Vlastnosti jistých trojin bodových na cissoidě.

Napsal

Karel Zahradník.

I.

Vlastnosti trojin styku.

Rovnice cissoidy Diokles-a *) zní jak známo

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}},$$

kde značí a průměr základního kruhu. Uvedeme-li **) pomocí rovnice

$$uy = x$$

jednoznačný parametr u, obdržíme za rovnice cissoidy:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{1+u^2} \\ y &= \frac{a}{u(1+u^2)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Tečnu považovati můžeme co spojnici dvou sousedních bodů křivky. Rovnice spojnice dvou bodů u_1, u_2 zní:

---

*) *Diokles*, řecký mathematik, žil ve *druhém* století před Kr. Svoji křivku vynašel za příčinou řešení „delického problemu". Viz: *Cantor*-Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. Lipsko 1880, díl I. pag. 302 a 306; jakož i *Brettschneider*: Geometrie und die Geometer vor Euklides. Lipsko 1870 pg. 180.

**) *Theorii cissoidy* na základě racionalného parametru uveřejnil jsem ve zprávách o zasedání kr. české spol. nauk 1873. Pojednání toto vyšlo později též v 56. dílu *Grunertova*: Archiv für Mathematik und Physik, pg. 144. Geometrický význam parametru u je patrný. Píšeme-li totiž $U \equiv uy - x = 0$, je $u = \frac{\sin(UV)}{\sin(UX)}$. Co se tkne konstrukce viz *Salmon-Fiedler*: Höhere ebene Curven. Lipsko 1873, pg. 226, jakož i *Vaněček* Křivé čáry rovinné i prostorové. Jičín 1881, pg. 38.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{a}{1+u_1^2} & \frac{a}{u_1(1+u_1^2)} & 1 \\ \frac{a}{1+u_2^2} & \frac{a}{u_2(1+u_2^2)} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zkrátíme-li společným činitelem $(u_2 - u_1)$, obdržíme po malé redukci

$$[1 + u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2]\, x - u_1 u_2 (u_1 + u_2)\, y - a = 0.$$

Rovnice tato je rovnicí spojnice $\overline{u_1 u_2}$, kteráž za

$$u_1 = u_2 = u$$

přejde v tečnu bodu u; tím je rovnice tečny

$$(1 + 3u^2)\, x - 2u^3 y - a = 0. \qquad (2)$$

Rovnice tato podává nám relaci mezi souřadnicemi bodu kteréhokoliv (xy) na tečně T_u a parametrem bodu styku. Myslíme-li si, že je bod (xy) dán, tu obdržíme řešením rovnice (2) dle u hledaný bod styku. Jest však rovnice (2) stupně třetího dle u totiž

$$u^3 - \frac{3x}{2y} u^2 - \frac{x-a}{2y} = 0, \qquad (3)$$

obdržíme tudíž tři hodnoty pro u, t. j. z libovolného bodu P roviny cissoidy můžeme tři tečny k cissoidě vésti Pu_1, Pu_2, Pu_3, t. j. cissoida je křivka třetí třídy. Body styku u_1, u_2, u_3 těchto tečen příslušných k bodu P tvoří trojúhelník styku, kterýž je úplně určen polohou bodu P v rovině cissoidy. Bod P jmenovati budeme polem trojúhelníku styku $u_1 u_2 u_3$. Jelikož polu P zcela určitý trojúhelník přísluší, odpovídají tím i polu P znamenité body trojúhelníku na př. těžiště, střed kruhu trojúhelníku opsaného atd., a vyšetřiti příbuznost, ve které se nachází pol se znamenitými body trojúhelníku styku, bude úkolem prvé části tohoto pojednání.

Pol a těžiště.

2. Označíme-li těžiště trojúhelníku styku písmenem T (ξ, η), a souřadnice bodů styku u_h literami x_h, y_h $(h = 1, 2, 3)$, jest

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{a}{3} \sum_{h=1}^{3} \frac{1}{1 + u_h^2}, \\ \eta &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{a}{3} \sum_{h=1}^{3} \frac{1}{u_h (1 + u_h^2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Souřadnice těžiště trojúhelníku styku jsou tudíž symetrické funkce parametrů bodů dotyčných, t. j. kořenů rovnice (3); můžeme je tedy vyjádřiti racionálně koefficienty zmíněné rovnice.

Jest totiž *)

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{3}\frac{1}{1+u_h^2}&=\frac{3+2\Sigma u_1^2+\Sigma u_1^2u_2^2}{1+\Sigma u_1^2+\Sigma u_1^2u_2^2+\Sigma u_1^2u_2^2u_3^2},\\ \sum_{h=1}^{3}\frac{1}{u_h(1+u_h^2)}&=\frac{[\Sigma u_1]^2\,\Sigma u_1u_2-\Sigma u_1+\Sigma u_1u_2u_3+\Sigma u_1^3u_2^3}{\Sigma u_1u_2u_3\,[1+\Sigma u_1^2+\Sigma u_1^2u_2^2+\Sigma u_1^2u_2^2u_3^2]}\end{aligned}\tag{5}$$

Na dále je

$$\begin{aligned}\Sigma u_1^2&=p_1^2-2p_2\\ \Sigma u_1^3&=p_1^3-3p_1p_2+3p_3\\ \Sigma u_1^2u_2^2&=p_2^2-2p_1p_3\\ \Sigma u_1^3u_2^3&=p_2^3+3p_3^2-3p_1p_2p_3\\ \Sigma u_1^2u_2^2u_3^2&=p_3^2\\ \Sigma u_1^3u_2^3u_3^2&=p_3^3.\end{aligned}\tag{6}$$

Uvedeme-li tyto hodnoty do rovnice (5), obdržíme

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{3}\frac{1}{1+u_h^2}&=\frac{3+2p_1^2-2p_1p_3+p_2^2-4p_2}{(1-p_2)^2+(p_1-p_3)^2},\\ \sum_{h=1}^{2}\frac{1}{u_h(1+u_h^2)}&=\frac{p_1^2p_2-p_1p_3-3p_1p_2p_3-p_2^2+p_2+3p_2^3}{p_3\,[(1-p_2)^2+(p_1-p_3)^2]}.\end{aligned}\tag{7}$$

Rovnice (7) znásobené faktorem $\frac{a}{3}$ podávají nám souřadnice těžiště trojúhelníku vepsaného cissoidě. Uveďme nyní do těchto rovnic podmínku, jíž vyjádříme, že máme před sebou trojúhelník styku, pomocí relací, jež plynou z rovnice (3), totiž:

$$\begin{aligned}p_1&=\frac{3x}{2y},\\ p_2&=0,\\ p_3&=\frac{x-a}{2y}.\end{aligned}\tag{8}$$

---

*) Označení je obyčejné. Na příklad značí $\Sigma u_1^p u_2^q$ dvojtvarnou symetrickou funkci, jíž připadá $u_1^p u_2^q$ co člen. Nejjednodušší symetrické funkce t. i. kombinace r-tého stupně kořenů dané rovnice označíme krátce p_r; jsou tudíž $\Sigma u_1=p_1$, $\Sigma u_1u_2=p_2$, $\Sigma u_1u_2u_3=p_3$ nejjednodušší funkce kořenů rovnice (3).

Obdržíme takto souřadnice těžiště*) trojúhelníku styku

$$\begin{aligned}\xi &= a\frac{y^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)x}{y^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2},\\ \eta &= -a\frac{\frac{a}{2}y}{y^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}.\end{aligned}\qquad(9)$$

Rovnice (9) podávají nám hledaný vztah mezi polem P i těžištěm T trojúhelníku styku. Vztah tento je kvadratický a to kruhový jednoznačný, t. j. každému bodu (x, y) přísluší jediný bod ($\xi\eta$) a naopak každému bodu ($\xi\eta$) přísluší pouze jediný bod (xy). Abychom toto dokázali, je třeba podotknouti, že můžeme první z rovnic (8) psáti:

$$\xi - a = -a\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)\frac{a}{2}}{y^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Přičteme-li k této rovnici druhou rovnici (8) znásobenou $i=\sqrt{-1}$, obdržíme

$$\xi - a + i\eta = -\frac{a^2}{2}\,\frac{x+\frac{a}{2}+iy}{y^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Zkrátíme-li na pravé straně čítatelem, a znásobíme-li potom jmenovatelem pravé strany, obdržíme:

$$(\xi - a + i\eta)\left(x+\frac{a}{2}-iy\right) = -\frac{a^2}{2}.\qquad(10)$$

Klademe-li

$$\begin{aligned}\zeta &= \xi + i\eta\\ z &= x - iy,\end{aligned}$$

*) Do tohoto výsledku došli jsme ve pojednání uveřejněném v 75. dílu zpráv o zasedání c. k. akademie věd ve Vídni II. odděl. svazek březen 1877 (česky v „Archivu" II díl, pg. 101.); zde příbuznost tuto mimo jiné blíže vytkneme.

můžeme rovnici (10) psáti:

$$\zeta z + \frac{a}{2}\xi - az = 0. \qquad (11)$$

Z rovnice této vysvítá, že každému bodu z jediný bod ζ přísluší, i naopak.*) Plyneť řešením této rovnice

$$\zeta = \frac{az}{z + \frac{a}{2}}, \qquad z = \frac{\frac{a}{2}\zeta}{a - \zeta}.$$

Můžeme však i přímo z rovnice (10) vyjádřiti souřadnice polu P (xy) pomocí souřadnic těžiště T (ξ, η). Jest totiž:

$$x + \frac{a}{2} - iy = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\xi - a + i\eta} = -\frac{a^2}{2} \frac{\xi - a - i\eta}{(\xi - a)^2 + \eta^2},$$

z kteréžto rovnice bezprostředně plyne

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{a}{2} &= -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{\xi - a}{(\xi - a)^2 + \eta^2}, \\ y &= -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{\eta}{(\xi - a)^2 + \eta^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

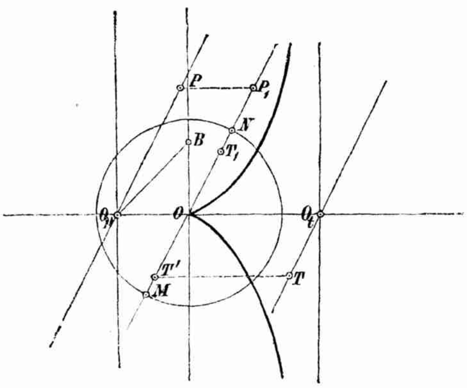
Tím jsme dokázali, že zmíněná kvadratická příbuznost je racionálná a ze tvaru rovnice (10) vysvítá, že je tato příbuznost kruhová, t. j. příslušné body P i T jsou spojené zákonem inverse.

