i jest patrno, že jsou každé ty dvě křivky spolu souměrny dle roviny C, která prochází průměry Y, Z kuželoseček A_s resp. B_s, sdruženými s průměrem v přímce X obsaženým. Jesti tedy rovina tato třetí rovinou klinogonalné souměrnosti plochy P. Společný těmto třem rovinám bod o ovšem jest středem plochy uvažované. Volíme-li roviny ty za roviny souřadné, budou řečené tři průměry osami souřadnými a společný střed kuželoseček A_s, B_s počátkem soustavy; rovnice plochy, jíž pak nabudeme, bude nejjednodušší dobou rovnice plochy P, nejobecněji pojaté, v soustavě souřadné kosoúhlé. Vhodným užitím příbuznosti vždycky lze plochu P tak transformovati, aby její roviny souměrnosti byly vzájemně k sobě kolmé, zároveň pak aby byly jejich průsečnice osami kuželoseček A_s, B_s.

Případnou volbou modulu příbuznosti i toho lze dosíci, aby tu každá z křivek A_s, B_s měla stejné osy. Tak nabude se nejjednoduššího typu plochy P, na který každou centrickou plochu takovou lze převésti, a na němž i v úvahách následujících přestaneme. Křivkami různých soustav budou zde jedině křivky kruhové a rovnostranné hyperboly. Poukázali jsme již jinde *) k tomu, že tyto plochy třikrát normalně souměrné sluší rozvrhnouti takto:

1. plocha kruho-kruhová, 2. plocha hyperbolo-kruhová, 3. plocha hyperbolo-hyperbolická; při tom první část názvu prohlédá ke křivce řídící, druhá ke křivce tvořící.

Sluší pak při ploše 2. rozeznávati typus a a b podle toho, zda rovina kružnice B_s obsahuje realnou nebo imaginarnou osu hyperboly A_s, při ploše 3. pak typus a, b, c podle toho, zda průsečnice rovin hyperbol A_s, B_s obsahuje realné osy obou křivek, nebo realnou jedné a imaginarnou druhé, nebo konečně obě osy imaginarné.

*) Srov. mé pojednání: „Über die bei einer Gattung centrischer Rückungsflächen der vierten Ordnung auftretende Reciprocität." Sitzber. d. k. Akad. d. W. in Wien, Bd. CI., Abth. II. a. Mai 1892, pag. 590.

Pro snažší přehled znamenej R pokaždé poloosu řídící kuželosečky (poloměr kružnice, po případě poloosu řídící hyperboly), r poloměr tvořící kružnice, po případě poloosu tvořící hyperboly. Při tom budiž považdy $R > r$.

Tou podmínkou docílíme, že dvojná kuželosečka nezvrhne se ve dvě přímky, okolnost to, již v celé této práci pokládáme za vyloučenou.

Majíce rovnici plochy sestrojiti, volme povždy rovinu kuželosečky A_s za souřadnou rovinu XY, rovinu B_s za souř. rovinu XZ, rovinu k oběma kolmou, společným středem těch křivek procházející za souřadnou rovinu YZ. Jest na bíledni, že za bod b (sr. odst. 1.) nejlépe se tu hodí střed tvořící kuželosečky B.

Bude pak zajisté, poněvadž platí pro A_s, je-li kružnicí:

$$x^2 + y^2 = R^2$$
$$z = 0$$

a pro B, je-li kružnicí:

$$(x - \alpha)^2 + z^2 = r^2 \quad (2)$$
$$y = \beta$$

a protože bod $b\,(\alpha, \beta, 0)$ křivce A_s hoví, nutno psáti:

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2 \quad (3)$$
$$\gamma = 0.$$

Vyloučením α, β, γ z rovnic (2), (3) a současným zracionalisováním ihned se obdrží pro rovnici plochy kruho-kruhové doba tato:

$$(4) \qquad (x^2 - y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4x^2\,(R^2 - y^2) = 0.$$

Že plocha jest stupně čtvrtého a že počátek soustavy jest středem jejím, na pohled se potvrzuje; také jest snadno poznati, že roviny, jež jsme za souřadné zvolili, v pravdě jsou ploše rovinami normalné souměrnosti.

Zcela obdobným postupem obdržíme i pro ostatních pět druhů ploch P příslušné rovnice, totiž:
pro ***plochu hyp. kruh. typu a:***

(5) $(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4x^2(y^2 + R^2) = 0,$

hyp. kruh. typu b:

(6) $(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 - 4x^2(y^2 - R^2) = 0,$

hyp. hyp. typu a:

(7) $(x^2 + y^2 - z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4x^2(y^2 + R^2) = 0,$

hyp. hyp. typu b:

(8) $(x^2 + y^2 - z^2 + R^2 + r^2)^2 - 4x^2(y^2 + R^2) = 0,$

hyp. hyp. typu c:

(9) $(x^2 + y^2 - z^2 - R^2 + r^2)^2 - 4x^2(y^2 - R^2) = 0.$

5. Píšeme-li rovnici (4) takto:

$$[x^2 + (R + y)(R - y) - (r + z)(r - z)]^2 - 4x^2(R + y)(R - y) = 0,$$

a povšimneme-li si, že lze obdobně psáti též ostatních pět rovnic, značíme-li pak linearné výrazy zde se vyskytující kratčeji resp. A, B, C, D, E, poznáme, že všechny rovnice ty mají společný tvar

$$\text{(I)} \qquad (A^2 + BC - DE)^2 - 4A^2BC = 0.$$

Touž plochu, jakou vyjadřuje rovnice (4), obdržíme však, jestliže se po kružnici B_s

$$x^2 + z^2 = r^2$$
$$y = 0$$

středem svým posouvá kružnice A

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2$$
$$z = \gamma.$$

Poněvadž tu bod b $(\alpha, 0, \gamma)$ křivce B_s hoví, nutno psáti

$$\alpha^2 + \gamma^2 = r^2$$
$$\beta = 0$$
$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2$$
$$z = \gamma,$$

z kteréžto soustavy vychází vyloučením α, β, γ a jestliže výsledek zracionalníme,

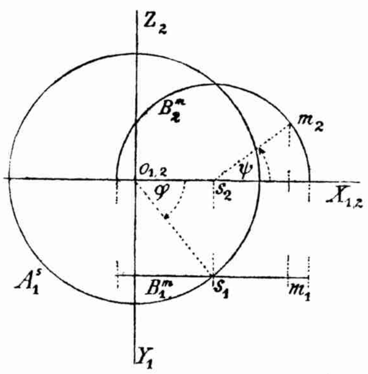
(10) $(x^2 + y^2 - z^2 - R^2 + r^2)^2 - 4x^2(r^2 - z^2) = 0$

jako rovnice plochy translační, jež, dosadíme-li za linearné výrazy označení svrchu zavedené, nabývá tvaru od (I) poněkud odchylného, totiž

$$(A^2 - BC + DE)^2 - 4A^2DE = 0, \tag{II}$$

na který, jak se rozumí, i rovnice (4) až (9) všech ostatních ploch lze uvésti, odvodíme-li je, jako zde se stalo, translací kuželosečky A po B_s.

Jiný způsob, jehož k analytickému vyjádření plochy P s prospěchem možno užiti, jest tento:



Obr. 1.

Libovolný bod m plochy translační jest na určité kružnici Bm, jemu příslušný poloměr kružnice Bm, mající délku r, jest od osy X odchýlen o úhel ψ, její střed s jest na konci poloměru kružnice A_s od osy X o úhel φ odchýleného, jehož délka jest R (obr. 1.). Z toho ihned následuje pro souřadnice řečeného bodu m, že

$$\begin{aligned} x &= R\cos\varphi + r\cos\psi \\ y &= R\sin\varphi \\ z &= r\sin\psi. \end{aligned} \tag{11}$$

Těmito třemi rovnicemi lze každý bod uvažované plochy vyjádřiti užitím proměnných parametrů φ, ψ na sobě nezávislých. Vyloučíme-li je z těchto rovnic, vychází ihned

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} + \sqrt{r^2 - z^2},$$

z čehož po náležitém zracionalnění plyne

(12) $[x^2 + y^2 + z^2 - (R^2 + r^2)]^2 - 4(R^2 - y^2)(r^2 - z^2) = 0$

jako třetí doba rovnice plochy P, již zavedením známých znaků psáti lze ve tvaru

(III) $$(A^2 - BC - DE)^2 - 4BCDE = 0,$$

na kterýž ovšem i ostatních pět ploch dotčeným způsobem uvésti lze. Budiž poznamenáno, že Kummer ve svém pojednání*) pro plochy čtvrtého stupně, jež mají dvojnou kuželosečku a dva páry bodů dvojných a k nimž, jak poznáme, i uvažované tuto plochy náleží, uvádí jen rovnici ve tvaru (I) a (II), nikoli však též ve tvaru (III), jejž právě jsme odvodili.

Také ještě připomeňme, že rovnicemi (11) uvedené vyjádření souřadnic libovolného bodu plochy translační vyplývá též ze způsobu Lieova, v odst. 1. uvedeného, jakož ihned vysvitne, površíme-li, že lze kružnici A_s vyjádřiti rovnicemi

$$x = R\cos\varphi$$
$$y = R\sin\varphi$$
$$z = 0,$$

kružnici pak B_s rovnicemi

$$x = r\cos\psi$$
$$y = 0$$
$$z = r\sin\psi.$$

Rovnice plochy jsou pak

$$x = R\cos\varphi + r\cos\psi$$
$$y = R\sin\varphi$$
$$z = r\sin\psi.$$

Chceme-li konečně rovnice uvažované plochy nabyti na základě onoho zákona výtvarného, jejž jsme v odst. 2. vyložili, vyjděme od kružnic $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, jež jsou v soustavě souřadné pravoúhlé dány rovnicemi

*) Monatsberichte der Berliner Akademie, 1863.

$$\mathfrak{A}\begin{cases} x^2 + y^2 = (1-\lambda)^2 R^2 \\ z = 0, \end{cases}$$

$$\mathfrak{B}\begin{cases} x^2 + z^2 = (1-\lambda)^2 r^2 \\ y = 0. \end{cases}$$

Pak jsou souřadnice bodu p, který dělí spojnici bodu $\mathfrak{a}(x_1, y_1, z_1)$ křivky $\mathfrak{A}$ s bodem $\mathfrak{b}(x_2, y_2, z_2)$ křivky $\mathfrak{B}$ dle poměru λ, tyto:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}$$

$$y = \frac{y_1}{1-\lambda}$$

$$z = \frac{-\lambda z_2}{1-\lambda}.$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic a z rovnic

$$x_1^2 + y_1^2 = (1-\lambda)^2 R^2$$
$$x_2^2 + z_2^2 = (1-\lambda)^2 r^2$$

veličiny x_1, y_1, x_2, z_2, nabudeme rovnice plochy ve tvaru

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - \lambda^2 r^2)^2 = 4(R^2 - y^2)(\lambda^2 r^2 - z^2),$$

který se pro $\lambda = -1$ úplně srovnává s rovnicí (12).

Položíme-li v rovnicích (4) a (10) za první výraz v závorkách M, za druhý N, za činitel jemu předcházející $4P^2$, můžeme po příkladě Kummerově obě ty rovnice, jakož i pět ku každé příslušných, obsáhnouti tvarem

(IV) $$M^2 - 4P^2 N = 0.$$

6. Vložíme-li do rovnice (4)

(13) $$y = c,$$

stane se levá její strana rozdílem kvadrátů, jehož rozkladem v linearné činitele a srovnáním každého s nullou vychází

(14) $$\begin{aligned} x^2 + z^2 + 2x\sqrt{R^2 - c^2} + R^2 - r^2 - c^2 = 0 \\ x^2 + z^2 - 2x\sqrt{R^2 - c^2} + R^2 - r^2 - c^2 = 0, \end{aligned}$$

což patrně značí rovnice dvou kuželoseček, v nichž rovina (13) plochu protíná.

Jsou to dvě křivky kruhové o poloměru r a středech v A_s, tudíž dvě křivky soustavy B.

Podobně substituce

$$z = C \tag{15}$$

do rovnice (10), dává rozdíl kvadratů, jenž rozložen v linearné činitele a s nullou srovnán vede k rovnicím:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + 2x\sqrt{r^2 - C^2} - R^2 + r^2 - C^2) &= 0 \\ (x^2 + y^2 - 2x\sqrt{r^2 - C^2} - R^2 + r^2 - C^2) &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

dvou křivek kruhových soustavy A.

Protíná tedy každá rovina osnovy XZ plochu ve dvou kružnicích soustavy B, každá rovina osnovy XY ve dvou kružnicích soustavy A.

Pro

$$c = \pm R \tag{17}$$

znějí rovnice (14) souhlasně, totiž:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 - r^2 &= 0 \\ x^2 + z^2 - r^2 &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

t. j. každou z rovin $y = R$, $y = -R$ plocha se protíná ve dvou splývajících kruh. křivkách soustavy B.

Pro

$$C = \pm r \tag{19}$$

vychází z rovnic (16) souhlasně

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - R^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - R^2 &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

t. j. každou z rovin $z = r$, $z = -r$ plocha se protíná ve dvou splývajících křivkách kruhových soustavy A.

Rovnice roviny tečné v libovolném bodě x, y, z plochy, dané rovnicí (4) zní

$$\begin{aligned} & x(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)(\xi - x) \\ & + y(x^2 + y^2 - z^2 - R^2 + r^2)(\eta - y) \\ & + z(x^2 - y^2 + z^2 + R^2 - r^2)(\zeta - z) = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Pro libovolný bod kružnic, daných rovnicemi (19), (20), totiž kružnice

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \; z = r$$

jakož i kružnice

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \; z = -r$$

rovnice ona se zjednoduší. Jde totiž z rovnic těchto, druhou-li zdvojmocníme a k prvé přičteme,

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2 = 0,$$

od prvé-li odečteme,

$$x^2 + y^2 - z^2 - R^2 + r^2 = 0,$$

a vložením těchto hodnot do (21) vychází, jelikož součinitel při $(\xi - x)$ a $(\eta - y)$ činí nullou, a součinitel při $(\zeta - z)$ mění v $2r(R^2 - y^2)$, tato rovnice roviny tečné v libovolném bodě kružnice prvé:

$$2r(\zeta - r) = 0,$$

a tato v libovolném bodě druhé:

$$2r(\zeta + r) = 0,$$

tudíž

$$\begin{aligned} \zeta &= r \\ \zeta &= -r. \end{aligned} \tag{22}$$

Rovina tečná kteréhokoliv bodu kterékoliv z obou křivek splývá tedy s rovinou každé z nich, dotýkajíc se plochy P po celém obvodu křivky. Roviny ty jsou tedy singularnými rovinami tečnými plochy uvažované, jež zveme podle Cayleye cnictrops. Dotýkají se plochy podle křivek A_o, A_ω.

Obdobně lze dokázati o rovinách kružnic, daných rovnicemi (17), (18), totiž:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 - r^2 = 0, \; y = R \\ x^2 + z^2 - r^2 = 0, \; y = -R, \end{aligned}$$

že jsou singularnými tečnými rovinami plochy, dotýkajíce se jí každá podél celé kruhové křivky.

Jsou to roviny

$$(23) \qquad \begin{aligned} y &= R \\ y &= -R \end{aligned}$$

a příslušné křivky kruhové jsou B_o, B_ω.

Úvahy předešlým zcela obdobné lze provésti při všech ostatních pěti hlavních druzích ploch P, daných rovnicemi (4) až (9), i přesvědčíme se pokaždé o existenci čtyř singularných rovin tečných, z nichž dvě podél kuželoseček A_o, A_ω, druhé podél B_o, B_ω plochy se dotýkají.

Výsledky právě obdržené a singularních rovnic se týkající, rychleji obdrží se užitím rovnice (IV).

Položíme-li totiž $N = 0$, což vzhledem k rovnici (4) zní

$$R^2 - y^2 = 0,$$

vychází ihned $M^2 = 0$ čili $(x^2 + z^2 - r^2)^2 = 0$ na důkaz, že každá z rovin $y = \pm R$ seče plochu ve dvou splývajících kružnicích poloměru r, hledíme-li při tom k rovnici (11), poznáváme obdobně, že pro

$$r^2 - z^2 = 0$$

vychází

$$(x^2 + y^2 - R^2)^2 = 0,$$

pročež každá z rovin $z = \pm r$ seče plochu ve známých dvou splývajících kružnicích druhé soustavy.

Poněvadž kružnice obdržené, jak v následujícím se pozná, ke dvojné křivce nenáležejí, jsou to nutně prve řečené cnictropy, roviny jejich tedy singularnými rovinami tečnými. Dá se ukázati*), že Hessiana plochy translační prochází všemi cnictropy, z čehož jde na jevo, že tyto kuželosečky, obsažené v singularních rovinách, náležejí ke *křivce parabolických bodů* plochy translační.

Povšimneme-li si nyní ještě rovnice (III), poznáme, že pro

$$(\alpha) \qquad A^2 - BC - DE^2 = 0$$

vychází

$$(\beta) \qquad BCDE = 0,$$

*) Srov. mé pojednání: „O některých plochách polarných plochy posouvání kruho-kruhové" v roč. XIII. tohoto časopisu, pag. 9.

z čehož patrno, že kvadratická plocha (α) protíná translační plochu P v křivkách, jež leží v singularných tečných rovinách

$$B = 0,\ C = 0,\ D = 0,\ E = 0,$$

tudíž ve všech jejích cnictropech.

Pro případ plochy kruho-kruhové (rovn. 12) jest (α) plochou kulovou s P soustřednou o poloměru $\sqrt{R^2 + r^2}$; pro ostatních pět druhů ploch translačních příslušné výsledky snadně se odvodí.

7. Majíce počtářsky stanoviti dvojnou křivku a dvojné body plochy P, uvažme, že podmínka, aby plocha nějaká měla bod dvojný, vyjadřuje se vymizením diskriminanty její rovnice.

Je-li rovnice plochy v souřadnicích homogenních x, y, z, v dána dobou $P = 0$, jest diskriminanta výsledkem vyloučení proměnných x, y, z, v ze soustavy rovnic

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial P}{\partial v} = 0.$$

Jestliže při tom čtyři plochy rovnicemi těmi představené nemají toliko jednotlivé body společné, nýbrž celou nějakou křivku, jest křivka ta dvojnou křivkou plochy $P = 0$, každý její bod ovšem bodem dvojným.

Výpočet proveďme při jedné ze šesti ploch, daných rovnicemi (4) až (9), na př. při ploše hyperbolo-hyperbolické typu a.

Rovnice její (7) vyjádřena v souřadnicích homogenních nabude, píšeme-li za x, y, z po řadě $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{v}$, $\frac{z}{v}$, tvaru

$$P \equiv [x^2 + y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\, v^2]^2 - 4x^2 (y^2 + R^2 v^2) = 0,$$

i bude pak

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{\partial P}{\partial x} \equiv x\,[x^2 - y^2 - z^2 - (R^2 + r^2)\, v^2] = 0\\
&\frac{1}{4}\frac{\partial P}{\partial y} \equiv y\,[-x^2 + y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\, v^2] = 0\\
(24)\quad &\frac{1}{4}\frac{\partial P}{\partial z} \equiv z\,[x^2 + y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\, v^2] = 0\\
&\frac{1}{4}\frac{\partial P}{\partial v} \equiv v\,[-x^2 (R^2 + r^2) + y^2 (R^2 - r^2) - z^2 (R^2 - r^2)\\
&\qquad + (R^2 - r^2)^2 v^2] = 0.
\end{aligned}
$$

Vložíme-li do rovnic těch $x = 0$, zmizí prvá a ostatní budou:

$$
\begin{aligned}
y\,[y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\,v^2] &= 0,\\
z\,[y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\,v^2] &= 0,\\
v\,[y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\,v^2] &= 0,
\end{aligned}
$$

z čehož na pohled patrno, že křivka

$$
(25) \qquad \begin{gathered} y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\,v^2 = 0 \\ x = 0 \end{gathered}
$$

všem plochám

$$
\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = 0
$$

jest společna. Toť tedy dvojná kuželosečka uvažované plochy (7). Její rovnice v souřadnicích Cartesiových obdrží se, vložíme-li $v = 1$, i zní

$$
(26) \qquad \begin{gathered} y^2 - z^2 + (R^2 - r^2) = 0 \\ x = 0. \end{gathered}
$$

Inflekční kuželová plocha každého bodu dvojné křivky nějaké plochy degeneruje, jak známo, ve dvě roviny tečné v tom bodě ku ploše, jeť každý ten bod biplanarným bodem plochy. Obdrží pak se rovnice kužele inflekčního, transformujeme-li rovnici plochy na onen bod dvojný jako počátek.

Při té transformaci zmizí člen samostatný i člen rozměru prvého z rovnice, t. j. podle obvyklého označení bude

$$
u^{(0)} = 0, \; u^{(1)} = 0,
$$

člen pak rozměru druhého s nullou srovnán, t. j.

$$
u^{(2)} = 0
$$

značí rovnici inflekčního kužele.

Nazveme-li v případě daném rovnicí (7) souřadnice libovolného bodu kuželosečky (26) 0, m, n, při čemž arci platí

$$
(27) \qquad m^2 - n^2 + R^2 - r^2 = 0,
$$

bude rovnice plochy, transformovaná na počátek (0, m, n), zníti

$$(x^2 + y^2 - z^2 + 2my - 2nz)^2 - 4x^2 (y^2 + 2ny + R^2 + m^2) = 0. \tag{28}$$

Patrně tu

$$u^{(0)} = 0, \; u^{(1)} = 0$$

kdežto

$$u^{(2)} = 0,$$

zní

$$(m^2 + R^2) x^2 - (my - nz)^2 = 0. \tag{29}$$

Toť rovnice inflekční plochy kuželové, jež skládá se však z rovin

$$\begin{aligned} \sqrt{m^2 + R^2}\, x - my + nz &= 0 \\ \sqrt{m^2 + R^2}\, x + my - nz &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

tečných to rovin plochy hyperbolo-hyperbolické v bodě křivky dvojné, zvoleném za počátek soustavy. Tím znova jest stvrzeno, že křivka (26) jest dvojnou křivkou plochy.

(Dokončení.)

Rozšíření poučky o neurčitých koëfficientech.

Napsal

Dr. **Jan Pexider** v Paříži.

Jsou-li dvě konečné řady funkcí

$$\begin{aligned} &u_0 + u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + \ldots + u_n\varphi_n(x) \\ &v_0 + v_1\varphi_1(x) + v_2\varphi_2(x) + \ldots + v_n\varphi_n(x), \end{aligned}$$

z nichž žádná není algebraicky lineárnou funkcí druhých a u_k, v_k značí konstanty, sobě rovné pro nekonečně mnoho různých hodnot $x_1, x_2, x_3, \ldots$, číselně menších než libovolná hodnota A, jsou obě řady identické, t. j. platí

$$u_0 = v_0, \; u_1 = v_1, \ldots, \; u_n = v_n.$$

Důkaz. Buďtež $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ libovolně volené hodnoty menší než A, ale takové, že pro ně žádná z funkcí $\varphi_k(x)$ nenabývá hodnoty nekonečně veliké; pak ze supponované identity

$$u_0 - v_0 + (u_1 - v_1)\varphi_1(x) + \ldots + (u_n - v_n)\varphi_n(x) = 0$$

plyne $n+1$ lineárných a homogenních rovnic

$$\begin{aligned} u_0 - v_0 + (u_1 - v_1)\varphi_1(x_1) + \ldots + (u_n - v_n)\varphi_n(x_1) &= 0 \\ u_0 - v_0 + (u_1 - v_1)\varphi_1(x_2) + \ldots + (u_n - v_n)\varphi_n(x_2) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u_0 - v_0 + (u_1 - v_1)\varphi_1(x_{n+1}) + \ldots + (u_n - v_n)\varphi_n(x_{n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

pro $n+1$ neznámých $u_0 - v_0$, $u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n$.

Tu víme, je-li determinant z koëfficientů u neznámých různý od nully, t. j. je-li

$$\Delta = \Sigma \pm [1 \cdot \varphi_1(x_2) \cdot \varphi_2(x_3) \ldots \varphi_n(x_{n+1})] \gtrless 0$$

— čemuž vyhověti patrně vždy máme ve své moci, jelikož funkce φ_k jsou dle supposice na sobě algebraicky lineárně nezávislé a hodnoty $\varphi_k(x_\nu)$ závisejí jedině od volby argumentů x_ν — že existuje jediné řešení, a sice nullové, t. j.

$$u_0 - v_0 = 0,\ u_1 - v_1 = 0, \ldots,\ u_n - v_n = 0,$$

z čehož plyne

$$u_0 = v_0,\ u_1 = v_1, \ldots,\ u_n = v_n,$$

jak bylo dokázati.

A naopak. Platí-li $n+1$ rovnic $u_k = v_k$, platí identita $\Sigma(u_k - v_k)\varphi_k = 0$, t. j. identičnost řad $\Sigma u_k\varphi_k = \Sigma v_k\varphi_k$, takže rovnice $u_k = v_k$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$ jsou podmínkou nejen nutnou, nýbrž i postačující pro rovnost dvou řad funkcí.

Na základě této věty odvoditi lze následující. Značtež $\varphi_k, \psi_k, \ldots$ funkce proměnné x, $a_k, b_k, \ldots$ konstanty, a přičtěme k identitě

$$\sum_1^n a_k\varphi_k = \sum_1^n a_k\varphi_k \tag{1}$$

na obou stranách konstantu $a_0 = \sum_1^n a_k c_k$, při čemž rozklad v c_k jest ostatně zcela libovolný, a spojme na jedné straně funkce φ_k a konstanty c_k ve funkce ψ_k, t. j. $\psi_k = \varphi_k + c_k$; pak zajisté

$$\sum_1^n a_k \varphi_k + a_0 = \sum_1^n a_k \psi_k,$$

při čemž postačujícími podmínkami bylo, aby ψ_k lišily se od φ_k jen o jisté konstanty a aby součet jich násobků s příslušnými koëfficienty funkčními rovnal se konstantě na pravé straně a_0.

Ukáže-li se naopak, že k platnosti identity (1) jest nutně zapotřebí podmínek právě uvedených, jsou i nutné i postačující pro shodnost dvou řad, t. j. aby dvě řady různých funkcí

$$\Sigma (a_0 + a_k \varphi_k) \text{ a } \Sigma b_k \psi_k$$

se sobě rovnaly, jest nutné a stačí, aby kromě rovnosti

$$a_k = b_k$$

platily relace

$$\psi_k - \varphi_k = c_k \text{ a } \Sigma a_k c_k = a_0$$

čili „funkce dvou identických řad nemohou se od sebe lišiti leč konstantami."

Proveďme tedy druhou část důkazu.

Aby

$$\Sigma a_k \varphi_k + a_0 = \Sigma b_k \psi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

t. j.

$$\sum_1^n (a_0 + a_k \varphi_k - b_k \psi_k) = \sum_1^m u_k \varrho_k + u_0 = 0,$$

jest dle odvozené poučky nutně třeba, aby

$$u_k = 0 \text{ pro } k = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Tu nastávají následující případy:

buď $\psi_\nu \neq \varphi_\nu$ vůbec, a pak $\varrho_\nu = \varphi_\nu$ anebo ψ_ν, takže $u_\nu = a_\nu$ anebo $-b_\nu$, t j. $a_\nu = b_\nu = 0$;

neb $\psi_k = \varphi_k + c_k$, a pak $\varrho_k = \varphi_k$ kdežto $b_k c_k$ obsažena jsou v u_0, a příslušné koëfficienty $a_k - b_k = u_k = 0$, t. j. $a_k = b_k$, takže identicky $\Sigma b_k c_k = \Sigma a_k c_k$, anebo jest

$\psi_\mu = \varphi_\mu$, a tu opět z $u_\mu = a_\mu - b_\mu = 0$ plyne $a_\mu = b_\mu$.

