Kombinatorický důkaz poučky o násobení dvou determinantů.

Podává

prof. F. Hoza.

Násobíme-li spolu dva determinanty n-tého stupně

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$$

a

$$\Delta' = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix},$$

obdržíme za součin opět determinant n-tého stupně

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix},$$

v němž

$$c_{pq} = a_{p1} b_{q1} + a_{p2} b_{q2} + a_{p3} b_{q3} + \dots + a_{pn} b_{qn} .$$

Abychom tuto větu dokázali, pišme

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + \dots + a_{1n} b_{1n}, & \dots & a_{11} b_{n1} + a_{12} b_{n2} + \dots + a_{1n} b_{nn} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{12} + \dots + a_{2n} b_{1n}, & \dots & a_{21} b_{n1} + a_{22} b_{n2} + \dots + a_{2n} b_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} b_{11} + a_{n2} b_{12} + \dots + a_{nn} b_{1n}, & \dots & a_{n1} b_{n1} + a_{n2} b_{n2} + \dots + a_{nn} b_{nn} \end{vmatrix},$$

Tento determinant obsahuje n sloupců, z nichž každý složen z n částečných sloupců. Rozložíme-li tento složený determinant na determinanty jednoduché tím spůsobem, že z každého sloupce velkého vezmeme jenom jeden sloupec částečný a to libovolný, obdržíme jednoduché determinanty tvaru

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{1k_1} b_{1k_1} & a_{1k_2} b_{2k_2} & a_{1k_3} b_{3k_3} & \dots & a_{1k_n} b_{nk_n} \\ a_{2k_1} b_{1k_1} & a_{2k_2} b_{2k_2} & a_{2k_3} b_{3k_3} & \dots & a_{2k_n} b_{nk_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nk_1} b_{nk_1} & a_{nk_2} b_{nk_2} & a_{nk_3} b_{3k_3} & \dots & a_{nk_n} b_{nk_n} \end{vmatrix}$$

až tudíž bude

$$\Delta'' = \Sigma \Delta_k .$$

Patrně lze z každého sloupce determinantu Δ_k vyzvednouti společného činitele, čímž obdržíme

$$\Delta_k = b_{1k_1} b_{2k_2} b_{3k_3} \dots b_{nk_n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \dots & a_{1k_n} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \dots & a_{2k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \dots & a_{nk_n} \end{vmatrix}$$

aneb

$$\Delta_k = b_{1k_1} b_{2k_2} b_{3k_3} \dots b_{nk_n} . \begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} & a_{k_3} & \dots & a_{k_n} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} .$$

Přípony $k_1\ k_2\ k_3 \dots k_n$ nejsou nic jiného, než variace z prvků

$$1,\ 2,\ 3, \dots n$$

do n-té třídy s libovolným opakováním všech prvků. Těchto variac bude množství n^n a tudíž se bude determinant Δ'' skládati z n^n determinantů tvarů Δ_k.

Mezi všemi variacemi nalezáme předně takové, v nichž se žádný prvek neopakuje. To jsou nápotom prosté permutace a množství jejich jest $n!$. Součet všech Δ_k, jež takým činem utvoříme, bude

$$\Delta'_k = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$$

čili

$$\Delta'_k = \Delta . \Delta' .$$

Ostatní variace $k_1\ k_2\ k_3 \dots k_n$ budou takové, v nichž budou aspoň dva stejné prvky, t. j.

$$k_l = k_m .$$

Každé takové variaci odpovídá determinant

$$\Delta_k^{(lm)} = b_{1k_1} b_{2k_2} \dots b_{lk_l} \dots b_{mk_m} \dots b_{nk_n} \begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} & \dots a_{k_l} & \dots a_{k_m} & \dots a_{k_n} \\ 1 & 2 & \dots l & \dots m & \dots n \end{vmatrix}$$

a součet všech podobných bude

$$\Delta_k'' = \Sigma \Delta_k^{(lm)} ,$$

načež

$$\Delta'' = \Delta'_k + \Delta_k'' .$$

V determinantu