Hlavní body soustavy bodu P jsou; $(-\frac{a}{2}, o)$ a imaginárné kruhové body — hlavní body soustavy bodu T jsou (a, o) a imaginarné kruhové body. Označme bod $(-\frac{a}{2}, o)$ písmenem O_p a bod (a, o) písmenem O_t (obr. 1.). Mysleme si, že soustavu bodu P rovnoběžně pošineme i to tak, by hlavní bod O_p sjednotil se s počátkem souřadnic O; současně i soustavu bodů T rovnoběžně pošineme tak, by hlavní bod O_t této soustavy

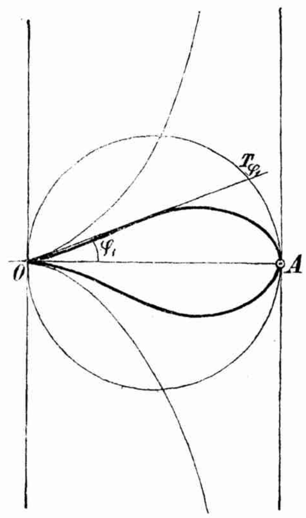
*) Jest tudíž $\zeta = f(z)$. Křivky, jež opíše bod P, jsou tudíž ve isogonálné příbuznosti se křivkami, jež opíše združený bod T, t. j. dvě křivky opsané polem P protínají se pod týmž úhlem, pod kterým se sečou příslušné křivky opsané bodem T. Viz: *Siebek*: Über die graphische Darstellung imaginärer Functionen. Crellův žurnál díl 55., pg. 228, 243. Dr. *Ed. Weyr*: „O vztahu dvou rovin, jimiž se nekonečně malé části podobně zobrazují (O vztahu isogonálném)". Č. jedn. math. d. III. p. 5.

padl do počátku souřadnic. V nové této poloze označme příslušné body P_1, T'. Otočíme-li nyní soustavu bodů T' okolo počátku souřadnic o 180^0 a označíme-li soustavu bodů T' v této nové poloze T_1, uvedeme tím příslušné body obou soustav do takové polohy, že oba body P_1, T_1 leží na paprsku jdoucím počátkem souřadnic a že platí relace

$$\overline{OP_1} \cdot \overline{OT_1} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2.$$



Obr. 1.



Obr. 2.

Tím dospěli jsme do následující konstrukce příslušných bodů. Sestrojme si nejdříve modul inverse $\frac{a}{\sqrt{2}}$, který se rovná tetivě $\overline{O_pB}$ kvadrantu kruhu o poloměru $\overline{O_pO} = \frac{a}{2}$ (obr. 1.).

Opišme nyní ze středu O kruh inverse Γ poloměrem rovným modulu inverse. Dán-li je bod P, ku kterému hledáme příslušný bod T, spojíme P s O_p, vedeme rovnoběžku s $\overline{O_pP}$ počátkem souřadnic i rovnoběžku bodem P k ose X; průsek těchto rovnoběžek je P_1. Na přímce OP_1 hledejme nyní T_1 vedle podmínky, že je

$$\overline{OP_1} \,.\, \overline{OT_1} = \frac{a^2}{2},$$

kterážto relace nám, jak známo, praví, že body P_1 a T_1 rozdělují harmonicky průměr NM kruhu inverse, t. j. že platí:

$$(NM\,P_1 T_1) = -1.$$

Tím najdeme bod T_1. Otočíme nyní OT_1 o 180^0, i obdržíme tím bod T', a rovnoběžný průmět s osou X na přímku vedenou bodem O_t rovnoběžně ku $\overline{O_pP}$ podává nám hledaný bod T.

Poznámka. Mohli jsme též z rovnice vyjíti. Připomeňme si pouze, že je-li $z' = z + \frac{a}{2}$, křivka, již opíše bod z' je táž, jakou opíše bod z jenom rovnoběžně pošinuta o $-\frac{a}{2}$, t. j. počátek soustavy bodů z' je bod O_p. Podobně píšeme-li $\zeta' = \zeta - a$, je bod O_t počátkem soustavy bodů ζ'.

Obdržíme takto z rovnice (11):

$$z'\zeta' = -\frac{a^2}{2}.$$

Jest však

$$O_pP \triangleq z' = re^{-i\varphi} \text{ *)},$$
$$O_tT \triangleq \zeta' = \varrho e^{i\psi},$$

tudíž je

$$\overline{O_pP} \,.\, \overline{O_tT} \triangleq r\varrho e^{i(\psi - \varphi)} = \frac{a^2}{2} e^{i\pi}.$$

Z rovnice této plyne ihned:

$$\psi = \pi + \varphi,$$
$$r \,.\, \varrho = \text{vel.}\, \overline{O_pP} \,.\, \text{vel.}\, \overline{O_tT} = \frac{a^2}{2},$$

čímž opět dřívější relace vychází, neb jest:

$$O_pP \triangleq OP_1,$$
$$O_tT \triangleq OT' \triangleq -OT_1.$$

Avšak i bez všech transformací plyne relace

$$O_pP \,.\, O_tT = -\frac{a^2}{2},$$

---

*) Jest totiž $z' = x + \frac{a}{2} - iy$. Čtenáře theorie aequipollencí neznalé poukazuji ku: *G. Bellavitis,* Methoda aequipollencí, přeložil Dr. K. Zahradník, Praha.

jest totiž

$$\overline{O_pP}^2 = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2,$$

$$\overline{O_tT}^2 = (\xi - a)^2 + \eta^2.$$

Upotřebíme-li rovnic (9) i (9′), obdržíme:

$$\overline{O_tT}^2 = \frac{\left(-\frac{a^2}{2}\right)^2}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{\left(-\frac{a^2}{2}\right)^2}{\overline{O_pP}^2},$$

z čehož ihned plyne

$$\overline{O_tT} \,.\, \overline{O_pP} = -\frac{a^2}{2}.$$

Pro praktickou potřebu můžeme i konstrukci obrazcem (2) danou značně zjednodušit. Můžeme totiž bod O_p vzíti za střed kruhu inverse. Tím je bezprostředně $P \equiv P_1$ a sestrojení bodu T_1 a tím i bodu T je totéž co dříve. Tím jest úplně vysvětlena příbuznost, ve které se nachází těžiště T a pol P, a mohli bychom nyní bezprostředně upotřebiti výsledků, jež pro transformaci pomocí inverse platí.*) Opíše-li bod P přímku, jež neprochází hlavním bodem O_p, opisuje sdružený bod T kruh probíhající hlavním bodom O_t. Opíše-li pol P křivku n-tého stupně a m — té třídy, opíše sdružený bod T křivku $2n$-tého stupně a $(2n\text{-}m)$té třídy, mající hlavní body soustavy T za n-násobné body. Jde li křivka polu P hlavními body soustavy bodů P, mění se poněkud výsledek, jejž, poněvadž známý, v krátkosti zde vytknu, neb v našem případě musíme míti na zřeteli, že hlavní body obou soustav nesplývají, jak se obyčejně předpokládá. Opíše-li pol P křivku n-tého stupně, jdoucí k-krát hlavním bodem O_p a l-kráte imaginarnými body kruhovými, rozpadává se příslušná křivka těžiště T, kteráž je $2n$-tého stupně ve úběžnou přímku co k-násobnou a ve spojnice hlavního bodu

*) O této transformaci viz: *Salmon-Fiedler*: Höhere ebene Curven pg. 363, Kegelschnitte 2. Aufl. pg. 536. *Bellavitis*: Teoria delle figure inverse e loro usu nella geometria elementare. Ann. del scienze del regno Lombardo-Veneto 1836 t. VI. *Liouville* ve svém Journal de mathem. t. XII. Theorie i vlastnosti této transformace jsou hezky sestaveny vo pojednání A. *Strnada* „O inversi kruhové“, Archiv math. a fysiky II. díl pg. 124. Praha.

O_t s imaginarnými body kruhovými co l-násobné a ve pravou křivku příslušnou zákonem inverse (12), kteráž je tudíž stupně $2n - k - 2l$ a třídy $2n - m - 2k - 4l$, je-li m třída křivky pola; bod O_t je $n - 2l$-násobným bodem a imaginárné body kruhové jsou $(n$-k-$l)$-násobné křivky těžiště.