Obdržíme tudíž $u_0 = a_0 - \Sigma a_k c_k = 0$, takže původní rovnice má platnost jen při hodnotách

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma a_k \varphi_k + a_0 = \Sigma a_k (\varphi_k + c_k) \\ a_0 = \Sigma a_k c_k,\end{array}\right. \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

z čehož jde požadovaná identita

$$\Sigma a_k \varphi_k = \Sigma a_k \varphi_k.$$

K tomu bylo nutno, aby

$$b_k = a_k, \quad \psi_k = \varphi_k + c_k, \quad \Sigma a_k c_k = a_0,$$

což jsou právě ony svrchu uvedené postačující a nyní za nutné prokázané podmínky. Tím dokázána věta:

„Algebraicky lineárně na sobě nezávislé funkce dvou identických řad nemohou se od sebe lišiti leč o konstanty."

Applikace této věty jest na příklad:

Lze-li integrál nějaké funkce vyjádřiti algebraickými a transcendentními funkcemi v konečném počtu, tu funkce výrazu jednoho pro onen integrál nemohou se od funkcí jiného výrazu pro týž integrál lišiti leč o konstanty; neboť má-li

$$\int f(x)\, dx = \Sigma a_k \varphi_k + \mathrm{A} = \Sigma b_k \psi_k + \mathrm{B},$$

jest nutno, aby

$$a_k = b_k, \quad \psi_k = \varphi_k + c_k, \quad \Sigma b_k c_k + \mathrm{B} = \text{libovolné konstantě } \mathrm{A},$$

takže, nepovažujeme-li takové dva výrazy za podstatně různé, můžeme říci:

„Lze-li integrál funkce vyjádřiti algebraickými a transcendentními funkcemi, na sobě lineárně nezávislými, v konečném počtu, je to možné způsobem jen jediným."

V Paříži dne 20. ledna 1899.

Poznámka o řadách arithmetických.

Napsal

Vilém Jung,

professor st. prům. školy v Praze.

Obecný člen y_x arithmetické řady n-ho stupně jest racionální celistvou funkcí n-ho stupně indexu x, platí tedy

$$y_x = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r . \tag{1}$$

Utvořme si obecný člen řady prvních differencí totiž

$$\Delta y_x = \sum_{r=0}^{n} a_r (x+1)^r - \sum_{r=0}^{n} a_r x^r = \sum_{r=0}^{n} a_r \{(x+1)^r - x^r\},$$

provedeme-li výkony tuto naznačené a srovnáme-li výsledek dle mocnin argumentu x, obdržíme

$$\Delta y_x = \sum_{r=0}^{n-1} a_r^{(1)} x^r ,$$

při čemž

$$a_r^{(1)} = \sum_{p=r+1}^{n} (p)_{p-r}\, a_p = \sum_{p=r+1}^{n} (p)_r\, a_p ;$$

řada prvních differencí Δy_x jest stupně $(n-1)$-ho.

Podobně si utvoříme obecný člen řady druhých differencí, totiž

$$\Delta^2 y_x = \sum_{r=0}^{n-1} a_r^{(1)} \{(x+1)^r - x^r\} = \sum_{r=0}^{n-2} a_r^{(2)} x^r ,$$

při čemž

$$a_r^{(2)} = \sum_{p=r+1}^{n-1} (p)_r\, a_p^{(1)} ;$$

řada druhých differencí $\Delta^2 y_x$ jest stupně $(n-2)$-ho.

Platí tedy obdobně pro s-tou differenci

$$\Delta^s y_x = \sum_{r=0}^{n-s} a_r^{(s)} x^r , \tag{2}$$

při čemž

$$(3) \qquad a_r^{(s)} = \sum_{p=r+1}^{n-(s-1)} (p)_r \, a_p^{(s-1)};$$

řada s-tých differencí $\Delta^s y_x$ jest stupně $(n-s)$-ho.

Ze vzorce (3) obdržíme součinitele $a_{n-s}^{(s)}$ při nejvyšší mocnině x^{n-s} ve výraze $\Delta^s y_x$, položíme-li $r = n - s$, tedy

$$(4) \qquad a_{n-s}^{(s)} = a_{n-(s-1)}^{(s-1)} \Big[n - (s-1) \Big].$$

Pro n-tou differenci konečně obdržíme

$$(5) \qquad \Delta^n y_x = a_0^{(n)} = \text{Const.}$$

Další difference rovnají se nulle, totiž

$$(6) \qquad \Delta^s y_x = 0 \quad \text{pro } s > n.$$

Hodnota $\Delta^n y_x = a_0^{(n)}$ dá se jednoduše stanoviti pomocí vzorce (4), dosazujeme-li postupně $s = 1, 2, 3, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
a_{n-1}^{(1)} &= n \, a_n \\
a_{n-2}^{(2)} &= (n-1) \, a_{n-1}^{(1)} \\
a_{n-3}^{(3)} &= (n-2) \, a_{n-2}^{(2)} \\
&\vdots \\
a_2^{(n-2)} &= 3 \,.\, a_3^{(n-3)} \\
a_1^{(n-1)} &= 2 \,.\, a_2^{(n-2)} \\
a_0^{(n)} &= 1 \,.\, a_1^{(n-1)}
\end{aligned}$$

tedy

$$(7) \qquad \Delta^n y_x = a_0^{(n)} = n! \, a_n \,.$$

Pro n tou differenci arithmetické řady n-ho stupně platí však

$$(8) \qquad \Delta^n y_x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n)_k \, y_{n+x-k} = \text{Const.}$$

Ježto

$$y_{n+x-k} = \sum_{r=0}^{n} a_r (n + x - k)^r = \sum_{r=0}^{n} a_r (b - k)^r ,$$

platí se zřetelem k rovnici (7) identičnost

$$(9) \qquad \sum_{k=0}^{n} \left\{ (-1)^k (n)_k \left[\sum_{r=0}^{n} a_r \, (b - k)^r \right] \right\} = n \, ! \, a_n .$$

Se zřetelem k rovnici (6) jest v platnosti dále identičnost

$$(10) \qquad \sum_{k=0}^{n} \left\{ (-1)^k (n)_k \left[\sum_{r=0}^{m} a_r \, (b - k)^r \right] \right\} = 0 ,$$

když $m < n$.

Obě tyto identičnosti jsou v platnosti pro jakékoliv celistvé a kladné n jakož i m a pro jakékoliv a_r a b (realné i komplexní).

Dr. F. J. Studnička uvádí ve svém pojednání *„Příspěvek k nauce o determinantech mocninných“* (Věstník České Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění. Ročník VII.) tři zvláštní poučky do číselné theorie patřící, jakožto zvláštní případy identičnosti, plynoucí z jisté vlastnosti *základního determinantu mocninného*, totiž

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} a^n - (n)_1 (a+1)^n + (n)_2 (a+2)^n - \ldots \\ \pm (a+n)^n = (-1)^n \, . \, n \, ! \end{aligned}$$

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} (n)_1 \, . \, 1^n - (n)_2 \, . \, 2^n + (n)_3 \, . \, 3^n - \ldots \\ \pm (n)_n \, . \, n^n = (-1)^{n-1} \, . \, n \, ! \end{aligned}$$

$$(\gamma) \qquad a_0 - (n)_1 a_1 + (n)_2 a_2 - \ldots \pm (n)_n a_n = 0 ,$$

představují-li čísla

$$a_0, \; a_1, \; a_2, \ldots, a_n$$

arithmetickou řadu stupně $(n-k)$-ho pro $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Obrátíme-li na levé straně v rovnicích (α), (β) pořádek členů a násobíme-li v případech, v nichž jest po obrácení první člen záporný, celou rovnici (-1), položíme-li $a + n = b$

v rovnici (α) a uvážíme-li, že $(n)_k = (n)_{n-k}$, můžeme tyto rovnice psáti ve formě

$$(\alpha') \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n)_k (b-k)^n = n!$$

$$(\beta') \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n)_k (n-k)^n = n!$$

Identičnost (β') plyne z (α') pro $b = n$.

Identičnost (α') jest zvláštním případem identičnosti (9) tuto odvozené a to pro $a_n = 1$; $a_r = 0$, $[r = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)]$.

Identičnost (γ) jest totožna s identičností (10).

Věstník literární.

O životě a vědeckém působení P. L. Čebyševa se dočtli čtenáři Časopisu v krátké stati prof. A. Vasiljeva, umístěné v roč. XXV. na str. 25. Týž auktor uveřejnil v „Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di Gino Loria" (Torino, C. Clausen editore) 1898, na 56 stranách podrobný rozbor díla slavného ruského mathematika, věnovaný jeho příteli prof. K. Hermite-ovi, pod titulem „P. L. Tchébychef et son oeuvre scientifique par A. Vassilief, professeur à l'Université de Kasan."

Doporučujeme tento rozbor, pocházející z péra nejkompetentnějšího, a obsahující úplný seznam vědeckých prací Čebyševa, všem pěstitelům mathematiky co nejvřeleji. *E. Weyr.*

Précis élémentaire de la théorie des Fonctions elliptiques avec tables numériques et applications, par *Lucien Lévy*, examinateur d'admission et répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1898.

Stručný nástin základů theorie elliptických funkcí určený hlavně inženýrům, zbudovaný prostředky elementárnými, omezující se, pokud možno, na proměnné reálné, a obohacený applikacemi mechanickými, geometrickými a číselnými.

Stanovisko theorie funkcí komplexní proměnné, jež jest nutné pro hlubší vniknutí do této náuky, vytknuto povšechně teprve v poslední kapitole. To však nikterak nevadí poznání elliptických funkcí onou měrou, jež postačuje pro zmíněné applikace; má se zde věc tak, jako u funkcí trigonometrických, s nimiž se studující seznámí cestou elementarní tak, že jich dovede s nejlepším úspěchem applikovati, aniž by byl poznal jich analytickou povahu s hlediska funkční theorie.

Cenu knihy, zaujímající pouze asi 200 stránek, zvyšují zajímavá cvičení a problemy přidané téměř ke všem kapitolám, jakož i přehledné résumé hlavních formul, a konečně číselné tabulky na 11 stranách umístěné, jež umožňují přibližný výpočet funkcí elliptických a jich inversních. *Ed. Weyr.*

Traité d'Algèbre supérieure par Henri Weber, traduit de l'allemand sur la deuxième édition par *J. Griess.* Paris, Gauthier-Villars, 1898. Stran X + 764.

K výtečnému „Cours d'Algèbre supérieure" Serretovu, dosud nejlepší učebnici o vyšší algebře, přidružilo se dílo Weberovo „Lehrbuch der Algebra," jehož 1. díl tuto ohlašujeme v pečlivém francouzském překladě p. Griesse, a v typografické úpravě zvlášť přehledné, jakou se vyznamenávají mathematická díla nákladem p. Gauthier-Villarsa vydaná.

Dílo Weberovo vyniká, tak jako Serretovo, nevšední přesností a jasností exposice. Vyloživ v Úvodu podstatu soustav čísel racionálných, irracionálných a komplexních, buduje auktor algebru rovnic od elementů, podávaje též theorii determinantů s některými applikacemi jakož i novější výzkumy Hermite-a, Sylvestera, Kroneckera a j., a dospívá do základů theorie Galoisovy a k applikaci její na algebraické řešení rovnic, zvláště t. zv. Abelových a speciálně oněch, Gaussem uvažovaných, na nichž závisí dělení kružnice na daný počet stejných dílů. Výklad theorie Galoisovy děje se způsobem, jehož byli Dedekind, Weber a Kronecker užili, a jenž usnadňuje vniknutí do této krásné a hluboké theorie přesností formulace velmi abstraktních pojmů její.

Všem, kdož se chtějí seznámiti s nynějším stavem algebry, lze vynikající dílo Weberovo co nejvřeleji doporučiti; není lepší pomůcky k dosažení tohoto cíle. *Ed. Weyr.*

Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, par *Gaston Darboux,* membre de l'Institut, doyen de la Faculté des sciences et professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris. Tome I. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1898.

První to část systematických výkladů o theoriích titulem vyznačených, jichž původem byly známé práce Lamé-ovy, a jež z části pan auktor byl již vyložil ve svém krásném díle „Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.“

Že i v přítomném díle vynikajícího auktora látka zpracována způsobem mistrovským, netřeba zvláště podotýkati.

Ed. Weyr.

Pozvání k mezinárodnímu sjezdu mathematiků v Paříži

(6. až 12. srpna 1900).

Redakci zasláno bylo od pořadatelstva mezinárodního sjezdu mathematiků na světové výstavě v Paříži r. 1900 ve dnech 6. až 12. srpna pozvání k účastenství *členů Jednoty českých mathematiků* na sjezdě tomto. Došlé pozvání zní doslovně takto:

La Société mathématique de France a reçu à Zurich, en 1897, la mission de préparer le prochain Congrès international des mathématiciens, qui doit avoir lieu à Paris en 1900. Elle a constitué à cet effet un Comité d'organisation qui s'est lui-même divisé en deux Commissions: *Commission administrative* (président, M. G. Darboux) et *Commission des travaux* (président, M. H. Poincaré). A l'heure actuelle, le programme détaillé du prochain Congrès international ne saurait être arrêté définitivement, mais il a été pris cependant un certain nombre de résolutions fermes que nous avons le devoir de porter à votre connaissance.

Tout d'abord, la date est fixée du lundi 6 août au dimanche 12 août 1900; le Congrès durera par conséquent sept jours.

Nous serons rattachés à l'ensemble des Congrès rentrant dans l'organisation de l'Exposition universelle, ce qui, du reste, ne nous empêchera nullement de tenir la plupart de nos séances, et surtout les séances de sections, ailleurs que dans les locaux de l'Exposition. D'après des indications que nous avons déjà, tout nous fait espérer que la Sorbonne pourra, dans ce but, nous ouvrir très gracieusement ses portes.

Le programme du Congrès comprendra: au moins deux séances générales; des séances de sections, qui auront lieu surtout le matin; des visites scientifiques; un banquet, qui réunira tous les membres du Congrès. Des excursions, facultatives, pourront être organisées et sont dès maintenant à l'étude.

Le prix de la carte du Congrès sera de *trente francs.*

Elle donnera droit:

1° A la participation à tous les travaux, à toutes les assemblées, à toutes les visites qui seront organisées;

2° Au banquet;

3° A la réception du compte rendu des travaux du Congrès, aussitôt après la publication.

Lorsqu'un membre du Congrès y viendra accompagné d'une ou plusieurs personnes de sa famille, celles-ci pourront recevoir, sur demande, des cartes spéciales à un prix réduit qui sera ultérieurement fixé.

Il est absolument impossible au Comité d'organisation de s'occuper de l'installation des membres du Congrès dans les hôtels, ni des conditions de la vie matérielle pendant le séjour à Paris. Mais, reconnaissant toute l'importance de cette question, il s'est préoccupé de donner indirectement satisfaction à ceux des membres du Congrès qui n'habitent pas Paris en temps ordinaire. A cet effet nous espérons, dans une prochaine circulaire, pouvoir vous fournir les moyens d'obtenir tous les renseignements que vous jugeriez nécessaires de vous procurer à ce sujet.

Nous vous ferons également connaître en temps utile quelles seront les conditions spéciales de faveur accordées pour les voyages par les Compagnies de transports, à l'occasion de l'Exposition universelle.

Près de deux années nous séparent encore de l'ouverture du Congrès, et il ne saurait être question de vous demander aujourd'hui une résolution ferme. Mais il est du plus haut intérêt, pour la suite de nos travaux, d'avoir au moins quelque indication sur le nombre probable des membres du Congrès de 1900. En conséquence, nous insistons d'une façon toute particulière pour que vous ayez l'obligeance de nous faire savoir vos intentions probables par une simple carte postale (que vous trouverez ci-incluse), dans les termes suivants:

Il est probable que j'assisterai au Congrès de Paris
(avec personnes de ma famille),

ou

Il n'est pas probable que j'assiste au Congrès de Paris.

Ceci ne vous engagera en rien, à aucun point de vue, dans un sens ou dans l'autre. Ce n'est que plus tard que nous aurons à vous demander vos intentions définitives. Mais l'ensemble de ces premières indications nous sera extrêmement précieux.

Il importerait que votre réponse nous parvînt le plus tôt possible, et dans tous les cas qu'elle nous fût adressée par vous, dans les huit jours qui suivront la réception de la présente circulaire.

Nous vous en remercions d'avance et nous vous prions, Messieurs, d'agréer nos cordiales salutations.

Le Comité d'organisation.

P.-S. — 1° Nous vous serons reconnaissants de vouloir bien, le plus qu'il vous sera possible, faire connaître la présente circulaire autour de vous;

2° Prière aux journaux mathématiques de reproduire, au moins par extraits, la présente circulaire, dans la mesure qu'ils jugeront possible. Nous les en remercions dès à présent.

Prière d'adresser toutes les communications à M. le Président de la Société mathématique de France, rue des Grands-Augustins, 7, Paris. C'est lui qui est en même temps président du Comité d'organisation.

Úlohy.

Úloha 1.

Řešiti rovnici

$$x^3(x^2+1)-8x^2(x-1)=\frac{4(x^3+1)-x^2(x-1)}{4}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Emerich Brinkmann*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Rovnice daná v podobě annulované

$$4x^5-31x^3+31x^2-4=0$$

čili

$$(x-1)(4x^4+4x^3-27x^2+4x+4)=0,$$

rozpadá se ve dvě.

První z nich, $x-1=0$, poskytuje kořen

$$x_1=1\,;$$

druhá jest převratnou rovnicí stupně čtvrtého

$$4x^4+4x^3-27x^2+4x+4=0.$$

Tato substitucí

$$x+\frac{1}{x}=z$$

přechází v rovnici

$$4z^2+4z-35=0,$$

z níž ustanovíme

$$z_1=\frac{5}{2},\quad z_2=-\frac{7}{2}.$$

Z rovnic

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},\qquad x+\frac{1}{x}=-\frac{7}{2}$$

vypočítáme kořeny

$$x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_{4,5} = \frac{1}{2}(-7 \pm \sqrt{33}).$$

Úloha 2.

Kolik kladných celistvých řešení má rovnice

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{8} + \frac{z}{6} = 1?$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Robert Čech,* stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech.)

Rovnice

$$ax + by = c$$

má o 1 kladné celistvé řešení více než jest počet celých jednotek v podílu $p = c : ab$. Zbavíme-li danou rovnici zlomků, nabude tvaru

$$2x + 3y + 4z = 24,$$

z něhož patrno, že při daných podmínkách musí býti

$$z \leqq 6.$$

Kladouce tedy postupně $z = 0, 1, 2, \ldots, 6$, a znamenajíce písmenem r počet celistvých kladných řešení, nullová řešení v to počítajíce, obdržíme

při	$z = 0$	rovnici	$2x + 3y = 24,$	$p = 4,$	$r = 5,$
„	$z = 1$	„	$2x + 3y = 20,$	$p = 3,$	$r = 4,$
„	$z = 2$	„	$2x + 3y = 16,$	$p = 2,$	$r = 3,$
„	$z = 3$	„	$2x + 3y = 12,$	$p = 2,$	$r = 3,$
„	$z = 4$	„	$2x + 3y = 8,$	$p = 1,$	$r = 2,$
„	$z = 5$	„	$2x + 3y = 4,$	$p = 0,$	$r = 1,$
„	$z = 6$	„	$2x + 3y = 0,$	$p = 0,$	$r = 1.$

Pročež rovnice daná poskytuje 19 řešení žádaných.

Úloha 3.

Které úhly nepřesahující 360^0 činí zadost rovnici

$$tg\,x + tg^3 x + tg^5 x + \ldots = \frac{1}{2}\sqrt{sin^2 x + sin^4 x + sin^6 x + \ldots}$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Stanislav Linhart,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Sečtouce nekonečné řady geometrické na obou stranách rovnice, dáme jí podobu

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}}$$

čili

$$\operatorname{tg} 2x = \pm \operatorname{tg} x.$$

Rovnici této se vyhoví, je-li

$$2x = 2n\mathrm{R} \pm x,$$

tudíž při

$$x = 0,\quad 60^\circ,\quad 120^\circ,\quad 180^\circ,\quad 240^\circ,\quad 300^\circ,\quad 360^\circ.$$

Úloha 4.

Sestrojiti úhel x dle úměry

$$sin\,2x : sin\,3x = m : n.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Kitzberger*, stud. VIII. tř. g. v Domažlicích.)

Úměra daná jest rovnomocná s úměrou

$$2 \sin x \cos x : (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = m : n,$$

která krácením nabývá tvaru

$$2 \cos x : (4 \cos^2 x - 1) = m : n$$

čili

$$4m \cos^2 x - 2n \cos x - m = 0.$$

Odtud vyplývá výraz

$$\cos x = \frac{1}{4m}(n \pm \sqrt{n^2 + 4m^2})$$

vedoucí k tomuto sestrojení:

Zvolme osy $X \perp Y$; z počátku o opišme kružnici K poloměrem $2m$, přenesme na X úsečku $\overline{oa} = \frac{n}{2}$, na Y pořadnici $\overline{ob} = m$, na X pak ještě $\overline{ac} = \overline{ad} = \overline{ab}$.

Kolmice vztyčené v bodech c, d ku X protínají K v bodech 1, 2, 3, 4, načež polopaprsky

$$01,\ 02,\ 03,\ 04$$

svírají s kladným směrem osy X úhel žádaný.

Poznámka. Při $m = 6$, $n = 5$ jest

$$\cos x = \frac{3}{4} \text{ aneb } \cos x = -\frac{1}{3}.$$

Úloha 5.

Ustanoviti úhel x dle úměry

$$tg\, 2x : tg\, 3x = m : n.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Holzmann*, stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Vyjádříme-li funkce úhlu $2x$, $3x$ funkcemi úhlu jednoduchého, obdržíme

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} : \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = m : n.$$

Odstraníme-li činitele $\operatorname{tg} x$ vedoucího k řešení $\operatorname{tg} x = 0$ a upravíme-li, dospějeme k rovnici

$$2n\,(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x) = m\,(3 - \operatorname{tg}^2 x)\,(1 - \operatorname{tg}^2 x);$$

tato pak annulována jeví se ve tvaru

$$m \operatorname{tg}^4 x - 2\,(2m - 3n) \operatorname{tg}^2 x + 3m - 2n = 0,$$

a poskytuje řešení

$$\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{1}{m}\left[2m - 3n \pm \sqrt{(m-n)(m-9n)}\right]}.$$

Je-li na př. $m = 5$, $n = 14$, obdržíme

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Úloha 6.

Nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka sestrojeny „měsíčky Hypokratovy" a do každého vepsána největší kružnice. Dokázati jest:

a) Průměr každé této kružnice rovná se poloměru kružnice vepsané v daný trojúhelník.

b) Vzdálenost středu každé této kružnice od středu přepony rovná se $\frac{1}{4}$ obvodu daného trojúhelníka.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Eman Hájek,* učitel v Kloboukách u Brna.)

V pravoúhlém trojúhelníku abc buďtež odvěsny

$$\overline{bc} = a, \quad \overline{ac} = b$$

a přepona

$$\overline{ab} = c;$$

poloměr kružnice vepsané budiž ϱ. Dotyčným bodem této kružnice dělí se přepona v části $a - \varrho$, $b - \varrho$; tudíž jest

$$c = a - \varrho + b - \varrho, \quad \varrho = \frac{a + b - c}{2}.$$

Kružnice K_1 vepsaná v měsíček nad obloukem $\widehat{bc}$ má střed s_1, poloměr ϱ_1; obdobně označme střed i poloměr kružnice K_2 vepsané v měsíček nad obloukem $\widehat{ac}$. Jest pak

$$2\varrho_1 = \frac{a}{2} - \left(\frac{c}{2} - \frac{b}{2}\right) = \frac{a + b - c}{2},$$

$$2\varrho_2 = \frac{b}{2} - \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{a + b - c}{2},$$

pročež

$$2\varrho_1 = 2\varrho_2 = \varrho.$$

Je-li s střed přepony, jest

$$\overline{ss_1} = \frac{c}{2} + \varrho_1 = \frac{a+b+c}{4},$$

$$\overline{ss_2} = \frac{c}{2} + \varrho_2 = \frac{a+b+c}{4}.$$

Tím obě tvrzení dokázána.

Úloha 7.

Úhlopříčky pravidelného osmiúhelníka omezují dva menší pravidelné osmiúhelníky. V kterém poměru jsou obsahy všech tří osmiúhelníků?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Bohumil Matas,* stud. VII. tř. real. v Kutné Hoře.)

Poloměr kružnice opsané osmiúhelníku pravidelnému budiž r; potom jest obsah jeho

$$A = 4r^2 \sin 45^0 = 2r^2\sqrt{2}.$$

Uhlopříčky, spojující vrcholy osmiúhelníka ob jeden, omezují osmiúhelník druhý, obsahu B a poloměru kružnice opsané r_1. Poloměr tento rovná se straně a osmiúhelnika původního, tudíž

$$r_1 = a = 2r \sin 22\frac{1^0}{2} = r\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Úhlopříčky, spojující vrcholy daného osmiúhelníka ob dva, omezují třetí osmiúhelník, jehož obsah jest C a poloměr kružnice opsané

$$r_2 = \frac{a}{\cos 22\frac{1^0}{2}} = r \operatorname{tg} 22\frac{1^0}{2} = r(\sqrt{2} - 1).$$

Obsahy všech tří osmiúhelníků jsou tedy v poměru

$$A : B : C = r^2 : r_1^2 : r_2^2 = 1 : (2 - \sqrt{2}) : (\sqrt{2} - 1)^2$$

čili

$$A : B : C = (\sqrt{2} + 1) : \sqrt{2} : (\sqrt{2} - 1).$$

Úloha 8.

Do kružnice vepsán čtyrúhelník, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo. Součet dvou protějších stran jest 89, součet druhých dvou stran 91; součet dvou sousedních stran jest o 10 větší než součet druhých dvou stran. Ustanoviti jest strany, úhlopříčky a obsah čtyrúhelníka, jakož i poloměr kružnice opsané.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Bedřich Novák*, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech.)

