O differenciálních rovnicích ploch obalujících.

(Podává *G. Blažek.*)

Pohybuje-li se plocha známých vlastností v prostoru takovým spůsobem, že dle daného pravidla svou polohu a tvar svůj mění, jest s ní všeobecně spojena plocha nová, jež se první v každé poloze dotýká, již nazýváme *plochou obalující soustavu ploch prvních.* Plocha obalující obsahuje průsečnice posloupných poloh plochy pohyblivé, lze ji tudíž považovati za povstalou pohybem plochy dané.

Poloha a tvar plochy ustanovuje se však stálými veličinami, *parametry*, v rovnici plochy se vyskytujícími; má-li se tedy pohyb plochy a změna tvaru jejího naznačiti, nutno považovati tyto parametry za veličiny proměnné. Tak na př. vyjadřuje rovnice

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

kouli poloměru r, jejíž střed má souřadnice a, b, c; pohyb a změnu tvaru koule naznačíme tudíž všeobecně změnou veličin a, b, c a r.

Má-li však v pohybu a v změně tvaru panovati jisté pravidlo, nelze parametrům uděliti hodnoty od sebe neodvislé, nýbrž ustanovením zvláštní hodnoty parametru jednoho musíme zároveň znáti hodnoty všech ostatních, t. j. obsahuje-li rovnice pohyblivé plochy $(n+1)$ proměnný parametr, musí mezi nimi panovati n výminečných rovnic; vyjádříme-li pomocí těchto rovnic n parametrů odvisle proměnných parametrem neodvisle proměnným, jenž se a nazývati má, lze rovnici plochy pohyblivé psáti ve formě

$$f(x, y, z, a)=0,$$

neb stručněji

$$f=0;$$

sousední poloha plochy naznačí se přechodem veličiny a v $a+\delta$ v čemž znamená δ veličinu nekonečně malou; rovnice plochy v nové poloze zní tedy

$$/^{\delta=0} f(x, y, a+\delta)=0,$$

a spojení obou rovnic značí křivku, v níž se dvě sousední polohy plochy protínají, jejímž geometrickým místem jest dle předešlého plocha obalující. Rovnici této plochy najdeme tedy vyloučením parametru a z posledních dvou rovnic; druhá z nich dá se však patrně nahraditi výrazem

$$/^{\delta=0} \frac{f(x, y, z, a+\delta)-f(x, y, z, a)}{\delta}=0,$$

t. j. rovnicí

$$\frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a}=0,$$

tak že ustanovení rovnice plochy obalující záleží na vyloučení parametru a z rovnic

$$f=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0. \tag{2}$$

Pohyb plochy bývá však v některých případech všeobecným, že nelze z něho vyvinouti potřebný počet výminečných rovnic mezi parametry; pak nezbývá k naznačení pravidelného pohybu než scházející podmínky nahraditi tím, že považujeme parametry neurčité za libovolné funkce jediného, neodvisle proměnného; jsou-li $a_1, a_2, \ldots a_n$ parametry neurčité, pak třeba položiti

$$a_1=\varphi_1(a), a_2=\varphi_2(a), \ldots a_n=\varphi_n(a),$$

v čemž všeobecně φ označuje funkci libovolnou.

Nutným následkem okolnosti této jest, že i rovnice plochy obalující obsahuje funkce libovolné; chceme-li však tyto odstraniti, třeba z rovnic (1) a (2) vyvoditi nové, k vyloučení n parametrů sloužící; prostředků k tomu poskytuje nám částečné differencování rovnice (1) podle x a y, při čemž, poněvadž v rovnici plochy obalující veličina a objeviti se nesmí, vedle z i parametr a za funkci veličin x a y se považuje.

Následující řádky mají za úkol vyvoditi nejkratší způsob ustanovení n výminečných differenciálních rovnic za účelem vyloučení n parametrů. Differencování rovnice (1) podle x a y provedeme tím způsobem, že z počátku jen z za odvisle proměnnou, a za stálou veličinu, pak a za odvisle proměnnou, x, y, z však za veličiny stálé považovati budeme; podle známých pravidel počtu differenciálního vyjde

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial a}.\frac{\partial a}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial a}.\frac{\partial a}{\partial y}=0,$$

t. j. vzhledem k rovnici (2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{3}$$

Uvážíme-li naznačený způsob differencování, poznáme snadno, že výrazy tyto obsahují vedle původních proměnných x, y, z a parametrů a, a_1, a_2, a_n jen první differenciální poměry veličiny z podle x a y.

