## Werk

**Label:** Article

**Jahr:** 1876

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0005|log26

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

obrazy velikých mistrů a ztracené spisy o něčem jiném poučily, že snad za té doby principie pravé perspektivy, podobně jako v středověku tajnosti umění kamenického a tesařského způsobem tradičním v úzkém kruhu zasvěcenců se udržovaly, — připustíme-li to vše, nuže tážeme se, co z toho plyne? Patrně nic jiného, než že všecky tyto vědomosti v následujících četných převratech, jež pokaždé změnily tvářnost celé Evropy, naprosto zanikly, a že bylo potomstvu práci tuto započíti znovu, jako by před nimi nikdy nebylo o vědě perspektivné pracováno. Skutečný počátek vědy této třeba tedy hledati v oné době, kde všecky uměny a vědy slavily slavnost svého znovuzrození, v době na vždy památného Cinquecenta, na jehož prahu vítá nás veleduch Lionardův, jehož slova byla heslem tohoto našeho pojednání:

Chi non puó quel che vuol,
quel che puó voglia.

---

# Tro- i četverokut u savezu sa aritmetičkimi i geometrijskimi progresijami.

Napisao

prof. **Marko Mikšić.**

I. Označimo koordinate piknjah $A$, $B$ i $C$*) redomice sa $x_1\ y_1$ $x_2\ y_2$, $x_3\ y_3$, onda imamo za ploštinu trokuta $ABC$, ako istu sa $p_3$ označimo formulu:

$$p_3 = \frac{1}{2}\ [x_1 (y_3 - y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_3 (y_2 - y_1)] \ldots \quad (1)$$

Popolovimo strane $AB$, $BC$, $CA$ u piknja $A_1$, $B_1$ i $C_1$ i označimo koordinate istih piknja sa $\xi_1\ \eta_1$, $\xi_2\ \eta_2$, $\xi_3\ \eta_3$ onda imamo za ploštinu trokuta $A_1\ B_1\ C_1$, ako istu sa $p'_3$ označimo vrědnost

$$p'_3 = \frac{1}{2}\ [\xi_1 (\eta_3 - \eta_2) + \xi_2 (\eta_1 - \eta_3) + \xi_3 (\eta_2 - \eta_1)] \quad (I')$$

*) Příslušný výkres si každý snadno půlením stran trojúhelníků sestaví.

za koordinate $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\eta_1$, $\eta_2$ i $\eta_3$ imamo sledeće vrědnosti

$$\xi_1 = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad \xi_2 = \frac{x_2+x_3}{2}, \quad \xi_3 = \frac{x_1+x_3}{2}$$

$$\eta_1 = \frac{y_1+y_2}{2}, \quad \eta_2 = \frac{y_2+y_3}{2}, \quad \eta_3 = \frac{y_1+y_3}{2}$$

i ako ove vrědnosti u formulu (I') substituiramo, dobijemo nakon kratke redukcije za $p_3'$ vrědnost:

$$p_3' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} [x_1 (y_3 - y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_3 (y_2 - y_1)]$$

ili

$$p'_3 = \frac{p_3}{4} = \frac{p_3}{2^2} . \qquad \text{(I)}$$

Na isti način dobijemo za ploštinu trokuta $A_2 B_2 C_2$ ako istu sa $p_3''$ označimo formulu

$$p_3'' = \frac{p_3'}{4} = \frac{p_3}{16} = \frac{p_3}{2^4} = \frac{p_2}{2^{2.2}} \qquad \text{(II)}$$

Ako ovako dalje postupamo dobijemo sledeće formule:

$$p_3''' = \frac{p_3''}{4} = \frac{p_3}{64} = \frac{p_3}{2^{2.3}} \qquad \text{(III)}$$

$$p_3^{IV} = \frac{p_3}{2^{2.4}} \qquad \text{(IV)}$$

$$p_3^{V} = \frac{p_3}{2^{2.5}} \qquad \text{(V)}$$

. . . . . .

$$p_3^{(n)} = \frac{p_3}{2^{2.n}} \qquad (n)$$

Uzmimo logaritmus naturalis formulah (I) do $(n)$:

$$l p_3' = l\left[p_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = l p_3 + 2\, l\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(I)}$$

$$l p_3'' = l p_3 + 2.2\, l\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(II)}$$

$$l p_2''' = l p_3 + 2.3\, l\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(III)}$$

$$l p_3^{IV} = l p_3 + 2.4\, l\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(IV)}$$