Strany čtyrúhelníka vypočítáme z rovnic

$$a + c = 89$$
$$b + d = 91$$

$$(a + b) - (c + d) = 10$$
$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

Z prvních tří rovnic vyjádříme

$$c = 89 - a, \quad b = 95 - a, \quad d = a - 4,$$

načež dosazením do rovnice čtvrté nalezneme

$$a = 56, \quad b = 39, \quad c = 33, \quad d = 52.$$

Dle známých vzorců ustanovíme pak úhlopříčky

$$n = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}} = 60,$$

$$m = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}} = 64{\cdot}6,$$

obsah čtyrúhelníka

$$P = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)} = 1938;$$

poloměr kružnice opsané

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}} = 32{\cdot}5.$$

Úloha 9.

a) Bod o v rovině má od vrcholů pravoúhlého trojúhelníka abc vzdálenosti

$$\overline{oa} = x,\ \overline{ob} = y,\ \overline{oc} = z.$$

Které podmínce činí zadost tyto vzdálenosti, jsou-li odvěsny trojúhelníka

$$\overline{ca} = b,\ \overline{cb} = a?$$

b) Je-li

$$a = \sqrt{3},\ b = \sqrt{6},\ x = \sqrt{13},\ y = \sqrt{10},$$

vypočítati jest z.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *F. Vitáček,* stud. VIII. tř. g. v Klatovech.)

a) Označme

$$\sphericalangle\, aco = \alpha,$$

potom jest

$$x^2 = b^2 + z^2 - 2bz \cos\alpha$$
$$y^2 = a^2 + z^2 - 2az \sin\alpha.$$

Žádanou podmínku obdržíme, vyloučíce z rovnic těchto úhel α. Jelikož

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + z^2 - x^2}{2bz},\quad \sin\alpha = \frac{a^2 + z^2 - y^2}{2az},$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

jest žádaná podmínka

$$\left(\frac{b^2 + z^2 - x^2}{2bz}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + z^2 - y^2}{2az}\right)^2 = 1$$

čili

$$a^2(b^2 + z^2 - x^2)^2 + b^2(a^2 + z^2 - y^2)^2 = 4a^2b^2z^2.$$

b) Podmínka tato při daných hodnotách přechází v rovnici

$$(z^2 - 7)^2 = 8z^2$$

čili

$$z^4 - 22z^2 + 49 = 0,$$

z níž ustanovíme

$$z = \pm\sqrt{11 \pm \sqrt{72}} = \pm(3 \pm \sqrt{2}).$$

Hledíme-li toliko k hodnotám kladným, obdržíme

$$z_1 = 3 + \sqrt{2},\quad z_2 = 3 - \sqrt{2}.$$

Poznámka redakce.

Řešíme-li hořejší rovnici dle z^2, nalezneme

$$z^2 = \frac{1}{c^2}(a^2x^2 + b^2y^2 \pm \sqrt{\mathrm{D}});$$

při tom značí $c^2 = a^2 + b^2$ čtverec přepony daného trojúhelníka, D pak jest diskriminant

$$\mathrm{D} = (a^2x^2 + b^2y^2)^2 - c^2[a^2x^4 + b^2y^4 - 2a^2b^2(x^2 + y^2) + a^2b^2c^2].$$

Náležitým upravením lze výrazu tomuto dáti podobu

$$\begin{aligned}\mathrm{D} &= a^2b^2(x + y + c)(x + y - c)(x - y + c)(-x + y + c)\\ &= 16a^2b^2\Delta^2,\end{aligned}$$

kdež Δ označuje obsah trojúhelníka ze stran x, y, c.

Jest potom

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = \pm 4ab\Delta.$$

Úloha 10.

Do válce kruhového vepsána koule dotýkající se základny i obliny jeho. Který úhel tvoří se základnou válce tečná rovina koule, odtíná-li od válce část rovnou n-násobnému obsahu koule?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Felix Vyskočil*, stud. VII. tř. real. v Ječné ul. v Praze.)

Užijme tohoto označení: poloměr válce budiž r, délka osy jeho mezi základnou a řezem budiž v, rovina tečná ke kouli a sečná k válci tvoří se základnou tohoto úhel α. Potom jest obsah válce

$$\mathrm{V} = \pi r^2 v = \pi r^3 \frac{1 + \cos\alpha}{\cos\alpha}.$$

Dle podmínky v úloze vyslovené jest

$$\pi r^3 \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = n \,.\, \frac{4}{3}\pi r^3,$$

tudíž

$$\cos\alpha = \frac{3}{4n-3}.$$

Při tom

$$v = r\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}nr.$$

Průsečnice roviny dané se základnou má od středu této vzdálenost

$$u = v \operatorname{cotg}\alpha = r \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

$$u = r\sqrt{\frac{2n}{2n-3}}.$$

Je-li na př. $n = 2$, dojdeme výsledků

$$\cos\alpha = \frac{3}{5},\quad v = \frac{8}{3}r,\quad u = 2r.$$

Úloha 11.

Na průměru $\overline{ab}$ sestrojena polokružnice K a k ní v bodě b tečna T. Vésti bodem a sečnu protínající K v bodě c a T v bodě d tak, aby otočí-li se celý tento útvar kolem osy $\overline{ab}$, úseč na tetivě $\overline{ac}$ vytvořila těleso téhož obsahu jako je těleso vzniklé otočením se plochy omezené úsečkami $\overline{bd}$, $\overline{cd}$ a obloukem $\widehat{bc}$.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Vajgl,* stud. VII. tř. g. v Brně.)

Budiž A obsah tělesa vytvořeného otočením se úseče, B obsah tělesa druhého.

Značíme-li

$$\overline{ab} = 2r\,,\quad \overline{bd} = \mathrm{R}\,,\quad \sphericalangle\, bac = \alpha,$$

máme vztah

$$\mathrm{B} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{R}^2 \,.\, 2r - \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \mathrm{A}\right);$$

ježto má býti $A = B$, přechází tato rovnice v podmínku

$$\frac{1}{3}\pi R^2 . 2r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

čili

$$R^2 = 2r^2.$$

Poněvadž jest

$$R = 2r \operatorname{tg} \alpha,$$

musí úhel α vyhověti rovnici

$$2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$$

a jest tedy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Poznámka. Žádanou sečnu lze takto sestrojiti: Veďme poloměr $oc \perp ab$ a přenesme $bc = bd$. Nebo prodlužme průměr $\overline{ab}$ o délku $\overline{bf} = r$; kružnice na průměru $\overline{af} = 3r$ seče tečnu T v bodě hledaném d. Aneb veďme v kružnici K poloměr $\overline{og}$ v úhlu $bog = 45^0$, učiňme $oh \perp ab$, $gh \parallel ab$; $\overline{ah}$ stanoví hledanou sečnu. Konstrukce tyto čtenář snadně odůvodní.

Úloha 12.

Která jest pravděpodobnost, že polopaprsek vycházející z bodu s dopadá na povrch koule středu o, je-li $\overline{os} = v = 17$ a poloměr koule $r = 8$?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Lang*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Opíšeme-li z bodu s dotyčný kužel ke kouli dané, tedy všechny polopaprsky obsažené uvnitř tohoto kužele dopadají na povrch dané koule. Poměr jich množství ku množství všech polopaprsků z bodu s vycházejících jest hledaná pravděpodobnost. Poměr ten lze vyjádřiti hodnotou

$$P = V : K,$$

kdež K značí povrch koule o středu s a poloměru $\varrho = \sqrt{v^2 - r^2}$, V pak vrchlík této koule obsažený uvnitř koule dané. Výška tohoto vrchlíku jest

$$u = \frac{r^2}{v} - (v - \varrho) = \varrho - \frac{\varrho^2}{v}$$

a proto pravděpodobnost

$$P = 2\pi\varrho u : 4\pi\varrho^2 = u : 2\varrho$$

čili

$$P = \frac{v - \varrho}{2v}.$$

Při daných hodnotách číselných jest

$$P = \frac{1}{17}.$$

Úloha 13.

Bodem (1·5, 3) stanoviti přímku, jejíž úseky na osách souřadných mají součet 10.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Julius Pollák*, stud. VII. tř. real. v Jičíně.)

Rovnice libovolné přímky jdoucí daným bodem jest

$$y - 3 = A\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

čili

$$2Ax - 2y = 3A - 6.$$

Úseky této přímky na osách souřadných vyjadřují se

$$a = \frac{3A - 6}{2A}, \quad b = \frac{3A - 6}{-2}.$$

Podmínka úlohy jest $a + b = 10$ čili dle výrazů předcházejících

$$\frac{3A - 6}{2A} - \frac{3A - 6}{2} = 10.$$

Odtud jde rovnice kvadratická

$$3A^2 + 11A + 6 = 0,$$

z níž vypočítáme směrnici A dvěma hodnotami

$$A = \frac{-11 \pm 7}{6},$$

$$A_1 = -\frac{2}{3}, \quad A_2 = -3.$$

Při A_1 obdržíme přímku P_1 rovnicí

$$y - 3 = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

čili

$$P_1 \equiv 2x + 3y - 12 = 0;$$

úseky této přímky na osách jsou

$$a_1 = 6, \quad b_1 = 4; \quad a_1 + b_1 = 10.$$

Směrnice A_2 náleží přímce P_2, jejíž rovnice jest

$$y - 3 = -3\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

čili

$$P_2 \equiv 6x + 2y - 15 = 0;$$

přímka tato má úseky osové

$$a_2 = \frac{5}{2}, \quad b_2 = \frac{15}{2}; \quad a_2 + b_2 = 10.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Vojtěch Prokeš,* stud. VII. tř. g. na Smíchově.)

Rovnice hledané přímky ve tvaru úsekovém budiž

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

K určení úseků a, b slouží podmínečné rovnice

$$a + b = 10,$$

$$\frac{3}{2a} + \frac{3}{b} = 1;$$

vyloučíce b obdržíme

$$\frac{3}{2a} + \frac{3}{10 - a} = 1$$

čili

$$2a^2 - 17a + 30 = 0.$$

Odtud ustanovíme

$$a = \frac{17 \pm 7}{4}, \quad b = \frac{23 \mp 7}{4}$$

Úloha 14.

Stanoviti kružnici K_2 souměrnou s kružnicí

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 12x - 26y + 180 = 0$$

dle přímky

$$P \equiv x + 3y - 30 = 0;$$

vyšetřiti pak průsečíky a úhel obou kružnic. Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *R. Bartoš*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Rovnici kružnice K_1 lze psáti ve tvaru normalním

$$(x - 6)^2 + (y - 13)^2 = 25.$$

Střed s_1 této kružnice má od přímky P vzdálenost

$$v = -\frac{x_1 + 3y_1 - 30}{\sqrt{10}},$$

kdež x_1, y_1 značí souřadnice středu s_1

$$x_1 = 6, \; y_1 = 13;$$

jest tedy
$$v = -\frac{15}{\sqrt{10}}.$$

Kružnice K_2 souměrná s K_1 dle přímky P bude míti rovnici

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = 25,$$

v níž x_2, y_2 jsou souřadnice středu s_2.

Střed tento ustanovíme jakožto průsečík přímky N vedené bodem s_1 kolmo ku P a přímky M || P u vzdálenosti $-v$.

Rovnice přímek těchto jsou:

$$N \equiv y - 13 - 3(x - 6) = 0$$

$$M \equiv \frac{x + 3y - 30}{\sqrt{10}} + \frac{15}{\sqrt{10}} = 0$$

čili

$$N \equiv 3x - y - 5 = 0$$
$$M \equiv x + 3y - 15 = 0;$$

průsečík jejich bod s_2 má souřadnice

$$x_2 = 3, \ y_2 = 4.$$

Jest tedy rovnice kruhu K_2 tato

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

čili

$$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$$

Průsečíky obou kružnic náleží též přímce P; nejpohodlněji vypočítáme je z rovnic čar P a K_2. Vyloučíce x dojdeme k rovnici

$$(30 - 3y)^2 + y^2 - 6(30 - 3y) - 8y = 0,$$
$$y^2 - 17y + 72 = 0;$$

odtud najdeme

$$y' = 8, \ y'' = 9$$

a k tomu $\quad x' = 6, \ x'' = 3.$

Směrnice tečen sestrojených v bodě (8, 6) k daným kružnicím jsou

$$A_1 = -\frac{x' - x_1}{y' - y_1} = 0, \ A_2 = -\frac{x' - x_2}{y' - y_2} = -\frac{3}{4};$$

úhel obou kružnic stanoví vzorec

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A_1 - A_2}{1 + A_1 A_2},$$

z něhož plyne

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{3}{4}.$$

Úloha 15.

Stanoviti kružnici, která jest stejně vzdálena od bodů

$$a\left(6\frac{1}{4}, -1\right), \quad b\left(5, 2\frac{3}{4}\right),$$
$$c\left(0, 5\frac{1}{4}\right), \quad d\left(-3, 1\frac{1}{4}\right).$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Ignát Velísek*, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti.)

Dány-li 4 body v obecné poloze, nelze stanoviti kružnici stejně od nich vzdálenou tak, aby všechny ležely na téže její straně, t. j. buď všechny vně aneb všechny uvnitř.

Lze však sestrojiti kružnici ve stejné vzdálenosti ode všech tak, že 3 body leží na jedné straně a 1 na druhé straně této kružnice aneb 2 body na jedné straně a 2 na druhé.

Případu prvnímu lze vyhověti takto:

Třemi z daných bodů položme kružnici K a sestrojme pak soustřednou k ní kružnici L, která jest od ní a od bodu čtvrtého stejně vzdálena. Tak obdržíme kružnice

$$K_{abc},\ K_{abd},\ K_{acd},\ K_{bcd}$$

a příslušné k nim kružnice

$$L_{abc,\,d},\ L_{abd,\,c},\ L_{acd,\,b},\ L_{bcd,\,a}.$$

Ve druhém případě sestrojme body a, b a c, d kružnice soustředné K_{ab}, K_{cd}; potom lze stanoviti soustřednou s nimi a od obou stejně vzdálenou kružnici $L_{ab,\,cd}$; podobně sestrojme $L_{ac,\,bd}$, $L_{ad,\,bc}$. Každá z kružnic L jest stejně vzdálena ode všech čtyř bodů; pročež úloha daná má v obecném případě 7 řešení.

Abychom vypočítali souřadnice středů a poloměry kružnic hledaných v číselném příkladě daném, ustanovme nejprve směrnice a středy úseček *ab, ac, ad, bc, bd, cd,* z toho pak rovnice jich os souměrnosti. Výsledek počtu bude tento:

Úsečka	Směrnice	Střed	Osa
ab	-3	$\frac{45}{8},\ \frac{7}{8}$	$x-3y-3=0$
ac	-1	$\frac{25}{8},\ \frac{17}{8}$	$x-y-1=0$
ad	$-\frac{9}{37}$	$\frac{13}{8},\ \frac{1}{8}$	$37x-9y-59=0$
bc	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2},\ 4$	$2x-y-1=0$
bd	$\frac{3}{16}$	$1,\ 2$	$16x+3y-22=0$
cd	$\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{2},\ \frac{13}{4}$	$6x+8y-17=0.$

Osy úseček ab, ac, bc protínají se v bodě $s\,(0, -1)$, kterýž jest středem kružnice K_{abc} i $L_{abc,\,d}$; poloměr kružnice K jest

$$\varrho = sa = \sqrt{\left(6\frac{1}{4}\right)^2 + 0^2} = \frac{25}{4}$$

a poloměr kružnice L

$$r = \frac{sa + sd}{2} = \frac{25}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + \left(2\frac{1}{4}\right)^2} = 5\,.$$

Jest tudíž rovnice křivky $L_{abc;\,d}$ tato:

$$x^2 + (y+1)^2 = 25.$$

Body a, b, c leží vně této kružnice, bod d uvnitř, všechny ve stejné od kružnice vzdálenosti. Podobně bychom obdrželi středy kružnic

$$K_{abd}\left(\frac{25}{17}, -\frac{26}{51}\right),\ K_{acd}\left(\frac{25}{14}, \frac{11}{14}\right),\ K_{bcd}\left(\frac{25}{22}, \frac{14}{11}\right);$$

poloměry těchto kružnic neměly by však hodnot jednoduchých.

Vyšetřme ještě některou z kružnic druhé skupiny. Osy úseček ad, bc protínají se v bodě $t\left(\frac{50}{19}, \frac{81}{19}\right)$, kterýž jest středem kružnic K_{ad}, K_{bc} a $L_{ad,\,bc}$; poloměry prvních dvou kružnic jsou

$$\varrho_1 = ta = td = \frac{25}{76}\sqrt{377}\,,\ \varrho_2 = tb = tc = \frac{25}{76}\sqrt{73}$$

a tedy poloměr kružnice $L_{ad,\,bc}$ jest

$$r' = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = \frac{25}{152}\left(\sqrt{377} + \sqrt{73}\right) = 4{\cdot}16\ldots.$$

Středy kružnic ostatních dvou jsou

$$L_{ab,\,cd}\left(\frac{75}{26}, -\frac{1}{26}\right) \text{ a } L_{ac,\,bd}\left(\frac{25}{19}, \frac{6}{19}\right).$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Ferd. Šob,* stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Má-li kružnice poloměr r a bod od středu jejího vzdálenost v (kladnou), jest nejkratší vzdálenost bodu toho od kružnice dána výrazem

$$\pm (v - r);$$

znaménko $\pm$ závisí od toho, leží-li bod vně neb uvnitř kružnice.

Budiž r poloměr kružnice úlohou hledané; v_1, v_2, v_3, v_4 vzdálenosti bodů daných od středu kružnice. Úloha žádá, aby bylo

$$\pm (v_1 - r) = \pm (v_2 - r) = \pm (v_3 - r) = \pm (v_4 - r).$$

Znaménka $\pm$ lze kombinovati na $2^4 = 16$ způsobů, z nichž dva a dva vedou k témuž výsledku; proto zbylo by uvažovati celkem těchto 8 kombinací:

$$++++,\ +++-,\ ++-+,\ +-++,\ -+++,$$
$$++--,\ +-+-,\ +--+.$$

Jsou-li p, q souřadnice středu kružnice hledané, jest obecně

$$v = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}.$$

Kdybychom uvažovali první kombinaci znamének ($++++$ aneb $----$), došli bychom tří rovnic

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4,$$

v nichž jsou jen dvě neznámé p, q; úloha jest v tomto případě přeurčitá a obecně nemožná. Jdeť tu o to, stanoviti kružnici stejně vzdálenou od čtyř bodů, kteréž všechny mají býti buď vně neb všechny vnitř kružnice; úlohu lze patrně jen tenkráte řešiti, leží-li dané body na určité kružnici. Toho v daném příkladě číselném není.

Hledejme tedy kružnici $L_{abc,\,d}$, která má stejnou vzdálenost od daných bodů, z nichž a, b, c by ležely uvnitř a bod d vně aneb naopak.

Případ ten zahrnut jest sestavou znamének $+++-$ aneb $---+$ a vede k rovnicím

$$v_1 - r = v_2 - r = v_3 - r = r - v_4.$$

Z těchto dvě, totiž $v_1 = v_2 = v_3$, poslouží k určení středu s kružnice žádané.

Lze totiž rovnice tyto psáti v podobě

$$\left(6\frac{1}{4}-p\right)^2+(1+q)^2=(5-p)^2+\left(2\frac{3}{4}-q\right)^2$$
$$=(0-p)^2+\left(5\frac{1}{4}-q\right)^2$$

čili po náležitém zjednodušení

$$\begin{aligned} p-3q&=3\\ 2p-\ \ q&=1\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne $p=0$, $q=-1$, načež poloměr kružnice ustanovíme z rovnice

$$r=\frac{v_3+v_4}{2};$$

při tom jest

$$v_3=\sqrt{(x_3-p)^2+(y_3-q)^2}=\sqrt{0^2+\left(6\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{25}{4}$$

$$v_4=\sqrt{(x_4-p)^2+(y_4\ \ q)^2}=\sqrt{3^2+\left(2\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{15}{4}$$

a tedy

$$r=\frac{25+15}{8}=5\,.$$

Chceme-li podobným způsobem vyšetřiti kružnici $L_{ad,\,bc}$, máme kombinaci $+--+$ vedoucí k rovnicím

$$v_1-r=v_4-r\,,\ v_2-r=v_3-r\,,\ v_1-r=-(v_2-r)$$

čili

$$v_1=v_4\,,\ v_2=v_3$$
$$r=\frac{v_1+v_2}{2}\,.$$

První dvě z těchto rovnic poskytují k určení středu *t* vztahy

$$\left(\frac{25}{4}-p\right)^2+(1+q)^2=(3+p)^2+\left(\frac{5}{4}-q\right)^2$$

$$(5-p)^2+\left(\frac{11}{4}-q\right)^2=p^2+\left(\frac{21}{4}-q\right)^2$$

čili

$$37p - 9q = 59$$
$$2p - q = 1,$$

z nichž vypočítáme jako způsobem prvním

$$p = \frac{50}{19}, \quad q = \frac{81}{19}.$$

Hodnoty v_1 a v_2 jsou totožny s hodnotami ϱ_1 a ϱ_2 první methodou ustanovenými; proto obdržíme i tutéž hodnotu poloměru r pro kružnici $L_{ad,\, bc}$.

Úloha 16.

Vyšetřiti podmínku, aby spojnice bodů

$$m\,(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha), \qquad n\,(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$$

procházela ohniskem ellipsy

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *H. Žížala*, stud. VIII. tř. g. v Příbrami.)

Podmínka, aby body dané a ohnisko $(e, 0)$ ležely v jedné přímce, jest

$$\begin{vmatrix} a\cos\alpha, & b\sin\alpha, & 1 \\ a\cos\beta, & b\sin\beta, & 1 \\ e, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Vyčíslíme-li determinant a zkrátíme rovnici činitelem b, nabude podoby

$$a\sin(\alpha - \beta) - e(\sin\alpha - \sin\beta) = 0.$$

I tuto rovnici ještě lze zjednodušiti.

Klademe-li

$$\frac{e}{a} = \varepsilon,$$

jest ε číselnou výstředností ellipsy, a podmínku lze psáti

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha - \sin\beta} = \varepsilon$$

čili
$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \varepsilon.$$

Úloha 17.

Najděte součet čísel mezi 1000 a 2000, která nejsou dělitelna ani 2ma ani 5ti.

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Jiruška* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Součet čísel lichých mezi 1000 a 2000 jest
$$1001 + 1003 + 1005 + \ldots + 1999 = \frac{500}{2}(1001 + 1999)$$
$$= 750000.$$

Součet čísel dělitelných 5 jest
$$1005 + 1010 + \ldots + 2000 = \frac{100}{2}(1005 + 1995) = 150000.$$

Žádaný součet jest tedy
$$750000 - 150000 = 600000.$$

Úloha 18.

Mezi čísla 3 a 18 vložte dvě čísla, aby z těchto čtyř čísel první tři tvořila řadu geometrickou, poslední tři řadu arithmetickou.

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Fr. Hrubý*, stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové.)

Žádaná čtyři čísla jsou
$$3,\ 3q,\ 3q^2,\ 18.$$

Aby poslední tři náležela posloupnosti arithmetické, jest třeba podmínky
$$3q^2 - 3q = 18 - 3q^2,$$
z níž plyne kvadratická rovnice
$$2q^2 - q - 6 = 0$$

mající kořeny

$$q_1 = 2,\; q_2 = -\frac{3}{2}.$$

Jest tedy žádané skupení čísel buď

$$3,\; 6,\; 12,\; 18$$

aneb

$$3,\; -\frac{9}{2},\; \frac{27}{4},\; 18.$$

Úloha 19.

Sečtěte

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2.$$

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Navrátil*, stud. VII. tř. gymn. v Uh. Hradišti.)

Sečteme-li řadu rovnic

$$\begin{aligned} 100^2 - 99^2 &= (100 + 99)(100 - 99) = 100 + 99 \\ 98^2 - 97^2 &= (\ 98 + 97)(\ 98 - 97) = \ 98 + 97 \\ 96^2 - 95^2 &= (\ 96 + 95)(\ 96 - 95) = \ 96 + 95 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

obdržíme

$$\begin{aligned} &100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2 \\ &= 100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 2 + 1. \end{aligned}$$

Jest tedy hodnota dané řady

$$50 \,.\, 101 = 5050.$$

Úloha 20.

Sečtěte n členů řady

$$3 + 33 + 333 + 3333 + \ldots.$$

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *František Bystřický*, stud. VI. tř. r. v Plzni.)

Jelikož jest

$$3 = \frac{3(10^1 - 1)}{10 - 1}$$

$$33 = \frac{3(10^2 - 1)}{10 - 1}$$

$$333 = \frac{3(10^3 - 1)}{10 - 1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

má žádaný součet hodnotu

$$s_n = \frac{3}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - \frac{1}{3}n$$

čili

$$s_n = \frac{1}{3}\,\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - \frac{n}{3}$$

$$s_n = \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}.$$

Úloha 21.

Kolik let jest osobě, jejíž stáří rovná se letos součtu číslic onoho roku, ve kterém se narodila?

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Jiří Šír*, stud. V. tř. r. v Novém Městě na Moravě.)

Máme za to, že osoba není přes 98 r. stará, pak její stáří lze vyjádřiti výrazem

$$1898 - (1800 + 10x + y)$$

a taktéž

$$1 + 8 + x + y,$$

takže

$$98 - 10x - y = 9 + x + y$$

čili

$$y = \frac{89 - 11x}{2}.$$

A poněvadž x a y mohou býti jen kladná čísla jednociferná, lze za x dosaditi jen 7, načež $y = 6$.

Osoba narodila se v roce 1876.

Úloha 22.

V nějakém městě umírá ročně $\frac{1}{90}$ obyvatelstva, jež bylo na počátku roku; $\frac{1}{60}$ téhož obyvatelstva ročně se narodí. Za kolik roků se zdvojnásobí obyvatelstvo tohoto města?

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Jindř. Barvík*, stud. VI. tř. g. v Opavě.)

Je-li p počet obyvatelstva na začátku 1. roku, p_1, p_2 a p_3 na konci 1., 2. a 3. roku, pak jest

$$p_1 = p + \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{90}\right) p = p + \frac{p}{180} = \frac{181}{180} p$$

$$p_2 = \frac{181}{180} p_1 = \left(\frac{181}{180}\right)^2 p$$

$$p_3 = \left(\frac{181}{180}\right)^3 p \text{ atd.}$$

Je-li x počet hledaných roků, potom

$$\left(\frac{181}{180}\right)^x p = 2p$$

čili

$$\left(\frac{181}{180}\right)^x = 2.$$

Odtud ustanovíme

$$x (\log 181 - \log 180) = \log 2$$
$$x = 125{\cdot}06.$$

Počet obyvatelstva zdvojnásobí se tedy po 125 letech.

Uloha 23.

Dokázati, že pro m a n mající stejná označení jest

$$\sqrt{2m^2 + 2n^2 + 12mn} - 2\sqrt{mn} \geqq m + n.$$

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Řešení. (Zaslal p. *Jos. Toman*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.)

Pro každé realné a, b jest
$$a^2 + b^2 \geqq 2ab;$$
položíme-li
$$a = m + n, \quad b = 2\sqrt{mn},$$
jest tedy
$$(m + n)^2 + 4mn \geqq 4(m + n)\sqrt{mn}.$$

Přičteme-li k nerovnici této identitu
$$(m + n)^2 + 4mn = (m + n)^2 + 4mn,$$
obdržíme
$$2(m + n)^2 + 8mn \geqq (m + n + 2\sqrt{mn})^2;$$
odmocníce nalezneme
$$\sqrt{2m^2 + 2n^2 + 12mn} \geqq m + n + 2\sqrt{mn},$$
což shoduje se s relací, kterou bylo dokázati.

Úloha 24.

Dokázati, že pro realná x v počtu n jest
$$n \Sigma x^2 \geqq (\Sigma x)^2.$$

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Řešení. (Zaslal p. *F Vitáček*, stud. VIII. tř. g. v Klatovech.)

Máme-li veličiny realné
$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,$$
jest
$$x_1^2 + x_2^2 \geqq 2x_1 x_2$$
$$x_1^2 + x_3^2 \geqq 2x_1 x_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1}^2 + x_n^2 \geqq 2x_{n-1} x^n.$$

Sečteme-li tyto výrazy, vztahujíce je na kombinace všech x, obdržíme
$$(n - 1)\Sigma x^2 \geqq 2\Sigma xx.$$

Jelikož však
$$2\Sigma xx = (\Sigma x)^2 - \Sigma x^2,$$

přechází předešlý vztah ve

$$n\,\Sigma\, x^2 \geqq (\Sigma\, x)^2,$$

jak bylo dokázati.

Úloha 25.