Opíše-li na příklad pol P parabolu, jejíž parametr p rovná se poloměru základního kruhu cissoidy, totiž $= \frac{a}{2}$, a jejíž ohnisko leží ve hlavním bodu O_p, tudíž parabolu, vyjádřenou rovnicí:

$$y^2 = ax + \frac{3a^2}{4},$$

opíše sdružené těžiště T kardioidu, kteráž má bod úvratný v bodě O_t, a délku a za průměr pevného kruhu. Rovnice této kardioidy je:

$$[(\xi - a)^2 + \eta^2]^2 - 2a(\xi - a)[(\xi - a)^2 + \eta^2] = a^2\eta^2.$$

Opíše-li pol parabolu, jež má parameter $p = \frac{a}{4}$ a bod O_p za vrchol, t. j. parabolu danou rovnicí:

$$y^2 = -\frac{a}{2}\left(x + \frac{a}{2}\right),$$

opíše sdružené těžiště T opět cissoidu shodnou s danou cissoidou, pouze pošinutou o délku a rovnoběžně ve positivném směru osy X.

Pol a střed kruhu opsaného trojúhelníku styku.

3. Označíme-li (x_h, y_h) souřadnice bodu u_h, je rovnice kruhu opsaného trojúhelníku $u_1u_2u_3$:

$$(\xi^2 + \eta^2)\,|\,x, y, 1\,| - \xi\,|\,x^2+y^2, y, 1\,| + \eta\,|\,x^2 + y^2, x, 1\,| - |\,x^2 + y^2, x, y\,| = 0. \qquad (13)$$

Jelikož vrcholy u_h trojúhelníku leží na cissoidě, máme

$$x_h = \frac{a}{1 + u_h^2},$$

$$y_h = \frac{a}{u_h(1 + u_h^2)},$$

*) Viz: Pojednání moje: „Vlastnosti trojin oskulačních na strophoidě." Časopis jednoty česk. math. díl X. pg. 261.

tím

$$|x, y, 1| = \left| \frac{a}{1+u^2}, \frac{a}{u(1+u^2)}, 1 \right| = \frac{a^2}{p_3 \prod\limits_{h=1}^{3}(1+u_h^2)} \left| u, 1, u^3 \right| =$$

$$= -\frac{a^2 \Delta}{p_3 \prod\limits_{h=1}^{3}(1+u_h^2)} \cdot p_1 ,$$

kde jsme k vůli stručnosti položili

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix} = |1, u, u^2| .$$

Dále jest:

$$|x^2+y^2, y, 1| = \left| \frac{a^2}{u^2(1+u^2)}, \frac{a}{u(1+u^2)}, 1 \right| =$$

$$= \frac{a^3}{p_3^2 \prod\limits_{h=1}^{3}(1+u_h^2)} \cdot |1, u, u^2+u^4| = \frac{a^2 \Delta}{p_3 \prod\limits_{h=1}^{3}(1+u_h^2)} \cdot \frac{a}{p_3}(1+p_1^2-p_2),$$

$$|x^2+y^2, x, 1| = \left| \frac{a^2}{u^2(1+u^2)}, \frac{a}{1+u^2}, 1 \right| =$$

$$= \frac{a^3}{p_3^2 \prod\limits_{h=1}^{3}(1+u_h^2)} \cdot |1, u^2, u^4| = \frac{a^2 \Delta}{p_3 \prod\limits_{h=1}^{3}(1+u_h^2)} \cdot \frac{a}{p_3}(p_1 p_2 - p_3),$$

$$|x^2+y^2, x, y| = \left| \frac{a^2}{u^2(1+u^2)}, \frac{a}{1+u^2}, \frac{a}{u(1+u^2)} \right| =$$

$$= \frac{a^4}{p_3^2 \prod\limits_{h=1}^{3}(1+u_h^2)} \cdot |1, u^2, u| = -\frac{a^3 \Delta}{p_3 \prod\limits_{h=1}^{3}(1+u_h^2)} \cdot \frac{a^2}{p_3} .$$

Položíme-li tyto hodnoty do rovnice (13), obdržíme, pokrátivše společným činitelem $-\dfrac{a^2 \Delta}{p_1 \prod\limits_{h=1}^{3}(1+u_h^2)}$:

$$p_1(\xi^2+\eta^2) + \frac{a}{p_3}(1+p_1^2-p_2)\xi - \frac{a}{p_3}(p_1 p_2 - p_3)\eta - \frac{a^2}{p_3} = 0. \quad (14)$$

Totoť jest rovnice kruhu opsaného trojúhelníku, jehož vrcholy leží na cissoidě. Uvedeme-li nyní rovnicemi (8) podmínku, že trojúhelník $u_1 u_2 u_3$ je trojúhelníkem styku polu P, obdržíme:

$$\xi^2 + \eta^2 + a\frac{4y^2 + 9x^4}{3x(x-a)}\xi + a\frac{2y}{3x}\eta - a^2\frac{4y^2}{3x(x-a)} = 0. \quad (15)$$

Označíme-li souřadnice středu S tohoto kruhu písmeny ξ_1, η_1 je

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{a}{2}\frac{4y^2+9x^2}{3x(x-a)}, \\ \eta_1 &= -\frac{a}{2}\frac{2y}{3x}. \end{aligned} \quad (15)$$

Z rovnic (15) plyne, že je pol P ve příbuznosti kvadratické se středem S kruhu opsaného trojúhelníku styku. Dokážeme nyní, že příbuznost tato kvadratická je racionální, t. j. že každému bodu P roviny cissoidy přísluší touto transformací jediný bod S a naopak, že každému bodu S roviny cissoidy, uváženému co středu kruhu opsaného trojině bodů co styku, odpovídá jediný pol P. Řešení rovnic (15) dává nám totiž

$$\begin{aligned} x &= \frac{2a^2\xi_1}{12\eta_1^2 + 2a\xi_1 + 3a^2}, \\ y &= \frac{-6a\xi_1\eta_1}{12\eta_1^2 + 2a\xi_1 + 3a^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

čímž věc dokázána. Musí tudíž jak soustava bodů P tak i soustava bodu S míti tři hlavní body. V soustavě bodů P splynou dva hlavní body ve vzdálenosti nekonečné a třetí hlavní bod je v počátku souřadnic. Soustava bodů S má dva hlavní body imaginarné $\left(o, \frac{a\sqrt{-1}}{2}\right)$, $\left(o, \frac{-a\sqrt{-1}}{2}\right)$, třetí hlavní bod leží ve vzdálenosti nekonečné.

Nyní ukážeme, kterak jsme nalezli souřadnice těchto hlavních bodů. Naše transformace je kvadratická, t. j. přímce v jedné soustavě bodové (soubodí) přísluší kuželosečka, t. j. křivka druhého stupně v druhé soustavě bodové. Avšak přímka je určena, známe-li dva body, jimiž probíhá; za příčinou transformačních vzorců je příslušná kuželosečka zcela určená, známe-li k těmto dvěma bodům body příslušné soustavy druhé. Jelikož však kuželosečku pět bodů určuje a jelikož každé přímce, jdoucí dvěma body v druhé soustavě zcela určitá kuželosečka přísluší v soustavě první, vysvítá, že každá kuželosečka jedné soustavy příslušná přímce druhé soustavy probíhá třemi pevnými body, které se zovou hlavní či fundamentální body *). Průseku dvou přímek odpovídá tím jediný bod t. j. čtvrtý průsek dvou kuželoseček příslušných k těmto dvěma přímkám. Tím je i v krátkosti naznačeno, kterak ku hlavním bodům dojdeme.

Považujeme-li tudíž bod P(x, y) co průsek dvou přímek rovnoběžných s osami souřadnic, jsou k těmto přímkám příslušné kuželosečky:

$$\begin{aligned}(12\eta_1^2 + 2a\xi_1 + 3a^2)x &= 2a^2\xi_1,\\ (12\eta_1^2 + 2a\xi_1 + 3a^2)y &= -6a\xi_1\eta_1.\end{aligned} \tag{17}$$

Bychom našli souřadnice průseků těchto kuželoseček, řešme první rovnici dle ξ_1 a uveďme nalezenou hodnotu za ξ_1 do rovnice druhé, totiž

$$(12\eta_1^2 + 3a^2)y = -2a\xi_1(y + 3\eta_1),$$

načež obdržíme

$$(4\eta_1^2 + a^2)(ay + 3x\eta_1) = 0. \tag{18}$$

Jelikož se dvě kuželosečky ve čtyřech bodech protínají a výsledná rovnice (18) pouze třetího stupně je vzhledem k ordinatě η_1, plyne, že v případě našem ordinata jednoho průseku je vždy nekonečně veliká nezávisle na poloze bodu P(x, y). Prvý faktor, položen roven nulle, podává nám ordinaty dalších dvou průseků, totiž

$$\eta_1 = \frac{a\sqrt{-1}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{-a\sqrt{-1}}{2},$$

a z druhého faktora plyne pro pořadnici bodu příslušného bodu P(xy)

$$\eta_1 = -\frac{ay}{3x}.$$

Příslušné úsečky najdeme, položíme-li hodnoty pro η_1 do jedné z rovnic (17); najdeme takto, že

$$\begin{array}{llll} \text{pro} & \eta_1 = \infty & \text{je} & \xi_1 - \infty \\ \text{„} & \eta_1 = \pm\dfrac{ai}{2} & \text{„} & \xi_1 = 0, \\ \text{„} & \eta_1 = -\dfrac{ay}{3x} & \text{„} & \xi_1 = -\dfrac{a}{2}\,\dfrac{4y^2 + 9x^2}{3x(x-a)}. \end{array}$$

---

*) *Salmon-Fiedler.* Höhere eb. Curven pag. 369. *Magnus.* Sammlung von Aufgaben. Berlin 1833. I. pag. 229.

