Werk

Label: Article

Jahr: 1885

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0014|log37

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

O algebraickém řešení Youngových rovnic stupně pátého.

Napsal

prof. Dr. **F. J. Studnička.**

I.

Značí-li n positivní číslo celistvé a

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \qquad (1)$$

veličiny buď realné nebo soujemné, představuje výraz

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (2)$$

algebraickou rovnici stupně n-tého. Hodnoty, jež za x dosazeny byvše, levou stranu této rovnice annullují a jichž jest tolik, kolik jednotek obsahuje n, vyjadřují se opět čísly buď realnými nebo soujemnými. Takováta hodnota čili kořen rovnice (2), všeobecně x_k zvaná, jest tedy závislou na číslech řady (1), takže ji možná vyjádřiti obecným tvarem

$$x_k = \mathrm{F}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Značí-li tu F obmezené algebraické spojení veličin v závorkách obsažených, provedené tedy buď sečítáním neb odčítáním, násobením, dělením anebo odmocněním, jest řešení toto *algebraickým*, kdežto v opačném případě, přesahujíc prostředky algebry, sluje *transcendentním*. Algebraicky řešitelnou jest tedy rovnice (2) jenom tehdáž, známe-li pravidlo, kterýmž možná ustanoviti obmezenou algebraickou funkci φ tak, aby

$$\varphi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = x_k. \qquad (3)$$

Pátráme-li v oboru mathematickém po takovýchto pravidlech, přesvědčíme se především, že pro $n = 2$ nebo-li pro rovnice stupně *druhého*

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

platí jednoduchý vzorec

$$x_k = \tfrac{1}{2}(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}) = \varphi(a_1, a_2).$$

Podobně shledáme, že rovnici stupně *třetího* a *čtvrtého* možná řešiti tvarem (3), při čemž se stává prostředníkem rovnice stupně o 1 nižšího, v tomto případě tedy třetího, v onom pak druhého, již *Lagrange* nazval *resolventou*.

Jakmile však přijdeme k $n = 5$, změní se poměr resolventy ku předložené rovnici stupně *pátého*; není příslušná resolventa, jak dle analogie snad by se soudilo, stupně 4., nýbrž 6., tedy vyššího, nežli jest rovnice daná. Tu tedy všeobecně přestává řešení rovnice (2) tvarem (3) a nastává úkol jiný, jenž jeví se hlavně ve dvou fasích.*)

Buď jsou koëfficienty řady (1) čísla určitá, rovnice (2) tedy číselnou čili *numerickou*, a pak ustanovují se kořeny x_k rozmanitými způsoby *přibližně* tak přesně, jak si toho právě kdo přeje. Anebo jsou koëfficienty řady (1) čísla sice obecná, avšak zvláštním podmínkám podrobená, že kořeny x_k možná předc vyjádřiti tvarem (3), a pak představuje výraz (2) rovnici *zvláštní*.

Bylo by zajisté zajímavým i vděčným úkolem, *přehledně* vylíčiti rozvoj nauky o rovnicích stupně pátého, ukázati, jak hojné pokusy se tu napřed dály, nežli konečně *Abel* jasně vyložil, že algebraické řešení *všeobecné* není možné, sestaviti četné poučky, týkající se vlastností kořenů, poukázati ke všem geometrickým problemům, s nimiž řešení toto se stýká, a seřaditi konečně všechny výzkumy, ke zvláštním tvarům rovnice stupně 5. se táhnoucí. Bylo by tu třeba probrati a spracovati hojnou literaturu více než-li 100 let posledních objímající, takže by z toho studia povstati mohla dissertace, hodna dvojího doktorátu mathematického.

Vytkneme-li z dlouhé řady badatelů, jež na tomto rozsáhlém poli s větším nebo menším úspěchem pracovali, pouze jména na povrchu plovoucí, obdržíme, majíce zřetel ku pořádku chronologickému, zvučný seznam tento: *Tschirnhaus, Euler, Malfatti, Lagrange, Vandermonde, Bring, Ruffini, Abel, Galois, Jerrard, Jacobi, Sylvester, Hermite, Joubert, Kronecker, Brioschi, Jordan, Roberts, Clebsch, Gordan, Klein, Young* a m. j.

Není naším účelem, abychom blíže se tu zanášeli s obecným řešením vůbec,**) chcemeť jenom seznámiti čtenáře své

---

*) Řešení pomocí funkcí transcendentních budiž tu mlčením pominuto.

**) Kdo by s podstatou tohoto úkolu se chtěl seznámiti, nechť prostuduje spisy aspoň tyto: *Serret* „Handbuch der höheren Algebra". Deutsch von Wertheim. Leipzig, Teubner 1868, a *Klein* „Vorlesungen

s nejnovějším zjevem na užším poli tomto, jejž uveřejnil posledně jmenovaný tuto badatel americký o algebraickém řešení zvláštního druhu rovnic stupně *pátého*,*) a to budiž předmětem druhého odstavce našeho.

II.

Jakož patrno, přijde rovnice (2) pro $n = 5$ v

$$x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0, \qquad (4)$$

což jest obecný tvar algebraické rovnice stupně pátého. A ten možná, což *Bring* již v předešlém století dokázal, bez obmezení všeobecnosti převésti na tvar trojčlenný

$$x^5 + p_4 x + p_5 = 0, \qquad (5)$$

v němž jeví se jen dva obecné koëfficienty a sice p_4 a p_5; položíme-li tu pak s *Hermitem*

$$x = \varrho t, \qquad (6)$$

převedeme přiměřenou volbou činitele ϱ tvar (5) na jiný, taktéž trinomický a sice

$$t^5 - t - \mathrm{A} = 9, \qquad (7)$$

kdež hodnota pěti kořenů t_k závisí pouze na jediné stálé A.