Do trojúhelníka abc vepsati jest trojúhelník $a'b'c'$ tak, aby bylo

$$ab' = ac',\; bc' = ba',\; ca' = cb'.$$

Jsou-li α, β, γ úhly trojúhelníka abc, kterou velikost mají úhly trojúhelníka $a'b'c'$? (Vrchol a' leží ve straně bc, b' v ca, c' v ab). Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Mikyna,* stud. V. tř. g. v Králové Dvoře.)

Body a', b', c' jsou patrně dotyčné body stran trojúhelníka abc s kružnicí tomuto trojúhelníku vepsanou.

Značíme-li úhly v trojúhelníku $a'b'c'$ písmeny α', β', γ', jsou úhly tyto obvodovými v kružnici řečené a proto

$$\alpha' = \frac{2R - \alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$\beta' = \frac{2R - \beta}{2} = \frac{\gamma + \alpha}{2}$$

$$\gamma' = \frac{2R - \gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Úloha 26.

Nad stranami trojúhelníka abc sestrojeny vně trojúhelníka abc trojúhelníky rovnostranné abc', bca', cab'. Dokažte, že

a) spojnice aa', bb', cc' jsou stejné,

b) protínají se v jediném bodě,

c) tvoří pravidelný svazek trojpaprskový.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Truhlář,* stud. VIII. tř. gymn. v Brně.)

Veďme spojnice aa', bb', cc'. Jelikož jest

$$\triangle\, aa'c \cong \triangle\, bb'c,$$

jest

$$aa' = bb';$$

z podobného důvodu jest

$$aa' = cc'$$

a tedy vůbec

$$aa' = bb' = cc'.$$

Otočíme-li trojúhelník $bb'c$ kolem c o 60^0 ve smyslu příslušném, sjednotí se s trojúhelníkem $aa'c$; proto strany stejnolehlé aa', bb' tvoří spolu též úhel 60^0. Rovněž tak aa', cc', jakož i bb', cc'. Protínají-li se spojnice aa', bb' v bodě o, jest

$$\sphericalangle a'cb = \sphericalangle a'ob = 60^0,$$

pročež čtyrúhelníku $a'boc$ lze opsati kružnici; tudíž také

$$\sphericalangle a'oc = \sphericalangle a'bc = 60^0.$$

Přímka oc tvoří tedy s aa' i s bb' úhly 60^0, pročež sjednocuje se se spojnicí cc', o níž dříve totéž stvrzeno.

Všechny tři spojnice aa', bb', cc' jsou tudíž bodem o a tvoří pravidelný svazek trojpaprskový.

Úloha 27.

Dokázati jest vztahy úlohy předešlé pro případ, když vrcholy a,a' leží na téže straně přímky bc, vrcholy b,b' na téže straně přímky ca, vrcholy c,c' na téže straně přímky ab.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Brix*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Důkaz v úloze 26. podaný zůstává i zde v plné platnosti, třeba obrazec větu znázorňující nabývá jiné podoby. Spojnice protějších vrcholů jest prodloužiti než setkají se ve společném bodě o.

Poznámka. Úlohy 26. a 27. poskytují základ k pěknému řešení úlohy: Třemi danými body položiti tři paprsky tvořící pravidelný svazek.

Úloha 28.

V trojúhelníku rovnoramenném budiž $BC = 2a$ podstavou, $AD = v$ výškou.

Učiňme $AE = v - a$ *na* AB,
$AF = v + a$ *na* AC;

dokázati jest, že příčka EF tvoří s podstavou BC úhel 45°.

Prof. *V. Jeřábek.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Liška*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Na výšce AD učiňme $AG = AE = v - a$, veďme přímku CG, a budiž H průsečíkem této přímky s ramenem AB. Považujeme-li CH za příčku trojúhelníka ABD, bude dle věty Menelaovy

$$\frac{AH}{BH} \cdot \frac{BC}{DC} \cdot \frac{DG}{AG} = 1,$$

a ježto

$$DC = DG,$$

jest

$$\frac{AH}{BH} \cdot \frac{BC}{AG} = 1$$

čili

$$\frac{AH}{HB} = \frac{v-a}{2a},$$

pročež

$$\frac{AH}{AB} = \frac{v-a}{v+a}$$

aneb

$$\frac{AH}{AC} = \frac{v-a}{v+a}.$$

Avšak

$$\frac{AE}{AF} = \frac{v-a}{v+a},$$

tedy

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AH}{AC}.$$

Z úměry poslední vysvítá, že příčka FF || HC, a protože CH tvoří s BC úhel 45°, jest též úhel příčkou EF a podstavou BC sevřený 45°.

Úloha 29.

Sestrojiti čtyřúhelník ABCD, jsou-li dány jeho strany AB BC, CD, úhlopříčka AC a délka příčky EF, která spojuje středy E, F úhlopříček AC, BD. Prof. *V. Jeřábek.*

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Ehrenberger*, stud. V. tř. real, v Novém Městě na Moravě.)

Trojúhelník ABC lze z daných částek AB, BC a AC sestrojiti, tím jest i poloha středu E v úhlopříčce AC stanovena. Jde tudíž o sestrojení vrcholu D. Ježto délka příčky FF jest dána, jest kružnice (F) ze středu E poloměrem EF sestrojená geom. místem bodu F. Z téhož důvodu jest geom. místem vrcholu D kružnice K, sestrojená ze středu C poloměrem CD. Najdeme-li ještě jedno geom. místo pro vrchol D, bude vrchol D určen průsekem dvou míst geometrických. Majíce na mysli podmínku, že $BF = \frac{1}{2} BD$ a že B jest vrcholem známým, poznáváme, že druhým geom. místem vrcholu D bude kružnice (D) podobně položená s kružnicí (F) dle bodu podobnosti (D) a poměru $BF : BD = 1 : 2$. Střed G kružnice (D) jest dle středu E souměrně sdružen s vrcholem B a poloměr GD rovná se průměru kružnice (F).

Sestrojení: Narýsujme napřed trojúhelník ABC, potom ze středu E strany AC poloměrem daným EF kružnici (F) a ze středu C poloměrem CD kružnici K. Sestrojme k vrcholu E souměrně sdružený bod G dle středu E, potom kružnice (D), jejímž středem jest G a poloměrem $GD = 2\,EF$, protne kružnici K v hledaném vrcholu D.

Důkaz. Že čtyřúhelník ABCD obsahuje strany AB, BC a CD a úhlopříčku AC, jest z konstrukce patrno. Zbývá tudíž dokázati, že příčka EF spojující středy E, F úhlopříček AC a BD, jest délky dané. Dle sestrojení jest

$$BE : BG = 1 : 2$$

a protože F je středem úhlopříčky BD, platí úměra

$$BF : BD = 1 : 2,$$

tedy

$$BE : BG = BF : BD,$$

pročež jest příčka EF rovnoběžna s GD,

$$EF : GD = 1 : 2,$$

a ježto GD rovná se dvojnásobné délce dané, jest EF rovno dané délce.

Omezení. Protínají-li se kružnice K a (D), má úloha dvojí řešení, dotýkají-li se K a (D), vyhovuje úloze toliko jeden čtyřúhelník, a nemají-li K a (D) žádný bod společný, jest úloha nemožná.

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Bartoš Rudolf, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 8., 10. až 14.

Barvík Jindřich, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 1., 6., 7., 8., 11., 17., 18., 19., 21., 22., 25. až 28.

Brechler Karel, stud. VII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 1., 5.

Brinkmann Emerich, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 8., 10. až 14., 17., 18., 19., 21., 22., 25., 29.

Brix František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 11., 13., 15., 17., 18., 19., 21., 22., 23., 25. až 29.

Brix Frant. Jan, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 4., 6., 7., 8., 10. až 13.

Brož R., stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1., 13.

Bystřický František, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1., 4., 18., 20., 21.

Čech Robert, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1., 7.

Drastich Frant., stud. VI. tř. g. v Opavě, úl. 25.

Dvořák B., stud. V. tř. r. v Budějovicích, úl. 2.

Ehrenberger Adolf, stud. V. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 17., 19., 21., 25., 26., 29.

Fleischer Otakar, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 7.

Fojtl Arnošt, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1., 2., 4., 5., 13.

Hájek Emanuel, učitel v Kloboukách u Brna, úl. 1., 2., 6., 7.

Hájek Emanuel, stud. VI. tř. g. v Budějovicích, úl. 1., 4., 5., 7., 8.

Holzmann Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 29.
Hrubý František, stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1., 4., 5., 8., 13., 17. až 22.
Janďourek Václav, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 16.
Jiruška František, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 4., 6., 7., 10. až 13., 17., 22., 25., 28., 29.
Kálal Josef, stud. V. tř. r. v Písku, úl. 18., 19., 21., 22.
Kitzberger Eduard, stud. VIII. tř. g. v Domažlicích, úl. 1. až 4., 7., 8., 11., 12., 17., 18., 19., 21., 22., 26., 27., 28.
Knobloch Josef, stud. VIII. tř. g. v Plzni, úl. 1., 2., 3.
Kopecký Jindřich, stud. VII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 1., 2., 4., 5., 7., 17. až 22., 25.
Kroupa H., stud. V. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 21., 25.
Lang Jan, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 29.
Linhart Stanislav, stud. VII. tř. r. Pardubicích, úl. 1. až 15., 17. až 22., 25., 28., 29.
Matas Bohumil, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 2., 3., 4., 7., 8., 17. až 22., 25.
Mikyna Josef, stud. V. tř. r. v Králové Dvoře, úl. 6., 7., 8., 21., 25., 26.
Moos Jindřich, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 3., 4., 5.
Navrátil Frant., stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 1., 13., 18., 19.
Nejdl Karel, stud. VII. tř. g. v Klatovech, úl. 1., 18., 25.
Nováček Frant., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1., 2., 3., 7.
Novák Bedřich, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 21., 25., 28.
Pechánek Ant., stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 8., 11., 13.
Polák Otakar, stud. průmyslové školy v Praze, úl. 1.
Pollák Julius, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 2., 7., 13., 14., 17., 18., 19., 21., 22.
Porš Adolf, stud. VII. tř. g. v Truhlářské ulici v Praze, úl. 1., 13.
Procházka Frant., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 4. až 8., 17., 18., 19., 21., 22.

Prokeš Vojtěch, stud. VII. tř. g. na Smíchově, úl. 1. až 8., 11., 13., 14., 16. až 22.
Radouš Frant., stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 13.
Riessmüller Karel, stud. VI. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 11., 19., 26.
Schüller Jan, stud. VII. tř. g. v Chrudimi, úl. 1., 2., 4., 5., 17., 19., 21.
Spurný František, externista g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8., 13.
Ševčík Jindřich, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 2., 7., 8., 11., 13., 14., 16. až 22.
Šír Jiří, stud. V. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 2., 19., 21., 25., 29.
Šiška Karel, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 1. až 5.
Šob Ferdinand, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 29.
Šulhof Bernard, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 2., 3., 8., 11., 12.
Truhlář Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 22., 25. až 29.
Toman Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 23., 25. až 29.
Vajgl Jan, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 11., 13., 21., 25., 29.
Válka Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 5., 7.
Váňa Robert, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1., 7., 13.
Velísek Ignát, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 1. až 29.
Vitáček Frant., stud. VIII. tř. g. v Klatovech, úl. 1. až 29.
Vomela Frant., stud. V. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 21., 25.
Vondráček Otakar, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 4.
Vyskočil Felix, stud. VII. tř. r. v Ječné ul. v Praze, úl. 1. až 4., 10., 12., 17. až 22., 25., 26., 27., 29.
Zafouk Bedřich, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 1., 4., 13., 18., 21.
Zicha Frant., stud. V. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 18., 20., 21., 25.
Žížala H., stud. VII. tř. g. v Příbrami, úl. 1. až 5., 7., 8., 9., 11., 13., 14., 16. až 22., 25.

Osmotická theorie článků koncentračních. II.

Vykládá

Dr. O. Šulc v Praze.

V prvé stati*) výkladu theorie koncentračních článků na základě názoru o elektrolytické dissociaci elektrolytů rozpuštěných v neelektrolytech i názoru o volné pohyblivosti a osmotickém tlaku iontů byl podrobně vyvozen základní vzorec pro obnos elektromotorické síly π článku o elektrodách zvratných ve tvaru obecném

$$\pi = \frac{RT}{n_e \varepsilon_o} l \frac{C_1}{C_2},$$

i bylo též zevrubně vyloženo, že dle něho jest elektromotorická síla π funkcí poměru koncentrací iontů na elektrodách, kdež se ony koncentrace C_1 a C_2 vztahují buď

I. na nestejné koncentrace *látek ionty vysílajících*, aneb

II. na nestejné koncentrace *elektrolytu* obklopujícího elektrody.

Budiž v krátkosti znovu připomenuto, že při tom v základním vzorci značí:

R veličinu stálou ze zákona o plynech dokonalých,

T absolutní teplotu,

ε_o stálou veličinu ze zákona *Faradayova*, to jest $\varepsilon_o = 96540$ coulomb,

n_e posléze počet nábojů na jednom iontu soustředěných, tedy veličinu srovnalou s mocenstvím (valencí) iontů.

Případ prvý, kde veličiny C_1 a C_2 vztahují se na nestejné koncentrace iontů v elektrodách, byl v předešlé svrchu citované stati v hlavních rysech vyčerpán, potud totiž, pokud uvedeny

*) Viz „Časopis" str. 191.

hlavní typy článků do toho druhu spadajících i pokud na nich obecná platnost i úspěšnost osmotické theorie byla prokázána.

Stať přítomná podobným způsobem má obsáhnouti výklad o nejběžnějších tvarech koncentračních článků typu druhého, při čemž pro krátkost se bude lze v mnohém opírati o to, co ve stati prvé zevrubně už bylo vyloženo.

Články s nestejnou koncentrací iontů v elektrolytech.

1. Jak už bylo podotknuto, jest realisován případ pod II. uvedený nejjednodušeji tím, když dvě elektrody z téhož kovu ve styku jsou s dvěma nestejně koncentrovanými roztoky soli téhož kovu. Obecné schéma takového článku jest tudíž:

Kov	Roztok soli kovu koncentrovaný	Roztok soli kovu zředěný	Kov.

$$\longleftarrow$$

Z podmínek, kdy vzorec v čele uvedený platí pro tuto kombinaci v celé své jednoduchosti, budiž tu opakováno, že se předpokládá, že oba roztoky soli jsou ve skutečnosti značně zředěné, takže lze pro ně užiti úměrnosti jednoduché mezi tlakem osmotickým a elektrolytickým, a dále, že se zanedbává potenciálný rozdíl při styku obou nestejně zředěných roztoků soli kovové, poněvadž ve většině případů oproti elektromotorické síle celé kombinace jest velmi nepatrný.

Bude později ukázáno, pokud v praksi bývá splněna podmínka prvá, jakož i v čem spočívá význam podmínky druhé, načež bude možno velmi jednoduchými obraty vyvoditi vzorce úplnější, které zjednodušující ony podmínky nepředpokládají.

Držíce se však zatím naznačeného zjednodušení, aby určitého cos bylo na mysli, uvažujme případ konkretní, tedy na př. kombinaci

Ag	$AgNO_3$ roztok koncentrovaný	$AgNO_3$ roztok zředěný	*Ag*.

$$\longleftarrow$$

Při takovémto článku, kde elektroda vysílá kovové ionty kladně nabité v roztok, jde směr proudu *v článku* vždy od roztoku zředěnějšího ku koncentrovanějšímu (jak zde i nadále šipkou jest značeno) čili, jinak řečeno, stříbro ve zředěnějším roztoku jest kladné oproti stříbru v roztoku méně zředěném. Poněvadž elektrolytické tlaky kovu na obou elektrodách jsou stejné

$$P_1 = P_2$$

(dle dřívějšího označení) a koncentrace iontů v elektrolytu jsou úměrny tlakům osmotickým

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

lze pro tento druh článků psáti též

$$\pi = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0}\, l\, \frac{p_1}{p_2}.$$

Děj v článku spočívá v tom, že se stříbro ve zředěném roztoku z elektrody rozpouští, v koncentrovaném však na elektrodě vylučuje, což by trvalo tak dlouho, až by se koncentrace vyrovnaly. Že se stříbro z koncentrovanějšího roztoku musí vylučovati na elektrodě, jest již z té úvahy patrno, že proti tlaku elektrolytickému působí tam osmotický tlak iontů, který jest větší než tlak osmotický v roztoku zředěnějším.

Nejsou-li oba roztoky soli kovové tak dalece zředěny, že můžeme v nich předpokládati úplnou dissociaci v ionty, nutno zavésti jednoduchým způsobem opravu se zřetelem ku *stupni dissociace*. Jest-li dán na př. článek

$$\begin{array}{c|c|c|c} Ag & \begin{array}{c} AgNO_3 \\ {}^1/_{10}\text{-norm. roztok} \end{array} & \begin{array}{c} AgNO_3 \\ {}^1/_{100}\text{-norm. roztok} \end{array} & Ag, \\ & \multicolumn{2}{c}{\longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-} & \end{array}$$

tu při úplné dissociaci jest poměr osmotických tlaků týž, jako poměr koncentrací obou nestejně zředěných roztoků, tedy

$$\frac{p_1}{p_2} = 10$$

a elektromotorická síla při teplotě 18° jest

$$\pi = 0{\cdot}0002 \,.\, 291 \,.\, \lg 10$$

čili

$$\pi = 0{\cdot}058 \text{ volt.}$$

Ve skutečnosti však (při mírných zředěních) zředěním v poměru 1 : 10 nestoupne elektrolytická dissociace v témž poměru, nýbrž v poměru menším; při přechodu na př. od $^1/_{10}$-normálního roztoku dusičnanu stříbrnatého k roztoku $^1/_{100}$-normálnímu pouze v poměru 1 : 8·71, takže jest poměr osmotických tlaků

$$\frac{p_1}{p_2} = 8{\cdot}71$$

a elektromotorická síla

$$\pi = 0{\cdot}0002 \,.\, 291 \,.\, \lg 8{\cdot}71$$

čili

$$\pi = 0{\cdot}0547 \text{ volt.}$$

*W. Nernst**) nalezl experimentem $\pi = 0{\cdot}055$ volt, referent $\pi = 0{\cdot}052$ volt, shoda jest velmi uspokojivá, sílíc naši důvěru v předpokládanou theorii.

Vůbec, není-li dissociace úplná, nýbrž obnáší na př. jen δ procent, jest normalitu roztoku v násobiti faktorem $\frac{\delta}{100}$, čímž obdrží se hledaná koncentrace iontů

$$c = \frac{v \,.\, \delta}{100} \,.$$

Stupeň dissociace plyne přímo z měření elektrických vodivostí roztoku. Pro velmi velké zředění dosahuje vodivost hodnoty hraničné λ_∞; poměr vodivosti λ_v platné pro zředění v k této hodnotě hraničné jest stupeň dissociace

$$\delta = \frac{\lambda_v}{\lambda_\infty} \,.$$

2. Jiný zajímavý případ článku koncentračního jest soustava:

Ag	$AgNO_3$ roztok	KCl roztok	Ag pokryté vrstvou AgCl.

Ač kombinace vypadá na prvý pohled zcela různě od předešlé, jest v podstatě téhož druhu. Stříbru na obou elektro-

*) *Nernst*, 1889. Zeitschr. f. physik. Chem. IV. 129.

dách přísluší jeden a týž elektrolytický tlak, i bude záviseti elektromotorická síla toho článku jenom na obnosech osmotického tlaku iontů stříbra, jednak v roztoku dusičnanu stříbrnatého, jednak v roztoku chlóridu stříbrnatého, který se vytvoří na elektrodě druhé, neboť chlórid ten, ač pranepatrně rozpustný, přece není naprosto nerozpustný v roztoku chlóridu draselnatého. Při práci, aby se netvořila ssedlina při styku roztoku dusičnanu stříbrnatého s roztokem chlóridu draselnatého, vkládáme roztok soli neutrální, nejlépe takový, který obsahuje ionty solí, jichž styku chceme zabrániti. Zde jest to roztok dusičnanu draselnatého. Vypadá tedy ve skutečnosti kombinace zvolená

Ag	$AgNO_3$ roztok	KNO_3 roztok	KCl roztok	Ag pokryté vrstvou $AgCl$.

Elektromotorická síla té kombinace jest

$$\pi = \frac{0{\cdot}0002}{n_e} \cdot T \cdot \lg \frac{p_1}{p_2} \text{ *)},$$

kde tlaky osmotické p_1 a p_2 můžeme nahraditi koncentracemi iontů stříbra c_1 a c_2 jednak v roztoku dusičnanu stříbrnatého, jednak v roztoku chlóridu stříbrnatého:

$$\pi = \frac{0{\cdot}0002}{n_e} \cdot T \cdot \lg \frac{c_1}{c_2} \,.$$

Koncentrace c_1 iontů stříbra v roztoku dusičnanu stříbrnatého, když roztok jest dostatečně zředěn, takže možno předpokládati *úplnou* dissociaci, dána jest normalitou roztoku. Na př. pro roztok $^1/_{10}$-normalní jest $c_1 = 0{\cdot}1$.

Co do chlóridu stříbrnatého jest patrně roztok touto solí nasycen. Jako výše, i zde jest nutna známost normality toho roztoku i stupně dissociace. Ježto jest roztok patrně nad míru zředěný (vždyť se chlórid stříbrnatý čítá k látkám ve vodě nerozpustným) jest právem možno předpokládati dissociaci v ionty $\overset{+}{Ag}$ a $\overset{-}{Cl}$ úplnou, tedy $\delta = 100\%$. Známost normality vyžaduje

*) Pro přehled a pohodlí stačí zase užívati okrouhlé hodnoty číselného součinitele 0·0002 místo hodnoty přesnější 0·0001982.

známost rozpustnosti chlóridu stříbrnatého ve vodě resp. v roztoku chlóridu draselnatého. Rozpustnost ta je tak nepatrná, že stanovení cestou obvyklou (vážením) bylo by illusorní. I zde koná výborné služby *stanovení elektrických vodivostí.* Z vodivosti možno vypočísti velmi spolehlivě rozpustnost (a tedy i normalitu nasycených roztoků) velmi nesnadno rozpustných látek, k čemuž methody vypracoval zprvu *A. F. Hollemann**) a pak *F. Kohlrausch* a *F. Rose***). Podrobnosti toho postupu nenáleží sem vykládati; snad příležitost k tomu udá se v brzku jinde. Co se tkne chlóridu stříbrnatého, vyplynulo z měření těch, že normalita (totožná s rozpustností *s*) roztoku vodného při 18° nasyceného obnáší

$$\nu = 11{\cdot}7 \,.\, 10^{-6}$$

vzhledem ku vzorci $AgCl$. Poněvadž jsme předpokládali dissociaci úplnou, jest tímž číslem dána i normalita vzhledem k iontu $\overset{+}{Ag}$ i vzhledem k iontu $\overset{-}{Cl}$.

Neběží však o rozpustnost chlóridu stříbrnatého ve vodě, nýbrž v roztoku chlóridu draselnatého. Z nauky o chemické rovnováze při dissociaci***) plyne, že součin z koncentrací částí dissociovaných (zde jsou to koncentrace, ovšem obě stejné, iontů $\overset{+}{Ag}$ a $\overset{-}{Cl}$) lomený koncentrací části nedissociované jest veličinou stálou, na absolutních hodnotách koncentrace nezávislou. Při nasyceném roztoku jest koncentrace části nedissociované (ve skutečnosti nikdy to není nulla) veličinou stálou, jest tudíž i součin koncentrací iontů $\overset{+}{Ag}$ a $\overset{-}{Cl}$ veličinou stálou

$$\nu_{Ag} \,.\, \nu_{Cl} = \text{konst.}$$

Přičiníme-li k roztoku tomu něco roztoku chlóridu draselnatého, jehož koncentrace jest velmi značná oproti koncentraci ν_{AgCl} chlóridu stříbrnatého, přibude v roztoku iontů $\overset{-}{Cl}$, což však se nesnáší s tím, že roztok těmi ionty jest už nasycen, následkem

*) *Hollemann*, 1893. Zeitschr. f. physik. Chem. XII. 125.

**) *Kohlrausch* a *Rose*, 1893. Zeitschr. für physik. Chem. XII. 234.

***) Zmínka o tom učiněna v závěrku stati prvé, v tomto Časopise roč. XXVIII. str. 208.

čehož nutně patřičné množství chlóridu stříbrnatého přejde v tvar nedissociovaný, jinými slovy, z roztoku se srazí, tak aby zase vyhověno bylo podmínce

$$c_{Ag}(c_{Cl} + c'_{Cl}) = \text{konst},$$

kde c'_{Cl} značí koncentraci iontů $\overline{Cl}$ pochodících z přičiněného chlóridu draselnatého, c_{Ag} a c_{Cl} koncentrace příslušných iontů z chlóridu stříbrnatého. Pro případ rovnováhy platí rovnost obou výrazů

$$c_{Ag}(c_{Cl} + c'_{Cl}) = \nu_{Ag} \cdot \nu_{Cl} \cdot$$

Poněvadž koncentrace c'_{Cl} jest oproti koncentraci c_{Cl} velmi veliká, lze veličinu c_{Cl} v součtu zanedbati, a poněvadž

$$\nu_{Ag} = \nu_{Cl} = s,$$

plyne jednoduchý vztah:

$$c_{Ag} = \frac{s^2}{c'_{Cl}} \, .$$

Abychom tudíž ve vylíčeném případě určili koncentraci iontů na kovové elektrodě se solí těžko rozpustnou, *dělíme čtverec rozpustnosti té soli* (jako normalitu vyjádřený) *koncentrací příslušného iontu elektrolytu rozpustného.*

Veličina c_{Ag} jest hledaná koncentrace iontů $\overset{+}{Ag}$ na druhé elektrodě, veličina c'_{Cl} jest číselně totožná s koncentrací užitého roztoku chlóridu draselnatého.

Dejme tomu, že pracujeme s roztokem dusičnanu stříbrnatého $^1/_{10}$- normalným a s roztokem chlóridu draselnatého rovněž $^1/_{10}$- normalným, že jde tudíž o kombinaci:

Ag	$AgNO_3$ $^1/_{10}$-norm. roztok	KNO_3 roztok	KCl $^1/_{10}$ - norm. roztok	Ag pokryté vrstvou $AgCl$.

Kdyby dissociace roztoku dusičnanu stříbrnatého a chlóridu draselnatého byla úplná, bylo by pro tento případ

$$c_1 = 10^{-1},$$
$$c'_{Cl} = 10^{-1},$$

$$c_2 = \frac{(11{\cdot}7\,.\,10^{-6})^2}{0{\cdot}1} = 11{\cdot}7^2\,.\,10^{-11},$$

a poněvadž jde o ionty vesměs jednomocné, jest

$$n_e = 1;$$

dále pro zvolenou teplotu 18° jest T = 291°, takže jest hledaná elektromotorická síla

$$\pi = 0{\cdot}0002\,.\,291\,.\,\lg \frac{10^{-1}}{11{\cdot}7^2\,.\,10^{-11}},$$

což vypočteno dá

$$\pi = 0{\cdot}458 \text{ volt.}$$

Proveďme týž výpočet se zřetelem k tomu, že dissociace užitých roztoků není úplná. Z měření elektrických vodivostí plyne, že pro normalitu $^1/_{10}$ jest

pro roztok dusičnanu stříbrnatého $\delta = 82\%$,
pro roztok chlóridu draselnatého $\delta = 85\%$.