Tyto tři průseky, jejichž souřadnice jsou zcela nezávislé na poloze bodu (x, y), zoveme hlavními body soustavy S.

Na týž způsob mohli bychom vyjíti od rovnic (15). Vyloučíme-li z nich y, obdržíme

$$3x\left[(12\eta_1^2 + 2a\xi_1 + 3a^2)x - 2a^2\xi_1\right] = 0. \qquad (19)$$

Jelikož dvě kuželosečky se*) ve čtyrech bodech protínají, měli bychom eliminací jedné souřadnice přijiti na rovnici stupně čtvrtého v souřadnici druhé. Jest pak rovnice (19) pouze kvadratická i uzavíráme z toho, že dva kořeny jsou nekonečně veliké, třetí roven je nulle a čtvrtý kořen je

$$x = \frac{2a^2\xi_1}{12\eta_1^2 + 2a\xi_1 + 3a^2}.$$

Pro $x = \infty$ je i $y = \infty$, a pro $x = 0$ je $y = 0$;

pro $x = \dfrac{2a^2\xi_1}{12\eta_1^2 + 2a\xi_1 + 3a^2}$ oddržíme $y = \dfrac{-6a\xi_1\eta_1}{12\eta_1^2 + 2a\xi + 3a^2}$,

Opět vidíme, že tři z průseků jsou nezávislé na poloze bodu $(\xi_1\eta_1)$ a čtvrtý průsek podává nám bodu (ξ_1, η_1) příslušný bod (x, y).

Tím jsme opět určili úplně tuto příbuznost, a mohli bychom upotřebiti nyní obecných resultatů, jež nám podává theorie kvadratické racionálné transformace**), nač zde budiž pouze poukázáno.

O příbuznosti stupně čtvrtého mezi těžištěm a polem trojúhelníku styku.

6. Jelikož pol P jednoznačně určuje těžiště T trojúhelníku styku jakož i střed S kruhu tomuto trojúhelníku opsaného,

*) Druhou z rovnic (15) měli bychom psáti: $\eta_1 = -\frac{a}{2}\frac{2y(x-a)}{3x(x-a)}$, kdybychom chtěli zvláštní tento případ s obecnou theorií srovnati.

**) Vzhledem k theorii kvadratické racionální transformaci viz: *Salmon-Fiedler*: „Höhere ebene Curven" pag. 359. *Weyr Ed.*: Analytische Untersuchung der quadratischen Verwandtschaft. Schlömilch-Zeitschrift für M. und Ph. 1869. pag. 445. *Reye Th.*: Geometrische Verwandtschaften zweiten Grades ibid. díl XI. pag. 4., jakož i téhož: Geometrie der Lage. 2 Aufl. Hannover. *Magnus*: Aufgaben aus d. anal. Geom. d. Ebene, pag. 229. *Schiaparelli*: Sulla transformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla transformazione iperbolica. Mem. d. Accad. di Torino ser. II., tomo XXI.

a jelikož dány-li jsou body T neb S, je tím současně i bod P jednoznačně dán, plyne z toho, že musí býti těžiště T se středem S ve jednoznačné racionálné příbuznosti, tak že těžišti T přísluší jediný střed S a naopak středu S jediné těžiště T. Můžeme ihned určiti, jakého je stupně zmíněná příbuznost. Opíše-li těžiště T přímku, opíše dle dřívějšího pol P křivku druhého stupně, a této kuželosečce polu P přísluší křivka rationálná stupně čtvrtého, již opíše střed S a tím přisluší přímce v soustavě T racionálná křivka čtvrtého stupně v soustavě S. Vidíme tudíž, že můžeme souřadnice bodu S vyjádřiti co racionálné fnnkce lomené čtvrtého stupně v souřadnicích bodu T se stejným jmenovatelem.

Do těchto funkcí dojdeme následovně: Stavíme-li hodnoty souřadnic x, y z rovnic (12) i (13) sobě rovné, obdržíme řešením po ξ_1, η_1, jakožto souřadnic bodu S

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{a}{6}\cdot\frac{4a^2\eta^2+9(\xi^2+\eta^2-a\xi)^2}{(\xi^2+\eta^2-a\xi)\,(3[\xi^2+\eta^2]-5a\xi+2a^2)}, \\ \eta_1 &= -\frac{a}{6}\,\frac{2a\eta}{\xi^2+\eta^2-a\xi}. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Z rovnic (20) plyne, že je příbuznost mezi S a T bikvadratická a racionálná, jak jsme byli dříve úvahou jednoduchou dokázali. Příbuznost tato je tudíž Cremonova*) příbuznost, a můžeme každou takovou racionalní bikvadratickou transformaci nahraditi dvěma kvadratickými transformacemi. Jest totiž patrno, že místo bychom od soustavy bodů S přímo na soustavu bodu T přešli, můžeme nejprve přejíti od soustavy bodů S na soustavu bodu P pomocí jedné kvadratické transformace (16) a potom od soustavy bodů P na soustavu bodů T opětně pomocí kvadratické transformace dané rovnicemi (12). Mámeť takto zajímavý jednoduchý příklad ku transformacím Cremonovým.

Eulerova přímka.

5. Když již známe souřadnice jak těžiště tak středu kruhu opsaného trojúhelníku styku, můžeme bezprostředně na-

*) Viz: *Salmon-Fiedler* l. c. pag. 338. *Em. Weyr*: Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných. Praha 1872. *Clebsch*-Lindemann: „Geometrie“ pag. 478 i 489. Bližší literární poznámky viz ve zmíněném pojednání Dr. Em. Weyra.

psati *) souřadnice průseku $H(\alpha, \beta)$ výšek trojúhelníku a středu $S'(\alpha', \beta')$ kruhu jdoucího středy stran trojúhelníku styku t. j. středu Feuerbachova kruhu zmíněného trojúhelníku. Jest totiž

$$H\begin{cases}\alpha = 3\xi - 2\xi', \\ \beta = 3\eta - 2\eta',\end{cases}$$

$$S'\begin{cases}\alpha' = \dfrac{3\xi - \xi'}{2}, \\ \beta' = \dfrac{3\eta - \eta'}{2}.\end{cases}$$

Do těchto rovnic mohli bychom uvésti hodnoty pro ξ, η, ξ', η' z rovnic (9) i (15). Najdeme takto souřadnice bodů H i S' co funkce souřadnic polu P; tím je i místo těchto bodů dáno, opisuje-li pol P určitou křivku.

Nyní můžeme i obecněji pojmouti úlohu tuto a položiti si otázku, jaké jsou souřadnice bodu M, jenž rozděluje vzdálenost těžiště trojúhelníku od středu kruhu opsaného tomuto trojúhelníku dle daného pevného poměru, tak že je

$$\frac{SM}{TM} = \lambda.$$

Souřadnice bodu M jsou v případě tomto:

$$x_1 = \frac{\xi_1 - \lambda\xi}{1 - \lambda},$$

$$y_1 = \frac{\eta_1 - \lambda\eta}{1 - \lambda}.$$

Uvedeme-li nyní hodnoty pro ξ, η, ξ_1, η_1 do těchto rovnic, obdržíme, upotřebivše zkrácení

$$K \equiv y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2,$$

$$x_1 = \frac{a}{\lambda - 1} \frac{(4y^2 + 9x^2)K + 6\lambda x(x - a)\left[y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)x\right]}{3x(x - a)K}, \quad (21)$$

$$y_1 = \frac{a}{\lambda - 1} \cdot \frac{x(K - 3ax)}{3xK}.$$

Opíše-li nyní pol P nějakou křivku $f(xy) = 0$, najdeme příslušnou křivku bodu M, vyloučíme-li z rovnic (21) tohoto bodu a z rovnice $f(x, y) = 0$ souřadnice (x,y) polu P.

---

*) Viz: Vlastnosti trojin oskulačních na strophoidě l. c. pag. 270.

Opíše-li nyní P racionálnou křivku n-tého stupně, opíše kterýkoli bod Eulerové přímky křivku racionálnou $4n$-tého stupně, vyjma případy $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$; ty nám podávají body T i S a tu je příslušná křivka stupně $2n$-tého.

Každé poloze polu P přísluší zcela určitá Eulerova přímka E, již snadně určíme co spojnici $\overline{TS}$. Jest tudíž rovnice Eulerovy přímky, značí-li x_1, y_1 souřadnice proměnlivého bodu

$$E \equiv \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a \\ y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)x & -\frac{a}{2}y & y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \\ 4y^2 + 9x^2 & 2y(x-a) & -6x(x-a) \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

Opisuje-li pol P křivku nějakou

$$F(x,y) = 0, \quad (23)$$

obaluje Eulerova přímka určitou křivku, jejíž rovnici obdržíme, vyloučíme-li z rovnic (22) i (23) jakož i z rovnice

$$\begin{vmatrix} \frac{dE}{dx} & \frac{dE}{dy} \\ \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} \end{vmatrix} = 0,$$

veličiny x, y, čímž obdržíme rovnici obálky ve tvaru

$$f(x_1 y_1) = 0.$$

Je-li křivka $F(x,y) = 0$ racionálná n-tého stupně, je i enveloppa Eulerovy přímky racionálná křivka a to třídy $4n$-té. Rovnici její bychom ihned našli, kdybychom vyjádřili souřadnice (xy) pomocí racionálného parametru, a hodnoty tyto uvedli do rovnice (22) a položili diskriminant rovnice (22) vzhledem na tento parametr rovným nulle.