. . . . . .

$$lp_3^{(n)} = lp_3 + 2nl\left(\frac{1}{2}\right). \qquad (n)$$

Adirajmo zadnji red formula (I) do $(n)$ onda dobijemo

$$(N') \quad lp_3' \cdot p_3'' \cdot p_3''' \ldots p_0^{(n)} = nlp_3 + 2\,(1+2+\ldots+n)\cdot l\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ovaj niz u zaporku jest aritmetički niz prvoga reda, kojega sbroj je po formuli:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

lasno označiti moći.

$$S_n = \frac{n}{2}(1+n)$$

uslěd čega formula $(N')$ u sledeću přelazi:

$$(N'') \quad lp_3' \cdot p_3'' \cdot p'''_3 \ldots p_3^{(n)} = nlp_3 + n(1+n)\,l\left(\frac{1}{2}\right).$$

Metnimo radi kratkoće pisanja:

$$lp'_3 \cdot p_3'' \cdot p_3''' \ldots p^{(n)}{}_3 = \sum_{m=1}^{m=n} lp^{(m)}{}_3$$

onda imamo

$$\sum_{m=1}^{m=n} lp_3^{(m)} = n[lp_3 - (n+1)\,l2]$$

ili

$$(N) \qquad \sum_{m=1}^{m=n} lp_3^{(m)} = n\,l\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right).$$

Na istu je formulu moći doći, ako jednačbe (I) do $(n)$ pomnožimo, t. j. ine jednakosti na levoj i ine na desnoj strani znaka jednakosti medjusobno i logaritmiramo.

Ako pako formule (I) do $(n)$ naprosto adiramo i sumu:

$$p_3' + p_3'' + p_3''' + \ldots + p_3^{(n)} = \sum_{m=1}^{m=n} p_3^{(m)}$$

sinbolički označimo, dobijemo formulu

$$(P') \qquad \sum_{m=1}^{m=n} p^{(m)} = p_3\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}}\right)$$

ili

$$(P') \qquad \sum_{m=1}^{m=n} p_3^{(m)} = \frac{p_3}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{2n-2}}\right)$$

Valja nam ovaj niz u zaporko diskutirati.

Po formuli $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ doznati ćemo, da li isti konvergira. Kod nas je

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{2n}}$$

a

$$a_n = \frac{1}{2^{2n-2}}$$

dakle

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{2n}}}{\frac{1}{2^{2n-2}}} = \frac{1}{2^2}.$$

Ovaj slomak bi samo onda bio jedinici jednak, ako bi $n = 0$ bio, a za $n = \infty$ prelazi isti u nulu. Iz ovoga slědi da 1) niz u zaporku konvergira, i da je 2) njegovu sumu označiti moći. Panajprije imamo.

$$1 : \frac{1}{2^2} = 2^2, \quad \frac{1}{2^2} : \frac{1}{2^4} = 2^2 \quad \text{i t. d.}$$

dakle je $q = 2^2$ konstantan quotient, i onaj niz giometrijska progresija.

Po formuli

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

dobijemo za sumu iste progresije

$$S_n = \frac{2^{2n} - 1}{3}$$

uslěd čega i $(P')$ u

$$(P) \qquad \sum_{n=1}^{m=n} p_3^{(m)} = \frac{p_3}{2^2} \frac{(2^{2n} - 1)}{3}$$

prelazi.

II) Koordinate piknjah $A$, $B$, $C$ i $D$ označimo sa $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$ onda imamo za ploštinu četverokuta $ABCD$, ako istu sa $p_4$ označimo formulu

$$p_4 = \frac{1}{2}[x_1(y_4 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_4) + x_4(y_3 - y_1)] \quad (\alpha')$$