Tudíž jest:

$$c_1 = 0{\cdot}082,$$
$$c'_{Cl} = 0{\cdot}085,$$
$$c_2 = \frac{(11{\cdot}7\,.\,10^{-6})^2}{0{\cdot}085}$$

a následkem toho přesný výraz pro elektromotorickou sílu

$$\pi = 0{\cdot}0002\,.\,291\,.\,\lg \frac{0{\cdot}082\,.\,0{\cdot}085}{(11{\cdot}7\,.\,10^{-6})^2},$$

což vypočteno dá

$$\pi = 0{\cdot}449 \text{ volt.}$$

Pokus dle hořejšího schémata provedený dal

$$\pi = 0{\cdot}460 \text{ volt,}$$

což jest shoda vzhledem k povaze věci uspokojivá.

Jiné případy této kategorie, na př. kombinaci

Ag	roztok KNO_3 nasycený bromičnanem stříbrnatým	roztok $KBrO_3$ nasycený bromičnanem stříbrnatým	Ag

velmi zevrubně vyšetřoval *H. M. Goodwin**), ku kteréž práci vzhledem ku převážně chemické povaze tu pouze poukázati stačí. V podstatě jde zase vždy o stanovení dvojí koncentrace iontů kovových. V případě uvedeném jest koncentrace iontů $\overset{+}{Ag}$ v roztoku dusičnanu draselnatého téměř táž, jakoby byla v pouhé vodě, poněvadž roztok ten neobsahuje ani $\overset{+}{Ag}$ ani $\overset{-}{BrO_3}$ jakožto ionty a tudíž na stupeň dissociace bromičnanu stříbrnatého $AgBrO_3$ žádného vlivu nemá. Koncentrace iontů $\overset{+}{Ag}$ na druhé elektrodě, tedy v roztoku bromičnanu draselnatého vypočte se jako v případě předchozím z rozpustnosti bromičnanu stříbrnatého ve vodě a z koncentrace iontů $\overset{-}{BrO_3}$ přičiněných jakožto roztok bromičnanu draselnatého. Souhlas mezi theorií a výpočtem jest zase dostatečně uspokojivý.

	Elektromot. síla π poč.	poz.
$^1/_{10}$-norm. rozt. bromičnanu draselnatého	0·0612 volt	0·0620 volt
$^1/_{20}$- „ „ „ „	0·0452 „	0·0471 „ .

Nernst navrhl původně elektrodu kovovou, pokrytou vrstvou těžce rozpustné soli téhož kovu a ponořenou v roztok soli jiné s týmž aniontem (na př. stříbro pokryté vrstvou chlóridu stříbrnatého a ponořené do roztoku chlóridu draselnatého) jmenovati *zvratnou elektrodou druhého způsobu* čili *zvratnou elektrodou vzhledem k aniontu* oproti elektrodám sestávajícím z kovu ponořeného v roztok vlastní nějaké soli, leč, jak *Ostwald* ukázal, a jak ostatně i z tohoto líčení jest patrno, tohoto rozdílu není třeba přesně činiti, poněvadž v obou případech jde o známost koncentrací iontů kovových elektrodu obklopujících a v případě druhém sůl těžko rozpustná jest jen prostředkem udržeti koncentraci iontů a tedy i osmotický jich tlak v elektrolytu na

*) *Goodwin*, 1894. Zeitschr. f. physik. Chem. XIII. 577.

stálé (ovšem nepatrné) hodnotě. Ta nepatrná hodnota koncentrace iontů podmiňuje znamenitě velký obnos elektromotorické síly takových elektrod.

3. Po některých stránkách jest velmi zajímavý druh koncentračních článků, které obsahují komplexní sůl toho kovu, jenž do roztoku jest ponořen. Je-li na př. stříbro ponořeno v roztok kyanidu draselnatého KCN, tvoří se jakožto sůl komplexní kyanid stříbrnato-draselnatý $KAg(CN)_2$, který jest pouze binárním elektrolytem, jenž se štěpí toliko ve dva ionty

$$\overset{+}{K} \quad a \quad Ag(\overset{-}{CN})_2 ,$$

jak možno nejen z elektrických vodivostí usouditi, nýbrž i ze snížení bodu tuhnutí i ze zvýšení bodu varu vody přivozeného tou solí.*) Bylo už zmíněno (viz úvahu v XXVII. ročníku tohoto časopisu str. 25.), že prostřednictvím vzniku takového komplexního kyanidu (měďnato-draselnatého) lze na př. koncentraci iontů $\overset{++}{Cu}$ v Daniellově článku tak zmenšiti, že směr proudu v takovém článku se obrátí. Obklopuje-li totiž roztok takové podvojné kovové soli kov, který jest přítomen v komplexním aniontu, na př. tedy v aniontu $Ag(\overset{-}{CN})_2$, není měrou osmotického protitlaku množství kovu (zde stříbra) v tom aniontu přítomné, nýbrž nad míru nepatrné množství kovu přítomného jakožto ion kovový vzniklý dissociací pranepatrné části toho komplexního iontu, tedy na př. ion $\overset{+}{Ag}$ vzniklý dissociací iontu $Ag(\overset{-}{CN})_2$ ve složky

$$\overset{+}{Ag} \quad a \quad 2\overset{-}{CN} .$$

Že toto množství iontů $\overset{+}{Ag}$ jest nad míru malé a koncentrace iontu $\overset{+}{Ag}$ v roztoku kyanidu stříbrnato-draselnatého nad pomyšlení nepatrná, plyne už z té okolnosti, že se stříbro obyčejnými reakcemi chemickými v takovém roztoku dokázati nedá: nesrážíť se roztok takový rozpustnými chlóridy, bromidy ani iódidy. Jest tudíž koncentrace iontů $\overset{+}{Ag}$ v roztoku komplexního

*) Jest to vlastně draselnatá sůl kyseliny $HAg(CN)_2$ (argentkyanovodíku) ve volném stavu neznámé.

kyanidu stříbrnato-draselnatého ještě menší než koncentrace iontů $\overset{+}{Ag}$ ve vodném roztoku iódidu draselnatého, který jest z halových solí stříbrnatých nejméně rozpustným.

Jde tudíž v našem případě o koncentrační článek sestavený dle schémata

$$Ag \left| \begin{array}{c} AgNO_3 \\ \text{roztok} \end{array} \right| \begin{array}{c} KCN \\ \text{roztok} \end{array} \left| Ag, \right.$$

kde do roztoku kyanidu draselnatého vhodně něco kyanidu stříbrnatého přičiňujeme.

Elektromotorickou sílu takové kombinace neumíme posud počtem určiti, neboť nelze stanoviti koncentraci iontů $\overset{+}{Ag}$ vzniklých dissociací iontu komplexního $Ag\overline{(CN)}_2$. Změříme-li však elektromotorickou sílu takového článku, lze tuto koncentraci číselně vyjádřiti. I zde při pokuse vkládáme mezi roztok dusičnanu stříbrnatého a kyanidu draselnatého roztok přiměřené soli neutrálné (v. výše), tedy roztok dusičnanu draselnatého, takže pracujeme vlastně s kombinací

$$Ag \left| \begin{array}{c} AgNO_3 \\ \text{roztok} \end{array} \right| \begin{array}{c} NO_3K \\ \text{roztok} \end{array} \left| \begin{array}{c} KCN \\ \text{roztok} \end{array} \right| Ag\,.$$

*W. Ostwald**) pracoval s $^1/_{10}$-normálným roztokem dusičnanu stříbrnatého a s roztokem kyanidu draselnatého, jemuž byla $^1/_{10}$ objemu roztoku stříbrnatého přičiněna. Elektromotorická síla toho článku za obyčejné teploty ($T = 290^0$) obnášela

$$\pi = 1{\cdot}14 \text{ volt.}$$

Lze tudíž ze vzorce

$$\pi = 0{\cdot}0002\,.\,T\,.\lg \frac{p_1}{p_2}$$

vypočísti žádoucí koncentraci p_2 iontů $\overset{+}{Ag}$, když uvážíme, že $p_1 = 0{\cdot}1$, tudíž $\lg p_1 = -1$, takže jest

$$\lg p_2 = -1 - \frac{1{\cdot}14}{0{\cdot}0002.290}$$

*) *Ostwald*, Allgemeine Chemie, svaz. II. 1. str. 881.

čili

$$p_2 = 10^{-20 \cdot 7},$$

což značí, že jest 1 gramatom iontů $\overset{+}{Ag}$ (tedy 108 g) přítomen teprve v objemu $10^{20 \cdot 7}$ litrů roztoku, čili že 1 litr obsahuje okrouhle $10^{-18 \cdot 7}$ g iontů $\overset{+}{Ag}$. Většina fysikálních i chemických zkušeností vede k tomu, že 1 gramatom látky obsahuje 10^{24} atomů. Jest tudíž koncentrace iontů $\overset{+}{Ag}$ v našem případu taková, že v $10^{20 \cdot 7}$ litrech jest obsaženo 10^{24} atomů stříbra jakožto ionty, čili v 1 litru

$$\frac{10^{24}}{10^{20 \cdot 7}} = 10^{3 \cdot 3} \doteq 2000 \text{ atomů}.$$

Zdá se zprvu, že tento výsledek příčí se možnosti; 2000 iontů v 1000 cm^3 značí 2 ionty v 1 cm^3, takže by, kdybychom 1 cm^3 roztoku ve 3 díly rozdělili, najisto aspoň v jednom z těch dílů nebylo stříbro vůbec jakožto ion přítomno. Námitka ta pozbude však ihned závažnosti, považíme-li, že na *ionisaci* nesmíme pohlížeti jako na stav *statický*, nýbrž spíše *kinetický*, že totiž každý z atomů stříbra jen na čas stává se iontem, a sice v tomto případě na čas $10^{-16 \cdot 7}$ krát kratší než trvá existence jeho v komplexním iontu $Ag(CN)_2$, neboť roztok (s $^1/_{10}$ objemu $^1/_{10}$ normalného dusičnanu stříbrnatého) obsahuje v 1 litru jen $^1/_{100}$ gramatomu stříbra, takže množství stříbra ionisované jest v poměru

$$\frac{10^{-18 \cdot 7}}{10^{-2}} = 10^{-16 \cdot 7}$$

menší než množství stříbra vůbec v roztoku přítomné. *)

Jak patrno, jest tímto způsobem dána elektrometrická cesta řádově stanoviti koncentrace tak nepatrného obnosu, jak toho citlivost jiných známých method ani z daleka nepřipouští. Při všech ostatních methodách totiž přesnost měření v té míře klesá,

---

*) Výpočty tohoto rázu přijímati jest ovšem s jakousi reservou; ale okolnost, že *řádově* souhlasí s výsledky ze zcela jiných zjevů chemicko-fysikálných odvozenými, vzbuzuje důvěru, že půda, po níž osmotická theorie kráčí, jest pevná.

jak stoupá zředění látky, po které pátráme: při elektrometrické methodě jeví se pravý opak. Potenciálný rozdíl mezi kovem a roztokem jest tím značnější, jak ubývá koncentrace kovových iontů v roztoku. Další výhoda spočívá v tom, že přítomnost cizorodých iontů v roztoku jest z pravidla úplně aneb téměř lhostejna, neboť *elektrody kovové reagují výhradně na své vlastní ionty.*

Obšírněji zpracoval tuto *elektrometrickou analysi* první *R. Behrend.**) Z obšírné a velmi zajímavé jeho práce buďte na ukázku uvedeny tři příklady o rozpustnosti solí rtuti, které čítáme vždy mezi nerozpustné, totiž chlóridu rtutičnatého ($HgCl$), bromidu rtutičnatého ($HgBr$) a sirníku rtuťnatého (HgS); druhou elektrodou byla vždy rtuť v $^1/_{10}$-normálním roztoku dusičnanu rtutičnatého ($HgNO_3$). Šlo tedy o stanovení elektromotorické síly kombinací:

Hg	$HgNO_3$ $^1/_{10}$-norm. roztok	$HgCl$ v $^1/_{10}$-norm. roztoku KCl	Hg	(1)
Hg	$HgNO_3$ $^1/_{10}$-norm. roztok	$HgBr$ v $^1/_{10}$-norm. roztoku KBr	Hg	(2)
Hg	$HgNO_3$ $^1/_{10}$-norm. roztok	HgS v roztoku Na_2S	Hg	(3)

Ve vzorci uzpůsobeném pro teplotu 17° ($T = 290°$)

$$\pi = 0{\cdot}058 \lg \frac{p_1}{p_2}$$

známe pak veličinu π určenou experimentem. Tlak p_1 vztahuje se na $^1/_{10}$-normálný roztok dusičnanu rtutičnatého, i jest místo něho lze položiti koncentraci, tudíž jest vždy $p_1 = 0{\cdot}1$, takže pak žádanou koncentraci p_2 těžko rozpustné soli rtuti na druhé elektrodě nalezneme ze vzorce

$$p_2 = 10^{-\frac{\pi}{0{\cdot}058}-1}.$$

*) *Behrend*, 1893. Zeitschr. f. physik. Chem. XI. 466.

Behrend nalezl pořadem při uvedených třech článcích koncentračních

	π poz.	p_2 poč.
(1)	0·358 volt	$10^{-7\cdot17}$
(2)	0·477 „	$10^{-9\cdot22}$
(3)	1·252 „	$10^{-22\cdot6}$,

což značí, že 1 gramatom rtuti jakožto iontu (tedy 200 g) jest při zvolených solích přítomen v připojeném objemu roztoku

$HgCl$ v $^1/_{10}$-norm. KCl .... 148.10^5 litrů
$HgBr$ v $^1/_{10}$-norm. KBr .... 166.10^7 „
HgS v roztoku Na_2S .... $398 \cdot 10^{20}$ „ ,

takže jest 1 milligram rtuti jakožto ion přítomen v těchto objemech

při $HgCl$ .... 74 litrů
při $HgBr$ .... 8300 „
při HgS .... 194000.10^{12} „ ,

z kterýchž číselných výsledků jest způsobem v oči bijícím patrna i nad míru nestejná rozpustnost uvažovaných solí rtuťnatých.

Z elektrometrických úvah podobného rázu plyne celá řada důsledků chemicky nad míru závažných, neboť teprv na základě těchto moderních theorií chápeme ta chemická fakta jakožto řetěz souvislých důsledků, která byla dříve jen jako empirické věty ojediněle a beze vší souvislosti zaznamenávána.

Máme-li na př. tři kombinace koncentračních článků dle způsobu pod 2. popsaného, a sice

(1)	Ag	$AgNO_3$ $^1/_{10}$-norm. roztok	KCl $^1/_{10}$-norm. roztok	Ag pokryté vrstvou $AgCl$
(2)	Ag	$AgNO_3$ $^1/_{10}$-norm. roztok	KBr $^1/_{10}$-norm. roztok	Ag pokryté vrstvou $AgBr$
(3)	Ag	$AgNO_3$ $^1/_{10}$-norm. roztok	KI $^1/_{10}$-norm. roztok	Ag pokryté vrstvou AgI

stoupá elektromotorická síla těch článků od (1) ku (3), neboť iódid stříbrnatý jest z halových solí stříbra nejméně rozpustný, a tudíž koncentrace iontů působících osmotický protitlak jest u něho nejmenší. Všecky články toho druhu vykazují tím větší elektromotorickou sílu, čím sůl na jedné elektrodě užitá jest nerozpustnější oproti soli na elektrodě druhé. Máme-li místo solí těžko rozpustných soli komplexní rozpustné, na př. $^1/_{10}$-normální roztok kyanidu draselnatého, jemuž jest něco kyanidu stříbrnatého přičiněno, jest elektromotorická síla článku tak sestaveného tím větší, čím méně kovových iontů komplexní ion soli odštěpuje [viz výše příklad se solí $KAg(CN)_2$]. Uspořádáme-li řadu takových článků dle vzrůstajících sil elektromotorických, obdržíme současně řadu dle rozpustnosti, vlastně dle podvojného rozkladu srovnanou: každá předchozí sůl rozpouští se v roztoku soli následující, doznávajíc podvojného rozkladu. Chlórid stříbrnatý v roztoku bromidu draselnatého mění se v bromid stříbrnatý a vzniká chlórid draselnatý; podobně bromid stříbrnatý v roztoku iódidu draselnatého.

Článek

Ag	$AgNO_3$ $^1/_{10}$-norm. roztok	Na_2S $^1/_{10}$-norm. roztok	Ag pokryté vrstvou Ag_2S

má vyšší elektromotorickou sílu než článek

Ag	$AgNO_3$ $^1/_{10}$-norm. roztok	KCN $^1/_{10}$-norm. roztok	Ag pokryté vrstvou $AgCN$,

pročež se kyanid stříbrnatý v roztoku sirníku sodnatého mění v sirník stříbrnatý, který jest ve zředěném roztoku kyanidu draselnatého nerozpustný. Ostatní těžko rozpustné soli stříbra (chlórid, bromid, iódid), v jejichž nasycených roztocích jest koncentrace iontů $\overset{+}{Ag}$ větší než v komplexní sloučenině toho kovu jsou nutně v nadbytku druhé součásti komplexní sloučeniny (zde kyanidu draselnatého) rozpustny. Z téhož důvodu rozpouští se chlórid a bromid stříbrnatý v sirnatanu sodnatém, iódid stříbrnatý však již po skrovnu. Chlórid stříbrnatý rozpouští se v ammoniaku, bromid a iódid nikoliv. Proto jest pořad solí stříbrnatých se vzrůstající koncentrací iontů $\overset{+}{Ag}$ tento:

Sirník, kyanid, iódid, sirnatan, bromid, podvojná sloučenina s ammoniakem, chlórid.

Řadu tuto vystopoval *W. Ostwald* *) elektrometricky. V opačném pořádku než jak jmenováno, vzrůstají elektro-motorické síly kombinací:

$^1/_{10}$-norm. roztok $AgNO_3$ oproti	$AgCl$ v $^1/_1$-norm. roztoku KCl	0·51 volt
	$^1/_1$-norm. ammoniaku	0·54 „
	$AgBr$ v $^1/_1$-norm. roztoku KBr	0·64 „
	$^1/_1$-norm. roztoku $Na_2S_2O_3$	0·84 „
	AgI v $^1/_1$-norm. roztoku KI	0·94 „
	KCN	1·31 „
	$^1/_1$-norm. roztoku Na_2S	1·36 „ .

Další důsledky podobného způsobu, jichž bylo by lze značně nahromaditi, jsou rázu převážně chemického, pročež na těchto ukázkách zde zatím přestati možno.

Několik analytických úvah o translačních plochách vůbec a bikvadratických zvlášť.

Napsal

Dr. **Ant. Sucharda**, t. č. v Paříži.

(Dokončení.)

8. Vrátíce se k soustavě rovnic (24), vložme do ní $y = 0$, $v = 0$.

Vymizí tu rovnice druhá a čtvrtá, kdežto z ostatních souhlasně vyjde

$$x^2 - z^2 = 0$$
$$x^2 - z^2 = 0,$$

z čehož patrno, že soustavě té hoví též body

*) *Ostwald*, Allgemeine Chemie, svaz. II. 1. str. 882.

$$(31) \qquad \begin{array}{ll} x = z & x = -z \\ y = 0 & y = 0 \\ v = 0 & v = 0; \end{array}$$

vložíce konečně $z = 0$, $v = 0$, obdržíme ze soustavy (24) souhlasné výsledky

$$\begin{array}{r} x^2 - y^2 = 0 \\ -x^2 + y^2 = 0, \end{array}$$

z čehož zjevno, že jí náležejí též body

$$(32) \qquad \begin{array}{ll} x = y & x = -y \\ z = 0 & z = 0 \\ v = 0 & v = 0. \end{array}$$

Poněvadž, jak známo, $v = 0$ znamená rovnici roviny úběžné, poznáváme v bodech (31) oba úběžné body hyperboly řídící A_s, společné všem hyperbolám soustavy A, v bodech pak (32) oba úběžné body hyperboly tvořící B_s, společné všem hyperbolám soustavy B. To jsou tedy jediné čtyři dvojné body plochy hyperbolo-hyperbolické.

O dvojné kuželosečce (26) stůj zde ještě toto:

Křivce té patrně náleží bod

$$(33) \qquad y = iR, \ z = ir.$$

Vložíme-li hodnoty tyto za m, n do rovnic (30), obdržíme souhlasně

$$\begin{array}{l} (Ry - rz) = 0 \\ (Ry - rz) = 0 \end{array}$$

na důkaz, že obě tečné roviny bodu (33) splynou, t. j. že tento bod jest bodem uniplanarním.

Snadno jest poznati, že plocha má ještě tři takové body, vesměs v dvojné kuželosečce obsažené. Jejich souřadnice jsou

$$(34) \qquad \begin{array}{lll} y = iR & y = -iR & y = -iR \\ z = -ir & z = ir & z = -ir \\ x = 0 & x = 0 & x = 0. \end{array}$$

Tyto čtyři body jsou *uniplanarné* čili *kuspidalné* body plochy.

9. Jest na bíledni, že úvahy odst. 7. počínající zcela obdobným řádem též pro ostatních pět druhů plochy P lze provésti a že nabude se výsledků obdobných: v každé ploše v rovině $x = 0$ kuželosečka dvojná, krom toho čtyři úběžné body dvojné, ve dvojné kuželosečce pak čtyři body kuspidalné.

Vycházejí zajisté pro $x = 0$ z rovnic (4) až (9) výsledky, z nichž vidno, že dvojná kuželosečka plochy kruho-kruhové a plochy hyperbolo-hyperbolické typu c jest rovnostranná hyperbola o realné ose Y, dvojná křivka plochy hyperbolo-hyperbolického typu a a b rovnostranná hyperbola o imaginarné ose v Y, dvojná křivka plochy hyperbolo-kruhové typu a imaginarná křivka kruhová a dvojná křivka plochy hyperbolo-kruhové typu b realná křivka kruhová.

Rovněž souřadnice bodů dvojných a bodů kuspidalných ve všech těch případech bylo by lze přímo napsati.

Že má plocha P čtyři úběžné přímky, analyticky dokážeme užitím homogenních souřadnic. Dosadíme-li za x, y, z po řadě $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{v}$, $\frac{z}{v}$ do rovnic (4) až (9), odstraníme-li pak v z jmenovatele a píšeme-li všude $v = 0$, obdržíme jako výsledek homogenní funkci stupně čtvrtého v Cartesiových souřadnicích x, y, z; ta značí kuželovou plochu 4. stupně, jejíž střed jest v počátku soustavy, tedy ve středu plochy P, a jež má s plochou P společnou úběžnou křivku. Rovnice její zní pro plochu, jež dána rovnicí (4), takto:

$$(x^2 - y^2 + z^2)^2 + 4x^2y^2 = 0, \tag{35}$$

obdobně pak pro všech ostatních pět druhů.

Lze ji psáti následovně:

$$[x + i(y+z)]\,[x + i(y-z)]\,[x - i(y-z)]\,[x - i(y+z)] = 0 \tag{36}$$

a podobně i všechny ostatní.

Poznáváme z toho, že řečený kužel bikvadratický pokaždé degeneruje ve čtyři roviny. Také srovnáním s rovnicemi (31), (32) ihned se shlédne, že každá z těch rovin prochází dvěma ze čtyř úběžných dvojných bodů plochy translační. Jelikož krom toho jde též středem jejím, musí obsahovati jednu z asymptot kuželoseček A_s, B_s. S tím již souvisí, že rovina ta jest asymptotickou rovinou plochy P, kužel bikvadratický, z těchto čtyř rovin složený, tedy kuželem asymptotickým plochy té. Roviny ty z jiných ještě důvodů sluší zváti kuspidalnými.

Úběžné jejich přímky jsou úběžnými přímkami plochy P a každá patrně dvěma ze čtyř úběžných dvojných bodů plochy prochází.

Ze $\binom{4}{2} = 6$ přímých spojnic čtyř úběžných bodů dvojných dvě tedy nejsou přímkami plochy. Snadně se pozná, že to jsou úběžné přímky rovin osnovy $\overline{A}$ a osnovy $\overline{B}$.

Z rovnice (36) a z příslušných ostatních, jež tu pro krátkost vynechány, lze poznati, že plochy, dané rovnicemi (4), (5), (6) mají po čtyřech imaginarných, plochy dané rovnicemi (7), (8), (9) po čtyřech realných přímkách úběžných. Také z tvaru činitelů v rovnicích těch ihned se vidí, že ze $\binom{4}{2} = 6$ vzájemných průsečíků úběžných přímek ploch (4), (5), (6) jsou vždy dva realné, při (7), (8), (9) všechny realné.

Tím vyříditi lze též otázku realnosti a imaginarnosti dvojných bodů v nekonečnu.

Vymítíme-li totiž z těch šesti průsečíků pokaždé ony dva, jež mají $x = 0$ a tudíž dvojné kuželosečce náleží, zbudou čtyři úběžné dvojné body.

Vyšetříme-li pronik jedné ze čtyř rovin asymptotických čili kuspidalných s plochou, za příklad volíce třeba hyperbolo-hyperbolickou typu α, obdržíme, spojíce s její rovnicí (7) rovnici takové roviny kuspidalné, na př.

$$x + y + z = 0,$$

vyloučením z ihned:

$$(37) \qquad 4R^2x^2 + 4(R^2 - r^2)\,xy - (R^2 - r^2)^2 = 0$$

na důkaz, že křivka průsečná, jež měla by býti stupně čtvrtého, jest jednoduchou kuželosečkou. Vysvětliti to lze jenom tím, že v rovině kuspidalné úběžná přímka plochy chová se jako dvojnásobná. V jiných rovinách přímkou tou procházejících se to neshledává.

Vzhledem ku přímkám plochy P budiž dovoleno ještě toto poznamenati:

Užitím Geiserovy jisté transformace dokázal jsem v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky roč. XV. pag. 149. cestou analytickou, že plocha mimo čtyři úběžné přímky jiných nemá. Jelikož každou přímku, jež dvěma dvojnými body prochází, jí náležejíc, čítati sluší za čtyrnásobnou (srov. Salmon-Fiedler, Anal. G. d. R., II. díl, 2. vyd. pag. 412.) představují ty čtyři přímky celkem $4 . 4 = 16$ přímek plochy, počet to, jejž Clebsch stanovil pro přímky každé plochy 4. stupně s dvojnou kuželosečkou.

10. K zajímavým vlastnostem ploch P, jež se mi podařilo cestou synthetickou objeviti,*) náleží též ona, že vlastní plocha kuželová, ploše P z libovolného bodu její křivky dvojné jako středu dotyčně opsaná, rozpadá se ve dvě plochy kuželové kvadratické.

V následujícím budiž dovoleno provésti počtářskou verifikaci tohoto tvrzení při ploše hyperbolo-hyperbolické typu a, jejíž rovnice dána číslem (7).

Tato plocha P protíná se s první plochou polarnou onoho dvojného bodu, jehož souřadnice buďtež $0, m, n$, v křivce, podle níž se jí dotýká, jak obecně známo, řečená plocha kuželová. Abychom snáze rovnici první plochy polarné obdrželi, transformujeme plochu na počátek $0, m, n$. Rovnice její jest pak tato:

$$(38)\qquad \begin{aligned}&(x^2 + y^2 - z^2 + 2ym - 2zn)^2 \\ &\quad - 4x^2 (y^2 + 2ym + R^2 + m^2) = 0.\end{aligned}$$

Abychom rovnici první polarné plochy Q obdrželi, učiňme rovn. (38) homogenní, kladouce za x, y, z $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}$, differencujeme pak dle v, načež do výsledku vložme $v = 1$; tím obdržíme

$$(39)\qquad \begin{aligned}&(x^2 + y^2 - z^2 + 2my - 2nz)(my - nz) \\ &\quad - 2x^2 (my + m^2 + R^2) = 0\end{aligned}$$

jakožto rovnici plochy Q, jež s P určuje dotyčnou křivku.