6. Nyní bychom si mohli položiti otázku, zdaž může pol P takovou křivku opsati, kterouž by karakterisovala vlastnost, že je vzdálenost těžiště trojúhelníku styku a střed kruhu tomuto trojúhelníku opsaného pro všechny body této křivky stálá, totiž d?

Podmínku tuto můžeme vyjádřiti následující rovnicí:

$$(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 = d^2,$$

a vložíme-li hodnoty za ξ, η, ξ_1, η_1, obdržíme hledanou křivku pólu P, kteráž je, jak snadně nahlédneme, stupně osmého. Příslušné křivky těžiště T i středu S jsou stupně šestnáctého.

Obálka kruhů opsaných trojúhelníku styku.

7. Našli jsme v článku 3., že je rovnice kruhu K opsaného trojúhelníku styku polu $P(xy)$:

$$K \equiv 3x(x-a)(\xi^2+\eta^2)+a(9x^2+4y^2)+2ay(x-a)\eta-4a^2y^2=0.$$

Opisuje-li nyní pol P nějakou křivku

$$F(x,y)=0,$$

mění se kruh tento současně i co do velikosti i co do polohy. Na tento způsob obdržíme soustavu kruhů příslušnou křivce polu a rovnici enveloppy těch kruhů obdržíme, vyloučíme-li z rovnice kruhu $K=0$ a z rovnice polu $F(x,y)=0$ a z rovnice

$$\begin{vmatrix} \frac{dK}{dx} & \frac{dK}{dy} \\ \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} \end{vmatrix} = 0, \qquad (24)$$

parametry x,y soustavy kruhů.

Nejjednodušší je případ ten, opíše-li pol křivku racionálnou. V případě tomto můžeme souřadnice proměnlivého bodu, jak známo, vyjádřiti co racionální lomené funkce určitého parametru o stejném jmenovateli. Je-li tudíž

$$F(x,y)=0$$

rovnice křivky n-tého stupně, můžeme ji nahraditi dvěma rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varphi(t)}{f(t)} \\ y &= \frac{\psi(t)}{f(t)} \end{aligned} \qquad (25)$$

kde jsou φ, ψ, f funkce algebraické celistvé n-tého stupně parametru t. Vložíme-li nyní tyto hodnoty za x, y do rovnice kruhu $K=0$, obdržíme

$$K \equiv \Phi(\xi, \eta, t)=0,$$

kterážto rovnice je stupně $2n$-tého vzhledem k parametru t i druhého stupně vzhledem k ξ, η. Diskriminant této rovnice vzhledem k parametru t položen roven nulle podává nám ihned rovnici enveloppy soustavy kruhů příslušných algebraické racionalní křivce n-tého stupně, dané rovnicemi (25).

Zmíněný diskriminant je $4(2n-1)^{\text{ho}}_{2}$ stupně vzhledem k $\xi i \eta$, t. j. obálka soustavy kruhů je v případě tomto křivka stupně $4(2n-1)^{\text{ho}}$.

Zde je opět nejjednodušší případ při $n=1$ t. j. opíše-li pol P přímku, jejíž rovnice je

$$y = bx + c;$$

obálka příslušné soustavy kruhů je křivka čtvrtého stupně. Případ tento poněkud blíže vysvětlíme.

Rovnice (24) zní v případě tomto:

$$\begin{vmatrix} \frac{dK}{dx} & \frac{dK}{dy} \\ -b & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Avšak místo bychom differencovali a potom eliminovali, můžeme i postup tento obrátiti, to jest nejdříve z rovnice přímky a z rovnice soustavy kruhů $K=0$ vyloučiti veličinu y, a pak differencovati. Eliminace nám dává:

$$K \equiv 3x(x-a)(\xi^2+\eta^2) + [9x^2 + 4(bx+c)^2]\,\xi + \\ + 2a(bx+c)(x-a)\,\eta - 4a^2(bx+c)^2 = 0. \quad (26)$$

Srovnáme-li tuto rovnici dle klesajících mocností x, obdržíme:

$$x^2M + xN + P = 0, \qquad (27)$$

kdež k vůli krátkosti stojí:

$$\left.\begin{aligned} M &\equiv 3(\xi^2+\eta^2) + (9a+4ab^2)\,\xi + 2ab\eta - 4a^2b^2, \\ N &\equiv -3a(\xi^2+\eta^2) + 8abc\xi + (2ac - 2a^2b)\,\eta - 8a^2bc, \\ P &\equiv 2ac\,(2c\xi - a\eta - 2ac. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Diskriminant rovnice (27) vzhledem ku parametru x položen roven nulle, totiž:

$$N^2 - 4MP = 0, \qquad (29)$$

je hledaná rovnice obálky.

Proměnlivý kruh (27) dotýká se obálky (29) ve dvou bodech v konečnosti a ve imaginárných bodech kruhových v nekonečnu, což již z rovnic:

$$\begin{aligned} xM + N &= 0, \\ xN + P &= 0, \end{aligned} \qquad (30)$$

vyplývá, jež ony body styku určují. *)

Spojnice obou bodů styku v konečnosti leží na chordále kruhu daných rovnicemi (30). Rovnice této chordály zní

*) Viz *Salmon-Fiedler l. c.* pag. 273., pag. 298.

$$ax\,[Mx + N] + (x - a)\,[Nx + P] = 0,$$

již též můžeme psáti

$$(aM + N)\,x^2 + Px - aP = 0.$$

Jest však $\quad R_{mn} \equiv aM + N = 0$

chordálou kruhů $M = 0$ i $N = 0$, již můžeme označiti zkrátka R_{mn}, čímž hořejší rovnice nabude tvaru

$$x^2 R_{mn} + (x - a)P = 0,$$

z kteréžto rovnice vysvítá, že veškeré spojnice párů bodů styku v konečnosti probíhají bodem $\overline{R_{mn}P}$ t. j. tvoří svazek paprskový, jehož střed je průsek přímky P s chordálou kruhů $M = 0$ a $N = 0$.

Střed proměnlivého kruhu (26) opisuje kuželosečku, jejíž rovnice jsou

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= -\,a\,\frac{9x^2 + 4(bx + c)^2}{6x(x - a)}, \\ \eta_1 &= -\,a\,\frac{(bx + c)}{3x}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

kde x jest proměnlivý parametr bodu této kuželosečky.

Vraťme se opět k rovnici (29). Provedeme-li naznačené násobení, obdržíme

$$\begin{aligned} 9a(\xi^2 + \eta^2)^2 &+ 12(ab + c)\,(-\,4c\xi + a\eta)\,(\xi^2 + \eta^2) + \\ &+ 48ac\,(ab + 2c)\,\xi^2 + 72a^2c\xi\eta + (4ac^2 + 8a^2bc + \\ &+ 4a^3b^2)\eta^2 + 144a^2c^2\xi = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Z této rovnice ihned seznáme, že je obálka křivka čtvrtého stupně, jež má imaginárné úběžné kruhové body za body úvratné a jež se dotýká osy pořadnic v počátku souřadnic. Je tudíž tato enveloppa *ovalem Descartes*-ovým. Opíše-li pol P přímku jdoucí bodem úvratným cissoidy, je $c = 0$, a enveloppa soustavy příslušných kruhů skládá se ze dvou identických kruhů, jejichž rovnice je

$$\xi^2 + \eta^2 + \tfrac{4}{3}ab\eta = 0.$$

Rychleji přijdeme k rovnici (32), vyjádříme-li souřadnice proměnlivého bodu přímky

$$mx + ny - p = 0$$

pomocí racionálného parametru. Obdržíme takto:

$$x = \frac{p}{m + nt},$$

$$y = \frac{pt}{m + nt},$$

co rovnice zmíněné přímky. Vložíme-li hodnoty tyto za x a y do rovnice (26) a seřadíme-li výsledek dle mocností parametru t, obdržíme:

$$t^2[4ap\xi - 2a^2n\eta - 4a^2p] + t[-3an\varrho^2 + 2a(p - am)\eta] + \\ + [3(p - am)\varrho^2 + 9ap\xi] = 0,$$

kdež

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Diskriminant této rovnice dle t, zkrácen veličinou a a položen roven nulle, totiž

$$a[-3n\varrho^2 + 2(p - am)\eta]^2 + 24[-2p\xi + an\eta + 2ap][(p - \\ - am)\varrho^2 + 3ap\xi] = 0,$$

podává nám opět rovnici hledané obálky. Tato rovnice se arci shoduje s rovnicí (32), třeba pouze klásti $m = -b$, $n = 1$, $p = c$. Vraťme se opět k rovnicím (28) a (29). Rovnice

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P^{*}) = 0$$

značí nám rovnice tří kruhů. Těmto připadají tudíž imaginárné kruhové body úběžné společně; z toho plyne a z tvaru rovnice enveloppy

$$N^2 - 4MP = 0,$$

že jsou body tyto dvojnými a to úvratnými, jak jsme ze tvaru rovnice (32) byli shledali.

Případ, kdy pol opisuje danou cissoidu.

