ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATHEMATIKY A FYSIKY

KTERÝŽ SE ZVLÁŠTNÍM ZŘETELEM K STUDUJÍCÍM

REDIGUJE

Dr. F. J. STUDNIČKA

PROFESSOR MATHEMATIKY NA C. K. UNIVERSITĚ PRAŽSKÉ

A VYDÁVÁ

JEDNOTA ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

ROČNÍK II.

Sýkora, Alois

V PRAZE.

TISKEM DRA. EDVARDA GRÉGRA. — NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

1873.

OBSAH.

Úlohy.

Řešení mathematické úlohy.

Řešení fysikální úlohy

Věstník literární.

Mikuláš Koprník.

NA OSLAVU 400LETÉ PAMÁTKY JEHO NAROZENÍ

SEPSAL DR. F. J. STUDNIČKA.

ÚVOD.

„Sa mémoire subsistera aussi longtemps que les grandes vérités qu'il a reproduites.“

Laplace.

V celém vzdělaném světě slaví se dnes památka muže, který před 400 lety uzřel světlo tohoto světa, jehož *pravý názor* svým mohutným duchem *první* důkladně pojal a svou velikolepou tělesnou i duševní prací *první* nezvratně zbudoval.

Bylť Koprník mužem, jakých se málo rodí pod sluncem,

... *qualem nec terra virum per sæcula multa*
Procreat ....,

bylť Koprník badatelem, jakých se zřídka dostává královské vědě hvězdářské, ... *qualem*

Ipsa sibi vix Astra ferunt per mille recursus,

jak praví o něm pozdější soupeř i ctitel jeho *Tycho de Brahe.*

Novým názorem světa, jaký Koprník hlubokým důmyslem svým vyzpytoval, zbořena byla tisíciletá labyrintická budova Ptolemeova se vším, co do ní a na ní bylo vloženo, a na místo její postavena v jednoduché kráse budova vznešené pravdy.

A tímto hrdinným podnikem a vítězným výsledkem vysvobozeno celé lidstvo od klamu, v němž tonulo, a vyvedeno z bludu, v němž bylo vychováváno od nejstarších dob; tímto světoborným činem získal si Koprník o celé člověčenstvo zásluh více, nežli který koli dřívější neb pozdější lidský dobrodinec, vykupitel neb spasitel!

Poněvadž pracoval s výsledky skvělými pro celé lidstvo, zasluhuje též, aby i celé lidstvo jej skvěle slavilo na důkaz, že dovede si vážiti všech snah a prací, které je povznášejí k životu vyššímu, důstojnějšímu, a na povzbuzení všech k vytrvání, kdož na dráze vědecké se nacházejíce za živa uznání nedocházejí.

Prvními v řadě ctitelů genia nějakého mají vždy býti vzdělancové celého světa, jimž nejsnadněji jest pochopiti význam a důležitost jeho. Nechť se tedy i zde setkají a spojí v úctě k muži tomuto v jeden celek vznešený, v němž se vyrovnávají národní protivy a jedině vyšší, ryze lidské snahy a city dosahují platnosti! —

Pro nás Čechy má však dnešní den ještě větší důležitost nežli pro ostatní národy: byltě Koprník rodem *Slovan, Polák z kořene Českého!*

Jeho světová sláva zahaluje tudíž lesklou září svou i celé Slovanstvo i národ náš zvláště, povznášejíc všechny členy tohoto mohutného kmene k odůvodněné hrdosti a pravé nadšenosti, matce to všech činů velikých.

Zejmena náš co do počtu sourodáků velmi skrovně, co do počtu nepřátel nanejvýš hojně nadaný národ Český nechť zaplesá dnešního dne z plna srdce, nechť se zaraduje v uhnětenosti své co nejsrdečněji ze slávy muže, jemuž se koří celý vzdělaný svět; neb národ, z něhož pochází a v němž se nadšeně slaví heros takový, národ ten nepozbyl ještě původního jádra síly své, národ ten může dříve nebo později z lůna svého vydati genia podobného. Pročež přidržme se krásného hesla nadšeného pěvce Slávy dcery a

„slavme slavně slávu Slávův slavných!“

Abychom radost dnešního dne zvýšili, nutno především důkladně vytknouti postavení, jaké zaujímá oslavenec náš v kulturních dějinách člověčenstva, nutno hlavně vylíčiti, *v jaké době se narodil, jak žil a co za živobytí svého provedl.* Obraťme se tedy k těmto jednotlivým důležitým stránkám života Koprníkova, ku konci si ponechávajíce všeobecně ještě jednou v hrubých rysech naznačiti jeho význam *světový.*

I.

V jaké době narodil se Koprník.

„Wo hat die Geschichte der Völker eine Epoche aufzuweisen, der gleich, in welcher die folgenreichsten Ereignisse: die Entdeckung und die erste Colonisation von Amerika, die Schifffahrt nach Ostindien um das Vorgebirge der guten Hoffnung und Magellan's erste Weltumseglung; mit der höchsten Blüthe der Kunst, mit dem Erringen geistiger, religiöser Freiheit und der plötzlichen Erweiterung der Erd- und Himmelskunde zusammentrafen?“

Humboldt.

Patnácté a šestnácté století představuje v dějinách lidské vzdělanosti dobu nanejvýš zajímavou.

Již na počátku ozývá se krajan náš mistr *Hus* a zvýšuje hlas svůj tak mocně, že vzbouřená Evropa utíká do Kostnice, aby slepé autoritě zjednala vítězství jeho upálením. Ale náboženské hnutí nebyto tím utlumeno, nýbrž v krvavých válkách husitských v mohutný proud rozvlněno, jejž ani kompaktaty basilejské nezastavily; vypukloť v reformaci šestnáctého století v jiné formě opět a manifestuje se volným badáním nejen v písmě svatém, ale i ve všech oborech lidského vědění až do dnešního dne, kde se z autority vykvasila neomylnost.

Tento proud, jejž do běhu uvedl náš Hus, mocně byl sesilován některými okolnostmi, které se v patnáctém století sestředily.

Na prvním místě sluší tu jmenovati *vynalezení umění knĕhtiskařského*, kteréž proměňujíc myšlenku v tisícerонásobné slovo, neodolatelnou mocí uvádí nové názory a nové zásady do celého světa. Dělát z jednoho kazatele jen jedno místo zaujímajícího tisíce a miliony hlasatelů na všechny strany rozšířitelných, čímž boj proti nevědomosti stává se daleko snadnějším, čáka na vítězství mnohem jistější.

Jako příroda ve všech případech, kde její tvorové v životě snadno pocházejí, jsouce stále ohroženi záhubným nebezpečenstvím, vždy u velikém množství je rozmnožuje, aby nevyhynuli: podobně vytvořuje umění knĕhtiskařské vždy veliké množství jednotlivců, aby aspoň některý se zachoval, usouzeno-li jim bojovati o život, a v příhodné době znova boj počal a tak dlouho vedl, až zvítězí.

A právě v těch dobách, kde pokrok lidský byl v největším nebezpečenství, objeveno toto umění, jako by sesláno bylo geniem lidstva na pomoc do boje nestejného.

Druhá okolnost, kterouž tu sluší uvésti, jest smutné *ukončení* bídného živoření *státu byzantinského* dobytím Cařihradu skrze Turky.

Neb tímto skutkem násilným vypuzeni a rozptýleni byli poslední řečtí učenci, kteří ještě plaménky hellenské vzdělanosti ošetřovali, do celého světa, zejmena však na západ, především do nejbližší Italie, kdež plaménky tyto roznítili život duševní k mohutnému plápolu, jehož zář na všechny strany se rozlívala a nové světlo do kruhů dosud temných vysílala

Jména *Manuel Chrysolaras*, *Bessarion*, *Demetrius Chalkondylas*, *Argyropulos*, *Kallistus*, *Laskaris* a j. nevyhynou nikdy z paměti přátelům věd a umění; neb těmito muži učeností vynikajícími byla před a po dobytí Cařihradu oživena láska k řečtině a k duševním pokladům v ní obsaženým, jimi byl středověký duch lidský uveden opět do klassické starobylosti, aby se tu obdivoval výtvorům volného umění a zotavil výsledky badání, provedeného v dobách volných.

Zároveň přinešeny mnohé rukopisy, jichž obsah se na západě znal jen z arabských překladů, pocházejících ze Španělska; porovnáváním poznalo se pak, jak časté tu jsou odchylky, jak hojné tu jsou mylné náhledy. Z původního zdroje čerpajíce posuzovali tedy zcela jinak učenci jednotlivé důležité výroky starých a opravovali pak podlé toho své dosavadní názory.

A co důležitější jest, zároveň tu rodilo se mnoho výtečných hlav, které svým nadobyčejným nadáním dovedly z pokladů přinešených čerpati co nejvydatněji. *Jovian Pontanus*, *Leonardo da Vinci*, *Reuchlin*, *Macchiavelli* a m. j. značí v rozličných oborech velikány první třídy, kteří v tomto století povstavše vtiskli pečeť svého bystrého ducha jednotlivým odborům uměleckým a vědeckým tak hluboko, že dosud s nich nebyla zcela setřena.

Jak důležitý vliv mělo rozprchnutí se řeckých učenců na rozvoj všech věd a umění, poznává se nejlépe z dějin jejich; neb všechny skoro odbory umělecké a vědecké počínají tu zvláštní epochu. A dosud zakládá se humanitní vzdělání u všech národů na studiích klassických, které v patnáctém století podruhé přišly do květu.

A co třetí okolnost, jíž vyznamenává se tehdejší doba, kdož by neuvedl *objevení nového světa Kolumbem?* — Jestiť událost tato ve svých následcích nejbližších i nejvzdálenějších tak důležitou, že i mnozí dějepisci ji zvolili a postavili za mezník mezi střední a nový věk!

Obzor člověčenstvu vykázaný byl tu pojednou rozšířen tak mohutně, že dlouhých rozhledů a přehledů bylo zapotřebí, nežli se žasnoucí duch lidský zorientoval v nových těchto krajinách; a když pak z udivení svého se zpamatoval, obdivoval se velikolepému rozšíření všech oborů lidského vědění, jakéž spůsobila neustupná podnikavost a hrdinná vytrvalost Kolumba a jeho následovníků, jako byl *Šebastián Cabot, Vasco de Gama, Alfonso de Hojeda, Alvarez Cabral* a m. j.

Bylať to doba, o níž nejdůkladnější znatel všech příslušných okolností *Humboldt* píše takto: „Zu keiner anderen Zeit ist einem Theile des Menschengeschlechtes ein grösserer Reichthum von Thatsachen, ein grösseres Material zur Begründung der vergleichenden physischen Erdbeschreibung dargeboten worden."

Objevením nového kontinentu objeveno i nové a rozsáhlé pole činnosti pro lidstvo tehdejšího věku, otevřen nový a bohatý zdroj moci a dán nový a neodolatelný podnět citu pro volnost a svobodu; pročež doplňuje velmi dobře ostatní vymoženosti patnáctého století k velikolepému celku, jenž na počátku nové doby co nebetyčný Faros skvělostí svou všem následujícím stoletím dráhu osvěcuje.

Jak z předcházejícího stručného vylíčení patrno, byla v tehdejší době započata a prováděna oprava všech dosavadních názorů. A tu hvězdářství nečinilo výminky; neb i jemu se dostalo badatele a reformátora, který mu zjednal co nejdůstojnější postavení mezi ostatními vědami, postaviv je na jedině pravý základ.

Byltʼ to *Koprník*, jehož památku právě slavíme.

Abychom však v zvláštní příčině této lépe dovedli posouditi obrat a pokrok, jaký Koprníkem byl zaveden, musíme se blíže seznámiti s tehdejším stavem astronomie vůbec a planetární části její zvlášť.

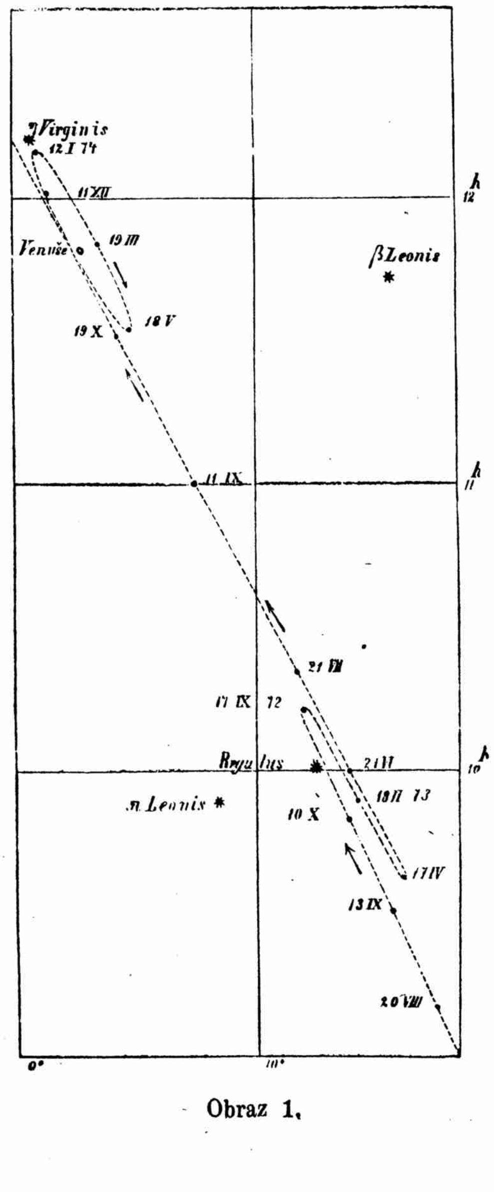
V patnáctém i šestnáctém věku učilo se ještě podlé Ptolemaea v druhém století žijícího, že svět čili vesmír skládá se ze sfér neb kulových vrstev, ku kterýmž jsou jednotlivé stálice a oběžnice připoutány, takže se s nimi podlé jistých pravidel otáčejí kolem osy světové.

Na sféře stálicové upevněny jsou všechny stálice a probíhají s ní v 24 hodinách kruhy rovnoběžné. Poloha jejich ustanovuje se všeobecně udáním, v které části souhvězdí se nacházejí, zvláště pak určením šířky a délky; podlé toho byla hvězda „Draconis, quae in lingua“ (200° d., 76° 30′ š.), jiná „quae in ore“ (215° 10′ d., 78° 30′ š.), opět jiná „supra oculum“ (216° 30′ d., 75° 40′ š.) *) atd. Všech znalo se za dob Koprníkových 1022, z nichž *první velikosti* bylo 15, *druhé* 45, *třetí* 208, *čtvrté* 474, *páté* 216, *šesté* 50, k nimž ještě se počítalo nejasných „obscurae“ 9 a mlhovitých „nebulosae“ 5.

Co zvláštnost sluší tu vytknouti, že v starých dobách se vůbec uvádí menší počet hvězd pouhým okem viditelných nežli v dobách našich. *Koprník* vypočítává ve svém klassickém spisu, o němž budeme později vykládati, jen 1022 hvězd *pouhým okem* v střední Evropě viditelných, *Argelander* pak v našem století již 3268, ba nanejvýš bystrozraký *Heis* vydal nedávno „Atlas coelestis“, kde

*) Jsou to hvězdy μ, ν, β Draka podlé pozdějšího označení Bayerova.

jich 5421 uvedeno; v Kassiopeji jich rozeznává Koprník jen 26, Argelandr 67, Heis konečně 126. Staly se hvězdy během času jasnějšími aneb oči lidské bystřejšími? —



Obraz 1.