*) Srov. mé pojednání: „Über eine Gattung Rückungsflächen." Sitzber. d. k. Akad. d. W. in Wien, Bd. XCII., Abth. II., Juli-Sept. 1885, pag. 844.

Libovolná plošná přímka kuželové plochy dotyčné, procházejíc počátkem a křivku dotyku pronikajíc v bodě x_1, y_1, z_1 má rovnice:

$$y = \frac{y_1}{x_1} x \tag{40}$$

$$z = \frac{z_1}{x_1} x. \tag{41}$$

I jest rovnice hledané plochy kuželové výsledkem eliminace veličin x_1, y_1, z_1 z rovnic (38), (39), (40), (41) *). Dosadíce z rovnic (40) a (41) za y, z do (38) a (39), obdržíme je jako funkce x_1 ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1^2 (Ax_1^2 + Bx_1 + C) &= 0 \\ Dx_1 + E &= 0, \end{aligned} \tag{42}$$

při čemž jest

$$\begin{aligned} A &= -(x^4 + y^4 + z^4) + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) \\ B &= 4x[my(x^2 - y^2) + nz(x^2 - z^2) + yz(ny + mz)] \\ C &= 4x^2[(m^2 + R^2)x^2 - (my - nz)^2] \\ D &= my(x^2 - y^2) + nz(x^2 - z^2) + yz(ny + mz) \\ E &= 2x[(m^2 + R^2)x^2 - (my - nz)^2]. \end{aligned} \tag{43}$$

Výsledkem eliminace z rovnic (42) je součin dvou činitelů, z nichž prvým, odpovídajícím hodnotě $x_1 = 0$, jest $E = 0$, druhým známý Sylvestrův determinant

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & O \\ O & D & E \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant ten lze, poněvadž $B = 4Dx$ a $C = 2Ex$, psáti takto:

$$\Delta \equiv E \begin{vmatrix} A & 4Dx & 2x \\ D & E & 0 \\ O & D & 1 \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$\Delta \equiv E(AE - 2D^2x) = 0,$$

nebo konečně, píšeme-li

---

*) Píšeme-li v (38) a (39) všade x_1, y_1, z_1 místo x, y, z.

$$(44) \qquad E = 2Fx,$$
$$\Delta \equiv 2Fx(AF - D^2) = 0.$$

Zní tedy úplný výsledek eliminace, vynecháme-li součinitel -4, takto:

$$x^2 F^2 (D^2 - AF) = 0,$$

a to jest rovnice úplného kužele dotyčného, jíž po krátké redukci činitele ozávorkovaného lze dáti tvar

$$(45) \qquad x^4 F^2 GH = 0,$$

jestliže totiž vyjmeme z $D^2 - AF$ činitel x^4, činitel pak zbývající položíme rovným GH.

Jesti tu

$$(46) \quad GH = (m^2 + R^2)(x^4 + y^4 + z^4) - 2x^2y^2(m^2 + R^2)$$
$$- 2x^2z^2(m^2 + R^2) + 2y^2z^2(m^2 + 2n^2 - R^2)$$
$$+ 4mnyz(x^2 - y^2 - z^2).$$

Z (45) poznáváme, že úplný kužel dotyčný skládá se ze tří částí 4. stupně:

$$x^4 = 0, \qquad F^2 = 0, \qquad GH = 0.$$

Část prvá, $x^4 = 0$, značí rovinu dvojné hyperboly, jako čtyrnásobnou, v souhlase s tím faktem, že dvojná křivka tato jest též dvojnou křivkou proniku ploch P a Q, tudíž zastupuje jednoduchou křivku 4. stupně, která jako řídící s vrcholem $(0, m, n)$ určuje kužel bikvadratický, jenž přešel v rovinu.

Část druhá, $F^2 = 0$ zní, jak ukazuje rovnice (44) a poslední z rovnic (43), takto:

$$(47) \qquad [(m^2 + R^2)x^2 - (my - nz)^2]^2 = 0.$$

Význam její poznali jsme v odst. 7. Bylo tam ukázáno, že výraz v závorkách, s nullou srovnán, značí obě roviny tečné v bodě $(0, m, n)$ ku ploše P. Mocnina druhá ukazuje, že sluší každou z těch rovin počítati za dvojnásobnou.

Část konečně

$$GH = 0,$$

spořádána dle mocnin mocněnce x, zní:

$$(48) \quad x^4 (R^2 + m^2) - 2x^2 [(R^2 + m^2)(z^2 + y^2) - 2mnyz] \\ + (m^2 + R^2)(y^4 + z^4) + 2(m^2 + 2n^2 - R^2) y^2 z^2 \\ - 4mnyz (y^2 + z^2) = 0.$$

Z toho jde řešením podle x^2, hledíme-li zároveň k rovnici (27),

$$x^2_{1,2} = \frac{(m^2 + R^2)(y^2 + z^2) - 2(mn \mp Rr) yz}{m^2 + R^2},$$

takže lze rovnici (48) psáti takto:

$$(49) \quad [(x^2 - y^2 - z^2)(m^2 + R^2) + 2yz(mn - Rr)] \\ . [(x^2 - y^2 - z^2)(m^2 + R^2) + 2yz(mn + Rr)] = 0.$$

Patrno z toho, že třetí část bikvadratická úplného kužele dotyčného, tak řečený vlastní kužel dotyčný, v pravdě degeneruje ve dva kužely kvadratické. Každý z nich má za rovnici jeden z obou činitelů rovnice (49) srovnaný s nullou. Počátkem soustavy jest společný střed obou kuželů, daný to bod kuželosečky dvojné.

Položíce do rovnic těch $y = \delta$, obdržíme z nich

$$(m^2 + R^2)(x^2 - z^2) + 2\delta(mn - Rr) z - (m^2 + R^2)\delta^2 = 0$$
$$(m^2 + R^2)(x^2 - z^2) + 2\delta(mn + Rr) z - (m^2 + R^2)\delta^2 = 0,$$

i jest zřejmo, že plochy kuželové obě protínají se rovinami soustavy B plochy translační v hyperbolách podobných a homothetických s hyperbolami soustavy B.

Substitucí

$$z = \varepsilon$$

dojde se obdobného výsledku na důkaz, že se plochy kuželové rovinami soustavy A protínají tolikéž v hyperbolách podobných a homothetických, tenkráte s hyperbolami soustavy A. Že vlastní plocha kuželová dotyčná, z těchto dvou kvadratických složená, prochází úběžnými dvojnými body plochy P, také jest z toho zřejmo. Obdržímeť z rovnic (49) pro $z = 0$

$$(x^2 - y^2)^2 = 0,$$

pro $y = 0$

$$(x^2 - z^2)^2 = 0,$$

jakožto rovnice čtyr plošných přímek oběma kuželům společných a úběžnými dvojnými body plochy P procházejících.

Konečně ukazuje substituce

$$x = 0,\ y = \pm Ri - m,\ z = \mp ri - n$$

do prvního činitele rovnice (49), a substituce

$$x = 0,\ y = \pm Ri - m,\ z = \pm ri - n$$

do druhého činitele jejího, dbáme-li při tom též rovnice (27), že každý z obou svrchu řečených kuželů kvadratických prochází dvěma ze čtyr kuspidalných bodů plochy P, o nichž jsme jednali koncem odst. 8.

Dosadíme-li do rovnic (49) $m = Ri$, $n = ri$, t. j. souřadnice jednoho z kuspidalných bodů plochy P, obdržíme dotyčné kužely plochy translační z tohoto bodu kuspidalného jako středu.

První z obou rovnic zní tu

$$yz = 0, \tag{50}$$

druhou z nich, poněvadž tu $m^2 + R^2 = 0$ a zároveň $mn + Rr = 0$, dlužno psáti nejprve ve tvaru

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{m^2 + R^2}{mn + Rr} + 2yz = 0$$

a pak vymeziti zlomek tam obsažený, který dosazením daných za m a n hodnot stává se výrazem neurčitým. Známým způsobem*) obdržíme tu

$$\Big/^{Ri}\Big/^{ri}\frac{m^2 + R^2}{mn + Rr} = \frac{2Rr}{R^2 + r^2},$$

načež horní rovnice nabývá tvaru

$$(x^2 - y^2 - z^2)Rr + yz(R^2 + r^2) = 0. \tag{51}$$

Z výsledků (50), (51) vychází na jevo, že se jeden z obou kuželů rovnicemi (49) daných rozpadá zde v obě singularné roviny, daným kuspidalným bodem procházející, takže zbývá jediný vlastní kužel kvadratický, daný rovnicí (51).

---

*) Sr. Dr. F. J. Studnička: „Základové vyšší mathematiky“, díl I., pag. 87.

11. Rovnice (IV.) v odst. 5. uvedená, která pro $P = 0$ ihned dává $M^2 = 0$ jako rovnici dvojné kuželosečky plochy P, o níž v odst. 7. bylo jednáno, vede po náležité úpravě také k *bitangentialným rovinám* plochy uvažované. Uvedeme-li totiž rovnici tu*) příslušným doplněním na obou stranách na tvar

$$\text{(V)} \qquad (M + 2\lambda P^2)^2 = 4P^2 (N + \lambda M + \lambda^2 P^2),$$

při čemž λ znamenej libovolnou konstantu, značí ozávorkovaný výraz na pravé straně, srovnáme-li jej s nullou, plochu druhého stupně, která se translační plochy dotýká v křivce čtvrtého stupně, podle níž sama seče plochu

$$(52) \qquad M + 2\lambda P^2 = 0.$$

Určíme-li nyní λ tak, aby byla plocha

$$(53) \qquad N + \lambda M + \lambda^2 P^2 = 0$$

plochou kuželovou, bude každá její plošná přímka plochu (52) protínati ve dvou bodech, pročež tedy obsahovati dva body řečené křivky čtvrtého stupně, z čehož následuje, že bude tato kuželová plocha obalovou bitangentialných rovin plochy P. Přihlédneme-li k významu veličin N, M, P z rovnice na př. (4) váženému, a dosadíme-li příslušné hodnoty do rovnice (53), nabude tato tvaru následujícího:

$$(54) \quad \lambda(\lambda + 1) x^2 + \lambda y^2 - (\lambda + 1) z^2 + r^2 - \lambda (R^2 - r^2) = 0.$$

Podmínka, aby tato plocha byla plochou kuželovou, vyjadřuje se známým determinantem

$$\begin{vmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 - \lambda(R^2 - r^2) \end{vmatrix} = 0$$

a zní tedy kratčeji

$$\lambda^2 (\lambda + 1)^2 [r^2 - \lambda (R^2 - r^2)] = 0.$$

---

*) Salmon-Fiedler: „Analytische Geometrie des Raumes“, II. díl, I. vyd. pag. 358.

Je z toho zjevno, že plocha (53) v pěti případech stává se plochou kuželovou.

Pro $\lambda_{1,2} = 0$ plyne z rovnice (54)

$$z^2 - r^2 = 0,$$

plocha kuželová zvrhá se tu tedy po dvakrát ve dvě nám již z 6. odst. známé tečné roviny singularné, pro $\lambda_{3,4} = -1$ vychází dosazením do rovnice (54) pokaždé

$$y^2 - R^2 = 0;$$

i zde zvrhá se plocha kuželová po dvakrát ve dvě roviny singularné, známé z odst. 6.

Pro λ konečně, plynoucí z rovnice

$$r^2 - \lambda (R^2 - r^2) = 0,$$

tedy pro

$$\lambda_5 = \frac{r^2}{R^2 - r^2},$$

plyne z rovnice (54)

$$R^2 r^2 x^2 + r^2 (R^2 - r^2) y^2 - R^2 (R^2 - r^2) z^2 = 0, \tag{55}$$

rovnice to vlastního kužele bitangentialného, jehož střed jest v počátku soustavy, tudíž ve středu plochy P. Jsa dotyčným kuželem plochy té, prochází (sr. konec odst. 10.) jejími body dvojnými i body kuspidalnými.

Jest patrno, že podobným způsobem nabýti lze zcela obdobných výsledků i při všech ostatních plochách translačních, určených rovnicemi (4) až (9).

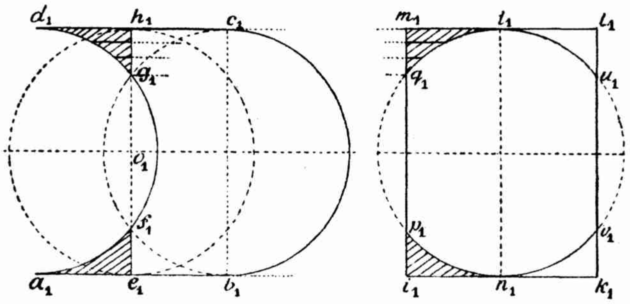
Každá tečná rovina kužele bitangentialného, jaký podává rovnice (55), jest bitangentialnou rovinou plochy P, dotýkajíc se jí ve dvou bodech, dle jejího středu souměrných. Rovina taková seče plochu P v křivce čtvrtého stupně, která má čtyři body dvojné, dva totiž ve dvojné kuželosečce, další dva v oněch dvou bodech, v nichž se plochy P dotýká. Křivka taková však, jak známo, zvrhá se ve dvě kuželosečky.

Takto poznáváme, že translační plochy dané rovnicemi (4) až (9) mají každá mimo dvě známé soustavy kuželoseček, z nichž jedny jsou shodné a homothetické s křivkou A, druhé s křivkou B, ještě třetí soustavu kuželoseček v rovinách středem plochy procházejících, jež určitý kužel kvadratický obalují.

Netřeba připomínati, že veškeré výsledky, jež jsme v pojednání tomto odvodili pro třikrát normalně souměrné plochy translační, snadně dají se applikovati i na *všechny* ostatní *centrické translační plochy čtvrtého stupně.*

Některé poznámky o křivoznačných křivkách těchto ploch ponecháváme si k jiné příležitosti.

12. Na závěrek budiž vyšetřen krychlový obsah tělesa, omezeného plochou kruho-kruhovou a vzniklého tím, že by se kruh B o poloměru r svým středem posouval po kružnici A, poloměru R, maje rovinu kolmou k její rovině. Ploše kruho-kruhové, již tu vytvoří hrana kruhu tvořícího, přísluší v soustavě souřadné pravoúhlé známá rovnice (4), mají-li A, a B k rovinám souřadným známou polohu, jakáž se v odst. 3. vypisuje.



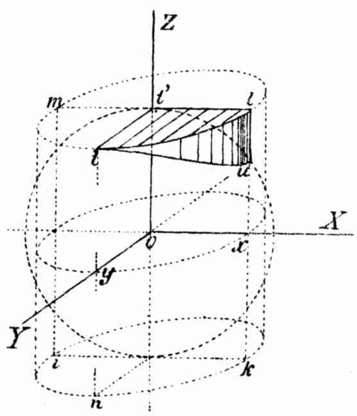
Obr. 2.

Celé těleso skládá se ze dvou částí shodných, dle roviny dvojné hyperboly normalně souměrných, i spočívá jediná obtíž řešení v tom, nalézti krychlový obsah jednoho z obou stejných cípů v připojeném náčrtku (obr. 2.) čárkovaných. Jinak jest práce snadná. Rovná se zajisté krychlový obsah části *abcd* obsahu přímého válce kruhového *iklm* o poloměru r a výšce $2R$, takže jest

$$(56) \qquad O_{abcd} = 2\pi R r^2.$$

Do tohoto válce uveďme transformací, jakou sám vznikl z tělesa *abcd*, též obě části *aef*, *dgh*,*) i jest z obr. 2. patrno, že je z něho vytíná válec kruhový přímý o poloměru R, jehož osa osu onoho kolmo rozpoluje.

Jde nyní o integraci takové části. Volíme-li (obr. 3.) osu válce *iklm* za osu Z a střed jeho v počátku soustavy, lze osu válce druhého voliti v ose Y. Za příčinou souměrnosti obou válců k rovinám souřadným stačí nyní zabývati se kubaturou jen polovice části, v obr. 2. *mtq* nebo *tlu* zvané, tudíž tělesa *tt'lu*



Obr. 3.

(obr. 3.), omezeného částmi oblin obou válců (*tlu*, *tt'u*), čtvrtkruhem *tt'l* a rovnou stěnou *t'lu*. Značíme-li jeho obsah O_{tu}, obsah tělesa *xoyut't* pak O_{xt}, bude především

$$(57) \qquad O_{tu} = \frac{\pi r^2 R}{4} - O_{xt}.$$

Jest pak

$$O_{xt} = \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2}\, dy = \int_0^r \sqrt{R^2 - x^2}\, \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Integralu tomu násobením a dělením součinem obou odmocnin za znamením integrace lze dáti tvar

*) $aef = inp$; $dgh = mqt$.

$$O_{xt} = \int_0^r \frac{x^4 dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(r^2-x^2)}} - (R^2+r^2)\int_0^r \frac{x^2 dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(r^2-x^2)}}$$

$$+ R^2r^2 \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2)(r^2-x^2)}}$$

čili kratčeji:

(58) $$O_{xt} = I_1 - (R^2+r^2)\, I_2 + R^2r^2 I_3,$$

vložíme-li I_1, I_2, I_3 za příslušné integraly.

Podle známého vzorce redukčního vychází však

$$I_1 = \Big/_0^r \frac{x}{3}\sqrt{R^2r^2 - x^2(R^2+r^2)+x^4} + \frac{2}{3}(R^2+r^2)\, I_2 - \frac{R^2r^2}{3} I_3,$$

dosazením čehož do (58) plyne:

(59) $$O_{xt} = \Big/_0^r \frac{x}{3}\sqrt{R^2r^2 - x^2(R^2+r^2)+x^4} - \frac{1}{3}(R^2+r^2) I_2 + \frac{2}{3} R^2r^2 I_3.$$

Nutno tedy jen určiti I_2 a I_3.

Substitucí

(60) $$x = r \sin \varphi$$

vychází tu

(61) $$I_3 = \frac{1}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

pak $k = \frac{r}{R}$, podobně pak

$$I_2 = \frac{r^2}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

čili užitím vhodné stejniny:

$$(62) \qquad I_2 = \frac{r^2}{Rk^2}\left[RI_3 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi\right].$$

Substitucí z rovnic (62) a (61) do rovnice (59) obdržíme, prohlédajíce též při prvém členu k relaci (60), toto:

$$(63) \qquad O_{xt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6} Rr^2 \sin 2\varphi \,.\, \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

$$- \frac{1}{3} R(R^2 - r^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

$$+ \frac{1}{3} R(R^2 + r^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

při čemž $k = \frac{r}{R}$.

Vyjadřuje se tudíž hledaný obsah krychlový elliptickým integralem 1. a 2. druhu.

Poněvadž pak (srv. Dr. F. J. Studnička: „Základové vyšší mathematiky", díl II., pag. 70. a 71.)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1.k^2}{2.4}\right)^2 - 5\left(\frac{1.3.k^3}{2.4.6}\right)^2 - \ldots\right],$$

obdrží se konečně, jelikož prvý sčítanec pravé strany rovnice (62) rovná se nulle, pro hledaný krychlový obsah toto:

$$O_{xt} = -\frac{R}{6}(R^2-r^2)\pi\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r^2}{R^2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{r^4}{R^4}+\ldots\right]$$
$$+\frac{R}{6}(R^2+r^2)\pi\left[1-\left(\frac{r}{2R}\right)^2-3\left(\frac{1.r^2}{2.4.R^2}\right)^2-5\left(\frac{1.3.r^3}{2.4.6R^3}\right)^2-\ldots\right].$$

Obsah celého tělesa, vzniklého translací kruhu, bude tedy, viz (57) a (58),

$$O = 4\pi Rr^2 - 8\,O_{tu} = 2\pi Rr^2 + 8\,O_{xt}$$

$$=\frac{2}{3}\pi R\left\{\begin{matrix}3r^2+2(R^2+r^2)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r^2}{R^2}-3\left(\frac{1}{2.4}\right)^2\frac{r^4}{R^4}-\ldots\right]\\ -2(R^2-r^2)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r^2}{R^2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{r^4}{R^4}+\ldots\right]\end{matrix}\right\}.$$

V Paříži, 6. prosince 1898.

O osách kuželosečky.

Napsal

V. Jeřábek,
professor v Brně.

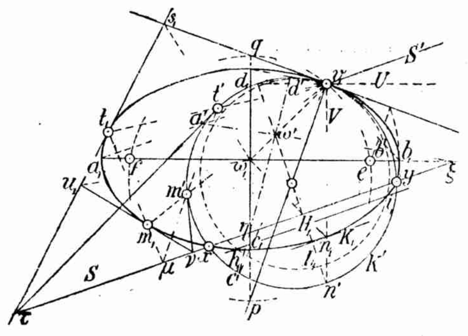
1. Kružnice K′, ležící v průmětně π, buďiž stopou a její bod v_1 průmětem vrcholu v plochy kuželové vK′. Danou přímkou S, která má s kružnicí K′ společné dva body x, y, položená rovina ϱ nechť protíná plochu vK′ v kuželosečce K. Bod m' kružnice K′ budiž stopou jedné povrchové přímky vm' kužele vK′, která seče rovinu ϱ v bodě m, jehož průmět m_1 jest obsažen v průmětu v_1m' přímky vm'. Průmět K_1 kuželového řezu K prochází body m_1, x, y a dotýká se kruhové stopy K′ v bodě v_1. K_1 a K′ jsou v centr. kollineaci dle středu v_1 a osy S_1.

Kterákoliv rovina s průmětnou π rovnoběžná protíná plochu kuželovou vK′ v kružnici L a rovinu ϱ v přímce H rovnoběžné s osou kollineace S. Body h, i, v nichž H a L se protínají, přináležejí kuželovému řezu K, pročež seče průmět H_1

přímky H, který jest s přímkou H i s osou S rovnoběžný, průmět L_1 kružnice L v bodech h_1, i_1 kuželosečky K_1. Tím jsme dokázali známou větu:

Každá kružnice roviny π, která dotýká se kuželosečky K_1 v bodě v_1, má s ní ještě dva body společné h_1, i_1 (realné, imaginárné nebo splývající), jejichž spojnice jest stálého směru S.

Splynou-li body h_1, i_1 v jediný bod n_1, stane se H_1 společnou tečnou kružnice L_1 a kuželosečky K_1, přímka v_1n_1 jest s jednou osou kuželosečky K_1 rovnoběžna a tečny kuželosečky K_1 v bodech v_1 a n_1 svírají s tetivou v_1n_1 a proto i s osami kuželosečky stejné úhly. Pročež:



Osy kuželosečky K_1 jsou rovnoběžny se symetrálami U, V úhlů, které tvoří směr S' osy kollineace S s tečnou kuželosečky K_1 ve středu kollineace v_1).*

2. *Kružnice K' dotýká se kuželosečky K_1 v bodě v_1; sestrojiti body x, y, v nichž K_1 a K' se protínají.*

a) Kuželosečka K_1 budiž dána dvěma tečnami s_1v_1, s_1t_1, body dotyčnými v_1, t_1 a bodem m_1.

---

*) K témuž výsledku centr. kollineací přichází Wiener (viz Wiener Lehrbuch der darstellenden Geometrie, erster Band pag. 263.). Věta tato jest zvláštním případem známé věty, jejíž analytický důkaz podávám v poznámce ku článku tomuto.

Považujme v_1 za střed kollineace křivek K_1, K' a hledejme osu kollineace S, která kružnici K' v hledaných bodech x, y protíná.

Za tím účelem sestrojme k bodům t_1, m_1 stejnolehlé body t', m' v kružnici K' dle středu v_1. Tečna kružnice K' v bodu t' protíná stejnolehlou tečnu s_1t_1 kuželosečky K_1 v bodě τ, a sestrojíme-li průsečík μ stejnolehlých tetiv t_1m_1, $t'm'$, jest $\mu\tau$ osou kollineace S.

b) Kuželosečka jest dána tečnou s_1v_1, *bodem dotyčným* v_1 *a třemi body* m, n, p.

Budiž opět v_1 středem kollineace křivek K_1 a K', sestrojme k bodům m_1, n_1, p_1 stejnolehlé body m', n', p' v kružnici K' dle středu v_1, pak jest osa kollineace trojúhelníků $m_1n_1p_1$ a $m'n'p'$ hledanou osou S.

3. *Sestrojiti osy kuželosečky* K_1, *která určena jest bodem* m_1, *dvěma tečnami* s_1t_1, s_1v_1 *a jejími body dotyčnými* t_1, v_1.

Úlohu tuto, která v desk. geometrii často se vyskytuje, lze přímo řešiti takto:

Narýsujme kteroukoliv kružnici K', dotýkající se kuželosečky K_1 v bodu v_1 a sestrojme dle úlohy (2., *a*) osu kollineace S. Symetrály U, V úhlů, které $S' \parallel S$ tvoří s tečnou s_1v_1, stanoví, jak již dříve bylo ukázáno, směry os kuželosečky K_1. Budiž u_1 průsečíkem tečen m_1v a s_1t_1 kuželosečky K_1; těžnice $s_1\omega_1$ a $u_1\omega_1$ trojúhelníků $s_1t_1v_1$ a $u_1t_1m_1$ protínají se ve středu ω_1 kuželosečky K_1. Vedeme-li tedy středem ω_1 rovnoběžky se symetrálami U, V, obdržíme osy a_1b_1, c_1d_1 co do polohy. Sestrojme ku středu ω_1 stejnolehlý bod ω' v kruhu K' dle středu v_1 a osy S a buďtež ξ a η body, v nichž S protíná osy kuželosečky K_1. Sestrojíme-li v kruhu K' tetivy $a'\omega'b'\xi$ a $c'\eta\omega'd'$ stejnolehlé s osami $a_1\omega_1b_1\xi$, $c_1\eta\omega_1d_1$ dle středu v_1 a osy S, lze k bodům a', b', c', d' sestrojiti dle téhož středu a téže osy stejnolehlé vrcholy a_1, b_1, c_1, d_1.

Je známo, že kružnice opsaná trojúhelníku pqv_1, který omezen jest pobočnou osou, tečnou a příslušnou normálou bodu v_1, prochází ohnisky e, f kuželosečky K_1 a na tom se zakládá sestrojení těchto ohnisek. Promítneme-li ohnisko e na jednu tečnu $s_1 v_1$, jest vzdálenost průmětu ohniska od středu ω_1 rovna polovině $\omega_1 a_1$ fokální osy kuželosečky a na základě tom lze sestrojiti napřed vrcholy a_1, b_1 a potom c_1, d_1.

Podobně, jako v úloze předešlé, lze sestrojiti osy kuželosečky ještě v jiných případech, na př. je-li kuželosečka dána tečnou, bodem dotyčným a třemi body*); průměrem, směrem průměru sdruženého a bodem nebo tečnou atd.**)

Poznámka. Protější strany čtyřúhelníka, jehož vrcholy na kuželosečce určuje kterákoliv kružnice, tvoří s osami kuželosečky stejné úhly.

Větu tuto lze analyticky snadno dokázati takto:

Ellipsa a dvě protilehlé strany vepsaného čtyřúhelníka mějtež rovnice:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \tag{1}$$

$$y + mx + u = 0, \tag{2}$$

$$y + m_1 x + u_1 = 0. \tag{3}$$

Rovnice kuželosečky, jdoucí body, v nichž přímky (2) a (3) ellipsu (1) protínají, jest

$$\lambda\,(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + (y + mx + u)\,(y + m_1 x + u_1) = 0.$$

Uvedeme-li rovnici tuto na tvar

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0, \tag{4}$$

shledáme především, že

$$\mathrm{B} = m + m_1.$$

Aby rovnice (4) příslušela kruhu, musí

---

*) Viz Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, erster Band, pag. 294.