8. Nyní uvážíme blíže případ, kdy pol P opisuje danou cissoidu. V případě tomto splynou dva vrcholy trojúhelníku styku s pólem P. Budiž

$$u_2 = u_3 = t$$

parametr těchto dvou splývajících bodů styku s polem P, a parametr třetího bodu styku budiž u_1; je patrno, že je nyní pól P, daný parametrem t, tangenciálným to bodem třetího bodu styku u_1. Pól P, jakožto bod cissoidy s parametrem t má v případě tomto za souřadnice

*) $P = 0$ se skládá z rovnice přímky

$$2c\xi - a\eta - 2ac = 0,$$

a z přímky úběžné, na níž imaginárné kruhové body leží.

$$x = \frac{a}{1+t^2},$$
$$y = \frac{a}{t(1+t^2)},$$

a položíme-li nyní tyto hodnoty do rovnice (3), vytkneme tím již, že pól P je bodem dané cissoidy a že při proměnlivém parametru t tuto vytvoří. Jest v případě tomto:

$$\frac{3x}{2y} = \tfrac{3}{2}t,$$
$$\frac{x-a}{2y} = -\frac{t^2}{2}$$

a rovnice (3) přejde v následující

$$u^3 - \tfrac{3}{2}\, tu^2 + \frac{t^3}{2} = 0. \qquad (32)$$

Avšak v bodě P sjednocují se dva body styku, musí býti tudíž t dvojnásobný kořen této rovnice, to jest

$$(u-t)^2 = 0,$$

jejím faktorem. Skutečně můžeme rovnici (32) též psáti

$$(u-t)^2\left(u+\frac{t}{2}\right) = 0.$$

Zkrátíme-li faktorem $(u-t)^2$, jenž se vztahuje k polu *) P, obdržíme

$$u + \frac{t}{2} = 0.$$

Jest tudíž parametr třetího bodu styku

$$u = u_1 = -\frac{t}{2}.$$

I zde můžeme v užším slova smyslu mluviti o těžišti. Vzhledem k rovnicím (4) jsou

---

*) Leží-li tři body cissoidy na přímce, je součet parametrů těchto bodů roven nulle. Tato relace platí pro racionálné křivky třetího stupně a třetí třídy vůbec. Viz pojednání: Rationale ebene Curven dritter Ordnung l. c. Bd. 56, pg. 137. Proložíme-li bodem t cissoidy přímku, protíná tato cissoidu v dalších dvou bodech u' a u'', platí tudíž $t + u' + u'' = 0$. Je-li $u' = u'' = u_1$ přejde tato relace ve $t + 2u_1 = 0$, z které opět plyne $u_1 = -\frac{t}{2}$ co parametr bodu styku tečny jdoucí bodem t cissoidy.

$$\xi = \frac{x_1 + 2x}{3},$$
$$\eta = \frac{y_1 + 2y}{3},$$

souřadnice těžiště, kdež xy jsou souřadnice polu P s parametrem t a (x_1, y_1) souřadnice třetího bodu styku s parametrem

$$u_1 = -\frac{t}{2}.$$

Jednodušší jest však, upotřebiti ihned relací (8) při vypočtení souřadnic těžiště, jež v případě tomto přejdou ve

$$\begin{aligned} p_1 &= \tfrac{3}{2}t, \\ p_2 &= 0, \\ p_3 &= -\frac{t^3}{2}. \end{aligned} \tag{33}$$

Uvedeme-li hodnoty tyto do rovnice (7), obdržíme přímo, zkrátivše činitelem $(t_1 + 1)$:

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{1 + u_k^2} = 6\,\frac{t^2 + 2}{(t^2 + 1)(t^2 + 4)},$$
$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{u_k(1 + u_k^2)} = -6\,\frac{t}{(t^2 + 1)(t^2 + 4)},$$

tím je

$$\begin{aligned} \xi &= 2a\,\frac{t^2 + 2}{(t^2 + 1)(t^2 + 4)}, \\ \eta &= -2a\,\frac{t}{(t^2 + 1)(t^2 + 4)}. \end{aligned} \tag{34}$$

Jest tudíž místo těžišť, opisuje-li pol danou cissoidu, racionální křivka čtvrtého stupně. Křivka leží celá v konečnosti, a má v počátku souřadnic bod úvratný příslušný k parametru $t = \infty$. Úběžné body této křivky mají parametry

$$t_1 = \sqrt{-1}, \quad t_2 = -\sqrt{-1},$$
$$t_3 = 2\sqrt{-1}, \quad t_4 = -2\sqrt{-1}.$$

Však dva a dva parametry a sice t_1 a t_4, pak t_2 a t_3 určují vždy jeden a týž bod a sice imaginárný kruhový bod v nekonečnu t. j. imaginárné úběžné kruhové body jsou dvojnými body křivky. Křivka má tudíž bod úvratný a dva body dvojné, jest tudíž páté třídy.

Rovnici této křivky obdržíme ve tvaru $F(\xi, \eta) = 0$ eliminací parametru t z rovnic (34). Eliminaci tuto nejjednodušeji provedeme následujícím způsobem. Podíl obou rovnic (34) je

$$\frac{t^2+2}{t} = -\frac{\xi}{\eta}, \tag{35}$$

tudíž je

$$t^2+2 = -\frac{\xi}{\eta}t,$$

$$t^2+1 = -\frac{\xi}{\eta}t+1,$$

$$t^2+4+-\frac{\xi}{\eta}t+2.$$

Položíme-li hodnoty tyto do druhé z rovnic (34), obdržíme po redukci, pokrativše společným činitelem η,

$$\xi^2t^2+\eta(2a-\xi)t-2\eta^2 = 0. \tag{36}$$

Avšak rovnici (35) můžeme též psáti:

$$\eta t^2+\xi t+2\eta = 0, \tag{37}$$

a vyloučíme-li nyní z těchto dvou rovnic parametr t, obdržíme co hledanou rovnici křivky

$$(\xi^2+\eta^2)^2 - a\xi(\xi^2+\eta^2)+2a^2\eta^2 = 0. \tag{38}$$

Přejdeme-li na souřadnice polárné, obdržíme

$$r^2 - ar\cos\varphi + 2a^2\sin^2\varphi - 0, \tag{39}$$

tudíž je:

$$r = \frac{a}{2}(\cos\varphi \pm \sqrt{9\cos^2\varphi - 8}).$$

Každá přímka jdoucí počátkem souřadnic protíná křivku (obr. 2., pg. 110.) ve dvou bodech realných (mimo bod úvratný), dokud je

$$\sin\varphi \lesseqgtr \tfrac{1}{3}. \tag{40}$$

Je-li

$$\sin\varphi = \tfrac{1}{3},$$

sice jest

$$\varphi_1 = 19^\circ 28' 16{\cdot}5'',$$

splynou oba průseky, a přímka je tečnou $T\varphi_1$. Jest však vždy při podmínce (40)

$$\cos\varphi > \sqrt{9\cos^2\varphi - 8},$$

a jelikož se rovnice křivky nemění, píšeme-li $-\varphi$ místo φ, plyne opět, že je křivka souměrna k ose X a že leží celá na positivné straně osy úseček. Křivku tuto můžeme snadně sestrojiti z následující tabulky, kde jsme položili $OA = a = 1$.

$\pm t$	Σ	$\mp \eta$	$\pm t$	Σ	$\mp \eta$
3	0·169	0·046	1	0·6	0·2
2	0·3	0·1	0·9	0·64	0·218
1·5	0·42	0·14	0·8	0·71	0·215
$1\frac{1}{3}$	0.46	0·16	0·5	0·84	0·19
$1\frac{1}{4}$	0·505	0·17	$\frac{1}{3}$	0·9	0·14
1·2	0·52	0·18	$\frac{1}{4}$	0·95	0·11
1·1	0·54	0·191	0·2	0·97	0·095

Mohli bychom arci i cestou geometrickou dojíti do konstrukce této křivky, jak v následujícím ukážeme, avšak konstrukce sama nebyla by jednodušší.

Jelikož je

$$t = \cot(\mathrm{POM}) = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{PM}},$$

najdeme $u_1 = -\frac{t}{2}$, prodloužíme-li $\overline{\mathrm{PM}}$ přes bod M do bodu Q o délku $\mathrm{MQ} = 2\mathrm{PM}$. Jest nyní

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{QM}} = -\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{PM}} = -\frac{t}{2};$$

spojnice *) $\overline{\mathrm{OQ}}$, jejíž je rovnice

$$-\frac{t}{2}y = x,$$

protíná cissoidu v hledaném bodě o parametru $u_1 = -\frac{t}{2}$. Spojnice $\overline{\mathrm{P}u_1}$, jest tangentou cissoidy v bodě u_1 a těžiště je dáno relací

$$\frac{\mathrm{PT}}{u_1\mathrm{T}} = -\tfrac{1}{2}.$$

Tím bychom mohli snadně ku každému bodu P cissoidy sestrojiti příslušný bod T a tím i křivku co místo bodů T.

*) Viz čl. 1.

Ploský obsah celé křivky vyjadřuje nám integral

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \, d\xi = 16 a^2 \int_{0}^{\infty} \frac{t^2 (t^4 + 4t^2 + 6)}{(t^2+1)^3 (t^2+4)^3} dt.$$

Jest však

$$\frac{t^2 (t^4 + 4t^2 + 6)}{(t^2+1)^3 (t^2+4)^3} = \frac{1}{3^3}\left[-\frac{3}{(t^2+1)^3} + \frac{4}{(t^2+1)^2} - \frac{2}{t^2+1} \right] +$$

$$+ \frac{1}{3^3}\left[\frac{24}{(t^2+4)^3} + \frac{2}{(t^2+4)^2} + \frac{2}{t^2+4} \right];$$

a dále je

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+4)^n} = \frac{2}{4^n} \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^n},$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^n} = J_n = \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1},$$

tudíž je

$$p = \frac{16a^2}{27}\left[-\frac{9}{4} J_3 + \frac{17}{4} J_2 - J_1 \right] = \tfrac{1}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Uvážíme-li, že je plocha cissoidy omezená křivkou a reálnou assymptotou rovna $3\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$, dojdeme do zajímavého výsledku, že je plocha křivky těžiště, opisuje-li pol danou cissoidu devátý díl plochy cissoidy dané.