Stellární astronomie starého a středního věku byla tedy velmi chatrna a to z příčin velmi snadno pochopitelných; nemělit tehdejší badatelové našich dalekohledů, neznalit našeho silozpytu!

Co se tkne astronomie planetární, i ta byla v patnáctém století skoro na témž stupni jako za Ptolemea, jehož *almagest* byl dosud svatým písmem pro hvězdáře. Abychom úlohu tohoto odboru hvězdářského poznali, porovnejme zjevy, jaké nám poskytují jednotlivé oběžnice, se spůsobem, jakým byly vykládány.

Kdyby na př. někdo sledoval na obloze běh *Jupitera* po celý rok a déle, znamenal si na mapu nebeskou postavení jeho v rozličných dobách pozorované a spojil body takto obdržené, povstala by křivka, jakou obraz 1. ukazuje.

Jest běh této oběžnice v skutku tak podivný, že se od 17. listopadu 1872 do 17. dubna 1873 vrací, na to až do ledna 1874 dále postupuje a odtud teprv, když zvláštní kličku proběhla, ubírá se opět dále ku předu? Aneb jest celý tento běh jen zdánlivý, jen průmět jiné, jednodušší dráhy na oblohu, k níž vůbec všecko nadzemské vztahujeme okem svým? A která jest tato pravá dráha?

Starý věk vykládal si zjev tento docela zvláštním spůsobem, který sice svědčí o velmi hlubokém důmyslu, ale zároveň též dokazuje, že více jest namáhání zapotřebí, aby se mylný náhled nějaký učinil pravdě podobným, nežli aby se pravda dokázala.

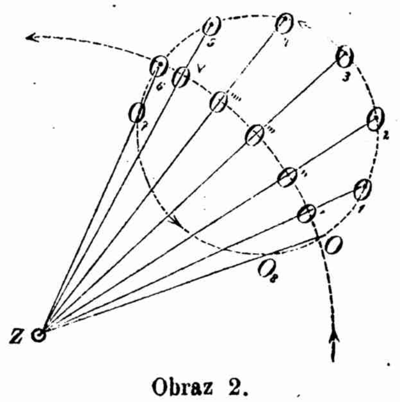
Že země naše jest středem všeho stvoření, to bylo a jest dosud obyčejnému rozumu věcí tak jasnou, že mu ani nenapadlo dále o této veledůležité otázce přemýšleti. Jak by mohla země, na níž bydlí člověk, stvoření to nejvyšší, býti podřízenou některému jinému tělesu, některé hvězdě, z nichž každá tak malou se býti jeví na obloze!

Země jest středem všeho stvoření, toť byl až do Koprníka axiom všeobecný; neb těch několik filosofů, kteří jiné učení zastávali, neproniklo, ba byli pronásledováni od fanatického lidu, jako by věčný poklid bohyně Země všetečně a svévolně rušili.

Je-li ale země naše středem, kolem něhož se vše otáčí, k němuž jest vše přidruženo, tož nezbývá nic jiného nežli složeným spůsobem vykládati složené pohyby oběžnic; hvězdy v 24 hodinách kolem světové osy obíhající nedělají tu arci žádných obtíží.

A poněvadž jiný axiom učil, že v světě jest vše co nejdokonaleji zařízeno a že nejdokonalejším tvarem dráhy jest kruh, bylo nutno souditi, že složením kruhových pohybů obdrží se každý tvar planetárních drah.

K tomu cíli představovali si a učili staří, zejmena *Apollonius z Pergy* a po něm *Hipparch* a konečně *Ptolemaeus*, že každá oběžnice obíhá v kruhu, jehož střed taktéž v kruhu postupuje kolem země; dráha jest podlé toho *epicykloidickou*.



Obraz 2.

Značí-li na obr. 2. *Z* zemi, *O* oběžnici nějakou, která se pohybuje směrem OO_1 v kruhu, jehož střed postupuje směrem OO', tož patrno, že budou stejné dráhy

$$OO_1\,,\ O_1O_2\,,\ O_2O_3\,, \ldots$$

vypadati na obloze nestejně, poněvadž tu o průmětech jejich platí

$$OO' < O'O'' < O''O''' = O'''O^{IV} < O^{IV}O^{V} > O^{V}O_6$$

v době, v níž se oběžnice pohybuje z O_6 do O_7 a pak z O_8 nazpět do O, bude se konečně zdáti, jakoby úplně stála.

Kdyby tedy střed kruhu malého neb *epicyklu*, na kruhu hlavním neb *deferenčním* nepostupoval, pochopili bychom tímto spůsobem, jak v stejných dobách se při stejné rychlosti zdánlivě nestejné dráhy vykonávají.

Poněvadž ale střed epicyklu dále postupuje a sice rozmanitou rychlostí u rozmanitých oběžnic, skládá se dráha z obou běhů kruhových, čímž povstává epicykloida v skutečnosti, nepravidelná klikatá křivka zdánlivě.

Systematický výklad hvězdářských vědomostí starého věku, jaký nám poskytuje Ptolemaeus v II. století po Kristu, řadí pak oběžnice po sobě podlé délky času oběžního, předpokládaje tu jakousi odvislost, která však teprv Keplerovým zákonem třetím jasně byla vyslovena. Podlé toho jest řada oběžnic tato: *Měsíc*, *Merkur*, *Venuše*, *Slunce*, *Mars*, *Jupiter* a *Saturn;* nemajíce dalekohledů, neznali staří víc oběžnic.

Poslední sféra vše objímající byla *primum mobile*, kteréž všechny ostatní sféry ročně jednou kolem osy od *západu k východu* obíhající denně jednou kolem země od *východu k západu* otáčelo, při čemž měla země postavení *výstředné*, čímž se odůvodnil nejen rozdíl mezi dnem slunečním a hvězdním, ale i vyložila nestejná délka dráhy, jaká se v stejné době v rozličných polohách pozorovala.

Soustava Ptolemaeova, jak se tento výklad nebeských zjevů jmenoval, ač byla dosti složitou, nevyhovovala přec všem požadavkům, zejmena pozdějším, přesněji sledujícím běh jednotlivých oběžnic, a nesrovnávala se tudíž se skutečností lépe poznanou; neb čím dále se zdokonalovalo pozorování astronomické, tím více byly tyto odchylky patrnější a ani mnohonásobné epicykly, jaké později byly zaváděny, nevedly tu k cíli.

Nejlépe se o tom přesvědčil v XVI. století *Hieronymus Fracastor*, který mermomocí chtěl tímto spůsobem vyložiti výjevy soustavy sluneční; vzal pro Saturna 17, pro Jupitera 11 a pro všecky oběžnice dohromady přes 70 kruhových dráh na pomoc a přec nebyl s to jejich běh tak sestrojiti, jak se pozoroval.

Velmi dobře, ač trochu odvážně charakterisoval tuto složitost výkladu a tento zmatek z pozorování plynoucí již v XIII. století Kastilský král *Alfons X.*, kterýž se velmi rád hvězdářstvím zanášel a je též královsky podporoval; zvolalť prý jednou asi v ten smysl: „Kdyby se byl se mnou Bůh při stvoření světa poradil, byly by všechny věci v lepším pořádku.“

Po více než třinácte století nerušil nikdo poklid matky Země, všude učilo se výkladům Ptolemaeovým, ač se čím dále tím více nahlíželo, že jest nedostatečný. Teprv když v polovici XV. století všechny vědy znova oživly, dostalo se i astronomii několik horlivých pěstitelů, mezi nimiž vynikal především *Peurbach* a žák jeho *Regiomontan*, kteříž novým důkladnějším badáním připravovali dobu novou, utěšenější.

Jiří Peurbach neb *Purbach*, tak zvaný podlé rodinného místa Purbachu v Horních Rakousích, neodstranil sice žádnou základní myšlenku soustavy Ptolemeovy, zjednodušil však rozličné výpočty a rozněcoval výtečnými přednáškami svými, jakéž odbýval na universitě vídeňské, lásku k vědě hvězdářské, čímž především získal velenadaného *Jana Müllera* z Königsberku u Koburku pocházejícího a podlé rodiště jeho *Regiomontanus* zvaného.

Vzdělav tohoto nejpřednějšího žáka svého co nejdůkladněji, poslal jej r. 1461 do Říma, aby tu prostudoval řeckou literaturu vztahující se k mathematice a hvězdářství. Ač byl jmenován po smrti svého učitele jeho nástupcem odebral se přec Regiomontan s kardinálem Bessarionem do Italie, kdež si brzy velkou slávu zjednal a seznav klassické spisy v původním znění, jmena *prvního* hvězdáře svého věku dosáhl.

Ale již r. 1468 vrátil se nazpět a prodlev několik let v Uhrách u krále Matyáše Korvina, usadil se r. 1471 trvale v Norimberce, kdež mu bohatý měšťan *Bernhard Walther* zařídil hvězdárnu i tiskárnu, aby mohl pohodlně i pozorovati i pozorování uveřejňovati.

Především zavedl tu nový přesnější spůsob měření času, čímž bylo možná rychlosti planetární určitěji vystopovati a budoucí jejich postavení bezpečněji udati. Planetární tabulky, které od něho vyšly*), byly tudíž mnohem lepší nežli všechny předcházející.

*) „Ephemerides ad 32 annos" (1475—1506) vyšly 1474.

Bohužel, že zemřel příliš záhy, totiž již r. 1476, když meškal podruhé v Italii a sice v Římě, kamž byl příznivcem svým papežem Sixtem IV. povolán v příčině opravy kalendářské.

Přítel jeho Walther pozoroval sice pilně dále a zdokonaloval časoměry neustále, takže Norimberské hodiny se od r. 1484 staly důležitým nástrojem hvězdářským, ale s životem jeho zanikla i hvězdárna jeho.

Símě Regiomontanem a Waltherem v Norimberce bezpečně uložené pučilo však utěšeně dále pod ochranou osvícených mužů, jakými byli někteří patriciové tamější, zejmena *Vilibald Pirkheimer*, který kolem sebe shromažďoval vzdělance tehdejší doby, jako byl *Melanchthon*, *Dürer*, *Schoner*, *Hutten*, *Osiander* a m. j.

A tím byla půda připravována pro názor nový, s kterým Koprník v té době vystoupil, tím byla uchystána přiměřená půda pro učení, které již řečtí filosofové někteří v úzkém kruhu pronesli a kteréž se tehdáž neujalo, jelikož nebyl přiměřeně na ně připraven duch tehdejšího lidstva. Jestiť názor světový funkcí času!

II.

O průběhu života Koprníkova.

„Jupiter ut vidit, quod mente Copernicus orbem
Contra naturae jura creasset homo:
Ut vidit coelum firma statione teneri
Currente et Terra Sidera stare bene:
Anxius atque memor quid possent bella gigantum
Aut aliquem in terris fors superesse Deum:
E cunctis quaerit divorum matribus, an sit,
Quae tantum dicat se genuisse virum“.

Nicolaus Zoravius.

Z předcházejícího stručného vylíčení jde patrně na jevo, že v patnáctém století se zmocnilo vzdělaného světa evropského zvláštní hnutí, kteréž vedlo k novému životu i uměleckému i vědeckému a tímto způsobem zahájilo utěšenější dobu novou; vše pokrývající tmy středního věku byly odstraněny pronikajícím světlem, jež do nich vrhli rozliční výtečníci tehdejší doby a v novém tomto světle vyvíjelo se nové statečnější pokolení, čímž odůvodněn výrok Molleschotův: „In der Finsterniss kann man fette Gänsebraten, aber nimmermehr kraftvolle Menschen erzielen.“

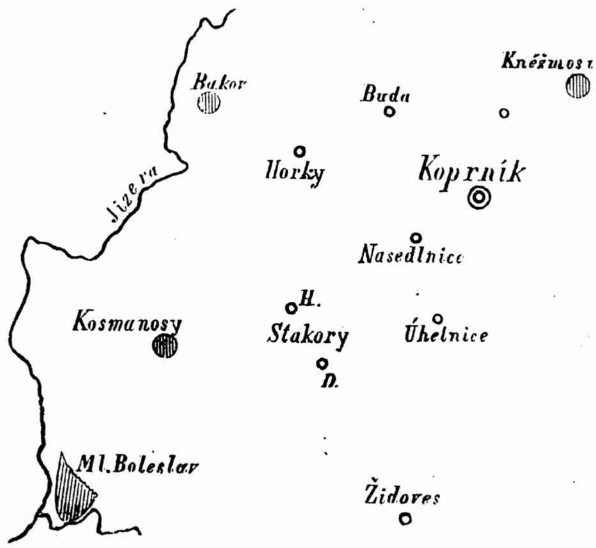
A v této době reformační narodil se i reformátor hvězdářství, zakladatel pravého názoru světového, čímž opětně potvrzen známý úsudek, že *velká doba rodí velké duchy.*

Co se tkne původu jakož i života Koprníkova, nelze tak bezpečně jej ve všech momentech vytknouti a vylíčiti, jak bychom si přáli u muže tak slavného.

Tolik však jest na jisto postaveno,*) že v Čechách žili v XIV. století vladykové jmenem *z Koprníka,* o nichž

*) R. 1831 píše v *Palacký* Musejníku na str. 435 o této otázce takto: „Pilná zkoumání učenců Polských o rodu slavného hvězdáře Mikuláše Koperníka to vynášejí, že rodičové jeho z Krakova

v pozdějších pamětech XV. a XVI. století žádné zmínky se nenalézá; rod tento měl sídlo své v *Koprníku*, kteréž dosud se zachovalo co vesnice ležící v krajině mezi Kněžmostem, Kosmonosy a Bakovem, jakž na výkresu 3. vyznačeno.



Obraz 3.

---

se byli do Toruně stěhovali. Avšak ani v Krakově nebylo původní sídlo jejich, ale podlé jistých důvodů domýšlejí se zkoumatelé Polští, že tam z Čech se byli dostali. I dotazováno se, nenachází-li se v Čechách nějaká paměť, neb znamení rodu Koprníkova ve starožitnosti? Odpověď na otázku tuto nachází se v Balbinových Misc. hist. r. Boh. Dec. I. Lib. V. pag. 239 (v Praze 1683) ve výpiscích ze kněh kapitoly Pražské, nazvaných Libri Erectionum, vol. XII. lit D. 10. „Laneus emtus pro ecclesia in Kosmanos a Nicolao plebano ecclesiae praedictae, decano Boleslaviensi, ab honesta matrona Elsska conthorali Martini, dicti Zly, clientis de Stakor seu de Borzejov cum ejus consensu, et fratris ejus Bohunkonis plebani ecclesiae in Sezemicz, anno 1391. 25. oct. Sigillum Martini et Bohunkonis

Mimo to jde ze zápisů „*Acta consularia Cracoviensia*“ na jevo, že r. 1396 byl *Mikuláš Koprník za měšťana Krakovského* přijat, při čemž měšťan *Dambrova* co svědek podepsaný stvrzuje *původ jeho z Čech.*

Konečně podobají se znaky neb štíty českých Koprníků znaku, jehož užíval slavný hvězdář Koprník; mělť

---

galeae super galeas figura navis, hoc est arma natalitia personarum, scilicet Martini et Bohunkonis. In tertio sigillo Wilhelmi de Zwierzeticz clypeus bipartitus et supra clypeum galea cum duabus alis „S. Wilhelmi de Lemberg, dicti de Zwierzeticz.“ In quinto humana imago securim in manibus tenens: *S. Udalrici de Koprnik.*“ In sexto galea, super quam caput hirci cornuti erat sculptum: S. Joannis dicti Lulak de Stakorecz.“ 1391. 25 oct.