**) Jiným způsobem jednoduše a též přímo řeší uvedené a jiné úlohy prof. Karel Pelz ve článku „Über die Axenbestimmung der Kegelschnitte“, uveřejněném ve zprávách Vídeňské akademie věd v r. 1876.

$$A = C \quad a \quad B = m + m_1 = 0$$

čili

$$m = - m_1,$$

pročež tvoří různoběžky (2) a (3) s osou fokální ellipsy stejné úhly.

Podobně lze vésti důkaz o hyperbole a parabole.

Věstník literární.

Arithmetika pro II. třídu škol realných. *Sepsal František Tůma*, prof. c. k. gymnasia v Č. Budějovicích. Cena váz. 85 kr. V Praze, 1899. Nakladatel I. L. *Kobr*, knihkupectví.

Tato učebnice tvoří další část Arithmetiky pro nižší třídy realné, kterou upravuje prof. Tůma dle své učebnice gymnasijní. O prvé části přinesli jsme zprávu v tomto roč. Čas. str. 46. Učebnice vyznačuje se důsledným šetřením *jednotného postupu* při výkladu operací početních. Učivo třídy druhé, jmenovitě počet závěrkový a nauka o úměrách s upotřebením k řešení úloh počtu trojčlenného, procentového, úrokového a diskontového, poskytuje ovšem mnohostrannou příležitost zachovávati jednotu v postupu. Ve škole docílí se tím jistoty a hotovosti v počítání a zabezpečí se úspěch. Učebnice Tůmova podává pevný základ; pokud dále učení rozšířiti a prohloubiti potřebným býti se jeví, zůstaveno jest náhledu učitele. Úzkostlivé šetření jednotnosti návodu nelze schvalovati tam, kde duch úlohy jí se příčí. Máme tu na mysli úlohy počtu procentového, úrokového atd., o jichž řešení již předešle měli jsme příležitost vysloviti se (str. 46.). Nemůže nám zamlouvati se řešení na př. úl. 1. § 28: „Vypočítati základ, jehož výnos činí po 5% 48 jednotek“, jež podáno takto:

K 5 jednotkám výnosu jest základem 100 jednotek

„ 1 „ „ „ „ $\frac{100}{5}$ „

„ 48 „ „ „ „ $\frac{100 . 48}{5}$ jednotek.

Proč nepočítati raději 100% základu, známe-li 5% jeho? V připojených úkolech jest k podobnému řešení sice přihlíženo, bylo by si však přáti, aby tímto návodem byl na vzor příklad vypočítán. *V příkladech* a *úkolech* k procvičení a k opakování učiva spočívá vůbec jádro Tůmovy Arithmetiky. To jsou úkoly propočítané, pečlivě volené, které neobtěžují rozvláčností a zbytečným ballastem velkých číslic. Úlohy jsou rozmanité a u velkém výběru. Z předu nalézáme 67 úkolů k opakování zlomků; ku každé stati připojeno 15—30 úkolů (při počtu trojčlenném dokonce 83 úkoly) a závěrek tvoří 83 úkoly k opakování učiva třídy druhé.

Postup učiva jest netoliko v souhlasu s novou učební osnovou realní, ale též s nejnovějšími instrukcemi. Poněvadž se tam nečiní výslovná zmínka o sečítání a odčítání čísel zkrácených, nenalezáme těchto úkonů ani v Arithmetice Tůmově, čehož pro neúplnost sluší litovati. Ve vzorném příkladu 2. (str. 13.) nelze při převodu roku tropického (= 356·2422 dnům) bráti číslo za úplné; vypočítané vteřiny nejsou pak ani v desítkách zaručeny. Rovněž nezdařený jest vzorný př. 1. (str. 24.), kde 63 jitra 1240 čtv. sáhů převésti se mají v hektary a ary (do desetin). Vypočítáno totiž, že 63 *j.* = 3625·4 *a*, k tomu pak nadbytečně přesně, že 1240 čtv. sáhů = 4459·8 m^2, místo 44·6 m^2. V souhlasu s výměrem podaným v § 20., 2. o veličinách úměrných, jeví se případnějším mluviti v úloze počtu trojčlenného o *„dvou hodnotách* veličiny nezávislé," resp. závislé, místo o *„dvou veličinách* nezávislých," resp. závislých. Místo „čtvercový" metr (str. 20.) užíváme na školách realných výrazu „čtverečný" metr. Vzetí kilogramu za jednotku váhy (str. 22.) vede při označení *dkg* k nesprávnému výkladu. Uvedené výtky jsou ovšem rázu podřízeného. Proto vzhledem k vytknutým přednostem doporučiti lze tuto učebnici pozornosti pp. kollegů co nejvřeleji.

Prof. *Jos. Pour.*

Úlohy.

Úloha 30.

V pravidelném n-úhelníku P jest vrchol A spojen se středem M strany BC, vrchol B se středem N strany CD, vrchol C se středem O strany DE atd. Přímkami AM, BN, CO, ... omezen jest pravidelný n-úhelník P', jehož vrcholy jsou P, Q, ...

Je-li a stranou, α úhlem n-úhelníka P, jest

$$P' = \frac{na^2}{4} tg \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{(1 - 2 \cos \alpha)^2}{5 - 4 \cos \alpha}.$$

Jakou hodnotu má P' pro n = 3, 4 nebo 6?

Prof. *V. Jeřábek.*

Řešení. (Zaslal p. *Ferd. Šob*, stud. VIII. tř. g. v Brně.) Trojúhelníky ABP, BCL, ... jsou shodny, pročež

$$P' = P - n \triangle ABP,$$

čili

$$P' = \frac{na^2}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - n \triangle ABP. \tag{1}$$

Ježto trojúhelníky ABM a BPM jsou podobny, jest

$$\frac{\triangle ABM}{\triangle BPM} = \frac{AM^2}{BM^2} = \frac{a^2 + \frac{a^2}{4} - a^2 \cos \alpha}{\frac{a^2}{4}},$$

$$\frac{\triangle ABM}{\triangle BPM} = \frac{5 - 4 \cos \alpha}{1}.$$

Odečteme-li v úměře poslední od členů horních členy dolní, bude

$$\frac{\triangle ABP}{\triangle BPM} = \frac{4(1 - \cos\alpha)}{1},$$

a přičteme-li ku členům dolním členy horní, obdržíme

$$\frac{\triangle ABP}{\triangle ABM} = \frac{4(1 - \cos\alpha)}{5 - 4\cos\alpha}.$$

Avšak

$$\triangle ABM = \frac{a^2}{4}\sin\alpha,$$

pročež

$$\triangle ABP = \frac{a^2(1 - \cos\alpha)\sin\alpha}{5 - 4\cos\alpha}.$$

Dosadíme-li hodnotu za $\triangle ABP$ do rovnice (1), bude

$$P' = \frac{na^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{na^2(1 - \cos\alpha)\sin\alpha}{5 - 4\cos\alpha}$$

$$= \frac{na^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left[1 - \frac{8(1 - \cos\alpha)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{5 - 4\cos\alpha}\right]$$

$$= \frac{na^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,\frac{5 - 4\cos\alpha - 4(1 - \cos^2\alpha)}{5 - 4\cos\alpha},$$

a konečně

$$P' = \frac{na^2}{4}\,\frac{(1 - 2\cos\alpha)^2}{5 - 4\cos\alpha}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Pro $n = 3$ jest $P' = 0$,

pro $n = 4$ jest $P' = \frac{1}{5}a^2$,

pro $n = 6$ jest $P' = \frac{6}{7}\sqrt{3}a^2$.

Úloha 31.

Přímému trojbokému hranolu jest vepsána koule všech stěn se dotýkající. Jak veliký jest krychlový obsah hranolu, jsou-li dány úhly podstavy

$$\alpha = 62^0 42' 30'',\ \beta = 44^0 16' 12''$$

a poloměr $r = 5{\cdot}1429$ kruhu podstavě opsaného?

Prof. *V. Jeřábek.*

Řešení. (Zaslal p. *Jindřich Ševčík*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Obsah hranolu jest

$$K = 2\,\Delta\,\varrho,$$

kdež Δ značí obsah podstavy a ϱ poloměr kruhu podstavě vepsaného.

Dvojnásobná plocha trojúhelníka

$$2\,\Delta = bc \sin\alpha = 4\,r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

tedy

$$\Delta = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

a ježto též

$$\Delta = \frac{\varrho}{2}(a + b + c) = r\varrho\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

čili

$$\Delta = 4\,r\varrho \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2},$$

jest

$$2\varrho = \frac{r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}},$$

pročež

$$K = \frac{2r^3 \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma}{\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}} = 150{\cdot}64 \text{ dm}^3.$$

Úloha 32.

Dán jest pravidelný osmistěn o hraně h a bod mající od středu jeho vzdálenost k. Dokažte, že součet zčtvercovaných vzdáleností bodu toho od vrcholů osmistěnu jest

$$S = 3h^2 + 6k^2.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Šubrt*, stud. VI. tř. r. v Písku.)

Pravidelný osmistěn má 3 osy navzájem kolmé, kteréž spojují protější jeho vrcholy. Pokládejme tyto osy za souřadné a buďtež souřadnice daného bodu x, y, z. Potom jest

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2$$

a vzdálenosti bodu toho od vrcholů osmistěnu stanoveny rovnicemi

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (x - a)^2 + y^2 + z^2 \\ v_2^2 &= (x + a)^2 + y^2 + z^2 \\ v_3^2 &= x^2 + (y - a)^2 + z^2 \\ v_4^2 &= x^2 + (y + a)^2 + z^2 \\ v_5^2 &= x^2 + y^2 + (z - a)^2 \\ v_6^2 &= x^2 + y^2 + (z + a)^2, \end{aligned}$$

značí-li a polovici osy osmistěnu, a je-li tedy

$$h^2 = 2a^2.$$

Sečteme-li hodnoty v^2, obdržíme

$$S = 6\,(x^2 + y^2 + z^2) + 6a^2$$

čili

$$S = 3h^2 + 6k^2.$$

Úloha 33.

Jsou-li a, b, c délky hran pravoúhlého rovnoběžnostěnu a k vzdálenost bodu nějakého od středu rovnoběžnostěnu, který jest součet zčtvercovaných vzdáleností bodu toho od vrcholů rovnoběžnostěnu?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Liška,* stud. VII. tř. g. v Brně.)
Středem rovnoběžnostěnu pravoúhlého procházejí kolmo ku stěnám jeho osy X, Y, Z.

Buďtež $2a$, $2b$, $2c$ délky hran rovnoběžnostěnu, k vzdálenost bodu daného od středu a x, y, z jeho souřadnice.

Potom jsou vzdálenosti bodu od vrcholů určeny rovnicemi

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \\ v_2^2 &= (x + a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \\ v_3^2 &= (x - a)^2 + (y + b)^2 + (z - c)^2 \\ v_4^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z + c)^2 \\ v_5^2 &= (x + a)^2 + (y + b)^2 + (z - c)^2 \\ v_6^2 &= (x + a)^2 + (y - b)^2 + (z + c)^2 \end{aligned}$$

$$v_7^2 = (x - a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2$$
$$v_8^2 = (x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2.$$

Součet hodnot v^2 jest tedy

$$S = 8(a^2 + b^2 + c^2) + 8(x^2 + y^2 + z^2)$$

čili
$$S = 2u^2 + 8k^2,$$
kdež
$$u^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

značí dvojmoc úhlopříčky rovnoběžnostěnu.

Úloha 34.

Bodem (3, 6) vésti přímku tak, aby trojúhelník omezený osami X, Y a touto přímkou měl plochu minimální.

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Řešení. (Zaslal p. *R. Bartoš*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Označíme-li úseky přímky na osách písmeny a, b a plochu trojúhelníka P, máme rovnice

$$\frac{3}{a} + \frac{6}{b} = 1$$
$$ab = 2\mathrm{P},$$

z nichž vyloučením b plyne

$$3a^2 - a\mathrm{P} + 3\mathrm{P} = 0,$$

tedy

$$a = \frac{1}{6}\left[\mathrm{P} \pm \sqrt{\mathrm{P}^2 - 36\mathrm{P}}\right].$$

Má-li býti a realné, musí býti

$$\mathrm{P}^2 - 36\mathrm{P} \geqq 0,$$

pročež minimálná hodnota jest buď $\mathrm{P} = 0$ (přímka jde počátkem), aneb $\mathrm{P} = 36$; v tomto případě jest pak

$$a = 6,\ b = 12.$$

Jiné řešení. Vyjádříme-li

$$\mathrm{P} = \frac{3a^2}{a-3},$$

můžeme ku stanovení minima užiti methody Fermatovy, kladouce

$$\frac{3a^2}{a-3} = \frac{3a_1^2}{a_1-3},$$

z čehož $$(a - a_1)(aa_1 - 3a - 3a_1) = 0.$$

Položíme-li $a = a_1$, máme

$$a^2 - 6a = 0,$$

tedy jako dříve buď $a = 0$ aneb $a = 6$.

Poznámka redakce. Dány-li přímky A, B a mimo ně bod m, tu ze všech přímek jdoucích bodem m omezuje s rameny A, B nejmenší trojúhelník ta, jejíž úsečka mezi A, B obsažená jest bodem m půlena (Viz: Strnad, Geometrie pro vyšší školy realné, 2. vyd. str. 260).

Úloha 35.

Do čtverce o straně a vepsány jsou čtyry paraboly, které dotýkají se vždy dvou a dvou stran čtverce ve vrcholech. Spojíme-li přímkami průsečné body těchto parabol, dostaneme čtverec, do něhož vepsány opět paraboly. Pokračujeme-li tak dále, jak velký jest součet ploch všech čtverců?

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Hýbner*, stud. VIII. tř. g. v Litomyšli.)

Vrchol každé z těchto 4 parabol půlí vzdálenost mezi středem čtverce a jeho vrcholem. Označíme-li tedy stranu čtverce písmenem a, jest parametr každé z těchto parabol roven polovici úhlopříčky

$$p = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Volíme-li úhlopříčku za osu X, střed čtverce za počátek, jest rovnice paraboly

$$y^2 = a\sqrt{2}\left(x + \frac{a}{4}\sqrt{2}\right).$$

Pro průsečný bod obou parabol jest $y = x$: proto jest pak

$$y^2 - ay\sqrt{2} - \frac{a^2}{2} = 0,$$

tudíž

$$y = \frac{a}{2}\sqrt{2} \pm a.$$

V naší úloze jde o hodnotu příslušnou ku znaménku spodnímu. Jest pak absolutní hodnota poloviční strany čtvercové $a - \frac{a}{2}\sqrt{2}$, tutíž strana čtverce $a_1 = 2a - a\sqrt{2}$ a plocha čtverce

$$P_1 = a_1^2 = (2a - a\sqrt{2})^2 = a^2(6 - 4\sqrt{2}).$$

Plocha druhého čtverce jest pak

$$P_2 = a_1^2(6 - 4\sqrt{2})$$

atd. Součet všech ploch P, P_1, P_2, $P_3, \ldots$ bude

$$S = a^2[1 + (6 - 4\sqrt{2}) + (6 - 4\sqrt{2})^2 + \ldots],$$

pročež

$$S = \frac{a^2}{4\sqrt{2} - 5}.$$

Úloha 36.

Do ellipsy jest vepsán kruh středem procházející. a) Jak velký jest poloměr kruhu toho, jsou-li a, b poloosy ellipsy? b) V kterém poměru jsou osy ellipsy, má-li kruh vepsaný lineárnou výstřednost za průměr?

Prof. *V. Jeřábek.*

Řešení. (Zaslal p. *Quido Vetter*, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.)

1. Rovnice ellipsy a kruhu, dotýkajícího se osy Y v počátku O, jest

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$x^2 + y^2 - 2rx = 0.$$

Hledejme průsečné body obou těchto křivek. Řešením rovnic předešlých obdržíme pro x^2, když y vyloučíme, rovnici

$$x^2(b^2 - a^2) + 2rxa^2 - a^2b^2 = 0.$$

Aby křivky se dotýkaly, musí rovnice tato pro x míti dva stejné kořeny, což vede k podmínce

$$r^2a^4 + a^2b^2(b^2 - a^2) = 0,$$

odkudž

$$r = \frac{be}{a}.$$

2. Je-li $2r = e$, tedy $r = \frac{e}{2}$,

jest

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}.$$

Úloha 37.

Ustanoviti jest plochu rovnoběžníka omezeného tečnami kolmými k asymptotám hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Kitzberger*, stud. VIII. tř. g. v Domažlicích.)

Hyperbola $\quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

má asymptoty $\quad bx \mp ay = 0.$

Rovnice tečny v bodě (x_1, y_1) jest

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2,$$

tudíž směrnice její

$$A = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

Má-li býti tečna kolmou k asymptotě, třeba vyhověti podmínce

$$\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = \mp\frac{a}{b},$$

zároveň

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

Pro jednu z tečen obdržíme dotyčný bod

$$x_1 = \frac{a^3}{\sqrt{a^4 - b^4}}, \quad y_1 = \frac{b^3}{\sqrt{a^4 - b^4}};$$

úseky tečny na osách souřadných jsou

$$m = \frac{a^2}{x_1} = \frac{\sqrt{a^4 - b^4}}{a}, \quad n = \frac{b^2}{y_1} = \frac{\sqrt{a^4 - b^4}}{b}.$$

Obsah kosočtverce omezeného tečnami kolmými k asymptotám jest tedy

$$K = 2mn = \frac{2(a^4 - b^4)}{ab}.$$

Úloha 38.

Dána jest hyperbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$; v ní vytčeny body protější

$$m(x_1, y_1),\ n(-x_1, -y_1).$$

Bodem m vedena přímka M kolmá k jedné asymptotě, bodem n přímka N kolmá ke druhé asymptotě; které jest geom. místo průsečíku p přímek M a N?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Skála*, stud. VIII. tř. g. v Praze.) O souřadnicích bodů daných platnost má rovnice

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2;$$

kolmice vedené k asymptotám vyjádřeny jsou rovnicemi

$$y - y_1 = -\frac{a}{b}(x - x_1)$$

$$y + y_1 = \frac{a}{b}(x + x_1).$$

Abychom z těchto tří rovnic vyloučili x_1, y_1, sečtěme poslední dvě aneb odečtěme druhou od třetí; tím obdržíme

$$x_1 = \frac{by}{a}, \quad y_1 = \frac{ax}{b}.$$

Vložíce pak tyto hodnoty do rovnice první, nabudeme žádané rovnice místa geometrického

$$b^6y^2 - a^6x^2 = a^4b^4;$$

místem tím jest tedy zase hyperbola.

Úloha 39.

V rouře barometrické o průřezu 1 cm^2 stojí rtuť do výše 75 cm; prostor prázdný nad rtutí obnáší 10 cm. Jak klesne sloupec rtuťový, když vnikne do roury 1 cm^3 vzduchu?

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Lang,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Klesne-li rtuť o x *cm,* bude napjetí vzduchu p stanoveno rovnicí

$$(10 + x)p = 75,$$

z čehož

$$p = \frac{75}{10 + x}.$$

Protože jest rovnováha mezi vzduchem vnějším z jedné a vzduchem vnitřním i sloupcem rtuťovým ze strany druhé, jest

$$\frac{75}{10 + x} + 75 - x = 75,$$

z čehož

$$x^2 + 10x - 75 = 0,$$

$$x = -5 \pm 10.$$

Úloze vyhovuje positivní hodnota

$$x = 5\,cm.$$

Úloha 40.

Úhel inklinační magnetky na jistém místě jest i. Zavěsíme-li na konec nad horizontem vyčnívající m gramů, uzavírá magnetka úhel α s rovinou vodorovnou. Jaké závaží nutno zavěsiti, aby magnetka stála horizontálně?

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Toman,* stud. VIII. tř. g. v Třebíči.)

Označíme-li délku magnetky $2l$ a horizontální složku zemského magnetismu H, a uvážíme-li, že otáčivý moment zemského magnetismu rovná se momentu váh hmot, máme podmínky

$$2Hl \sin(i - \alpha) = mgl \cos \alpha$$

$$2Hl \sin i = m'gl,$$

z nichž vyplývá hledaná váha

$$m' = \frac{m \sin i \cos \alpha}{\sin (i - \alpha)} .$$

Úloha 41.

Řešiti rovnici

$$\frac{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}}{ab} + \frac{\sqrt{(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)}}{bc}$$

$$+ \frac{\sqrt{(x^2 - c^2)(x^2 - a^2)}}{ca} = 1 .$$

Který význam má x, značí-li a, b, c délky stran trojúhelníka?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Lang*, stud. VIII. tř. g. v Brně.) Zdvojmocníme-li rovnici danou, píšíce ji v podobě

$$a \sqrt{(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)} + b \sqrt{(x^2 - c^2)(x^2 - a^2)} = abc$$
$$- c \sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)} ,$$

obdržíme, nehledíce ke kořenu $x = 0$, rovnici

$$2a^2b^2 - x^2 (a^2 + b^2 - c^2) = 2ab \sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)} ;$$

odtud opětným zdvojmocňováním plyne

$$x^2 [(a^2 + b^2 - c^2) - 4a^2b^2] + 4a^2b^2c^2 = 0.$$

Jest však

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)$$
$$= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c) = - 16\Delta^2,$$

značí-li Δ obsah trojúhelníka omezeného stranami a, b, c. Rovnice poslední nabývá pak tvaru jednoduchého

$$4\Delta^2 x^2 - a^2b^2c^2 = 0,$$

z čehož

$$x = \pm \frac{abc}{2\Delta} .$$

Z výsledku tohoto poznáváme, že x jest průměrem kružnice opsané o daný trojúhelník.

Úloha 42.

Vyloučiti u z rovnic

$$x + u^2 y = au$$
$$y + u^4 x = au^2 .$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Vojtěch Prokeš,* stud. VII. tř. g. na Smíchově.)

Jestli-že od první rovnice znásobené veličinou u odečteme rovnici druhou, obdržíme

$$ux - y + u^3 y - u^4 x = 0$$

čili

$$(ux - y)(1 - u^3) = 0.$$

Není-li tedy $u = 1$, jest

$$u = \frac{y}{x} ;$$

dosadíme-li tuto hodnotu do kterékoli z obou rovnic daných, přijdeme k výsledku

$$x^3 + y^3 = axy.$$

Úloha 43.

Tři cyklisté vyjeli současně z téhož bodu okružní dráhy 840 m dlouhé rychlostí 80, 72 a 59 m za minutu. Za jakou dobu setkají se všichni na témž místě? Prof. *Adolf Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *M. Liška,* stud. VII. tř. g. v Plzni.)

Mysleme si, že A honí B a C, kteří jsou o 840 m napřed. A získá na B 8 m za minutu, dohoní ho tudíž za 840 : 8 = 105 minut. Na C získá 21 m a proto by ho dohonil za 840 : 21 = 40 minut. Na konci každých 105 m A a B jsou pohromadě; na konci každých 40 minut jsou pohromadě A a C. Jelikož nejmenší společný násobek čísel 105 a 40 jest 840, setkají se všichni tři jezdci na témž místě za 840 minut čili za 14 hodin.

Úloha 44.

Lokomotiva s tendrem, dohromady 8 m dlouhé, minuly vlak osobní za 4 sek., vrátivše se, minuly týž vlak na vedlejších kolejích za 16 minut. Jakou rychlostí jel vlak a jak byl dlouhý, jela-li lokomotiva rychlostí 50 km za hodinu?

Prof. *Adolf Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Nováček*, stud. VI. tř. r. v Plzni.)

Rychlost vlaku budiž x. V prvém případě předpokládejme, že vlak stojí, za to ale, že lokomotiva jede rychlostí $60 + x$, ve druhém případě, že jede rychlostí $(60 - x)$; pak je

$$(50 + x) = 4\,(50 - x),$$

z čehož

$$x = 30\,km.$$

Proto v 1. případě mysleme si, že lokomotiva jela rychlostí $(60 + 30)\,km = 90\,km$ a že takto jela 4 sek., za které urazila $25\,m \,.\, 4 = 100\,m$; při tom však jela o svoji délku dále, než i tendr minul vlak, tudíž:

$$\text{Vlak byl } 100 - 8 = 92\,m \text{ dlouhý.}$$

Úloha 45.

Čísla a, b, c, d, e mají tyto vlastnosti:
1. a, c, e tvoří řadu geometrickou,
2. a, b, c, d tvoří řadu arithmetickou,
3. součin ae jest o c větší než součin bd,
4. součet $a + b + c + d = 30$.
Která jsou to čísla?

Prof. *Adolf Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Radouš*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

a, $b = a + r$, $c = a + 2r$, $d = a + 3r$, e; pak jest

$$(1) \qquad ae = (a + 2r)^2$$

$$(2) \qquad 4a + 6r = 30, \quad 2a + 3r = 15$$

$$(3) \qquad ae = (a + r)(a + 3r) + a + 2r.$$

Z rovnic (1) a (3) plyne vyloučením e

$$r^2 = a + 2r$$

a dosazením z rovnice (2)

$$r^2 = \frac{15 - 3r}{2} + 2r,$$

tudíž

$$2r^2 - r - 15 = 0; \quad r_1 = 3, \quad r_2 = -2\frac{1}{2}.$$

Z rovnic (2) pak ustanovíme

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 11\frac{1}{4}.$$

Jest tedy

$$a = 3 \text{ nebo } 11\frac{1}{4}, \qquad b = 6 \text{ nebo } 8\frac{3}{4},$$

$$c = 9 \text{ nebo } 6\frac{1}{4}, \qquad d = 12 \text{ nebo } 3\frac{3}{4},$$

$$e = 27 \text{ nebo } 3\frac{17}{36}.$$

Úloha 46.

Je-li

$$\log_8 9 = a, \qquad \log_3 5 = b,$$

čemu rovná se briggický logarithmus čísel 2, 3, 4?

Prof. *Adolf Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Rudolecký*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Rovnice dané lze nahraditi těmito dvěma

$$8^a = 9, \qquad 3^b = 5$$

čili

$$2 = 3^{\frac{2}{3a}}, \qquad 3 = 5^{\frac{1}{b}};$$

jest tedy také

$$2 = 5^{\frac{2}{3ab}}.$$

Klademe-li

$$2 = 10^{x_1},$$

jest

$$10^{x_1} = 5^{\frac{2}{3ab}} = \left(\frac{10}{2}\right)^{\frac{2}{3ab}} = 2,$$

z čehož

$$10^{\frac{2}{3ab}} = 2 \,.\, 2^{\frac{2}{3ab}} = 2^{\frac{2+3ab}{3ab}},$$

$$10^{\frac{2}{2+3ab}} = 2,$$

tudíž

$$x_1 = \log 2 = \frac{2}{2+3ab}.$$

Podobným způsobem nalezneme

$$x_2 = \log 3 = \frac{3a}{2+3ab},$$

$$x_3 = \log 4 = \frac{4}{2+3ab}.$$

Úloha 47.

Na základě binomické poučky dokažte, že

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{3\,.\,5}{4\,.\,8} + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,8\,.\,12} + \ldots \textit{ in inf} = 2\sqrt{2}.$$

Prof. *Adolf Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Brix*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Řadu danou lze psáti v podobě

$$R = 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots,$$

která dle binomické poučky značí

$$R = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Úloha 48.

V trojúhelníku ABC vésti jest příčku CM, známa-li jest vzdálenost středů S_1, S_2 kružnic opsaných o trojúhelníky ACM, BCM.

Stud. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Hýbner*, stud. VIII. tř. g. Litomyšli.)