9. Kruh opsaný trojúhelníku styku přejde nyní ve kruh, jenž se dotýká cissoidy v polu P a probíhá bodem cissoidy, jemuž je pol bodem tangenciálným. Rovnici tohoto kruhu obdržíme, uvedeme-li v rovnici (14) podmínky (33), které pro tento případ platí.

Obdržíme takto

$$K_t \equiv 3t^4 (\xi^2 + \eta^2) - a(4 + 9t^2)\,\xi - 2at^3\eta + 4a^2 = 0.$$

Jest tudíž $K_t \equiv 0$ rovnice kruhu, jenž se dotýká cissoidy v bodě t a ji protíná v bodě $u_1 = -\frac{t}{2}$. Další průsek tohoto kruhu s cissoidou snadně najdeme, neb jest součet parametrů průseků kruhu kteréhokoliv s cissoidou roven nulle *).

---

*) Viz zmíněné moje pojednání pag. 147.

Jest tudiž parametr tohoto průseku

$$u' = -\frac{3t}{2} = -3u_1.$$

Z rovnice $K_t = 0$ plyne, že každým bodem roviny cissoidy probíhají čtyři kruhy a každý z nich protíná cissoidu v bodě, jenž má bod styku příslušného kruhu za příslušný bod tangenciálný.

Pravili jsme, že kruh K_t dotýkající se se cissoidy v bodě t, tuto ve dvou bodech protíná a že je parametr jednoho průseku $-\frac{t}{2}$, druhého $-\frac{3}{2}t$. Rovnice spojnice těchto průseků zní:

$$6t^3y + (4 + 7t^2)x - 4a = 0.$$

Enveloppa těchto spojnic je příbuzná (affiní) křivka cissoidy. Průsek této spojnice s cissoidou snadně najdeme. Jest totiž symetrickým bodem k ose x ku bodu tangenciálnému pólu P, tudíž bod, jehož parametr je $2t$.

Vraťme se opět k rovnici kruhu $K_t = 0$. Souřadnice středu tohoto kruhu jsou

$$\xi_1 = \frac{a}{2}\frac{4 + 9t^2}{3t^4},$$

$$\eta_1 = \frac{a}{3t}.$$

Opíše-li tudíž pól P danou cissoidu, opíše střed S racionálnou křivku čtvrtého stupně a páté třídy (mající trojnásobný bod v nekonečné vzdálenosti vzniklý sjednocením se dvou dvojných bodů a jednoho bodu úvratného). Rovnici její ve tvaru

$$F(\xi_1, \eta_1) = 0$$

najdeme, vyloučíme-li z těchto rovnic proměnlivý parametr t. Obdržíme tu

$$27\eta_1^2(a^2 + 4\eta_1^2) - 2a^3\xi_1 = 0.$$

Co se tkne sestrojení středu S, můžeme nejdříve sestrojiti tečnu v bodě P_t na ten neb onen způsob*). [Učiňme $MQ' = \frac{1}{2}$ PM. Spojnice $\overline{OQ'}$ protíná cissoidu v bodě tangenciálném bodu P_t a tím je spojnice tohoto bodu s P_t hledaná tečna]. Normala bodu P_t protíná kolmici ve středu tětivy $\overline{Pu_1}$ sestrojenou ve hledaném

*) Jiný způsob zakládá se ve geometrické definici cissoidy, viz *Vaněček* l. c. 39.

bodě S. Můžeme však i čtvrtého průseku *) kruhu K_t s cissoidou upotřebiti, totiž bodu, jehož parametr $-\frac{3}{2}t$. Spojnice tohoto bodu s bodem u_1 je též tětivou kruhu K_t, a kolmice ve středu této tětivy probíhá tudíž středem kruhu S.

Co se tkne konstrukce bodu $-\frac{3}{2}t$, naneseme $ON' = 3ON$ a $\overline{N'L} = \overline{Nu_1}$. Spojnice $\overline{OL}$ protíná cissoidu v hledaném bodě $-\frac{3}{2}t$.

II.

Vlastnosti trojin pat normál bodů na cissoidě.

Normála má směrnici negativně reciprokou oné, již má tangenta. Jest tudíž směrnice normály bodu u

$$A = -\frac{2u^3}{1 + 3u^2},$$

a tím je rovnice normály bodu u

$$y - \frac{a}{u(1 + u^2)} = -\frac{2u^3}{1 + 3u^2}\left(x - \frac{a}{1 + u^2}\right).$$

Provedeme-li naznačenou operaci, obdržíme

$$(1 + u^2)[u(1 + 3u^2)y + 2u^4x - a(1 + 2u^2)] = 0.$$

Zkrátíme-li nyní činitelem $(1 + u^2)$, jenž nám praví, že cissoida imaginárnými úběžnými body kruhovými probíhá, jež počet normal o dvě redukují **), obdržíme rovnici normaly:

$$u(1 + 3u^2)y + 2u^4x - a(1 + 2u^2) = 0. \qquad (1)$$

Rovnice tato podává nám vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu (xy) normály a mezi parametrem paty normály. Považujeme-li bod (xy) jakožto daný a parametr u co neznámý, můžeme z této rovnice nalézti parametr paty normály. Jest však rovnice (1) vzhledem k parametru paty stupně čtvrtého z čehož plyne, že z libovolného bodu (xy) roviny cissoidy na cissoidu čtyři normály spustiti můžeme.

Normály cissoidy jsou tangentami její evoluty, jest tedy počet normal třídou evoluty t. j. evoluta cissoidy je třídy čtvrté. Tangenciálné souřadnice evoluty jsou:

---

*) K_t dotýká se cissoidy v bodě P_t, což platí za dva průseky.

**) Dr. *Em Weyr:* „O evolutách křivek rovinných". Čas. jedn. díl III.

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{2u^4}{a)1 + 2u^2)}, \\ \eta &= -\frac{u(1 + 3u^2)}{a(1 + 2u^2)}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Rovnici evoluty obdrželi bychom ve tvaru $F(\xi,\eta) = 0$ vyloučením parametru u z rovnic (2).

Souřadnice proměnlivého bodu evoluty obdržíme, řešíme-li rovnici normály $N = 0$ a její derivaci $\frac{dN}{du} = 0$ dle x a y.

Obdržíme takto

$$\begin{aligned} x &= -a\frac{6u^2 + 1}{6u^4}, \\ y &= \frac{4a}{3u}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Jest tudíž evoluta cissoidy racionálná křivka čtvrtého stupně a čtvrté třídy. Eliminací parametru u obdrželi bychom

$$512a^3x + 288a^2y^2 + 27y^4 = 0, \qquad (5)$$

co rovnici evoluty cissoidy v souřadnicích bodových.

2. Vraťme se opět k rovnici normály (1). Leží-li bod (xy) na cissoidě a připadá-li mu parametr u', representuje již onen bod u' sám jednu patu. Můžeme tudíž z bodu cissoidy pouze tři normály na cissoidu spustiti. Bychom našli parametry pat těchto normál bodu u', uveďme hodnoty za x, y do rovnice normály. Obdržíme takto, znásobivše jmenovatelem $u'(1 + u'^2)$ a zkrátivše veličinou a

$$u(1 + 3u^2) + 2u^4u' - (1 + 2u^2)(1 + u'^2)u' = 0. \qquad (6)$$

Rovnice tato musí míti společný faktor $(u - u')$, jelikož, jak jsme již pravili, bod u' sám jako patu jedné normály považovati můžeme a tím je u' kořen rovnice (6). Můžeme totiž rovnici (6) též psáti

$$(u - u') + u^3 - u'^3 + 2u^2(u - u') + 2u^2u'(u^2 - u'^2) = 0$$

a skrátíme-li nyní společným činitelem $(u - u')$, obdržíme

$$2u'u^3 + (3 + 2u'^2)u^2 + u'u + (1 + u'^2) = 0. \qquad (7)$$

Z rovnice této patrno, že z bodu u' na cissoidě tři normály spustiti můžeme na cissoidu (nepočítaje arci normálu v bodě u' samém, již jsme zkrácením faktorem $(u - u')$ vyloučili), a parametry pat obdržíme jakožto kořeny rovnice (7). Mezi parametry pak platí patrně následující relace

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \Sigma u_1 = -\frac{3+2u'^2}{2u'}, \\ p_2 &= \Sigma u_1 u_2 = -\tfrac{1}{2}, \\ p_3 &= \Sigma u_1 u_2 u_3 = -\frac{1+u'^2}{2u'}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Rovnice (7) má pouze jeden kořen reálný.