Popolovimo strane $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ u piknjah $A_1$, $B_1$, $C_1$ i $D_1$ i označimo koordinate istih piknja sa $\xi_1 \eta_1$, $\xi_2 \eta_2$, $\xi_3 \eta_3$ i $\xi_4 \eta_4$, onda imamo za ploštinu četverokuta odnosno parallelograma $A_1 B_1 C_1 D_1$, ako istu ploštinu sa $p_4'$ označimo vrědnost

$$p'_4 = \frac{1}{2}[\xi_1(\eta_4-\eta_2)+\xi_2(\eta_1-\eta_3)+\xi_3(\eta_2-\eta_4)+\xi_4(\eta_3-\eta_1)] \quad (\alpha'')$$

gdě za koordinate $\xi_1\,\eta_1$, $\xi_2\,\eta_2$, $\xi_3\,\eta_3$, $\xi_4\,\eta_4$ slědeće vrědnosti eksistiraju

$$\xi_1 = \frac{x_1+x_2}{2},\ \xi_2 = \frac{x_2+x_3}{2},\ \xi_3 = \frac{x_3+x_4}{2},\ \xi_4 = \frac{x_1+x_4}{2}$$

$$\eta_1 = \frac{y_1+y_2}{2},\ \eta_2 = \frac{y_2+y_3}{2},\ \eta_3 = \frac{y_3+y_4}{2},\ \xi_4 = \frac{y_1+y_4}{2}$$

koje vrědnosti u formulu $(\alpha'')$ substituirane prelazi ista u

$$p_4' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[x_1(y_4-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+x_4(y_3-y_1)] \quad (\alpha'')$$

ili pako

$$p_4' = \frac{p_4}{2}\,. \qquad (\alpha)$$

Ako opet strane $A_1\,B_1$, $B_1\,C_1$, $C_1\,D_1$ i $D_1\,A_1$ popolovimo, i to u piknja $A_2$, $B_2$, $C_2$ i $D_2$ onda dobijemo drugi parallelogram, kojega je ploština, ako ju (ploštinu) sa $p_4''$ označimo, formulom

$$p_4'' = \frac{p_4'}{2} = \frac{p^4}{4} \qquad (\beta)$$

predstavljena. Isto tako je i

$$p_4''' = \frac{p_4}{8} \qquad (\gamma)$$

$$p_4^{IV} = \frac{p_4}{16} \qquad (\delta)$$

$$p_4^{V} = \frac{p_4}{32} \qquad (\varepsilon)$$

. . . . . .

lasno dobiti moći. Formule $(\alpha)$, $(\beta)$ i t. d. moći je još drugačije pisati

$$p_4' = \frac{p_4}{2} \qquad (\alpha)$$

$$p_4'' = \frac{p_4}{2^2} \qquad (\beta)$$

$$p_4''' = \frac{p_4}{2^3} \qquad (\gamma)$$

$$p_4^{IV} = \frac{p_4}{2^4} \qquad (\delta)$$

$$p_4^{\nu} = \frac{p_4}{2^5} \qquad (\varepsilon)$$

. . . . .

$$p_4^{(n)} = \frac{p_4}{2^n} \qquad (\nu)$$

Uzmimo najprije logaritmus naturalis jednačbah ($\alpha$) do ($\nu$)

$$lp_4' = lp_4 + l\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (\alpha'')$$

$$lp_4'' = lp_4 + 2l\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (\beta'')$$

$$lp_4''' = lp_4 + 3l\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (\gamma'')$$

. . . . . .

$$lp_4^{(n)} = lp_4 + nl\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (\nu'')$$

i adirajmo ove zadnje jednačbe, onda dobijemo

$$lp'_4 \cdot p_4'' \cdot p_4''' \ldots p_4^{(n)} = n\,lp_4 + (1+2+3+..+n)l\left(\frac{1}{2}\right)$$

ili pako, ako se oni isti sinbolah poslužimo kao i kod trokuta

$$\sum_{m=1}^{m=n} lp_4^{(m)} = n\,lp_4 - (1+2+3+\ldots+n)\,l\,2\,.$$

Poznato je

$$S_n = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n}{2}(1+n)$$

dakle

$$\sum_{m=1}^{m=n} lp_4^{(m)} = n\,lp_4 - \frac{n}{2}(1+n)\,l\,2$$

$$= n\left(lp_4 - \frac{1+n}{2}\,l\,2\right)$$

$$\sum_{m=1}^{m=n} lp_4^{(m)} = n\,l\left(\frac{p_4}{2^{\frac{1+n}{2}}}\right). \qquad (Q)$$

Dakako, da bi na istu formulu nadošli, ako ine jednakosti na desnoj i ine jednakosti na lěvoj strani znaka jednakosti pomnožili i logaritmirali. Adirajmo jednačbe ($\alpha$) do ($\nu$), onda dobijemo, ako kratkoće radi

$$p_4' + p_3'' + p_4''' + \ldots + p_4^{(n)} = \sum_{m=1}^{m=n} p_n^{(m)}$$