Totě důkaz patrný a znamenitý o někdejším bytí rodu panošského neb vládyckého v Čechách jménem z „Koprníka“, o kterémžto sice v pozdějších pamětech XV. a XVI. st. ani Balbin, ani já jsem posavad žádné zmínky nenalezl. I jest to pravdě podobné, že na konci XIV. aneb na počátku XV. století vládykové Koprničtí z Čech do Krakova se zabrali, ano tehdáž spojení obou krajin, Čech a Polska, též obou měst, Prahy a Krakova, mnohem užší a hojnější bylo, nežli kdy jindy. Zdaliž časové se v tom srovnávají, zpytatelé Polští ať to vykáží; všecka pochybnost ovšem by zmizela, kdyby se našlo, že Mikuláš Koprník téhož štítu užíval, kterého naši páni Koprničtí, t. *muže se sekerou.* Vesnice *Koprník* posavad v Boleslavském kraji mezi Kněžmostem a Kosmonosy leží; neníť pochyby, že byla sídlem původním těchto vládyk, kteřížto však k nejnižší tehdejší šlechtě české náleželi.“

Co se tkne štítu, jehož užíval Mikuláš Koprník, vypátralo se, že byl podobným, an obsahoval též muže, jejž ale někteří měli za Apolla. *Julian Bartoszewicz*, kterýž psal obšírnou biografii do slavnostního vydání spisů Koprníkových, jejž obstaral *J. Barovski* r. 1854, nezmiňuje se však o tom a považuje rodinu Koprníkovu za ryze polskou a spojuje jméno s osadou Koprník, která ležela prý v Slezsku; důkazu ale nepodává!

tento v erbu *muže*, jejž někteří, neví se z jakých důvodů, měli za Apolla, čeští vládykové téhož jména jakož i příbuzní jim *Vanžurové* z *Řehnic*, kteří nedávno vymřeli, měli pak ve štítu *muže se sekerou.*

Znajíce tyto tři okolnosti a tehdejší velmi přátelské poměry, které panovaly mezi Polskem a Čechy vůbec, mezi Krakovem a Prahou zvláště, nemůžeme pochybovati, že koncem XIV. století se vládyka Koprník vystěhoval z Čech do Krakova a tu r. 1396 za měšťana byv přijat trvale se usadil, čímž *český původ polských Koprníků* nade všechnu pochybnost jest vznešen.

Že jméno jeho bylo rozličně psáno, Koppernick, Koppirnig atd., nerozhoduje tu, jelikož v tehdejších dobách nebyl pravopis ustálen, ba okolnost tato mohla by sloužiti ještě k lepšímu utvrzení našeho přesvědčení, jelikož nepolské jméno Koprník nebilo novým krajanům stejně do sluchu; latinské znění *Copernicus*, jakž se sám podlé spůsobu tehdejšího podepisoval, povstalo patrně z českého *Koprník*, jehož tuto užíváme a jehož kořen se po dnes v *kopru* k nám hlásí.

Z dalších osudů této rodiny neví se skoro nic, než že syn jeden *Mikuláš* se r. 1462 usadil v *Toruni*, kdež požívaje všeobecné vážnosti i do rady městské byl volen. Jaké zaměstnání tu měl, není na jisto postaveno, jelikož zprávy starší se neshodují jednou pekařem, jindy lékařem jej nazývajíce.

V tomto městě nadvislanském zasnoubil se Mikuláš, který arci byl již v Polsku zrozen, r. 1464 s *Barborou Waiselrodovou*, Němkyní, jak Němci tvrdí, chtíce aspoň poloněmecký původ slavného Koprníka dokázati; Polský historik *Julian Bartoszewicz* dokazuje však dosti důkladně, že Waiselrodové pocházeli ze šlechty mazovské a že matka Barbory byla Polka.

A z této do Toruně přeložené větve rodu Koprníkova narodil se 19. února 1473 (o 4 h. 38 m. odpoledne, vypravuje *Möstlin)* syn *Mikuláš*, kterýž učinil neznámé dosud jméno *Koprník* tak známým a slavným.

O mládí Koprníkově nezachovala se skoro žádná zpráva; uvádí se toliko, že již v 10. roce ztratil otce svého, načež se ho ujal bratr matčin *Lukáš Waiselrode*, kterýž se před tím stal biskupem Varmínským.

První vzdělání své obdržel nejspíše na domácí škole sv.-Janské, kdež se přiučil, jsa patrně vlohami bohatě nadán, dosti záhy též latině a řečtině, takže mohl již v 18. roce věku svého r. 1491 odebrati se na universitu Krakovskou, kdež se zapsal mezi studenty co „Nicolaus Copernicus, Nicolai filius Torunensis."

Na universitě této, která brzy po Pražské byla založena, panoval tehdáž dosti utěšený duch vědecký, podněcován jsa hlavně *Vojtěchem Brudzewskim*, professorem hvězdářství, jehož dílo „Commentaria utilissima in theoricis planetarum" v Miláně vydané se považovalo tehdáž za nejlepší výklad soustavy planetární.

Tento učenec shromáždil kolem sebe nejnadanější posluchače své, především *Mikuláše Koprníka*, *Jakuba z Kobylina*, *Mikuláše Szadka*, *Martina z Olkusze*, *Bernarda Wapowského* a j., a podněcoval i podporoval je v studiích tak horlivě a přátelsky, že později se vesměs více méně co učenci proslavili.

Koprník se tu zanášel hlavně *filosofii* a *medicinou*, pro kterouž sem takřka byl poslán, a teprv když seznal, kam nadání ho pudí, oddal se co nejúsilovněji *mathematice* a *astronomii*, takže se vyšinul velmi rychle na stanovisko, na němž se tehdáž tyto vědy nacházely a na Krakovských školách vysokých i pěstovaly.

Když pak Brudzewski naleháním knížete kardinála Bedřicha Jagelonovce odešel do Litvy na úřad sekretáře při knížeti Litevském Alexandru, potomním králi Polském, neměl Krakov vábnosti více pro snaživého Koprníka, který již dříve pojal byl úmysl odebrati se do Italie, kde tehdáž poznovu rozkvétaly všechny vědy a umění a hvězdářství zvláště Regiomontánem bylo povzneseno; neb soustava Ptolemeova neukojila jeho badavého ducha nikterak, takže se všemožně snažil podniknouti vše, aby proniknul až k poznání pravého zřízení budovy světové.

Na důkaz, jak vážný byl úmysl jeho, poznamenati tu sluší, že chtěje z daleké cesty co možná nejvíce vytěžiti, věnoval se v prázných dobách *umění malířskému*, aby poklady umělecké s užitkem mohl studovati a zároveň si nakresliti, co by se mu vidělo býti pamětihodným. I přivedl to v tomto umění svou pilností tak daleko, že nejenom krajiny, nýbrž i podobizny dosti věrně uměl vyobrazovati.

Aniž by studia medicinská ukončil, vrátil se Koprník se svými záměry a úmysly z Krakova na čas do Toruně, aby se na dalekou cestu připravil, načež rozloučiv se s matkou a ujcem svým, který mu již tehdáž nejspíše co stipendium na cestu zjednal *beneficium kanovnické*, jakž tu bývalo obyčejem, odebral se konečně r. 1496 tam, kde nejsnažlivější duchové celé Evropy v tehdejší době ukojení své vědecké touhy nacházeli, *do Italie.*

Napřed zastavil se *v Padově*, kdež na universitě zapsal se do *album Poláků;* učitelové jeho byli tu *Mikuláš Passara* a *Mikuláš Vernie*, kterýžto r. 1499 jej též promovoval za *doktora lékařství a filosofie.*

Odtud odebral se do *Bononie*, kde tehdáž *Domenico Maria de Ferrare* již dvanáctý rok s velikým úspěchem přednášel o hvězdářství, aby se tu zdokonalil v zamilované vědě své. Poněvadž ale v Krakově na základě Purbachem a Regiomontánem zlepšeném si pod Brudzewskim tolik již byl zjednal vědomostí hvězdářských, že mnoho nového tu nezískal, byl spíše spolupracovníkem nežli učněm. A že i Ferrare jej za přítele, pomocníka a svědka svých učených prací považoval, o tom nejlépe svědčí zpráva o některých pozorováních, která s ním provedl, mezi nimiž se uvádí sledování Luny v březnu 1497, jak hvězdu Aldebarana zakryla.

Odporučením tohoto svého příznivce stal se pak Koprník r. 1499, vrátiv se z Frauenburku, kamž za příčinou svého beneficia na krátkou dobu byl povolán, *professorem mathematiky v Římě*, kde velkého si dobyl uznání jasnými a zajímavými přednáškami svými před vybraným posluchačstvem*), takže jej tu za rovného měli Regiomontanovi.

Čím dále uvažoval a čím častěji vykládal rozmanité stránky tehdejší astronomie, tím méně byl sám jimi uspokojen, takže nejspíše již v Italii si konečně předsevzal, že na novém základě sám zbuduje pravou soustavu světovou.

---

*) „In magna scholasticorum frequentia et corona magnorum virorum et artificum in hoc doctrinae genere docuit“ praví tu Rhaetikus.

Pobytí Koprníkovo v Římě bylo však brzo přerušeno nastalými bouřemi, kterými smutně vyniká panování papeže Alexandra VI.; nelze však přesně udati, kdy Řím opustil a kam se odebral.

Někteří životopiscové jeho tvrdí, že již r. 1500 vrátil se do otčiny své nazpět a tu zaujal místo kanovnické ve Frauenburce a že r. 1501 se svolením kapituly, ještě na dvě leta obdržev dovolenou, vrátil se opět do Italie, aby v Padově některá studia svá, zejmena medicinská dokončil; s druhé strany ale uvádí Koprník sám, že r. 1500 a to v listopadu pozoroval v Římě zatmění měsíce.

Možná, že jako r. 1499 odebral se jen na krátký čas do Frauenburku, aby tu jistým povinnostem s kanovnictvím spojeným učinil zadost, že však tak brzy, jak mohl, vrátil se opět do Italie.

Bylť život tehdejších kanovníků zcela jiný nežli za našich časů, ba velmi často starali se o residenci jen potud, pokud jim z toho plynul užitek při uprázdnění nějakého beneficia (optio).

Snad i Koprník jen k vůli právu, jaké měli kanovníci *residentes*, konal dvakrát obtížné cesty z Italie domů!

Nechť se má věc jakkoli, tolik jest na jisto postaveno, že r. 1503 byl již z Italie nazpět a že prozatím v Krakově se usadil, aby v kruhu svých učených přátel universitních, jež dříve jsme již jmenovali, vypracoval pravý výklad soustavy světové, jakž si byl za úkol svého života položil.*)

*) Bartoszewicz udává, že r. 1499 byl doma, že téhož roku stal se professorem v Římě, odkudž opět r. 1500 se vrátil, načež r. 1501 po třetí se odebral do Italie. Záhadné tyto okolnosti života jeho nelze tak snadno srovnati a si vyložiti, takže jeho pobytí v Italii zůstane v podrobnostech snad navždy nevyjasněným.

Ač byl již té doby doktorem filosofie a mediciny a mohl snadno státi se professorem v Krakově, ač hlavně se zanášel mathematikou a hvězdářstvím, jež chtěl reformovati, přidržel se přec beneficia kanovnického nejspíše proto, že tu nejvíce mu poskytnuto času a poklidu s jedné strany a pomoci biskupského strýčka se strany druhé. I přijal posvěcení kněžské od Krakovského biskupa *Jana Konarského*, čímž zároveň vyhovil přání svého druhého otce, biskupa Lukáše Waiselroda.

Že v očekávání svém nebyl sklamán, poznáváme z toho, že od r. 1503 začal pilně pracovati na své nové soustavě a již r. 1507 v hlavních rysech byl hotov, takže pro pozdější leta mu zbylo jen vypracování do podrobna, kteréž vyžadovalo mnoho pozorování a výpočtů.

V Krakově uveřejnil též r. 1509 první literární práci svou, latinský překlad listů *Theophylakta*, jednajících o věcech mravoučných, venkovských a milostných.*)

A tu když byl v nejlepším proudu vědeckého badání, když snad trvale si předsevzal usaditi se městě, k němuž ho poutaly upomínky rodinné, svazky příbuzenské a poměry vědecké, tu vyzván byl strýcem svým, jehož z vděčnosti nanejvýš si vážil, aby zaujal výnosné místo v kapitule Frauenburské, aby se odebral tam, kde mělo sídlo své kollegium, k němuž patřil a z něhož se mu dostávalo prostředků k jeho studiím i vědeckým pracím.

I uposlechl hlasu svého největšího přítele a příznivce a nedbaje jiných lákavých výhlídek, odebral se r. 1510

*) *Theophylacti scholastici Simocati* epistolae morales, rurales et amatoriae, interpretatione latina *Nicolai Copernici*.

na místo mu vykázané, kdež si v krátce i observatorium astronomické zařídil.

Jak si tu vážili ostatní členové kapituly nově příchozího kanovníka, o tom nejlepší svědectví vydává důvěra, jakou v něho složili hned po jeho vstoupení mezi ně.

Jednaloť se tehdáž o urovnání sporů mezi Polskem a německými rytíři, kteříž se domáhali území, roku 1466 Toruňským mírem ustoupeného, při čemž i německá říše a král uherský byli poslanci svými zastoupeni. A k těmto poradám poslán co důvěrník od svých spolubratří Koprník.

Že tu rozhodně vystupoval proti nemírným a nemístným požadavkům svárlivých rytířů, zjednalo mu velkou vážnost se strany jedné, vzbudilo však i nenávist se strany protivné, kteráž i hanlivým spisem na něho složeným zjednala si průchod do veřejnosti — velmi nerytířský to boj! —

Podobně neohroženě a vlastenecky si počínal r. 1512, když biskupský strýc jeho zemřel a nová volba spůsobila spor mezi kapitulou a králem Zikmundem, kterýž nešetře starého práva, dle něhož se volba děla volně a svobodně, po příkladu svého předchůdce Kazimíra IV. stál na tom, že má i tu právo biskupa navrženého a zvoleného potvrditi.

Jaký vedlejší význam měl tento spor, zdali národní, nelze sice nyní zcela určiti; ale že nebyl bez následků, posouditi možná z toho, že celá kapitula se rozštěpila na dvě strany, když nový biskup *Fabian de Lusianis* královské vůli se podrobil a jeho potvrzení přijal. Jedna strana, k níž patřil *Mikuláš Koprník*)*, *Klet*, *Jiří Dzialowski*, *Chrapicki* a *Tiedeman Gise*, schvalovala totiž jednání

*) Jeho bratr Ondřej, kterýž tu byl též kanovníkem, stál při straně druhé.

svého představeného, kdežto druhá v něm spatřovala ponížení a porušení starobylého práva, v čemž i potvrzována byla tehdejším papežem *Juliem II.*, když se k němu se žałobou byla obrátila.

