Werk

Label: Article

Jahr: 1891

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0020|log52

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Vzhledem k odstavci (3) platí

$$\varphi(t) = m, \quad \varphi'' = 0.$$

Z posledních rovnic odstavce 3. obdržíme pro asymptotické křivky na *konoidech vůbec* následující rovnice*):

$$x = \mathrm{B}\sqrt{f'(t)}, \quad y = tx, \quad z = mx + f(t).$$

U *konoidů přímých* jest řidící přímka kolmá k rovině řidící, tak že $m = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = 0$.

Rovnice ploch tohoto typu mají tedy formu

$$tx - y = 0, \quad z - f(t) = 0,$$

zvolíme-li řídící přímku za osu Z.

Pro asymptotické křivky na těchto plochách platí pak rovnice:

$$x = \mathrm{B}\sqrt{f'(t)}, \quad y = tx, \quad z = f(t).$$

K didaktice veličin komplexních.

Napsal

M. Lerch,

docent při české vysoké škole technické v Praze.

(Dokončení.)

5. O nějakém komplexním výrazu pravíme, že zmizí, jestliže se rovná komplexu nullovému (0, 0). Pak platí důležitá věta, že komposiční součin jen tehdy zmizí, zmizí-li jeden z jeho činitelů.

Abychom to dokázali, pišme $a = (\alpha, \alpha')$, $b = (\beta, \beta')$ a položme $ab = 0$, t. j.

$$\alpha\beta - \alpha'\beta' = 0, \quad \alpha\beta' + \alpha'\beta = 0.$$

---

*) K témuž výsledku dospějeme, dosadíme-li do posledních rovnic odstavce 4. hodnotu $n = \infty$, t. j. volíme druhou řidící přímku v nekonečné vzdálenosti, stanovíce ji zaměřením řidící roviny.

Těmto rovnicím lze vyhověti buď supposicí $a = 0$, neb $b = 0$; není-li a nullou, pak máme zde dvě homogení rovnice o neznámých β, β', jichž determinant $\alpha^2 + \alpha'^2$ nemizí, poněvadž aspoň jedna z veličin α, α' musí býti od nully různa.

Rovnicím takovým lze vyhověti pouze hodnotami $\beta = \beta' = 0$, t. j. není-li $a = 0$, musí $b = 0$.

Z této věty plyne, že k daným dvěma komplexům a, b, z nichž b není nullou, odpovídá jediný komplex hovící podmínce

$$a = bc;$$

neb kdyby takové komplexy byly dva, c a c', pak bychom měli též

$$a = bc',$$

a tedy odečtením $0 = b(c - c')$, což není možno, ano b není nullou. Že však skutečně jeden takový komplex c, který pak znamenáme $\frac{a}{b}$ (podíl a dle b), existuje, lze dokázati přímo řešením rovnice

$$bc = a \text{ při } a = (\alpha, \alpha'),\ (b = \beta, \beta'),\ c = (\gamma, \gamma'),$$

t. j. řešením rovnic

$$\begin{aligned} \beta\gamma - \beta'\gamma' &= \alpha \\ \beta'\gamma + \beta\gamma' &= \alpha' \end{aligned}$$

vůči neznámým γ, γ'; odtud plyne

$$\gamma = \frac{\alpha\beta + \alpha'\beta'}{\beta^2 + \beta'^2}, \quad \gamma' = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\beta^2 + \beta'^2}.$$

6. Nebude nyní jasnosti na újmu, když místo „komposice komplexů“ budu říkati „násobení komplexů“, což jest užitečné vzhledem k analogii komposice s násobením čísel.

Pak budeme moci obor komplexů považovati za jaksi rozšířený obor čísel: lépe řečeno, každý algebraický problém od nynějška budeme řešiti v oboru komplexů, a nikoli v oboru čísel. Každé číslo (realné) a nahradíme při tom komplexem $(a, 0) = aj$. Aneb lépe, kdykoli budeme psáti číslo a, budeme tím rozuměti nikoli číslo to samo, nýbrž komplex $(a, 0)$.

Tak máme-li kvadratickou rovnici

$$(\alpha) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

řešiti v oboru čísel, budeme se zabývati jediné následujícím požadavkem: určiti komplex $(\xi, \eta) = x$, tak aby platila rovnice

$$(a, 0)(\xi, \eta)^2 + (b, 0)(\xi\,\eta) + (c, 0) = 0.$$

Výhoda plynoucí z této modifikace problému je ta, že je tento *vždy řešitelný*. Rozviňme symboly na levé straně, i obdrží náš požadavek tvar:

$$(\beta) \qquad a(\xi^2 - \eta^2, 2\xi\eta) + b(\xi, \eta) + (c, 0) = 0,$$

aneb ve tvaru soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} a(\xi^2 - \eta^2) + b\xi + c &= 0 \\ 2a\xi\eta + b\eta &= 0. \end{aligned}$$

Je-li při tomto řešení $\eta = 0$, pak víme, že platí rovnice

$$a(\xi, 0)^2 + b(\xi, 0) + (c, 0) = 0,$$

čili

$$a\xi^2 + b\xi + c = 0,$$

t. j. že požadavek původní (α) lze splniti skutečnou veličinou $x = \xi$. Jestliže naopak ve všech řešeních požadavku (β) jest η od nully různo, pak je jisto, že nelze stanoviti *veličinu* (realnou) x, tak aby platila rovnice (α).

Dá nám tedy uvažování komplexů v případě rovnice kvadratické vždy určitou odpověď, zda rovnice ta jest možnou, a v tom případě podá také řešení.