Píšeme-li dále

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_1=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=f_2=0, \tag{4}$$

a nakládáme-li s f_1 a f_2 právě tak jak s f, vyvineme

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial a}.\frac{\partial a}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial a}.\frac{\partial a}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial a}.\frac{\partial a}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial a}.\frac{\partial a}{\partial y}=0;$$

vyloučením veličin $\frac{\partial f_1}{\partial a}$ a $\frac{\partial f_2}{\partial a}$ z těchto čtyr rovnic najde se

$$\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial f_2}{\partial x}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}}, \tag{5}$$

a spojením posledních dvou členů této srovnalosti

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial y}.\frac{\partial f_1}{\partial x}=0,$$

kterážto differenciální rovnice stupně druhého označena budiž znamením

$$f_3=0;$$

nakládajíce s ní jako s rovnicemi (4) najdeme dále

$$\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}},$$

což uvedeno v spojení s rovnicí (5) poskytuje srovnalost

$$\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}}.$$

Spojení druhého neb třetího členu této srovnalosti s členem posledním poskytuje opět rovnici differenciální stupně třetího, již píšeme ve formě

$$f_4 = 0.$$

Naznačeným spůsobem pokračujíce vyvineme sobě n člennou srovnalost

$$\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}} = \ldots\ldots = \frac{\frac{\partial f_n}{\partial x}}{\frac{\partial f_n}{\partial y}}, \tag{6}$$

v níž všeobecně

$$f_q = \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x}\,\frac{\partial f_p}{\partial y} - \frac{\partial f_{q-1}}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_p}{\partial x} = 0$$

a $p < q-1$, $q > 2$ jest; patrně jeví se f_q co differenciální rovnice stupně $(q-1)$ho.

Spojení srovnalosti (6) s rovnicemi (1) a (3) poskytuje nám soustavu $(n+2)$ rovnic, z nichž lze vyloučiti $(n+1)$ parametr; konečný výsledek jest patrně rovnice differenciální stupně n-tého.

Plocha obalujíc soustavu ploch obsahující $(n+1)$ proměnný parametr dá se tedy vždy vyjádřiti differenciální rovnicí stupně n-tého.

Jak taková rovnice vznikne, vysvětlíme ještě následujícími příklady.

1. Má se ustanoviti differenciální rovnice plochy obalující pohyblivou rovinu, tedy plochy rozvinutelné.

Všeobecná rovnice roviny

$$f = ax + by + cz + d = 0$$

obsahuje čtyry parametry, z nichž však se vždy jeden dělením dá odstraniti; differenciální rovnice plochy rozvinutelné nesmí tedy stupeň druhý přesáhnouti.

Skutecně najdeme řídíce se podle pravidla předešlého,

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = a + c\,\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = b + c\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial y}} = \frac{c\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{c\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial y}} = \frac{c\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{c\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}},$$

z čehož následuje co rovnice hledaná

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

2. Má se ustanoviti differenciální rovnice plochy točné, t. j. plochy obalující soustavu koulí, jejichž střed se nachází na přímce

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} = -m.$$

Rovnice koule zní

$$f = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0,$$

v níž a, b, c podle podmínky vyhovují srovnalosti

$$\frac{a - x_1}{\cos\alpha} = \frac{b - y_1}{\cos\beta} = \frac{c - z_1}{\cos\gamma} = -m.$$

Poněvadž mezi parametry a, b, c, r panují dvě vyminečné rovnice, třeba k jejich vyloučení ještě dvou rovnic; podle pravidla jsou tyto rovnice

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = x - a + (z - c)\,\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = y - b + (z - c)\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

to jest

$$\frac{x - a}{\dfrac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y - b}{\dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{z - c}{-1} = -n. \qquad (8)$$