Neutěšené spory tyto netrvaly však dlouho, ač německými rytíři byly stále podněcovány; neb biskup Fabian se svými věrnými, jimž se dostalo i papežské důtky, přidržoval se pevně krále, kterýž konečně r. 1513 zvítězil, když nový papež *Lev X.* na stolici sv. Petra dosednuv Fabiana v hodnosti jeho potvrdil.

Avšak tyto a podobné vnitřní a vnější neshody nesváděly Koprníka s cesty pevně vytčené a šťastně nastoupené; nevyhýbal se sice zbaběle všelikým sporům a zastal se důrazně práva, kde bylo třeba, používal však vedle toho každé příležitosti, aby všestranně a důkladně odůvodnil základy nového názoru světového, jímž chtěl staré bludy odstraniti.

Ba i když byl od roku 1515—1517 správcem vzdálených dvou statků kapitulních, jmenem *Allenstein* a *Mehlsack*, nepřetrhl svá badání astronomická, nýbrž vzal si všechny své práce s sebou, aby mohl v nich pokračovati v prázných dobách. Věž Allensteinská proměněna rychle v observatorium hvězdářské, na dvou rozích zámku sestrojil si sám důkladné hodiny sluneční a mnohé jiné přístroje tu postavil, aby mohl potřebná pozorování přesně prováděti.

Od této doby, co Allenstein byl svědkem jeho vědecké činnosti, zanášel se též horlivě sledováním běhu slunce a měsíce co možná nejpřesnějším. Neb maje dáti radu k zlepšení *kalendáře julianského*, o něž se zasazoval r. 1516 koncil lateránský, viděl se nucena vymluviti se na nedostatečnost dosavadních pozorování, z čehož s jedné strany posouditi možná, že byl tehdáž již mezi první autority hvězdářské počítán, a s druhé strany, že jeho vědecká skromnost a střízlivost mu nedovolovala odhodlati se k něčemu, co by nebyl mohl tak důkladně provésti, jak si toho sám přál.

A práce tyto časoměrné nebyly bez výsledku; neb když se později opět jednalo o kalendářské opravě, sloužily výsledky jeho pilných pozorování a důkladných výpočtů za základ. Tak zvaný *gregoriánský kalendář*, kterýž do života uveden byl r. 1582 a podlé něhož dosud počítáme, jest tudíž taktéž dosti slavným pomníkem Koprníkovy pilnosti a bystrozrakosti.*)

Vrátiv se po dvouletém spravování svěřených mu statků z Allensteinu do Frauenburku, pokračoval Koprník dále ve svých ostatních pracích hvězdářských, zejmena v pozorování polohy oběžnic a stálic a v upravování spisu, v němž skládal všechny výsledky svého badání.

Bylť tu sice ještě několikráte vytržen ze svého směru zvláštním úřadem a posláním, jakéž na něho vznesla kapitula, avšak tím nevadilo se mnoho jeho úkolu životnímu.

Aby svým finančním poměrům pomohl, razil německý řád špatné mince; a když r. 1466 v míru Toruňském, jak dříve již bylo praveno, velkou část svého území postoupil

---

*) *Clavius* praví o něm: „Unus post hominum memoriam *Nicolaus Copernicus*, egregius nostrae aetatis Mathematicus, conferendo diligentissime suas observationes cum observationibus Hipparchi, Ptolemaei, Albategnii, Alphonsinorum, ausus est solertia sane incredibili, adhibitis novis Hypothesibus, incrementum hoc et decrementum anni Solaris demonstrare et anni inaequalitatem ad certam definitamque normam redigere“ ....

Polsce, vymínila si města *Toruň*, *Elbink* a *Gdansko právo mincovní*, kteréž prováděla však v dřívějším smyslu špatném, čímž povstaly zmatky nemalé.

Kteréžto zmatky a nesrovnalosti mincovní upraviti bylo úlohou zvláštního sjezdu v Hrudězi r. 1522 odbývaného, k němuž i Koprník co zástupce kapituly byl vyslán. Předložil tu zvláštní odůvodněný návrh *„Monetae cudendae ratio per Nicolaum“*, který dosud se uschovává v archivu města Královce*), ale napravení nedosáhl, jakž sám byl předpověděl, ač i královským výnosem jeho návrhy byly schváleny; neb r. 1528 jednáno sice v Elbinku opětně o této záležitosti, kamž Koprník opět zaslal zvláštní promemoria, ba až do r. 1530 protáhly se porady o tomto špatném mincovnictví a jeho odstranění, ale konce se Koprník nedočkal, jelikož tu prospěch chytrého jednotlivce, jak bohužel často se dosud děje, zvítězil nad prospěchem dobromyslného celku.

Lépe se mu dařilo v záležitosti jiné, týkající se taktéž finančních poměrů kapituly.

Roku 1523 svěřena mu totiž po smrti biskupa Fabiana administrace všech statků kapitulních a tu opět mu bylo právně se potýkati s hladovými rytíři německými; zabraliť hrdinové tito před tím mnohé zádušní statky kapitule Frauenburské původně náležející a nechtěli jich po dobrém vydati. I ujal se věci té svou rázností Koprník a neustal, až právu zjednal průchod; ale spor tu byl velmi krutý, takže teprv po dlouhé při těch statků nazpět dobyl,

*) Zajímavý jest počátek zprávy této „Quamquam innumerae pestes sunt, quibus regna principatus et respublicae decrescere solent, haec tamen quatuor (meo judicio) potissimo sunt: discordia, mortalitas, terrae sterilitas et *monetae vilitas*.“

když si zjednal peremtorický mandat krále polského k tehdejšímu velmistru řádu německého Albrechtovi, potomnímu vévodovi pruskému.

Od té doby nebyl však více vyrušován ze svého vědeckého života klidného; doplňoval a zdokonaloval dílo své stále, takže r. 1540 byl úplně s ním hotov. Pracoval tedy na něm přes 36 let, jakž sám vypravuje v předmluvě; narážeje na známé verše Horácovy praví totiž o knize papeži věnované „*qui apud me pressus non in novum annum solum, sed jam in quartum novennium latitasset.*“

Jelikož se nemohl a nechtěl skrývati se svým badáním a jeho velikolepými výsledky, roznesla se brzy pověst o nových základech názoru světového i do končin velmi vzdálených a to tím snadněji, jelikož za svého pobytu v Italii si sám byl osobně získal mnoho ctitelů.

Již r. 1536 psal mu kardinál *Mikuláš Šomberk*, biskup Kapuanský, aby mu na jeho útraty dovolil udělati opis*), čemuž i ochotně bylo vyhoveno; při této příležitosti vyslovuje mu největší svou úctu a uznání, z čehož jde též

*) Cum mihi de virtute tua, constanti omnium sermone ante annos aliquot allatum esset, coepi tum majorem in modum te animo complecti atque gratulari nostris hominibus, apud quos tanta gloria floreres. Intellexeram enim te non modo veterum Mathematicorum inventa egregie callere, sed etiam *novam Mundi rationem constituisse.* Qua doceas terram moveri: Solem imum mundi adeoque medium locum obtinere:... Quamobrem vir doctissime, nisi tibi molestus sum, te etiam atque etiam oro vehementer, ut hoc tuum inventum studiosis communices et tuas de mundi sphaera lucubrationes una cum Tabulis et si quid habes praeterea, quod ad eandem rem pertineat, primo quoque tempore ad me mittas“...

na jevo, že tehdejší hodnostáři církevní nepředpojatě pojímali význam Koprníkových výzkumů.

Ještě většího ocenění dostalo se jeho práci, ač neuveřejněné, se strany professora *Jiřího Jachima*, řečeného *Rhaetika*, který professury své zanechav, r. 1539 z Vitemberka se odebral ku Koprníkovi, aby se stal jeho učněm.

Že tu byl velmi vlídně přijat a do učení nového zasvěcen, o tom nelze pochybovati znajícím povahu Koprníkovu a to tím méně, jelikož *Rhaetikus* sám při každé příležitosti nejvyšší chválu vzdává novému svému učiteli.

Již po půltřetím měsíci vypsal pak chápavý žák německý otcovskému příteli svému *Schonerovi* do Norimberka hlavní zásady slovanského učitele svého a jeho soustavy, kterážto nadšená zpráva pak co *Narratio prima* neb předběžný výklad*) r. 1540 ponejprv a od té doby několikráte tiskem byla vydána, čímž se valně přispělo k rozšíření nauky a slávy Koprníkovy.

V této první zprávě veřejné uvádí, že v šesti knihách**) vyložil Koprník celou astronomii, načež vypisuje stručně jejich obsah; dále vykládá a posuzuje některé nové stránky tohoto učení, při čemž často připojuje zajímavé zprávy o Koprníkovi samém a slibuje, že později ještě obšírněji o témž předmětu pojednati hodlá.

---

*) Ad. J. Schonerum de libris Revolutionum eruditissimi Nic. Copernici Narratio. 1540.

**) „D. Doctor Praeceptor meus lex libros conscripsit, in quibus ad imitationem Ptolemaei singula mathematice et Geometrica methodo, docendo et demonstrando, totam Astronomiam complexus est."

Poslední svůj úmysl však neprovedl, neb nedlouho na to odhodlal se konečně Koprník po velkém zdráhání se, jak sám praví v předmluvě, dílo své dáti do tisku, aby každý z původního zřídla mohl čerpati.

Když Rhaetikus opustil Koprníka, vzal s sebou též pojednání o trojúhelnících, kteréž dílo pak r. 1542 ve Vitemberku vyšlo pod titulem *„De lateribus et angulis triangulorum tam planorum rectilineorum, tum sphaericorum*, libelus eruditissimus et utilissimus, tum ad plerasque Ptolemaei demonstrationes intelligendas, tum vero ad alia multa scriptus clarissimo et doctissimo viro D. *Nicolao Copernico Torunensi.“*

V spise tomto, jehož hlavní a podstatná část obsažena též v pozdějším díle *„De revolutionibus orbium coelestium“*, vyloženy jsou též dva důležité vynálezy Koprníkovy, týkající se vypočtení sférických trojúhelníků z daných úhlů a vypočtení jejich z daných stran, kterýmiž se Koprník osvědčil býti i důmyslným mathematikem; neb co Hipparch začal, Arabové dále vyvinuli, dokončil slovanský tento mathematik hvězdář. *)

Když pak nemohl více odolati nalehavým prosbám svých ctitelů a přátel, mezi nimiž vynikal *Tiedemann Gise*, biskup Chlumský, rozloučil se konečně s těmi listy, s nimiž

---

*) Trigonometrie Koprníkova, uveřejněná od Rhaetika, obsahuje první tabule sinusů vypočtených od minuty k minutě pro poloměr 10,000.000, kdežto trigonometrie Regiomontanova obsahuje tytéž výpočty pro poloměr 60.000. Podlé příkladu místra svého provedl pak Rhaetikus potřebné počty od desíti k desíti sekundám pro poloměr 1„000.000,000.000, kteroužto znamenitou a robotnou práci vydal po smrti jeho Otto pod titulem „Opus palatinum de triangulis.“

tolik let se bavil opravuje a doplňuje, a svěřil posledně jmenovanému příteli rukopis nesmrtelného díla svého *), aby se postaral o jeho vytištění. Neznaje lepších a pečlivějších rukou, odeslal jej tento osvícený hodnostář církevní po bezpečné cestě do Němec příteli svému Rhaetikovi, kterýž v *Norimberce* jej dal do tisku, jelikož tu velmi utěšeně tehdáž kvetlo umění knihtlačitelské a mimo to tu měl v osobě *Ondřeje Hosemanna* neb *Osiandra* spolehlivého a spůsobilého dohlížitele na tisk.

Bylť také již nejvyšší čas, aby se k tisku přikročilo, měl-li Koprník sám ještě do rukou dostati tištěný exemplář spisu, na jehož provedení obětoval celý život svůj. Neb v 70. roce věku svého počal patrně chřadnouti a byl konečně chrlením krve přinucen i ulehnouti, aby více nepovstal.

*) Rukopis tento chová se nyní v Nosticovské knihovně na Malé Straně. Jak se tam dostal, o tom podává zprávu první list jeho; stojíť tu psáno: „Venerabilis et eximii Juris utriusque Doctoris, Domini Nicolai Copernici, Canonici Varmiensis in Borussia Germaniae (!), Mathematici Celeberrimi, opus *De Revolutionibus coelestibus*, propria manu exaratum et hactenus in Bibliotheca Georgii Joachimi *Rhetici*, item Valentini *Othonis* conservatum, ad usum studii mathematici procuravit M. *Jacobus Christmannus*, Decanus Facultatis artium anno 1603, die 19 decembris.“ Pod tím jinou rukou jest poznamenáno: „Hunc librum a vidua pie defuncti M. Jacobi Christmanni digno redemptum pretio, in suam transtulit Bibliothecam *Joannes Amos Nivanus*, anno 1614 d. 17 januarii, Heidelbergae.“ (*Komenský* tehdáž studoval v Heidelberce). A na druhé straně podepsán jest konečně „*Otto Freiherr von Nostitz*“, kterýžto šlechtic za Ferdinanda II. mnoho vzácných knih a rukopisů ve Slezsku skoupil a do knihovny své uložil; a tu se až na naše časy uchovala tato nejdrahocennější památka po Koprníkovi. Při úřední inventůře r. 1832 byl poklad tento úředně vyceněn na 30 krejcarů!

Na smrtelné posteli, praví se, předložen mu hotový výtisk spisu, jímž stal se nesmrtelným; s klidnou zálibou prý se dotknul pomníku, jejž si byl sám postavil, a brzy na to zavřel na vždy oči své, kterýmž se ponejprv odhalilo tajemství přírodní v celé své jednoduché velebnosti.

Kterého dne zemřel, není sice zcela na jisto postaveno; *Prove*, který s velikou bedlivostí prozkoumal všechny momenty jeho života, dokázal aspoň, že úmrtí jeho nepřipadá za 21. květen 1543. Podobně se neví určitě a bezpečně, kde bylo tělo jeho pochováno; s největší pravdě podobností lze však souditi, že uloženo bylo, jak bývá obyčejem, v dómu frauenburské kapituly, jejíž první okrasou byl za svého živobytí. Nejvíce tomu nasvědčuje náhrobek, jejž mu v dómu tomto postavil r. 1581 *Martin Kromer*, biskup Varmínský, s nápisem:

D. O. M.
R. D. NICOLAO COPERNICO
TORUNENSI, ARTIUM ET
MEDICINAE DOCTORI.
CANONICO WARMIENSI,
PRAESTANTI ASTROLOGO, ET
EJUS DISCIPLINAE
INSTAURATORI,
MARTINUS CROMERUS
EPISCOPUS WARMIENSIS,
HONORIS ET AD POSTERITATEM
MEMORIAE CAUSA POSUIT.
M.D.LXXXI.