Dříve než přikročíme k řešení obecné rovnice kvadratické, pojednáme o řešení rovnice zvláštní:

$$(\xi, \eta)^2 = (a, b).$$

Psána ve tvaru rozvinutém obdrží tato rovnice tvar

$$\xi^2 - \eta^2 = a, \quad 2\xi\eta = b.$$

Z rovnic těchto plynou pak následující:

$$\xi^2 + (-\eta^2) = a, \quad \xi^2(-\eta^2) = -\frac{b^2}{4},$$

z nichž soudíme, že ξ^2, $-\eta^2$ jsou kořeny kvadratické rovnice *realné:*

$$z^2 - az - \frac{b^2}{4} = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$z = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Z těchto jeden jest kladný a druhý záporný; skutečně má býti kořen $z = \xi^2$ kladným, $z = -\eta^2$ záporným; máme tedy

$$\xi^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \qquad \eta^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

a odtud

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \qquad \eta = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Znamení $\pm$ pro ξ jest libovolné, znamení pro η se pak ustanoví z podmínky $2\xi\eta = b$.

Z toho nacházíme, že požadavku

$$x^2 = (a, b), \text{ t. j. } (\xi, \eta)^2 = (a, b)$$

lze vyhověti vždy, a to dvojím způsobem:

$$x = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,j + \varepsilon i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right],$$

kde $\varepsilon = 1$ pro $b > 0$, a $\varepsilon = -1$ pro $b < 0$.

Obě hodnoty pravé strany znamenáme $\sqrt{(a, b)}$, takže poslední výraz je symbolem dvojznačným. Nyní — když duch naší doktriny s dostatek jest jasným — můžeme *způsob psaní* zjednodušiti, vrátíce se ke způsobu všeobecně užívanému, kde se píše $a + ib$ místo $aj + bi$ neb (a, b).

Náš výsledek poslední obdrží takto obvyklý tvar:

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \varepsilon i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right],$$

$$\text{kde } \varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ pro } b > 0, \\ -1 \text{ pro } b < 0. \end{cases}$$

Jakožto podstatný výsledek dlužno si zapamatovati, že rovnici $x^2 = a$ lze v komplexním oboru vždy řešiti. Totéž ukážeme nyní o rovnici obecnější:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kterou patrně lze psáti takto:

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4} = 0,$$

aneb

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}.$$

Poněvadž x jest neznámý komplex, je též komplex $ax + \frac{b}{2}$ neznámý; tento lze ale vždy, a to jen na dvojí způsob ustanoviti tak, aby poslední požadavek byl splněn; a sice bude tu

$$ax + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}},$$

jestliže $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}}$ značí *jednu* z obou hodnot dvojznačného výrazu; tím jsme obdrželi známý vzorec

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Není naším úmyslem dopodrobna vyložiti všechny úvahy, jež jsou předepsány na školách středních, i domníváme se, že čtenáři je nyní jasno, jak by nám tu bylo pokračovati.

Nám se bude nyní jednati spíše o význam a důležitost komplexů pro řešení rovnic. Tak již z elementů této nauky známy jsou methody řešení rovnic stupně třetího a čtvrtého, a každý ví, že vzorce nalezené pro kořeny těchto rovnic vždy udávají všecka řešení: realná, když rovnice má kořeny realné, a komplexní, jestliže řešení realná neexistují. Ale význam komplexů čili — jak je dále chceme nazývati — *veličin komplexních* pro algebru má svůj původ hlavně v slavné větě D'Alembert-Gaussově, že každá algebraická rovnice

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

má řešení v oboru komplexním.

Jaký význam realný bezprostředně pochopitelný má tento velkolepý theorém?

Jdeme-li o krok dále a vyslovíme-li jej ve tvaru, že lze levou stranu rovnice psáti jako součin

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

kde $x_1, x_2 \ldots x_n$ jsou určité komplexy, pak lze větě uděliti jednodušší znění tím způsobem, že realné kořeny*) $x_1, x_2 \ldots x_k$ vyjmeme a kořeny komplexní, jež jsou po dvou sdruženy, píšeme ve tvaru $\alpha_1 + i\beta_1$, $\alpha_1 - i\beta_1$; $\alpha_2 + i\beta_2$, $\alpha_2 - i\beta_2$; $\ldots$ $\alpha_m + i\beta_m$, $\alpha_m - i\beta_m$; uvážíme-li, že tu jest

$$(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2,$$

pak zní řečená věta takto: Každý (algebraický) polynom $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, jehož součinitelé jsou čísla (realná), lze uvésti na tvar součinu činitelů stupně prvého aneb druhého:

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k)[(x - \alpha_1)^2 + \beta_1{}^2] \ldots \\ \ldots [(x - \alpha_m)^2 + \beta_m]^2.$$

Jak jednoduchý jest tento tvar theorému, tak obtížný byl by jeho důkaz v oboru čísel. Teprvé přechodem k veličinám komplexním podařilo se podati jeho přesný důkaz.

Vedlo by nás příliš daleko, kdybychom se měli šířiti o dalších vlastnostech veličin komplexních, ačkoli by tu dobrá definice logarithmu a funkce exponencialné nebyla na škodu. Nám zmíniti se dlužno toliko o veliké chybě didaktické, jíž se dopouštějí mnohé spisy i pro posluchače vysokého učení vydané (jako na př. Skřivanovy Přednášky o algebraické analysi) tím, že snaží se dokazovati nutnosť Gaussova znázornění veličin komplexních body v rovině. Nejvíce překvapuje svojí naivností „důkaz“ následující: V rovině mějme soustavu pravoúhlých souřadnic OX, OY, na ose OX znázorňujme kladná i záporná čísla, zejmena buď $OA = +1$, $OA' = -1$, takže A′ leží v levo, A

*) Komplex (a, b) nazýváme *realným*, je-li $b = 0$. Kdyby $a = 0$, slul by komplex *ryzím* (ryze pomyslným).