Lze ukázati, že jest

$$\triangle S_1S_2M \sim \triangle ABC;$$

jestiť dle známých vlastností úhlů středových a obvodových

$$\sphericalangle S_2S_1M = \sphericalangle BAC, \quad \sphericalangle S_1S_2M = \sphericalangle ABC.$$

Známe-li délku

$$\overline{S_1S_2} = s,$$

jest tedy trojúhelník S_1S_2M co do tvaru i velikosti určen a tím určena i výška jeho MN. Znajíce tuto, máme též délku hledané příčky

$$\overline{CM} = 2 \, . \, \overline{MN}.$$

Úloha 49.

Dán jest trojúhelník o stranách a, b, c a obsahu $\varDelta$. S bodu s spuštěny ku stranám jeho kolmé úsečky x, y, z, jichž paty určují trojúhelník obsahu $\varDelta'$. Dokázati jest, že

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta} = \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} \, .$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Procházka,* stud. VII. tř. g. v Brně.)

Jsou-li α, β, γ úhly daného trojúhelníka, jest

$$2\varDelta = ab \sin \gamma = bc \sin \alpha = ca \sin \beta;$$
$$2\varDelta' = xy \sin \gamma + yz \sin \alpha + zx \sin \beta.$$

Proto jest

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta} = \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} \, .$$

Poznámka. 1. Vzdálenosti x, y, z nejsou vzájemně neodvislé, nýbrž vázány vztahem

$$ax + by + cz = 2\Delta.$$

Jsou to homogenní souřadnice bodu s vzhledem ku stranám původního trojúhelníka.

2. Značí-li ϱ poloměr kružnice vepsané v trojúhelník Δ, r poloměr kružnice opsané, jest

$$2\Delta' = \varrho^2 (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = \frac{\varrho^2 (a + b + c)}{2r},$$

$$2\Delta = \varrho (a + b + c);$$

tudíž

$$\Delta' : \Delta = \varrho : 2r.$$

Úloha 50.

V pravoúhlém trojúhelníku abc vedena jest výška $cd \perp ab$; s paty její spuštěny kolmice k odvěsnám $de \perp bc$, $df \perp ac$. Který jest poloměr kružnice opsané čtyřúhelníku afeb?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Voska*, stud. VII. tř. gymn. na Král. Vinohradech.)

Označíme-li délky stran daného trojúhelníka

$$\overline{bc} = a, \quad \overline{ac} = b, \quad \overline{ab} = c,$$

bude výška

$$\overline{cd} = v = \frac{ab}{c}$$

a úseky

$$\overline{bd} = \frac{a^2}{c}, \quad \overline{ad} = \frac{b^2}{c},$$

$$\overline{cf} = \overline{ed} = \frac{a^2 b}{c^2}, \quad \overline{ce} = \overline{fd} = \frac{ab^2}{c^2},$$

$$\overline{be} = a - \frac{ab^2}{c^2} = \frac{a^3}{c^2}, \quad \overline{af} = b - \frac{a^2 b}{c^2} = \frac{b^3}{c^2}.$$

Že čtyrúhelníku *afeb* lze kružnici opsati, poznáváme takto: Je-li

$$\sphericalangle\, bac = \alpha,$$

jest

$$\sphericalangle\, cef = \alpha, \quad \sphericalangle\, bef = 2R - \alpha,$$

tudíž

$$\sphericalangle\, baf + \sphericalangle\, bef = 2R.$$

Tato podmínka charakterisuje čtyrúhelník $afeb$ jakožto tětivový. Střed s kružnice jemu opsané jest průsečík kolmic vztyčených k odvěsnám v bodech k, l půlících úseky be, af. Jest pak

$$\overline{ck} = \overline{ls} = \frac{cb + ce}{2} = \frac{a}{2c^2}(b^2 + c^2),$$

$$\overline{cl} = \overline{ks} = \frac{ca + cf}{2} = \frac{b}{2c^2}(a^2 + c^2).$$

Poloměr kružnice opsané čtyrúhelníku $afeb$ jest

$$r = \sqrt{\overline{bk}^2 + \overline{ks}^2} = \sqrt{\frac{a^6}{4c^4} + \frac{b^2}{4c^4}(a^2 + c^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2c^2}\sqrt{a^6 + (c^2 - a^2)(a^2 + c^2)^2}$$

čili

$$r = \frac{1}{2c}\sqrt{a^2b^2 + c^4} = \frac{1}{2}\sqrt{v^2 + c^2}\,.$$

Poznámka. Prodloužíme-li příčky fd a ed o délky

$$\overline{dm} = a, \quad \overline{dn} = b,$$

bude

$$\overline{an} = \overline{bm} = v\,;$$

střed obdélníka $abmn$ jest středem kružnice jdoucí body a, f, e, b, m, n. Vzdálenost středu toho od přepony $\overline{ab}$ jest

$$u = \frac{\overline{an}}{2} = \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{v}{2}\,.$$

Úloha 51.

Řešiti rovnici

$$(x^2+1)^2 = 2x(x^2+1)(\cos\alpha + \cos\beta) - 4x^2 \cos\alpha \cos\beta.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Vitáček*, stud. VIII. tř. g. v Klatovech.)

Užijeme-li k řešení této převratné rovnice známé substituce

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

obdržíme rovnici kvadratickou

$$y^2 - 2y(\cos\alpha + \cos\beta) + 4\cos\alpha\cos\beta = 0.$$

Z této ustanovíme

$$y = \cos\alpha + \cos\beta \pm (\cos\alpha - \cos\beta),$$

tedy

$$y_1 = 2\cos\alpha, \quad y_2 = 2\cos\beta.$$

Přejdeme-li k původní neznámé, nabudeme rovnic

a) $$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0,$$

b) $$x^2 - 2x\cos\beta + 1 = 0;$$

z těchto pak řešením ustanovíme

$$x_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha,$$
$$x_{3,4} = \cos\beta \pm i\sin\beta.$$

Úloha 52.

Dokažte, že o úhlech trojúhelníka platnou jest relace

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma} + \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha} + \frac{\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\gamma\cos\alpha + \cos\beta} = 1.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant Holzmann*, stud. VIII. tř. g. v Brně.)

První člen levé strany lze jinak upraviti, pomníme-li, že $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$; jestiť

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$
$$= \operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta.$$

Dáme-li tento tvar i oběma členům ostatním, přechází relace daná v jednodušší

$$\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\gamma+\operatorname{cotg}\gamma\operatorname{cotg}\alpha = 1$$

čili

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

To však jest vztah známý, plynoucí ze vzorce

$$\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1}.$$

Úloha 53.

Vyloučiti jest úhel x z rovnic

$$\cos x\operatorname{tg}\alpha+\sin x\operatorname{cotg}\alpha = k\sqrt{2}\,.\sin 2\beta$$
$$\cos x\operatorname{tg}\beta+\sin x\operatorname{cotg}\beta = k\sqrt{2}\,.\sin 2\alpha\,.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Božek*, stud. VII. tř. g. v Brně.) Řešíce rovnice dané dle $\cos x$ a $\sin x$ ustanovíme

$$\cos x = \frac{k\,.\sin 2\alpha\sin 2\beta(\cos^2\beta-\cos^2\alpha)}{\sqrt{2}(\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta)}$$

$$= \frac{k\,.\sin 2\alpha\sin 2\beta(\cos\beta+\cos\alpha)(\cos\beta-\cos\alpha)}{\sqrt{2}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}$$

$$= \frac{k\,.\sin 2\alpha\sin 2\beta\,.\,2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,.\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sqrt{2}\,.\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{k\,.\sin 2\alpha\sin 2\beta\,.\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}\,.\sin(\alpha+\beta)\,.\sin(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{k}{\sqrt{2}}\,.\sin 2\alpha\sin 2\beta\,,$$

$$\sin x = \frac{k \,.\, \sin 2\alpha \sin 2\beta\, (\sin^2\alpha - \sin^2\beta)}{\sqrt{2}\,(\sin^2\alpha \cos^2\beta - \cos^2\alpha \sin^2\beta)}\,.$$

Ježto však ze vzorců

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$$

vyplývá rovnost rozdílů

$$\cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\beta,$$

jest

$$\cos x = \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

pročež

$$\sin 2\alpha \,.\, \sin 2\beta = \frac{1}{k}\,.$$

Úloha 54.

Povrchové přímky kolmého kužele kruhového tvoří se základnou úhel α; v kterém úhlu k základně musí dopadati rovnoběžné paprsky světelné, aby osvětlovaly $\frac{m}{n}$ obliny kuželové?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Stan. Linhart*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Budiž r poloměr základny kuželové, v výška kužele, φ úhel paprsků se základnou, ω středový úhel příslušný k neosvětlenému oblouku základny. Potom jest

$$\cos\frac{\omega}{2} = \frac{r}{v \operatorname{cotg} \varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}\,,$$

tudíž

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha \,.\, \cos\frac{\omega}{2}\,.$$

Úhel ω ustanovíme z úměry

$$(4R - \omega) : 4R = m : n;$$

jestiť pak

$$\omega = \frac{n - m}{n} \,.\, 4R$$

a proto konečně

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha \,.\, \cos\left(\frac{n-m}{n} \,.\, 2R\right).$$

Úloha 55.

Kolmý jehlan trojboký, jehož základna má strany $a = 51$ cm, $b = 68$ cm, $c = 85$ cm, má pobočné hrany zdélí $h = 110{\cdot}5$ cm. Ustanovte poloměr koule jehlanu tomu opsané.

Prof. *Th. Schulz* ve Vídni.

Řešení. (Zaslal p. *Bohumil Matas,* stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.)

Obsah základny jehlanu jest dle vzorce Heronova

$$\varDelta = \sqrt{102 \,.\, 51 \,.\, 34 \,.\, 17} = 2 \,.\, 17 \,.\, 51 = 1734,$$

poloměr kružnice opsané o základnu jest

$$\varrho = \frac{abc}{4\varDelta} = \frac{51 \,.\, 68 \,.\, 85}{4 \,.\, 2 \,.\, 17 \,.\, 51} = 42{\cdot}5 \,.$$

Střed koule o jehlan opsané jest průsečík výšky jehlanu s rovinou vztyčenou kolmo uprostřed pobočné hrany; značí-li v výšku jehlanu, jest

$$v = \sqrt{h^2 - \varrho^2} = 102$$

a pro poloměr r koule opsané platnou jest úměra

$$r : \frac{h}{2} = h : v,$$

ze které plyne

$$r = \frac{h^2}{2v} = \frac{2873}{48} = 59{\cdot}85 \ldots .$$

Téhož výsledku dojdeme uživše relace

$$\varrho^2 = v\,(2r - v), \quad r = \frac{\varrho^2 + v^2}{2v} \,.$$

Úloha 56.

Na společné základně vepsány v kouli dva kolmé kužele, jichž obsahy jsou v poměru $m : n$. Je-li ϱ poloměr společné základny, jak velký jest poloměr koule?

Prof. *Th. Schulz* ve Vídni.

Řešení. (Zaslal p. *Emerich Brinkmann,* stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Budiž r poloměr koule; potom jest obsah jednoho kužele

$$K_1 = \frac{1}{3} \pi \varrho^2 (r + \sqrt{r^2 - \varrho^2})$$

a obsah kužele druhého

$$K_2 = \frac{1}{3} \pi \varrho^2 (r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}).$$

Z poměru obsahů

$$K_1 : K_2 = m : n$$

plyne rovnice

$$\frac{r + \sqrt{r^2 - \varrho^2}}{r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}} = \frac{m}{n}$$

čili

$$(m - n) r = (m + n) \sqrt{r^2 - \varrho^2},$$

kterou řešíce nalezneme

$$r = \frac{m + n}{2 \sqrt{mn}} \varrho.$$

Úloha 57.

Ve čtyrúhelníku určeném vrcholy

$$a\,(0,\, 0), \quad b\,(2,\, 5), \quad c\,(6,\, 3), \quad d\,(6,\, -1)$$

ustanoviti jest bod s tak, aby

$$\triangle\, abs = \triangle\, bcs = \triangle\, cds\,.$$

Kterak lze bod s sestrojiti? Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Bedřich Zafouk,* stud. VII. tř. g. v Brně.)

Označíme-li souřadnice hledaného bodu $s\,(x,\, y)$, máme rovnice podmínečné

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vyčíslíme-li determinanty, nabudou tyto rovnice podoby jednodušší

$$-5x + 2y = 2x + 4y - 24 = 4x - 24,$$

z nichž vypočítáme

$$x = 3, \quad y = 1\cdot 5.$$

Obecně lze bod s sestrojiti takto: Rozpolme úhlopříčku ac v bodě m, úhlopříčku bd v bodě n; spojnice bm a cn protínají se v žádaném bodě s. Důvod tohoto sestrojení jest zřejmý.

Poznámka: V případě svrchu číselně daném leží bod s v polovici úhlopříčky ac a jest nejenom

$$\triangle abs = \triangle bcs = \triangle cds = 6,$$

ale také

$$\triangle das = 6.$$

Úloha 58.

V hlavní ose ellipsy dány body m, n, jimiž vedeny přímky M, N, mající směr dvou sdružených průměrů. Jest dokázati, že geometrickým místem jich průsečíků jest ellipsa podobná ellipse dané. Stud. fil. *Karel Nečas.*

Řešení. (Zaslal p. *Julius Pollák*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.) Není na ujmu obecnosti, předpokládáme-li body m, n souměrně sdružené dle středu ellipsy

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

kladouce

$$\overline{om} = -\overline{on} = p;$$

jsou pak rovnice přímek M a N

$$y = A(x - p), \quad y = A'(x + p),$$

při čemž

$$AA' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Vyloučíme-li z posledních tří rovnic proměnné směrnice A, A', obdržíme rovnici hledaného místa geometrického

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x^2 - p^2)$$

čili
$$b^2x^2 + a^2y^2 = b^2p^2.$$

Z rovnice té zřejmo, že místem tím jest ellipsa poloos
$$a' = m, \quad b' = \frac{bp}{a};$$
ježto
$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b},$$
jest ellipsa tato podobná dané. Obě mají stejnou číselnou výstřednost.

Úloha 59.

Jest analyticky dokázati, že strana čtverce vepsaného v ellipsu rovná se výšce kosočtverce určeného vrcholy ellipsy.

Prof. *Th. Schulz* ve Vídni.

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Vitěka*, stud. VIII. tř. gymn. v Budějovicích.)

Vrcholy čtverce vepsaného v ellipsu
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
jsou průsečíky její s přímkami
$$y = \pm x;$$
v prvním kvadrantu ležící vrchol má souřadnice
$$x_1 = y_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
a jest tedy strana čtverce
$$s = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Výška v kosočtverce určeného vrcholy ellipsy rovná se dvojnásobné vzdálenosti počátku od přímky, jejíž rovnice jest
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
čili

$$bx + ay - ab = 0;$$

jest proto výška

$$v = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

a tudíž

$$s = v,$$

jak bylo dokázati.

Úloha 60.

V pravoúhlé soustavě souřadnic dán rovnostranný trojúhelník tak, že vrchol jeho leží v počátku a výška v ose X. Trojúhelníku opsána jest kružnice a parabola mající vrchol v počátku. Jak velká jest plocha omezená oblouky obou křivek?

Prof. *Th. Schulz* ve Vídni.

Řešení. (Zaslal p. *Inocenc Hanzlík*, stud. VII. tř. gymn. v Litomyšli.)

Je-li a strana daného trojúhelníka, mají jeho vrcholy souřadnice:

$$m\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}, \frac{a}{2}\right), \quad n\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}, -\frac{a}{2}\right), \quad o\,(0, 0).$$

Kružnice opsaná má rovnici

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

kdež

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

ku každé straně trojúhelníka mno přilehá úseč kruhová obsahu

$$U = \frac{1}{3}\left(\pi r^2 - \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right) = \frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Parabola opsaná trojúhelníku mno a mající vrchol o má rovnici

$$y^2 = 2px;$$

parametr její plyne z relace

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2p \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

a jest tedy

$$p = \frac{a}{12}\sqrt{3}.$$

Oblouky obou křivek jsou omezeny tři plochy: plocha P_1 protatá osou x a dvě plochy $P_2 = P_3$ na vnější straně paraboly.

Jsou-li x_1, y_1 souřadnice bodu m, jest

$$P_1 = \frac{4}{3} x_1 y_1 + U = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \pi \frac{a^2}{9}$$

$$P_2 = U - \frac{1}{6} x_1 y_1 = \pi \frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{8}\sqrt{3}.$$

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Albini Fedor, stud. V. tř. r. v Hodoníně, úl. 21., 25., 48., 50.
Bačina Jan, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 5., 7., 17., 18., 19., 21., 22., 25., 45., 49.
Bartoš Rudolf, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 9., 15. až 22., 30., 32. až 39., 42., 44., 45., 46., 48., 50., 53. až 60.
Barvík Jindřich, stud. VI. tř. g. v Opavě, úl. 31., 41., 42., 45., 50., 55., 56.
Bohuslav Frant., stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 3. až 6., 18. až 21., 25., 34., 35.
Božek Karel, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 5., 11., 13., 17. až 24., 31., 41., 42., 45., 46., 53., 55., 56., 57.
Brablec Jan, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 11., 13., 14., 16. až 23., 25., 26., 28. až 34., 36., 37., 38., 41., 42., 44., 45., 49., 50., 52., 53., 55. až 59.
Brinkmann Emerich, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 16., 30., 32., 33., 34., 36., 37., 45., 46., 52., 53., 55. až 58., 60.
Brix František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 14., 20., 30. až 34., 39. až 47., 49., 50., 52. až 57.

Brix Frant. Jan, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 32., 33. 34., 36., 37., 38., 42., 43., 45., 46., 56., 59.
Bystřický František, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 17., 22., 42., 45.
Cepák Karel, stud. VI. tř. r. v Budějovicích, úl. 1. až 7., 10., 11., 17. až 22., 25. až 28., 30. až 33., 39., 43., 44., 45., 49., 50., 54., 55., 56.
Gregor Květoslav, stud. VI. tř. g. v Benešově, úl. 56.
Hanus Rudolf, stud. VI. tř. g. v Opavě, úl. 41., 42., 45., 50., 55., 56.
Hanzlík Inocenc, stud. VII. tř. g. v Litomyšli, úl. 1. až 34., 39. až 60.
Havrda Václav, stud. V. tř. g. v Král. Dvoře, úl. 6., 16.
Holzmann Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 30. až 60.
Hrubý František, stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 42., 45.
Hulla Karel, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 2., 4. až 15., 17. až 20., 22. až 25., 28. až 38., 42. až 46., 48., 49., 50., 52. až 60.
Hýbner Karel, stud. VIII. tř. g. v Litomyšli, úl. 1. až 60.
Jiruška František, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 5., 8., 9., 18. až 21., 31., 34., 36., 38., 42., 45., 46., 48., 54., 57.
Kálal Josef, stud. V. tř. r. v Písku, úl. 45.
Kitzberger Eduard, stud. VIII. tř. g. v Domažlicích, úl. 30., 33., 34., 35., 37., 38., 42., 43., 45., 46., 53., 55., 59., 60.
Koubík Karel, stud. VI. tř. r. v Budějovicích, úl. 1. až 6., 17., 18., 19., 21., 25., 30., 44., 45., 55., 56.
Kroužil Jan, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 4., 5., 18., 21., 22., 31.
Lang Jan, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 30. až 60.
Linhart Stanislav, stud. VII. tř. r. Pardubicích, úl. 31. až 34., 36. až 39., 42., 43., 45., 46., 48., 54., 56., 57., 59., 60.
Liška František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 11., 13., 17. až 22., 25., 26., 28. až 34., 39., 41. až 46., 48. až 53., 55., 56., 57.
Liška Matěj, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 1., 4., 7., 17. až 19., 21., 42., 45.
Matas Bohumil, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1., 23., 26. až 34., 41. až 45., 47., 49., 52., 54. až 57.
Mikyna Josef, stud. V. tř. g. v Král. Dvoře, úl. 43., 44., 48., 56.

Moos Jindřich, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 13., 14., 17. až 20., 22., 34.

Müller Ludvík, stud. V. tř. g. v Král. Dvoře, úl. 6.

Nováček Frant., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 17. až 22., 30., 31., 39., 41., 44. až 56.

Pechánek Ant., stud. VII tř. r. v Pardubicích, úl. 32., 33., 34., 38., 42., 45., 46.

Pollák Julius, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 3., 11., 25., 32., 33., 38., 40., 42., 45., 56. až 60.

Procházka Frant., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 3., 20., 28., 31., 41., 42., 45., 49., 51., 52., 53., 55., 56.

Prokeš Vojtěch, stud. VII. tř. g. na Smíchově, úl. 25., 28., 29., 31. až 37., 41., 42., 43., 45., 46., 48., 49., 52., 53., 55., 56., 57., 59., 60.

Půda Jan, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 8., 10., 11., 13., 14., 16. až 23., 28., 30., 31., 34., 37., 41., 44., 45., 49., 52., 55., 56., 57., 59.

Radouš Frant., stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 14., 17. až 22., 25., 28., 29., 31. až 34., 36. až 39., 42., 45., 46., 56., 57., 59., 60.

Riessmüller Karel, stud. VI. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1., 50., 56.

Rudolecký Josef, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2, 3., 13., 17. až 22., 42. až 46.

Říha Jindřich, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 8., 11. až 14., 16. až 22.

Seifert Ladislav, stud. V. tř. r. v Karlíně, úl. 31., 32., 33., 43., 45., 48., 50., 21. až 56., 59.

Schoenbaum Emil, stud. VI. tř. g. v Benešově, úl. 1. až 4., 6., 7., 11. až 14., 16. až 34., 39., 42., 44., 45. až 49., 52., 53., 55., 56., 57., 59., 60.

Schüller Jan, stud. VII. tř. g. v Chrudimi, úl. 45.

Skála Karel, stud. VIII. tř. g. v Praze, úl. 1. až 23., 25. až 38., 41. až 46., 48. až 60.

Spurný František, externista g. v Olomouci, úl. 7., 9., 10., 11., 14., 16. až 34., 36. až 39., 41. až 46., 48., 49., 52. až 57., 60.

Straka Frant., stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 11., 13., 14., 17. až 23., 25. až 46., 50., 52., 53., 55. až 60.
Ševčík Jindřich, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 3., 6., 12., 25., 28., 30., 31., 34., 36., 37., 38., 42., 43., 45., 49., 50., 53. až 57., 59., 60.
Šiška Karel, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 30., 31., 39., 45.
Šmok Mikuláš, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1. až 9., 11., 13., 14., 17. až 25., 30. až 39., 41. až 45., 48. až 53., 55. až 60.
Šob Ferdinand, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 30. až 53., 55. až 60.
Šubrt Adolf, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 1. až 12., 17. až 22., 25. až 35., 39., 41. až 46., 48., 49., 50., 52. až 56.
Toman Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 30. až 60.
Tretera František, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 23., 25., 28. až 34., 36., 37., 38., 41. až 46., 49. až 53., 55. až 59.
Truhlář Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 23., 24., 30. až 60.
Vajgl Jan, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 30., 31., 34., 42., 45., 46., 48., 49., 52., 53., 55., 56.
Valach Frant., stud. VI. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 8., 11., 12., 13., 17. až 23., 25., 28., 29., 31., 32., 33., 41., 43. až 46., 50., 53., 55., 56.
Velísek Ignát, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 2., 13., 15., 19., 21., 31.
Velísek František, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 30. až 60.*)
Vetter Quido, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 8., 10., 11., 13., 17. až 22., 25. až 39., 41. až 45., 48., 49., 50., 52., 53., 55., 56., 57., 59., 60.
Vitáček Frant., stud. VIII. tř. g. v Klatovech, úl. 30. až 60.
Viťka Antonín, stud. VIII. tř. g. v Budějovicích, úl. 1. až 5., 7., 8., 11. až 15., 18. až 22., 24., 25., 26., 28. až 31., 39., 40. až 43., 45. až 48., 51., 52., 53., 55., 56., 57., 59., 60.
Voska Václav, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1. až

---

*) V seznamu řešitelů na str. 320 čísti jest Velísek František místo Velísek Ignát.

8., 11., 13., 17. až 22., 25., 26., 27., 30., 31. až 34., 37., 38., 42., 44., 45., 46., 49., 50., 52., 53., 55., 56., 57., 59.

Vyskočil Felix, stud. VII. tř. r. v Ječné ul. v Praze, úl. 30., 41. až 48., 55., 56., 57.

Zafouk Bedřich, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 42., 45., 57.

Závodník Alois, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 1. až 11., 13., 14., 16. až 23., 25., 28. až 31., 35., 36., 37., 39., 42., 43., 45., 48., 50., 51., 53., 56., 59., 60.

Žížala H., stud. VII. tř. g. v Příbrami, úl. 31., 34., 36., 55., 56., 57., 60.

Ceny udělené za řešení úloh.

Redakce těchto listů uznala, aby za nejdokonalejší a největší počet řešení úloh obsažených v tomto ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky (1899) ceny vypsané výborem Jednoty českých mathematiků*) obdrželi tito řešitelé:

A. První ceny.

1. *Holzmann František,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
2. *Hýbner Karel,* stud. VIII. tř. g. v Litomyšli.
3. *Lang Jan,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
4. *Linhart Stanislav,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
5. *Skála Karel,* stud. VIII. tř. g. v Praze.
6. *Šob Ferdinand,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
7. *Šubrt Adolf,* stud. VI. tř. r. v Písku.
8. *Toman Josef,* stud. VIII. tř. g. v Třebíči.
9. *Velísek František,* stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti.
10. *Vitáček František,* stud. VIII. tř. g. v Klatovech.

B. Druhé ceny.

1. *Barvík Jindřich,* stud. VI. tř. g. v Opavě.
2. *Brinkmann Emerich,* stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
3. *Brix František,* stud. VII. tř. g. v Brně.

---

*) K návrhu redaktora tohoto Časopisu výbor Jednoty počet vypsaných cen o 15 rozmnožil.

4. *Cepák Karel*, stud. VI. tř. r. v Budějovicích.
5. *Hanzlík Inocenc*, stud. VII. tř. g. v Litomyšli.
6. *Hulla Karel*, stud. VI. tř. g. v Olomouci.
7. *Matas Bohumil,* stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.
8. *Prokeš Vojtěch*, stud. VII. tř. g. na Smíchově.
9. *Schoenbaum Emil,* stud. VI. tř. g. v Benešově.
10. *Straka František,* stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.
11. *Ševčík Jindřich*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
12. *Tretera František,* stud. VII. tř. g. v Třebíči
13. *Vetter Quido,* stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.
14. *Vitěka Antonín*, stud. VIII. tř. g. v Budějovicích.
15. *Závodník Alois*, stud. VII. tř. r. v Brně.

C. Třetí ceny.

1. *Bartoš Rudolf,* stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
2. *Božek Karel*, stud. VII. tř. g. v Brně.
3. *Brablec Jan,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
4. *Brix Frant. Jan,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
5. *Jiruška František,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
6. *Kitzberger Eduard*, stud. VIII. tř. g. v Domažlicích.
7. *Koubík Karel*, stud. VI. tř. r. v Budějovicích.
8. *Liška František*, stud. VII. tř. g. v Brně.
9. *Nováček František*, stud. VI. tř. r. v Plzni.
10. *Pollák Julius*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.
11. *Procházka František*, stud. VII. tř. g. v Brně.
12. *Půda Jan,* stud. VII. tř. g. v Olomouci.
13. *Radouš František*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
14. *Spurný František,* externista g. v Olomouci.
15. *Šmok Mikuláš*, stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové.
16. *Truhlář František*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
17. *Valach František,* stud. VI. tř. g. v Kroměříži.
18. *Voska Václav,* stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech.
19. *Vyskočil Felix*, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze.
20. *Žižala H.*, stud. VII. tř. g. v Příbrami.