Co se tkne zevnějšku jeho, podává připojená podobizna, pocházející z r. 1508, kde mu bylo 35 let, dle souhlasných zpráv starších dosti věrný obraz a výraz obličeje jeho, jejž opěvá *Nicodemus Frischlinus* takto:

„Quem cernis, vivo retinet Copernicus ore,
Cui decus eximium formae par fecit imago.
Os rubeum, pulcrique oculi, pulcrique capilli,
Cultaque Apellaeas imitantia membra figuras.“

Co do povahy, poznati lze z některých dát historických vůbec jakož i z jeho spisů vlastních a z listů, jež Rhaetikus svým přátelům zaslal, jak byl *skromným, spravedlivým, snášelivým, dobromyslným, lidumilným a vůbec nad obyčejnost vznešeným.*

Skromností obzvláště vyniká především i dedikace i předmluva k spisu jeho, kterouž končí větou „Multa praeterea aliter quam priores fateor me traditurum ipsorum licet munere: utpote qui primum ipsarum rerum inquisitionis aditum patefecerunt.“ Tato vlastnost jeví se pak zřejmě i v jednotlivých oddílech celého spisu, kdež dosti často se omlouvá svou nedostatečností a prostředností; IV. knihu na př. začíná takto: Quum in praecedenti libro, quantum nostra mediocritas potuit, exposuerimus“ ...

O citu pro spravedlnost netřeba tu více se zmiňovati; poznalť jsme jej dříve velmi jasně, jednajíce o rozličných sporech kapituly s rytíři německými.

Snášelivost svou ve věcech náboženských měl taktéž dosti často příležitost dáti na jevo; neb protestantismus té doby se rozšiřující vedl i v jeho vlasti k rozmanitým neshodám. S jedné strany radil příteli svému Tiedemanovi Gisiovi jako pravý katolík, aby spis svůj proti Luthrovi uveřejnil, s druhé strany však přátelsky obcoval s Luthrovým stoupencem Rhaetikem, jelikož tu nešlo o věci náboženské. Nejednaloť se mu o to, praví životopisec jeho *Westphal*, aby vedl spory o nauku křesťanskou, nýbrž aby podlé ní žil.

Jeho dobromyslnost poznáváme nejlépe z výroku, kterýž pronesl, když byl veřejně luze na posměch vydán v komedii zvláštní, ze msty na něho složené; anižby se nad tím horšil, omlouval se těmito věčně památnými slovy: *„Nikdy nesnažil jsem se zalíbiti se lidu; neb co já vím, neschvaluje lid: co schvaluje lid, já nevím."* *)

Lidumilnost nejčastěji dával na jevo podporováním chudých, hlavně pak bezplatným léčením jich, což tím více platí, jelikož nebyl Koprník lékařem z povolání, ač umění jeho lékařské bylo široko daleko rozhlášeno; svědčíť o této jeho slávě velmi dobře list, jejž mu zaslal vévoda *Albrecht Pruský* r. 1541, když se v Královci těžce roznemohl rádce jeho Jiří Kunheim.

Jak byl všestranně vzdělaným a hluboce učeným**), poznáváme co nejzřejměji nejen z vypravování jeho přátel, zejmena Gysia a Rhaetika, nýbrž hlavně i ze spisů jeho, především z hlavního díla jeho astronomického o *obratech těles nebeských* jednajícího.

Rhaetikus velmi dobře praví o něm v dopisu svrchu uvedeném: „Principio autem sic statuas velim, doctissime D. Schonere, hunc Virum, cujus nunc opera utor, *in omni doctrinarum genere et Astronomiae peritia* Regiomontano non esse minorem. Libentius autem eum cum Ptolemaeo confero" . . .

Gysius s druhé strany vychvaluje jeho znalost latiny, řečtiny jakož i přírodních věd a nazývá jej i *druhým Aeskulapem.*

---

*) Nunquam volui populo placere; nam quae ego scio, non probat populus: quae probat populus, ego nescio.

**) Někteří životopisci vypravují též, že ve Frauenburce zavedl důmyslným spůsobem vodovod, kterýž vodu říčky domácí i do vyšších pater rozváděl; prof. Voigt dokázal však, že r. 1571 uzavřela kapitula smlouvu s Val. Zendlem z Vratislavi, aby zavedl vodu do bytů kanovnických.

Kdybychom chtěli snésti všechna skvělá svědectví o našem oslavenci již pronešená, velkou knihu bychom jimi naplnili. Z několika těchto úryvků možná však dostatečně poznati, že Koprník byl duchem v každém ohledu vynikajícím, jakých se v každém století nerodí. Jeho touha po pravdě a jeho snaha poznanou pravdu přivésti k všeobecné platnosti budiž nám jasným příkladem pro všechna snažení naše vědecká!

III.

O soustavě Kopríkově.

„Ordo sphaerarum sequitur in hunc modum, a summo capiens initium. Prima et suprema omnium est *stellarum fixarum sphaera*, se ipsam et omnia continens: ideoque immobilis nempe universi locus, ad quem motus et positio caeterorum omnium siderum conferatur. Nam quod aliquo modo illam etiam mutari existimant aliqui: nos aliam, cur ita appareat, in deductione motus terrae assignabimus causam. Sequitur errantium primus *Saturnus*, qui XXX. anno suum complet circuitum. Post hunc *Jupiter* duodecennali revolutione mobilis. Deinde *Mars*, qui biennio circuit. Quartum in ordine annua revolutio locum obtinet, in quo *terram cum orbe lunari* tanquam epicyclo contineri diximus. Quinto loco *Venus* nono mense reducitur. Sextum denique locum *Mercurius* tenet, octuaginta dierum spatio circumcurrens. *In medio vero omnium residet Sol.*“

Copernicus.

Jak v oddělení prvním bylo stručně vyloženo, bralo se až do času Kopríkových *zdání za pravdu* a považovala se tudíž země, jejíž pohyby, obíhajíce s ní, nepozorujeme, za nehybný střed všehomíra; dále se učilo, že kolem země obíhá řada oběžnic a sice nejblíže *Měsíc*, pak *Merkur*, *Venuše*, *Slunce*, *Mars*, *Jupiter* a nejdále *Saturn*. Naše měnivá Luna a jasné slunce byly tedy počítány k oběžnicím. Nepravidelný a nestejný běh oběžnic těchto považoval se pak za výslednici běhů kruhových, čímž všecko uvedeno na nejdokonalejší tvary, jakž toho vyžadoval filosofický názor řecký.

Dále jsme uvedli, jak se čím dále tím hojněji a zřejměji vyskytovaly neshody mezi pozorováním a počítáním drah oběžnicových, takže Koprník konečně, nemoha nikde nalézti východu z labyrinthu takto povstávajícího, celou soustavu Ptolemeovu zavrhl a sám z nova začal nový názor budovati na základech takových, na nichž se nevyskytovalo neshod.

Především prostudoval pilně všechny tehdáž známé spisy starých filosofů, aby poznal,*) zdali již dříve někdo podobného náhledu nevyslovil, k jakému sám přišel. A když se přesvědčil, že již v starém věku vykládali pohyby nebeské co zdánlivé, pohybem země spůsobené: *Filolaus* (r. 450 př. Kr.) učil, že se země v 24 hodinách otáčí

*) Praví€ v příčině této sám v předmluvě dedikační: „Quare hanc mihi operam sumpsi, ut omnium philosophorum, quos habere possem, libros relegerem indagaturus, an ne ullus unquam opinatus esset, alios esse motus sphaerarum mundi, quam illi ponerent, qui in scholis Mathemata profiterentur. Ac reperi quidem apud Ciceronem primum, *Nicetam* sensisse terram moveri. Postea et apud Plutarchum inveni quosdam alios in ea fuisse opinione, cujus verba, ut sint omnibus obvia, placuit hic asscribere: *„οἱ μὲν ἄλλοι μένειν τὴν γῆν, Φιλόλαος δε Πυθαγόρειος κύκλῳ περιφέρεσθαι περὶ τὸ πῦρ κατὰ κύκλον λοξὸν ὁμοιοτροπῶς ἡλίῳ καὶ σελήνῃ. Ἡρακλείδης ὁ Ποντικὸς, καὶ Ἔκφαντος ὁ Πυθαγόρειος κινοῦσι μὲν τὴν γῆν οὐ μήν γε μεταβατικῶς, τροχοῦ δίκην ἐξωνισμένην ἀπὸ δυσμῶν ἐπὶ ἀνατολὰς, περὶ τὸ ἴδιον αὐτῆς κέντρον.“*

kolem centrálního ohně, aby den a noc spůsobovala; *Niketas* syrakusánský (r. 380 př. Kr.) tvrdil, že vše stojí a jen země se otáčí; *Aristarch* (r. 250 př. Kr.) vykládal, že slunce a hvězdy jsou nehybné a že země v šikmém kruhu kolem slunce obíhá, zároveň kolem sebe se otáčejíc: jal se, byv tímto svědectvím takřka posilněn k odvážnému podniknutí svému, všemi silami pracovati na provedení soustavy světové, zakládající se na pohybu země.

Výsledek svých mnohaletých pozorování a výpočtů vyložil pak, jak bylo dříve již praveno, ve spisu, jenž v Norimberce r. 1543 ponejprv vyšel tiskem s názvem: *Nicolai Copernici Torunensis de Revolutionibus Orbium coelestium libri VI*, k němuž připojeno „Habeas in hoc opere jam recens nato et edito, studiose lector, motus stellarum, tam fixarum quam erraticarum, tum ex veteribus tum etiam et recentibus observationibus restitutos et novis insuper ac admirabilibus hypothesibus ornatos. Habes enim tabulas expeditissimas, ex quibus eosdem ad quodvis tempus quam facillime calculare poteris. Igitur eme, lege, fruere;" co heslo pak přidána stará průpověď školy platonické: *Ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω.*

Norimbergae, apud Joh. Petrejum, Anno MDXLIII.*)

Spis tento věnoval papeži *Pavlu III.* nejen na důkaz své úcty, nýbrž i na znamení, že považuje vše, co v něm obsaženo jest, za nezávadné a učení církevnímu neodporující.

---

*) *Druhé* vydání vyšlo 23 let později v Basileji s nápisem: „*Nicolai Copernici Torinensis de Revolutionibus Orbium coelestium libri VI.* In quibus stellarum fixarum .... *Basileae, Officina Henrici Petrina Anno* MDLXVI."

Třetí vydání uveřejněno v Amsterodámě 75 let po smrti spisovatelově s nápisem: „*Nicolai Copernici Torinensis Astro-*

Dedikace tato neb předmluva „Ad sanctissimum Dominum Paulum III.; Pontificem Maximum, Nicolai Copernici Praefatio im libros Revolutionum“ jest nanejvýše zajímavá a charakterisuje co nejlépe vznešeného ducha Koprníkova. S jedné strany skromně vykládá, jakou úlohu si vytknul a jak ji provedl, s druhé strany snaží se vyvrátiti co nejdůrazněji námitky, jaké by se mu činiti mohly, zejmena od lidí věci neznajících, ale úsudek si osobujících.

Co se tkne této druhé stránky, vyslovuje zásadu, že mathematické předměty mohou jen mathematikové posuzovati „Mathemata mathematicis scribuntur“ a že tudíž překroucený výklad některého místa písma svatého nemůže se považovati za rozhodující u věcech těchto.*) Bylť Koprník tak přesvědčen o pravdě nového názoru, jejž tu

nomia instaurata, libris sex comprehensa, qui de Revolutionibus Orbium coelestium inscribuntur. Amstelodami. Excudebat Wilhelmus Jansonius sub Sole Aureo, anno MDCXVII.“

Čtvrté vydání obstaráno teprv v nynějším století a sice ve Varšavě *Baranowskim* s nápisem: „*Nicolai Copernici Torunensis de Revolutionibns Orbium coelestium libri sex.* Varsaviae, Typis Stanislai Strąbski, Anno MDCCCLIV“, kteréž vyšlo zároveň s polským překladem.

Páté a nejnovější vydání uspořádáno právě letos na oslavu 400leté památky Koprníkovy v Toruni, při čemž svědomitě použito rukopisu Pražského.

*) Si fortasse erunt ματαιόλογοι, qui cum omnium Mathematum ignari sint, tamen de illis judicium sibi sumunt, propter aliquem locum scripturae, *male ad suum propositum detortum*, ausi fuerint meum hoc institutum reprehendere ac insectari: illos nihil moror, adeo ut etiam illorum judicium tanquam temerarium contemnam.“ Může liž býti ráznějšího odmítnutí arrogantních ignorantů?!

vykládal, že mu ani nebylo možná věřiti, jak by někdo, prost jsa zlé vůle neb přehorlivé zaslepenosti, mohl ve spisu jeho vyslíditi něco protikatolického.

Jinak arci soudil *Schoner*, kterýž žil uprostřed vřavy náboženské, jakáž vystoupením Lutherovým v Německu se vyvinula. A poněvadž se obával, že by spis od zelotů mohl býti prohlášen za kacířský, připsal, anižby se podepsal, a na místo první položil zvláštní předmluvu „Ad lectorem *de hypothesibus hujus operis*“, v níž se snažil spůsobem takřka naivním věc vyložiti zcela jednoduše co domněnku, která může, ale nemusí míti v skutečnosti platnost.*) Hrdinský čin Koprníkův jmenován tu hypothetickým pokusem.

Bohužel, že nemohl se Koprník ohraditi proti této přátelské a přátelsky míněné službě; **) zajisté by jeho mravní statečnost byla tu slavila skvělá vítězství! Přátelské pokárání, jakého se prý dostalo Schonerovi od Tiedemana, nemohlo nahraditi veřejné zadostučinění, jakého by si byl spisovatel sám zjednal.

Co zvláštnost sluší tu ještě vytknouti, že předmluva, jakouž Koprník sám připojil k spisu svému, byla vynechána a v prvních vydáních tedy nebyla ani vytištěna, takže teprv v našich dobách přišla do veřejnosti, když se porovnával pražský rukopis s tištěným tekstem. Chtěl snad

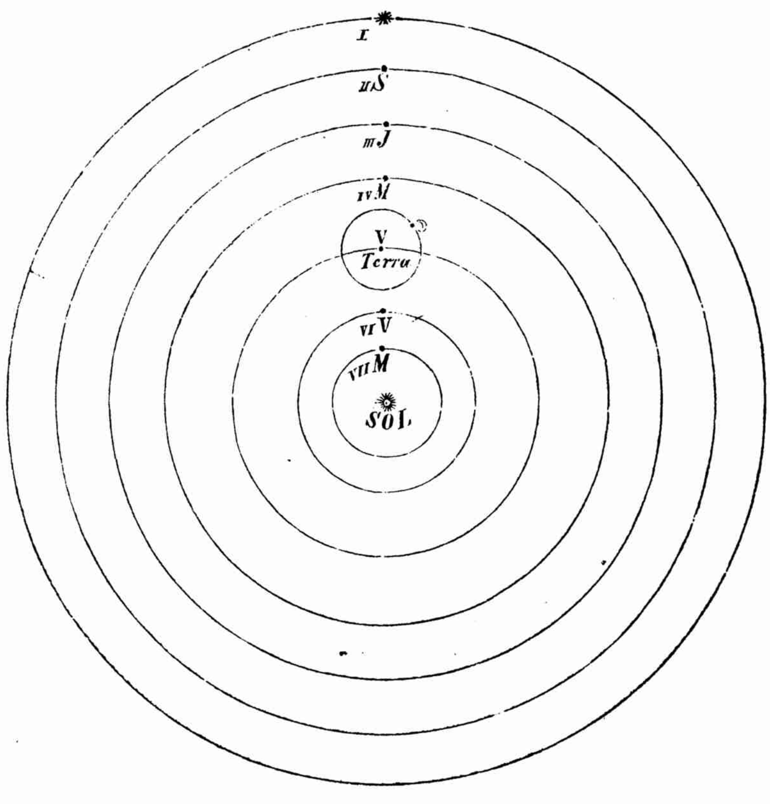
*) Neque enim necesse est, eas hypotheses esse veras, imo ne verisimiles quidem, sed sufficit hoc unum, si calculum observationibus congruentem exhibeant.