Předmětem úvah Youngových bylo pak vyšetřiti, které vlastnosti musí koëfficienty p_4 a p_5 v rovnici (5) míti, aby možná bylo ji řešiti algebraicky, při čemž arci nesnížitelnost stupně jejího předpokládal.

Co byl výsledek jeho badání, sestaveno tuto v několika vzorcích, jež představují takořka recept na řešení zvláštních rovnic, jež po svém pěstiteli mohou býti *Youngovými* jmenovány.

Značí-li A, B libovolná čísla realná, a složíme-li z nich koëfficienty p_4, p_5 tak, aby bylo

$$p_4 = \frac{5\,\mathrm{A}^4 (3 - \mathrm{B})}{16 + \mathrm{B}^2}, \qquad (8)$$

$$p_5 = -\frac{\mathrm{A}^5 (22 + \mathrm{B})}{16 + \mathrm{B}^2}; \qquad (9)$$

über das Ikosaëder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.“ Leipzig, Teubner 1884.

*) V pojednání právě mi zaslaném „Solution of Solvable Irreducible Quintic Equations, withoud the aid of a Resolvent Sextic.“ By *George Pazton Young*, University College, Toronto Canada.

značí-li pak λ kořen rovnice stupně čtvrtého

$$\lambda^4 - B\lambda^3 - 6\lambda^2 + B\lambda + 1 = 0,^*) \tag{10}$$

a sestavíme-li z veličin A, B, λ výrazy

$$a = -\frac{\lambda^2 + 1}{A\lambda(\lambda - 1)}, \tag{11}$$

$$\vartheta = -\frac{A^5\lambda(\lambda-1)^2}{(16 + B^2)(\lambda+1)(\lambda^2+1)}, \tag{12}$$

vyjádřuje se r jakožto kořen rovnice (5) algebraickým vzorcem

$$r = \vartheta^{\frac{1}{5}} + a\vartheta^{\frac{2}{5}} + \lambda a^2\vartheta^{\frac{3}{5}} - \lambda a^3\vartheta^{\frac{4}{5}}. \tag{13}$$

Jakými obraty dokázal *Young* současnou platnost těchto relací, nehodláme zde vykládati, nýbrž podáme ku konci ze šesti příkladů v uvedeném pojednání sestavených dva, aby se jimi postup v počítání na jevo uvedl.

Př. 1. Jestli zvoleno

$$A = 1, \quad B = 0,$$

bude podlé vzorce (8) a (9)

$$p_4 = \frac{15}{16}, \quad p_5 = \frac{11}{8};$$

rovnice stupně pátého (5) promění se v

$$16x^5 + 15x + 22 = 0,$$

---

*) Rovnici tuto možná uvésti na tvar převratný

$$\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) - B\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) - 6 = 0,$$

takže položíme-li tu

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} = z, \tag{a}$$

z čehož plyne, zmocníme-li,

$$\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = z^2 + 2,$$

z rovnice této povstane kvadratická

$$z^2 - Bz - 4 = 0, \tag{b}$$

jejíž *positivní* kořen jest

$$z_1 = \tfrac{1}{2}(B + \sqrt{B^2 + 16}), \tag{14}$$

načež z rovnice (a) obdržíme

$$\lambda^2 - z_1\lambda - 1 = 0, \tag{c}$$

kdež *positivní* kořen jest

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(z_1 + \sqrt{z_1^2 + 4}). \tag{15}$$

A tento kořen má *Young* na mysli, ač se o jakosti rovnice (10) a jejím řešení nezmiňuje.

a rovnice (10) stane se přímo kvadratickou pro

$$\lambda^2 = z,$$

jelikož se uvede na tvar

$$z^2 - 6z + 1 = 0,$$

jejíž positivní kořen jest

$$\lambda = \sqrt{3 + \sqrt{8}} = 2{\cdot}414215.$$

Dále bude dle vzorce (11)

$$a = -\frac{4 + \sqrt{8}}{3 + \sqrt{8} - \sqrt{3 + \sqrt{8}}} = -2,$$

a podle vzorce (12) podobně

$$\vartheta = -0{\cdot}01294,\ ^*)$$

načež snadno sestavíme řadu hodnot

$$\begin{aligned} \vartheta^{\frac{1}{5}} &= -0{\cdot}419194 \\ a\vartheta^{\frac{2}{5}} &= -0{\cdot}351447 \\ \lambda a^2\vartheta^{\frac{3}{5}} &= -0{\cdot}711345 \\ -\lambda a^2\vartheta^{\frac{4}{5}} &= +0{\cdot}596384 \\ \hline r &= -0{\cdot}885602. \end{aligned}$$

Jest tedy jedním kořenem této rovnice

$$r = -0{\cdot}8856.$$

Př. 2. Učiníme-li v případě druhém

$$A = 1, \quad B = \sqrt{2},$$

bude rovnice (5)

$$18x^5 + 5(3 - \sqrt{2})x + 22 + \sqrt{2} = 0$$

a rovnice (10)

$$\lambda^4 - \lambda^3\sqrt{2} - 6\lambda^2 + \lambda\sqrt{2} + 1 = 0,$$

jejíž kořen positivní jest

$$\lambda = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

jakož pomocí vzorců (14) a (15) snadno se ustanoví. Na to se obdrží, vyhledá-li se příslušná hodnota veličiny a a ϑ,

---

*) V časopise „American Journal of Mathematics“, kdež v VII. sv. Nr. 2. toto pojednání uveřejněno, není 0 před bod desetinný postavena, nýbrž jen bod dole v levo položen, takže na př. $\vartheta = -.01294$.