3. Rovnice (7) má vždy dva kořeny komplexní, pro kteroukoliv hodnotu parametru u' t. j. z bodu u' na cissoidě můžeme pouze jedinou reálnou normálu spustiti, dvě ostatní normály jsou imaginárné. Bychom toto dokázali, převedeme si úlohu tuto na jinou, totiž dokážeme, že plocha trojúhelníka pat normal pro kterýkoliv bod u' je vždy imaginárná, t. j. že trojúhelník sám je imaginárný. Označíme-li kořeny rovnice (7) u_1, u_2, u_3 a trojúhelník pat Δ, jest jak známo

$$2\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{a}{1+u_1^2} & \dfrac{a}{u_1(1+u_1^2)} & 1 \\ \dfrac{a}{1+u_2} & \dfrac{a}{u_2(1+u_2^2)} & 1 \\ \dfrac{a}{1+u_3^2} & \dfrac{a}{u_3(1+u_3^2)} & 1 \end{vmatrix},$$

Odstraníme-li jmenovatele v prvcích determinantu, obdržíme

$$2\Delta = \frac{a^2}{\prod\limits_{h=1}^{3} u_h(1+u_h^2)} \begin{vmatrix} u_1 & 1 & u_1(1+u_2^2) \\ u_2 & 1 & u_2(1+u_1^2) \\ u_3 & 1 & u_3(1+u_3^2) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{a^2}{\prod\limits_{h=1}^{3} u_h(1+u_h^2)} \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_3^3 \\ 1 & u_2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^3 \end{vmatrix}.$$

Jest však

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^3 \end{vmatrix} = \Sigma u_1 \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix} = p_2 \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix},$$

tudíž je

$$2\Delta = -\frac{a^2 p_1}{\prod\limits_{h=1}^{3} u_h(1+u_h^2)} \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}.$$

Jmenovatel $\prod_{h=1}^{3} u_h(1+u_h^2)$ je symetrická funkce kořenů rovnice (7), můžeme ji tudíž vyjádřiti racionálně pomocí koefficientů této rovnice; jest totiž

$$\prod_{h=1}^{3} u_h(1+u_h^2) = p_3[(1-p_2)^2+(p_1-p_3)^2].$$

Determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix} = (u_2-u_1)(u_3-u_1)(u_3-u_2),$$

jest funkce střídavá, tudíž je čtverec její symetrická funkce. Jest totiž:

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 3 & \Sigma u & \Sigma u^2 \\ \Sigma u & \Sigma u^2 & \Sigma u^3 \\ \Sigma u^2 & \Sigma u^3 & \Sigma u^4 \end{vmatrix}.$$

Pomocí Newtonových vzorců můžeme vyjádřiti Σu^r jakožto racionální funkci koefficientů rovnice (7). Obdržíme takto:

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -p_1 & p_1^2-2p_2 \\ -p_1 & p_1^2-2p_2 & -p_1^3+3p_1p_2-3p_3 \\ p_1^2-2p_2 & -p_1^3+3p_1p_2-3p_3 & p_1^4-4p_1^2p_2+4p_1p_3+2p_2^2 \end{vmatrix}.$$

Determinant na pravo přejde po malé redukci ve

$$\begin{vmatrix} 3 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 & 3p_3 \\ -p_1^2+4p_2 & 3p_3 & p_1p_3 \end{vmatrix}.$$

Vložíme-li nyní do tohoto determinantu hodnoty za p_h z rovnic (8), obdržíme, odstranivše jmenovatele

$$\frac{1}{16u^2}\begin{vmatrix} 6u & 3+2u^2 & u \\ 3+2u^2 & u & 3(1+u^2) \\ -(3+2u^2)^2+8u^2 & 6(1+u^2)u & (1+u^2)(3+2u^2) \end{vmatrix}.$$

Znásobíme-li nyní prvý řádek veličinou u a zkrátíme-li touže veličinou sloupec druhý, obdržíme:

$$\frac{1}{16u^2}\begin{vmatrix} 6u^2 & 3+2u^2 & u^2 \\ 3+2u^2 & 1 & 3+3u^2 \\ -(3+2u^2)^2+8u^2 & 6+6u^2 & 1+5u^2+u^4 \end{vmatrix}.$$

Vyčíslíme-li determinant tento, obdržíme

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}^2 = -\frac{90+313\,u^2+470\,u^4+202\,u^6+16u^4}{16\,u^2}.$$

Poněvadž je čtverec determinantu negativný pro každou reálnou hodnotu parametru u, je tím determinant sám imaginárný, tudíž je i výraz pro Δ imaginárný. Z toho plyne, že rovnice (7) má pouze jediný kořen realný a jeden musí míti realný, neb jest stupně lichého, a ostatní dva kořeny jsou tím imaginárny, poněvadž je výraz pro plochu trojúhelníku pat imaginárný.

Těžiště trojúhelníku pat.

4. Trojúhelník pat má tudíž pouze jediný vrchol realný, ostatní dva vrcholy jsou imaginárné. Předce však je těžiště tohoto trojúhelníku realné. To je patrné; neb je-li u_1 parametr realného vrcholu (x_1, y_1), a jsou-li u_2, u_3 parametry vrcholů imaginárných trojúhelníku pat, je

$$u_2 = p + iq,$$
$$u_3 = p - iq,$$

tím je:

$$x_2 = f(p+iq) = \mathrm{P} + i\mathrm{Q},$$
$$x_3 = f(p-iq) = \mathrm{P} - i\mathrm{Q},$$

tudíž je

$$\xi = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_1+2\mathrm{P}}{3}$$

reálné, a zcela obdobně to i v η platí. Souřadnice těžiště trojúhelníku, jenž je vepsán cissoidě, podávají nám rovnice (4) i (7) prvého dílu. Uvedeme-li do těchto rovnic podmínku, že vrcholy trojúhelníku jsou paty normal bodu*) u' pomocí rovnic (8) obdržíme:

---

*) V následujícím píšeme u místo u' k vůli jednoduchosti, neb pochybnost zde nemůže nastati.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a}{3} \cdot \frac{3 + 4u^2}{1 + u^2}, \\ \eta &= -\frac{a}{3} \cdot \frac{u^3}{(1 + u^2)(4 + u^2)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Tato křivka leží celá v konečnosti, poněvadž parametry bodů nekonečně vzdálených jsou imaginarné, totiž $\pm i$, $\pm 2i$. Jelikož první z rovnic (9) můžeme psáti:

$$\xi = a + \frac{a}{3} \cdot \frac{u^2}{1 + u^2},$$

je patrno, že pošineme-li rovnoběžně soustavu souřadnic v směru positivné osy o délku a t. j. vezmeme-li bod O′ za počátek souřadnic, obdržíme místo rovnic křivky (9) následující:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{a}{3} \cdot \frac{u^2}{1 + u^2}, \\ \eta_1 &= -\frac{a}{3} \cdot \frac{u^3}{(1 + u^2)(4 + u^2)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic parametr u, obdržíme rovnici křivky ze tvaru $F(\xi_1 \eta_1) = 0$, totiž:

$$9\xi_1^2 (\xi_1^2 + \eta_1^2) - 3a\xi_1 (\xi_1^2 + 24\eta^2) + 16a^2\eta_1^2 = 0. \tag{11}$$

Na týž způsob, jako ve článku osmém předcházejícího dílu, dojdeme i zde ku sestrojení křivky, která je uzavřena a rozprostírá se od $\xi_1 = 0$ do $\xi_1 = \frac{a}{3}$.

Křivka je páté třídy a ploský obsah její je:

$$p = \int_{+\infty}^{-\infty} \eta_1 \, d\xi = \frac{4a^2}{9} \int_0^\infty \frac{u^4 du}{(1 + u^2)^3 (4 + u^2)} = \tfrac{7}{3} \pi \left(\frac{a}{10}\right)^2.$$

Střed kruhu opsaného trojúhelníku pat.

5. Našli jsme ve předcházejícím dílu (14), že je rovnice kruhu opsaného trojúhelníku, jehož vrcholy leží na cissoidě:

$$p_1 (\xi^2 + \eta^2) + \frac{a}{p_3} (1 + p_1^2 - p_2) \xi - \frac{a}{p_3} (p_1 p_2 - p_3) \eta - \frac{a^2}{p_3} = 0.$$

Vyjádříme-li pomocí rovnic (8) podmínku, že zmíněný trojúhelník je trojúhelníkem pat, obdržíme co rovnici kruhu opsaného tomuto trojúhelníku:

$$(1+u^2)(3+2u^2)(\xi^2+\eta^2)+a\,[9+14u^2+4u^4]\,\xi+au\eta - \\ -4a^2u^2=0. \tag{12}$$

Souřadnice středu tohoto kruhu jsou tudíž

$$\begin{aligned} \xi_2 &= -\frac{a}{2}\,\frac{9+14u^2+4u^2}{(1+u^2)(3+2u^2)}, \\ \eta_2 &= -\frac{a}{2}\,\frac{u}{(1+u^2)(3+2u^2)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Pošineme-li rovnoběžně soustavu souřadnic do bodu O′ $(-a, 0)$ co nového počátku, což se provede tím, že píšeme $\xi_2 + a = \xi'_2$, $\eta_2 = \eta'_2$, přejdou rovnice (13) v následující:

$$\begin{aligned} \xi'_2 &= -\frac{a}{2}\,\frac{3+4u^2}{(1+u^2)(3+2u^2)}, \\ \eta'_2 &= -\frac{a}{2}\,\frac{u}{(1+u^2)(3+2u^2)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Jest tudíž místo středu racionalní křivka čtvrtého stupně a, jak bychom se snadně přesvědčiti mohli, páté třídy. Máť kromě dvou dvojných bodů imaginárných realný bod úvratný v počátku souřadnic O′.

Obraz křivky této, kteráž leží celá v konečnosti na negativné straně osy X od $\xi'_2 = 0$ do $\xi'_2 = -\frac{a}{a}$, obdrželi bychom týmž způsobem, jakým jsme dříve postupovali. Bližší vyšetřování jednotlivých křivek nepodává žádných obtíží, a tudíž můžeme je zde přejíti.

Jelikož ku každému bodu u cissoidy přísluší určitý kruh pat $K_u = 0$, daný rovnicí (12), plyne, že opíše-li bod u cissoidu, zahaluje soustava příslušných kruhů křivku desátého stupně. Rovnici její bychom obdrželi, kdybychom diskriminant rovnice (12) vzhledem k parametru u položili rovným nulle.*)

*) Toto pojednání vyšlo v „Rad jugosl. akademije“ kniha 61.