**) Sinamus igitur et has novas hypotheses, inter veteres, nihilo verisimiliores innotescere, praesertim cum admirabiles simul et faciles sint ingentemque thesaurum doctissimarum observationum secum advehant.“

Schoner, aby *jeho* „Praefatiuncula," jakž s úsměchem nazývá *Gassendi* jeho nedůstojnou předmluvu, byla hromosvodem chránícím pravdy Koprníkovy před blesky s Vatikánu metanými? —

Znajíce první osudy spisu tohoto, přehlédněme obsah jeho podle knih, z nichž se skládá.

V knize první, čítající 14 kapitol, vykládá Koprník, že svět i země má podobu koule, že dráhy těles nebeských jsou kruhové, názor to starořecký, a že rozměry všehomíra jsou nesmírné, porovnají-li se s rozměry zemskými;



Obraz 4.

na to vypisuje stručně zřízení soustavy světové slovy, jež jsme napřed co motto položili.

První sféra, kteráž všecky objímá, jest nehybná *sféra stálic*, k níž vztahujeme pohyby a polohy ostatních těles nebeských; na výkresu 4. jest poznamenána hvězdičkou a číslem I. Na ni do vnitř následuje první oběžnice se sférou druhou (II), *Saturnus (S)* v 30 letech jednou kolem slunce obíhající, dále *Jupiter (J)* se sférou třetí (III) a dvanáctiletým časem oběhu, pak *Mars* (*M*) se sférou čtvrtou (IV) s dvouletým časem oběhu; co čtvrtá v řadě oběžnic objevuje se pak *Země* (Terra) se sférou (V), kolem níž *Měsíc* (☽) obíhá, načež přichází pátá oběžnice *Venuše* (♈) se sférou šestou (VI.) a konečně poslední, středu nejbližší *Merkur* (*M*) se sférou sedmou (VII); střed pak zaujímá nehybné slunce co svítilna světová, kteráž vládne všem oběžnicím.*)

Když pak promluvil stručně o pohybech země, přechází k výkladu některých pouček geometrických, mezi nimiž se vyskytují i vytknuté dříve vynálezy ze sférické trigonometrie.

V druhé knize, rozdělené taktéž na 14 kapitol, omlouvá se s počátku, proč užívá slov jako *východ* a *západ* slunce a t. p., které podlé jeho výkladu nemají původního smyslu; praví tu velmi dobře, že věc jest v jeho

*) „Quis enim," táže se Koprník, „in hoc pulcherrimo templo lampadem hanc in alio vel meliori loco poneret, quam unde totum simul possit illuminare? Si quidem non inepte quidam lucernam mundi, alii mentem, alii rectorem vocant. Trimegistus visibilem Deum, Sophoclis Electra intuentem omnia. Ita profecto tanquam in solio regali Sol revidens circumagentem gubernat Astrorum familiam."

soustavě jiná sice, ale že užívá přec starých slov známých, jelikož jen třeba s nimi spojovati nový význam.*)

Po tomto stručném úvodu vykládá všechny výjevy, které spojeny jsou s prvním pohybem zemským, točením se kolem osy vlastní.

Především tu jest obsažen popis kruhů mathematických, jimiž se nebesa rozdělují na pole, dále vyložen spůsob, jak se měří naklonění osy zemské k ekliptice a pak pojednáno o úhlech, v nichž se protínají rovník, ekliptika a poledník, z čehož odvozuje deklinaci neb odklon a přímý výstup a pak ukazuje, jak možná přecházeti od délky a šířky k odklonu a výstupu přímému; na to objasňuje nerovnost délky denní a vykládá měření a dělení času, východ a západ hvězd a konečně rozložení jejich na obloze, při čemž vypočítává všechny v střední Evropě viditelné hvězdy podlé polohy v souhvězdí, udávaje jich délku a šířku jakož i velikost. Všude jsou připojeny příslušné tabulky jakož i mathematické výklady, které k vysvětlení těchto výjevů náležejí.

V třetí knize, kteráž čítá 26 kapitol, vykládá druhý pohyb země, obíhání její kolem slunce jakož i všechny výjevy na tomto pohybu založené; zde složeny jsou výsledky nejnamahavější práce a nejhlubšího důmyslu Koprníkova.

*) „Nemo vero miretur, si adhuc ortum et occasum Solis et stellarum atque his similia simpliciter nominaverimus, sed noverit nos consueto sermone loqui, qui possit recipi ab omnibus, semper tamen in mente tenentes, quod

Qui terra vehimur, nobis Sol Lunaque transit,
Stellarum que vices redeunt, iterumque recedunt."

Především vytknul důležitý a nejstarším hvězdářům neznámý rozdíl mezi rokem slunečným a hvězdným, načež poukázal k nestejnosti běhu ročního jakož i průseku ekliptiky s rovníkem, tak zvaného bodu rovnodennosti.

Porovnávaje totiž polohu *Spiky* neb *Klasu*, hvězdy to v *Panně* položené, jakouž Timochares, Hipparch, Ptolemeus, Albaten a on sám určil, přesvědčil se, že stálice zachovavše tutéž odlehlost od sebe a od roviny dráhy zemské, proměnily svou odlehlost od bodů rovnodenních; a jelikož hvězdy samy, jsouce *stálice*, své postavení na obloze nemění, následuje nutně, že *couvá* průsek jmenovaných rovin, bod rovnodenný, od něhož se délka počítá. Zároveň tu poznal *první*, že rychlost tohoto couvání neb tak zvané *praecessí* jest nestejná a že i úklon dráhy zemské podléhá změnám periodickým.

Učíť tu tedy, že osa země, jsouc vždy sama k sobě rovnoběžnou, podléhá dvěma velmi zdlouhavým pohybům, takže pol její asi v 26000 letech opisuje kruh od východu k západu kolem točny ekliptiky, z čehož jde, že couvání bodu rovnodenního ročně asi 50″ měří a zároveň že tento pol se blíží a vzdaluje od ekliptiky, čímž se periodicky mění naklonění této roviny, v níž země kolem slunce obíhá k rovině rovníkové, v níž se otáčí.

Konečně tu ustanovil přesně délku jednoho oběhu zemského neb délky roku slunečního a to pro tehdejší dobu, neznající našich přesných fysikálních pomůcek, tak důkladně a určitě, že sotva o 28 sekund jest jeho výsledek větší nežli našich hvězdářů.

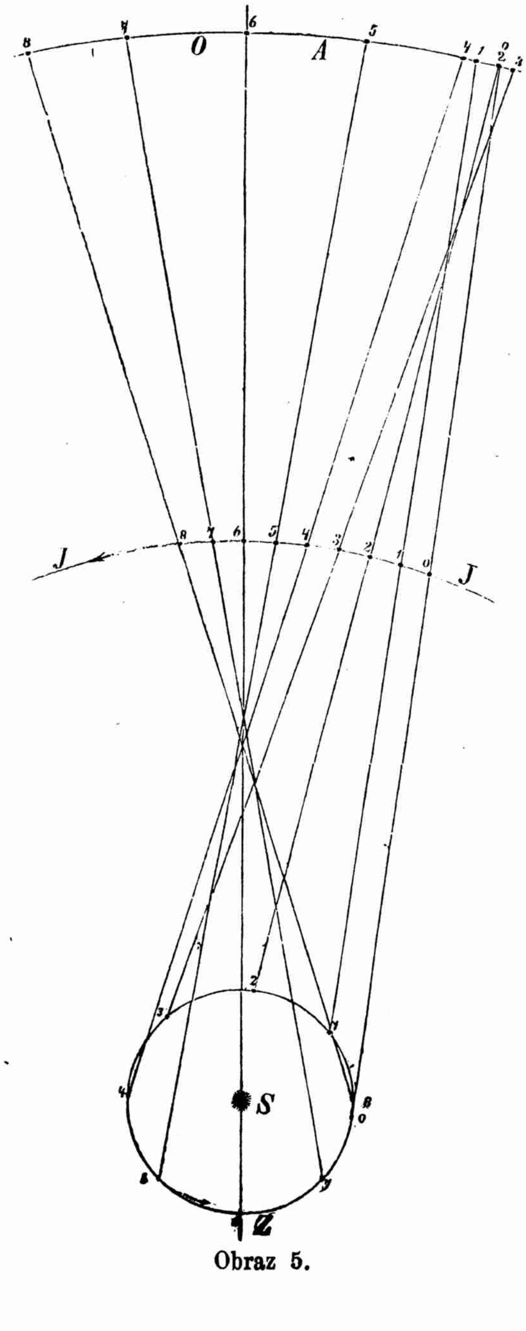
Představuje-li nám třetí kniha Koprníka co naskrz originálního badatele a tudíž co velmi šťastného tlumočníka nejzáhadnějších zjevů fysické astromie, jest naopak čtvrtá kniha zjevným svědectvím souvislosti nových názorů se starými a dokazuje, jak nesnadno se člověk odlučuje od podání tisíciletého.

V této knize čtvrté, rozdělené na 32 kapitol, zanáší se Koprník s Měsícem neb Lunou, předmětem to nanejvýš choulostivým, který teprv v našich dobách byl pronikavým rozborem Hansenovým zcela opanován. A tu, nemoha se sprostiti starého náhledu o dokonalosti kruhových drah, snaží se důmyslem nanejvýš napnutým vyložiti i lunární pohyby kolem země pomocí kruhů; že se mu to zcela dobře nepodařilo, netřeba zvláště podotýkati zejmena těm, kdož rozmarný běh Luny jen povrchně znají. Teprv *Keplerovi* poštěstilo se na základě Koprníkova názoru i tuto stránku na pravou cestu uvésti.

Za to podal v druhé polovici této knihy zevrubnou theorii zatmění, při čemž vyšetřil vzdálenost země od slunce a měsíce od země, aby mohl vypočítati průměry stínových kuželů, do nichž se tělesa při oběhu svém ponořují; zároveň tu použil starých zpráv o některých zatměních měsíce k přesnějšímu určení oběžního času měsíce.

V páté knize, 36 kapitol obsahující, podává Koprník theorii jednotlivých planet, pohybujících se kolem slunce a vyvádí tudíž dopodrobna soustavu svou, všeobecně již v první knize vylíčenou. Od nejvzdálenější oběžnice Saturna počínajíc vykládá všude zvláštnosti běhu jejich, co výsledek dvojího pohybu kolem slunce, vlastního totiž a zemského.

Abychom na témž příkladě, jaký v I. oddělení ob. 1. byl znázorněn, objasnili výklad Koprníkův, představme si,



Obraz 5.

že na obraze 5. značí *S* slunce, *Z* zemi v kruhu kolem něho obíhající, *J* oběžnici Jupitera stejným směrem kolem slunce postupujícího a *OA* část oblohy, na níž spatřujeme tuto oběžnici v průmětu.

Vytkneme-li číslicemi postavení země v bodech

Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

a současné postavení Jupitera podobně v bodech

J, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

poznáme, sledujíce podlé přímek promítajících polohu Jupiterovu na obloze, že pohybuje se na nebi z 0 do 1 (na levo), postupuje-li v skutečnosti z 0 do 1, načež jde opačným směrem (na pravo) přes postavení 2 do 3, odkudž rychle postupuje přes 4, 5, 6 a 7 do postavení 8 týmže směrem, jako oběžnice sama. Pohyb, kterýž tu v průřezu na obloze vyznačen číslicemi

		0		
4	1			3
		2		

bude tedy podlé toho, jak se mají k sobě roviny obou dráh, vypadati buď co smáčknutá neb roztažená dvojka aneb co klička, jak skutečnosti obraz 1. ukazuje.

Co se dříve nedalo kombinací kruhových pohybů objasniti, vyloženo tímto spůsobem tak jednoduše a přirozeně, jak tehdáž si kdo mohl přáti.

Škoda jenom, že Koprník se nepokusil též příčinu těchto jednoduchých planetárních pohybů blíže vypátrati a vystopovati; byltť by nejenom vyložil, nýbrž snad částečně i odůvodnil rozmanité zjevy, jaké poskytuje soustava sluneční. Že se mu nedostávalo prvních prostředků i k této práci duševní, již později *Newton* pomocí nových nástrojů mathematických, fluxí a fluent tak skvěle provedl, poznáváme z jasného pojmu, jaký měl již tehdáž o *gravitaci*, za všeobecnou vlastnost hmotných částic ji prohlásiv.*)

Šestá kniha, kteráž končí celé dílo, představuje jaksi doplněk páté, jednajíc v 9 kapitolách opět o oběžnicích, zejmena o jich pohybu co do šířky, a udávajíc sklonky jednotlivých dráh oběžnicových. Ku konci pak připojeny jsou tabulky, vysvětlující běh patera planet, a kapitola vykládající pravidla, jak se má těchto tabulek užívati.

Přehlédneme-li ještě jednou, co Koprník v klassickém tomto spisu spůsobem tak skromným a jasným vyložil, poznáme, že rozdíl mezi jeho soustavou a Ptolemeovou asi takto dá se stručně naznačiti: *Vyměnil slunce se zemí a přidělil této oběžnici měsíc co družici.*

---

*) „Pluribus ergo existentibus centris, de centro quoque mundi non temere quis dubitabit, an videlicet fuerit istud gravitatis terrenae, an aliud. Equidem existimo, *gravitatem non aliud esse, quam appetentiam quandam naturalem partibus inditam* a divina providentia opificis universorum, *ut in unitatem integritatemque suam sese conferant in formam globi coëuntes.* Quam affectionem credibile est etiam Soli, Lunae caeterisque errantium fulgoribus inesse, ut ejus efficacia in ea qua se repraesentant rotunditate permaneant, quae nihilominus multis modis suos efficiunt circuitus. Si igitur et terra faciat alios, utpote secundum centrum, necesse erit eos esse qui similiter extrinsecus in multis apparent, in quibus invenimus annuum circuitum.... Ipse denique Sol medium mundi putabitur possidere, quae omnia ratio ordinis, quo illa sibi invicem succedunt et mundi totius harmonia nos docet, si modo rem ipsam ambobus (ut ajunt) oculis inspiciamus."

Postavíme-li tedy tělesa sluneční soustavy do řady, středem počínajíce, obdržíme podlé Ptolemea:

Země, Měsíc, Merkur, Venuše, Slunce, Mars,...,

a podlé Koprníka:

Slunce, Merkur, Venuše, Země, Mars,...,
( )
Měsíc

Jak nepatrný to rozdíl! zvolá tu zajisté mnohý; druhé to vejce Kolumbovo! podotkne snad jiný.

A touto jednoduchou výměnou byla planetární astronomie starých na rub obrácena a pravé zřízení soustavy sluneční objeveno!

Jednoduchost tato však nesnižuje nikterak hodnotu činu vědeckého, jaký provedl Koprník, nýbrž jest tu pečetí pravdy a konečným výsledkem důmyslného badání. Neb aby směl takovouto, byť i zdánlivě prajednoduchou změnu provésti, k tomu bylo zapotřebí znáti a porovnati všechna pozorování, aby se dosáhlo přesvědčení, že nová theorie nikde neodporuje skutečnosti.

Svědectví Koprníkovo, že již od některých filosofů řeckých bylo vysloveno mínění, že země naše kolem osy se otáčejíc a kolem slunce obíhajíc spůsobuje známé úkazy planetární, i svědectví toto neubírá ceny zásluhám Koprníkovým.

Jako celé hvězdářství řeckých filosofů bylo více méně metafysickou kosmologií, byly i tyto výroky jejich jen sporadicky se vyskytující filosofémy, kteréž nepodporoval ani počet, ani výsledek pozorování; jednaloť se tu spíše o shodu s jejich filosofickým názorem vůbec, nežli o řádné vyzpytování pravé soustavy světové. Měliť *Archimedes, Apollonius, Hipparch* a *Ptolemeus* dosti důvtipu, aby tyto výroky filosofické odůvodnili, kdyby se byli s nimi tak vážně zanášeli, jako s mnohými problemy geometrickými; ale tehdáž nebyl ještě přemožen a odstraněn filosofický názor světa, který aprioristicky budoval celý vesmír.

Ostatně vypravuje Rhaetikus, že Koprník byl hlavně nestejným zdánlivým průměrem Marsovým na pravou cestu uveden a že pak teprv se staral o svědectví starých; měníť se tento průměr od 3″ 5 až do 25″ 6, což arci s kruhovým pohybem kolem země se nesrovnává.

A konečně, jaké pomůcky mohly mu poskytnouti všeobecné výroky starých, aby nový názor tak všestranně, důkladně a dopodrobna odůvodnil? — Tu bylo mu zajisté čerpati jen z bohatého zdroje vlastního, tu bylo mu pracovati jen neunavnou silou vlastní!

Za to ale získal si *sám* všech zásluh, jaké spojeny jsou s objevením a provedením nové velikolepé pravdy, s ustálením nového názoru světa, a ty jsou velikolepé! Neb jeho dílem bylo hvězdářství postaveno na nový, jedině pravý a tudíž nezvratný základ, na němž teprv všechny další vynálezy mohly býti učiněny.

Pokud země stála, stálo i hvězdářství; a když země uvedena do pohybu, dostalo se i hvězdářství do proudu. Jedna pravda plodila tu druhou a všechny spojovaly se pak v krásný řetěz, jakýž nám představuje nynější královská věda hvězdářská. A kotvice, na níž všechny ostatní články jsou zavěšeny, tento nejdůležitější článek celého řetězu skvoucího spočívá v pevných rukou našeho Koprníka!

Závěrek.

„Hora dále s vyšším stojí čelem
Než chlum Tlusté nade Mažárnou,
Ozdobena krásnou hvězdárnou,
Koprník jest jejím ředitelem;

Zásobu tu zříti v lesku skvělém
Nástrojů, jenž nikdy nestárnou,
Družinu též jeho přešvárnou,
Jmenující svým jej učitelem:

Ptolemeus, Cartes, Newton, Tycho
I sám Heršel k jeho oltáři
Přinášejí oběť pocty ticho;

A co jmen té nauky má pole,
Národů všech jiných hvězdáři
Učenci jsou v této jeho škole.“

Kollár.

Kdyby dnes někdo mezi nás vstoupil a jal se nám vykládati, že přesvědčení naše dosavadní, že bdíce skutečně bdíme a sníce skutečně sníme, jest nepravé, bludné a naopak tvrdil, že bdíce v pravdě sníme, sníce v pravdě bdíme, kdyby nám tedy dokazoval, že život ve snách jest životem skutečným a život náš obyčejný jen životem zdánlivým, jen sněním: jak bychom se tu nedůvěřivě na člověka takto mluvícího dívali, jak bychom s útrpností neb nevolí se od něho odvraceli, každého před jeho blábolením varujíce!

A v podobném postavení nalezal se Koprník, vystoupiv se svou novou soustavou světovou: učilť, že odvěké přesvědčení, že slunce vychází a zapadá a kolem země tudíž obíhá, jest nepravé a bludné a že země naše, jejíž pohyb točivý a postupný dosud nikdo na sobě nepocítil, nejen kolem své osy se denně otáčí, nýbrž i kolem nehybného slunce ročně obíhá; učilť tedy, že co se nám vidí býti pevným a nehybným, jest pohyblivé a co na obloze vidíme denně v kruhu obíhati, má polohu pevnou, že tedy dosud zdánlivost se brala za pravdu a skutečnost.

Ba postavení Koprníkovo bylo ještě mnohem krutější; jednaloť se tu o sídlo člověka, koruny to tvorstva, jednaloť se tu o znění neomylného písma svatého, jednaloť se tu o pokoření semitické hrdosti tehdejší hierokratie! Jak může člověk co pán přírody, co boží obraz býti připoután k nepatrné oběžnici, kolem slunce otrocky kolující. Jak může písmo svaté, v němž stojí psáno „terra autem stat in aeternum", takovýmto výkladem prohlášeno býti za lháře! Ják může slovanská skromnost analogii nebeské říše vyhlásiti za pouhou paralogii! Toť nemožné, toť nepochopitelné, toť kacířské!

A přec odhodlal se Koprník vystoupiti s názorem svým, o jehož pravdě byl zcela přesvědčen, neohroženě do veřejnosti a hlásati jej co jedině pravou soustavu sluneční.

Vedlé zásluh, jakých si zjednal objevením tak velikolepé a dalekosáhlé pravdy, vysoce sluší tedy klásti i zásluhy spojené s takovouto statečností, kteráž nedbajíc přesvědčení zakořeněného a nejvyššími autoritami zasvěceného nové učení své veřejně zastávala a šířila.

S počátku měl Koprník arci málo stoupenců, za to ale tím více odpůrců; počet obou byl však v opačném poměru k jejich hodnotě.

Na straně Koprníkově stál především žák jeho *Rhaetikus*, pak *Reinhold*, *Rothmann*, *Möstlin*, *Kepler*, *Galilei* a n. j., samé to osoby vědecky slavné, kdežto strana protivná čítala nesmírné množství obskurních učenců, mezi nimiž poměrně nejvíce vynikali *Inhofer*, *Fromond*, *Tanner*, *Rocco*, *Polaccus*, *Spinelli*, *Pontius*, *Delphinus*, *Elephantutius* a m. j.

Galilei na jedné straně, Elephantutius na druhé; kde jest pravda? — Nyní arci snadno jest rozhodnouti, tehdáž ale soudilo se všeobecně jinak. Panující strana zavrhovala zkrátka učení Koprníkovo co nerozumné, nepřirozené a nenáboženské a prohlašovala názor jeho za mínění hloupé, nesmyslné a proti astronomii, mathematice a fysice směřující.

A tu byl Schonerův hromosvod zcela bez účinku, tu zůstala krásná dedikace papeži Pavlu III. zcela nepovšimnutou.

Nemohouce stihnouti Koprníka, snažili se přečetní odpůrcové jeho potlačiti alespoň spis jeho, což se společnému namáhání podařilo i provésti. Bylať dne 5. března 1616 od sboru „Congregazione dell' Indice“ soustava Koprníkova co „*falsa doctrina Pythagorica, Divinae Scripturae omnino adversans*“ zatracena a spis jeho „de Revolutionibus“ do seznamu zapovězených knih vřaděn na tak dlouho, až by se vypravil. „Donec explicetur“ měli napsati místo „donec corrigetur“, poznamenal ironicky o tomto odsouzení pravdy slavný *Kepler*.

Země tedy byla tímto rozsudkem opět zastavena, avšak soudcové se přec i s ní dále otáčeli; neb tak mocné nebyly římské dekrety. A zápověď tato trvala po celé století XVII. a XVIII., i když Kepler zákony pro soustavu

Koprníkovu napsal a Newton ducha jejich vyzpytoval; teprv v našem století uznal Řím za dobré křivdu po dvě století trvající napraviti a neodvolatelný výrok kongregace zrušiti, takže od roku 1828 se i v Římě připouští a učí, že země se točí a kolem slunce obíhá, že tedy není středem světa.

Mathematická neomylnost Koprníkova zvítězila nad mylným výkladem písma svatého.

V našem století teprv byly zásluhy Koprníkovy všestranně uznány a jemu i veřejně pocta vzdána pomníky veřejně postavenými.

Nejprvé vřadil král bavorský Ludvík jeho poprsí, již r. 1807 Schadovem vyvedené, mezi německé výtečníky v majestátní Walhalle (!), načež r. 1830 veliká broncová socha jeho od slavného Thorwaldsena pocházející postavena ve Varšavě s nápisem:

NICOLAO COPERNICO
GRATA PATRIA
NAT: 1473, † 1543.

R. 1853 splatila i Toruň slavnému rodáku svému dávný dluh, postavivši mu pomník s nápisem:

NICOLAUS COPERNICUS
THORONENSIS,
TERRAE MOTOR,
SOLIS COELIQUE STATOR.

A dnešního dne slaví se památka jeho v celém vzdělaném světě na znamení, že všichni vzdělanci celého světa postavili mu v prsou svých nehynoucí pomník uznání a vděčnosti za velikolepý čin, jehož provedení zasvětil celý život svůj. Může-liž býti většího vyznamenání a skvělejší odměny nad oslavu, vycházející od veškerého lidstva soudného?

Jako hvězda první velikosti Spika, jejíž polohu tak bedlivě stopoval, stkví se na noční obloze naší, tak září na obloze světa učeného mezi prvními jmeno Koprníkovo světlem nikde nezatemněným.

Jmeno Koprník navždy jest spojeno s ideou, která v rozšiřujícím se proudu lidské vzdělanosti spůsobila přechod od smyslné představy k rozumovému pojímání celého všehomíra a která vykázala pravé postavení zemi v sluneční soustavě a tudíž i člověku na zemi. Že nové toto stanovisko nebylo tak příliš vznešené jako staré, že tu člověk i se zemí, již tak rád *světem* jmenuje, byl uveden do patřičné podřízenosti a odkázán k příslušné skromnosti, toť dodává podniku jeho ráz hrdinnosti, toť zvyšuje jeho význam světový, historickou nesmrtelnost mu zaručujíc.

Kdybychom měli psáti kulturní dějiny lidstva, rozdělili bychom je podlé názorů světa, jaké platily v které době; a tu bychom obdrželi především dva hlavní oddíly. jež by spojoval Koprník, dobu před ním a dobu po něm, Neb teprv Koprník zjednal rozumu vládu nad smysly, teprv on zapudil ryzou pravdou základní blud v názoru světa. Pozdějším dobám bylo pak snadno zakládati a rozváděti své názory na jeho základě a pomocí nových, mohutnějších prostředků vnějších dále. Kdo ví, co by nebyl ještě Koprník provedl, kdyby byl měl Galileiho dalekohled a Newtonův počet infinitesimální!

Čím dále kdo přemýšlí o dosahu vědecké činnosti našeho oslavence, tím více nabývá zajisté přesvědčení že ten, který tak veliké věci provedl, patří mezi nejslavnější muže všech věků a všech národů, a tím snadněji a ochotněji za pravý uzná výrok *Laplace-a,* nejdůmyslnějšího to znalce mechaniky nebeské, že *památka jeho bude tak dlouho trvati jako velikolepé pravdy jím objevené.*

Věčná sláva jeho památce!

O duchu mathematickém a některých jeho zjevech.

(Přednáška, kterouž prof. Dr. *F. J. Studnička* zahájil novou činnost Jednoty českých mathematiků dne 20. října 1872.)

Pánové!

S velikým potěšením chápu se příležitosti dnes mi podané, abych Vás uvítal k nově zahájené činnosti spolkové a vyslovil přání, by ještě hojnější a horlivější bylo účastenství Vaše na všech úkolech vědeckých, jež pěstovati si jednota naše položila za účel. Neb jen pilnou a svědomitou snahou vědeckou zjednala si jednota českých mathematiků té chvalné pověsti a té štědré podpory, jíž požívá ve všech kruzích našich, a trvám, že i na dále si nejen zachová, nýbrž i zvýší tuto lichotnou přízeň jedině zvýšenou vědeckou snahou svědomitou a pilnou. Až pak konečně se domůžeme samostatné své university, bude tu jednota naše zajisté jednou z předních okras jejích, jakož nyní jest důkazem jasným a nezvratným, že vědecké snahy nejsou liché synům národa našeho.

Aby se však krásných účelů spolkových dosáhlo v míře co největší, nutno především, aby všichni údové její — a k těm počítánu býti měl by za čest si pokládati každý, kdo se u nás zanáší přímo neb nepřímo mathematikou neb fysikou — aby tedy především všichni kandidáti těchto věd vedlé receptivní činnosti veřejné vyvinovali stále hojnou, samostatnou činnost spolkovou.

Znám sice velmi dobře překážky, jaké vadí právě druhému, tuto vytknutému druhu činnosti vědecké u nás-jest to, krátce řečeno, chudoba, která obyčejně tísní naše nejnajdanější síly a je nutí několik hodin denních zaprodati cizím, aby svými nazývati směli denní hodiny ostatní. Neb národ náš, ač dosti bohatý, nepostaral se dosud hojnými a vydatnými nadacemi o ty, kteří budoucně mají vzdělání jeho míti na starosti a na nichž hlavně závisí výška stupně, na nějž postaví jej budoucně kulturní historie.

Avšak, nechť jsou okolnosti jaké koli, kdo *chce*, *může* zvýšenou pružností ducha svého přemoci i tyto hmotné překážky a byť i jen obmezeně co do času, přec skvěle co do výsledku vytrvalostí svou prodrati se k cíli vytknutému. „Šídlo i v pytli píchá", praví naše jedno přísloví.

Aby však tato soukromá a samostatná činnost byla co možná nejprospěšnější, nutno míti na zřeteli též rozmanité vnitřní stránky té vědy, s níž se zanášíme, nutno zřetel míti k *duchu* vědeckého předmětu, jejž právě probíráme.

A tu bych velmi rád, zejmena co se tkne mathematiky, vytknul aspoň *tři* stránky, ku kterým byste při svých studiích, mladí přátelé moji, pilně přihlíželi, především Vás žádám.

První stránka mathematického studia, kterouž neradno zanedbávati, týče se překladu daného úkolu z řeči obecné do řeči mathematické a naopak a tu vyžaduje duch této vědy, aby oba *překlady byly kongruentní.*

Máme-li nějaký úkol analyticky řešiti, nutno jej především upraviti a stilisovati tak, aby se vyjádřiti dal znaky mathematickými, načež se pomocí symbolů kvantitativních a operativních přeloží do řeči mathematické; s výrazem takto obdrženým provádí se pak všecky nutné úkony mathematické, čímž se mění co pravý Proteus tak dlouho, až se přijde k poslednímu úsudku, ku konečnému závěrku, v němž obsažena jest mathematická odpověď; aby se pak mohla vyjádřiti opět řečí obecnou, nutno ještě tento výsledek výpočtu přeložiti nazpět z řeči mathematické aneb slovy vyložiti.

A při těchto dvojích překladech, které předcházejí a následují každému výpočtu, nutno míti se co možná nejvíce na pozoru, aby se nevložilo do mathematického překladu více, nežli úkol vyžaduje a aby se na konci z mathematického výsledku nevytahovalo více, nežli původně bylo uloženo. Toto i ono vede, jak bohužel četné zkušenosti učí, k nesrovnalostem a protivám, ku kterým mathematické badání nikdy vésti nesmí.

Abych na nějakém příkladě objasnil tuto stránku ducha mathematického, představme si, že dána jest nám úloha uhodnouti, kolik krejcarů obdržel každý ze dvou žebráků, známe-li tyto dvě okolnosti: Kdyby první obdržel tolikrát více krejcarů, kolik jich dostal druhý, obdržel by jich 12; a kdyby druhý obržel o 4 kr. více nežli první, obdrželi by stejně.

Chceme-li vyřčení úlohy této přeložiti do řeči mathematické, nazveme počet krejcarů, jež první byl obdržel, neznámou x, při čemž však mějme na zřeteli, že podlé znění úlohy nesmí býti x negativní; smíme tedy jen positivní hodnoty x, které se při řešení našem ku konci vyskytnou, při opačném překladu míti na zřeteli. Druhý obdržev o 4 krejcary méně dostal jich tedy $x—4$, takže podmínka první zní pak takto:

$$x\,(x-4)=12 \text{ neb } x^2-4x-12=0,$$

kterážto rovnice kvadratická představuje tedy mathematický překlad předložené úlohy.

Řešíme-li podlé známých pravidel, obdržíme tu dvě hodnoty pro x, které vyhovují této rovnici, a sice

$$x_1 = 6\,,\ x_2 = -2\,.$$

Chceme-li konečně výsledek tento přetlumočiti do řeči obecné, smíme překlad vztahovati jen k řešení positivnímu, majíce na zřeteli, co do prvního překladu bylo vloženo, a tudíž říci, že první žebrák obdržel krejcarů 6, načež snadno se vypočte, že druhému se dostalo jen 2.

Řešení $x_2 = -2$, ač zcela zprávně vyvedeno jest z rovnice kvadratické, nesmí se tu intepretovati k této zvláštní úloze; číslo -2 vyhovuje sice rovnici kvadratické, aby však druhý žebrák, jemuž byla almužna udělena, se tím stal dlužníkem dvou krejcarů, toť proti znění úlohy.

Druhá stránka, ku které bych rád pozornost Vaši, pánové, obrátil, vztahuje se k rozmanitým *důkazům téhéž poučky* a k vlastnosti jejich, že *jsou tím kratší, čím bližších pouček předcházejících k nim voleno.*

Představujeť nám jedině věda mathematická zcela souvislý řetěz pouček, z nichž vyšší člen vždy nese všechny nižší, takže odstranivše jeden, přetrhli jsme nespojitelně celou souvislost.

Dejme tomu, že máme řadu po sobě jdoucích pouček

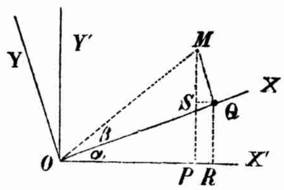
$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,$$

z nichž poučka c se dokáže pomocí a, b, následující d pomocí a, c, pátá e pomocí b, d, a poslední f pomocí d, e, že tedy možná základ jejich rozvésti podlé schematu

$$\begin{array}{cccc}
c & d & e & f \\
\wedge & \wedge & \wedge & \wedge \\
a\ b & a\ c & b\ d & d\ e \\
 & \wedge & \wedge & \wedge\ \wedge \\
 & a\ b & a\ c & a\ c\ b\ d \\
 & & \wedge & \wedge\ \wedge \\
 & & a\ b & a\ b\ a\ c \\
 & & & \wedge \\
 & & & a\ b
\end{array}$$

tož patrno, že poučku f možno dokázati pomocí pouček dvou d, e, avšak i pomocí tří a, c, e, neb b, d, d aneb pomocí čtyr a, b, c, d atd.; ale taktéž patrno, že první důkaz jest nejkratší, druhý delší, třetí ještě delší atd., jelikož tento poslední používá nejnižších pouček a, b, první však nejbližších d, e.

Abych mathematickým příkladem objasnil tuto stránku ducha naší vědy, dejme tomu, že máme polohu bodu v rovině vyjádřiti souřadnicemi novými, kteréž se vztahují k osám, uzavírajícím s původními úhel α.



Obraz 6.

Nejrychleji přijdeme k cíli, spojíme-li bod M (obr. 6.) s počátečním bodem souřadnic O, čímž obdržíme úhel $MOQ = \beta$, a použijeme-li vzorce pro $\frac{sin}{cos}(\alpha + \beta)$; budeť tu pro $OM = 1$

$$OP = \xi = cos\,(\alpha + \beta) = cos\,\alpha\; cos\,\beta - sin\,\alpha\; sin\,\beta$$
$$MP = \eta = sin\,(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\; cos\,\beta + cos\,\alpha\; sin\,\beta;$$

nahradíme-li pak výraz $sin\,\beta$ a $cos\,\beta$ výrazem $OQ = x$, $MQ = y$, obdržíme konečně známé převodní vzorce

$$\xi = x\,cos\,\alpha - y\,sin\,\alpha$$
$$\eta = x\,sin\,\alpha + y\,cos\,\alpha$$

Kdo nezná vzorců goniometrických tuto upotřebených, musí voliti delší cestu prostřednictvím pomocné kolmice QR a QS, aby k témuž přišel cíli.

Z této vlastnosti mathematických důkazů jde konečně na jevo, jak nutno jest při přednáškách šetřiti souvislosti a jak důležité jest pro každého učitele mathematiky pravidlo, „nepokračuj u výkladu, nejsi-li přesvědčen, že dosud všemu žáci porozuměli, že stojí pevně na půdě dosud vydobyté“!

Co se konečně tkne třetí stránky ducha mathematického, o které se taktéž chci v této úvodní řeči zmíniti, ta zní na první poslechnutí zcela opačně, že totiž *co do podstaty jsou všechny rozličné důkazy tétéž poučky stejně dlouhé* aneb že všechny obsahují, rozložíme-li je na původní pojmy a úsudky, totéž množství závěrků, tutéž logickou práci.

Vrátíme-li se k předcházejícímu schematu, poznáme velmi snadno pravdivost tohoto výroku; neb uvedeme-li základ poučky f na nejnižší pojmy a poučky, tož patrno, že se tu vyskytne ve všech případech dříve vytknutých po každé 4krát poučka a a 3krát poučka b.

A použijeme-li posledního příkladu geometrického, snadno též poznáme, že odvození tam podané jest sice krátké, že však odvození použitých vzorců pro $\begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}\left\{\alpha+\beta\right\}$ vyžaduje samo úsudků, jimž jsme se při tomto prvním odvození vyhnuli, považujíce tyto goniometrické vzorce za známé. Logická práce, která se vykoná v prvním případě skládá se tu ze dvou částí, z nichž první vede k použitým vzorcům, druhá pak od těchto k hledaným vzorcům pro ξ a η, kdežto bychom celou práci najednou, jedním takřka tahem musili provésti, kdybychom všude sestoupili až k pojmům základním.

Představíme-li si vědu mathematickou co horu nějakou, jejíž patu představují počáteční všeobecné, vrchol pak nejvyšší zvláštní poučky, a dejme tomu, že chceme si zjednati přístup k jisté výšce na stráni; můžeme se tam, mimo vrch stojíce, dostati skokem přetržitým? Nikoliv! Můžeme voliti rozmanité cesty, příkré, krátké neb málo stoupající, dlouhé; součet vynaložených k tomu sil, vykonané tu práce bude ve všech případech stejný.

Jako ve světě fysickém platí zákon o stálosti síly, platí o mathematických důkazech podobný *zákon o stálosti síly* arci *duševní* neb *o stálosti logické práce* aneb množství úsudků, jež nutno spojiti, aby se přišlo k určitému závěrku.

Zároveň tu vysvitá důležitost pouček, v nichž jest obsaženo mnoho předcházejících úsudků; podobajíť se vyšším stanoviskům na stráni hory mathematické, z nichž možná rychle a pohodlně dle potřeby vystupovati výše.

Kdo by chtěl vyzpytovati týmě nějaké hory, na níž nemůže stále bydleti, zajisté že se usadí na stráni tak vysoko, jak možná, a odtud bude docházeti na blízké týmě; kdyby zůstal v údolí, byl by nucen odtud pokaždé opakovati obtížnou cestu až na vrchol.

S tohoto stanoviska jeví se nám býti počet differenciální nanejvýš prospěšným pro všeliké badání mathematické; znajíce pravidla, podlé nichž se ustanovuje v rozmanitých zvláštních případech první differenciální poměr, nejsme nuceni při každé jednotlivé otázce hodnotu jeho ustanovovati podlé všeobecného pravidla

$$\frac{dy}{dx} = lim \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{(x+\triangle x) - x} = f'(x),$$

nýbrž používáme ihned příslušného pravidla zvláštního. *Fermat* určoval co do podstaty stejným spůsobem maxima neb minima funkcí jako my; kdežto však nyní přímo vycházíme od pojmu differenciálního poměru určitého, byl tento slavný mathematik nucen hledaný poměr pokaždé teprv si konstruovati.

S tohoto stanoviska jeví se nám též býti zcela nepřiměřeným spůsob mnohých fysiků, zejmena *Baumgartnera* a *Ettingshausena* jakož i *Kunceka*, jakým prováděli pomocí nižší mathematiky důkazy pouček fysikálních, které jsou podstatou svou odkázány k mathematice vyšší. Neb kdyby se aspoň třetina času, jejž věnují tací spisovatelové těmto důkazům, obětovala na vyvinutí příslušných pouček počtu differenciálního a integrálního, bylo by nanejvýš druhé třetiny zapotřebí, aby se tytéž poučky a to mnohem jasněji dokázaly, a nejméně třetiny toho času bylo by tím tedy uspořeno. A při tom by žák měl ještě dvě velké výhody: nebyl by nucen s celým napnutím své pozornosti a pilnosti sledovati eskamotování veličin, které hned tu jsou a něco platí a hned zase zmizí žádné platnosti nemajíce, a pak by podržel k další potřebě velepůsobivý nástroj, jakým se jeví býti vyšší analysis již ve svých počátcích. Jaký tu rozdíl v obou spůsobech, poznáme nejlépe, porovnáme-li v duchu důkazy, jakými se tu i onde dovozuje správnost známého vzorce

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Jsouť sice ještě mnohé zajímavé zjevy ducha mathetického, k nimž by prospěšno bylo poukázati, avšak následující přednáška, kteráž bude též Vaší pozornosti v plné míře vyžadovati, nutí mne, abych již ukončil.

Očekávaje, že ta neb ona poznámka právě učiněna bude Vás, pánové, provázeti při Vašich domácích studiích a že v tomto roce spolkovém, jejž právě počínáme, hojným účastenstvím dokážete, jak Vám milé jest pěstování věd mathematických a fysikálních naší krásnou mateřštinou, provolávám všeliké Vaší snaze a činnosti vědecké

„Na zdar“!

O kuželosečkách a jich kruzích zakřivenosti.

(Přednáška, kterouž prof. Dr. *Emil Weyr* dne 20. října 1872 započal novou činnost Jednoty českých mathematiků.)

Pro veškeré úlohy, týkající se pouze vzájemného rozpoložení bodů téže křivky, osvědčuje se býti velmi výhodným upotřebení jediné proměnné veličiny — *parametru* —, jejímiž hodnotami pak jednotlivé body dotyčné křivky určeny jsou. Každá vlastnost křivky, týkající se pouze vzájemné polohy více bodů této křivky, vyjadřuje se pak jistou rovnicí, do kteréž vcházejí pak parametry oněch bodů.

Jest-li možná zříditi takovou souvislost hodnot parametru a příslušných bodů křivky, že každému bodu jen jediná hodnota parametru a naopak každé takovéto hodnotě jen jediný bod odpovídá, pak nazýváme křivku „*racionální*".

Takové racionální křivky jsou i *kuželosečky*. Vrcholová rovnice kuželoseček pro souřadnice pravoúhlé zní, jak známo,

$$y^2 = 2px + qx^2 \tag{1}$$

a příslušná kuželosečka jest *ellipsou, parabolou* neb *hyperbolou* dle toho, jest-li $q \lesseqgtr 0$.

Budiž u goniometrická tangenta úhlu, jejž tvoří osa x s přímkou spojující bod (xy) kuželosečky s bodem počátečním t. j. budiž:

$$\frac{y}{x} = u \tag{2}$$

Poněvadž každá počátkem procházející přímka kuželosečku jen v jediném bodu protíná (mimo pevný vrchol) a poněvadž naopak každý bod kuželosečky jen jedinou takovouto přímku určuje a poněvadž konečně hodnotou u ona přímka a přímkou hodnota veličiny u úplně určena jest, tu soudíme, že hodnoty poměru u určují *úplně* a *jednoznačně* (eindeutig, univocamente) body příslušné na kuželosečce. Veličina u jest tudíž parametr druhu výše vyznačeného a kuželosečky jsou tudíž skutečně křivky racionální.

Můžeme nyní krátce mluviti o bodu u naší křivky, čímž vyrozumíváme onen bod křivky, jehož parametr $\left(\frac{y}{x}\right)$ má zvláštní hodnotu u.

Pravoúhlé souřadnice x, y bodu u vyjadřují se velmi jednoduše pomocí parametru u. Neb z (2) plyne $y = ux$, což vloženo do (1) nám dá:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2p}{u^2-q} \\ \text{a dále:} \quad x &= \frac{2pu}{u^2-q} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Souřadnice stanou se současně nekonečně velkými, jest-liže $u^2 = q$ aneb $u = \pm\sqrt{q}$. Nekonečně vzdálené body naší kuželosečky mají tedy parametry $+\sqrt{q}$ a $-\sqrt{q}$. Již z tohoto vychází na jevo, že křivka jest *hyperbolou*, je-li $q > 0$, poněvadž pak $\sqrt{q}$ jest realná a tedy i oba nekonečně vzdálené body. Obdobně plyne, že pro $q < 0$ máme *ellipsu* a pro $q = 0$ *parabolu*.

Abychom mohli určiti též parametry vrcholů, sestrojme sobě nejdříve výraz pro směrnici přímky spojující dva body kuželosečky $u_1\,u_2$.

Je-li β úhel přímky $\overline{u_1\,u_2}$ s osou x, tu máme, jak známo,

$$tg\beta = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{u_1}{u_1^{\,2}-q} - \dfrac{u_2}{u_2^{\,2}-q}}{\dfrac{1}{u_1^{\,2}-q} - \dfrac{1}{u_2^{\,2}-q}},$$

aneb po snadné redukci,

$$tg\beta = \frac{u_1\,u_2 + q}{u_1 + u_2} \qquad (4)$$

Z tohoto vzorce plyne, že přímka $\overline{u_1\;u_2}$ rovnoběžnou bude s osou x, jest-liže

$$u_1\,u_2 + q = 0,$$

a rovnoběžnou s osou y, je-li:

$$u_1 + u_2 = 0.$$

Jsou-li u_1 u_2 u_3 tři body naší kuželosečky a jest-li $\overline{u_1 u_3}$ // k ose x a $\overline{u_2 u_3}$ // k ose y, pak body u_1 u_2 jsou body protilehlé, t. j. $\overline{u_1 u_2}$ jest průměrem naší křivky.

Máme pro tento případ rovnice:

$$u_1 u_3 + q = 0,$$
$$u_2 + u_3 = 0,$$

z čehož ihned plyne:

$$u_1 u_2 = q$$

co podmínka, by body u_1 u_2 byly body protilehlými.

Z rovnice (4) plyne směrnice $tg\alpha$ pro tečnu bodu u, učiníme-li $u_2 = u_1 = u$, což nám dá:

$$tg\alpha = \frac{u^2 + q}{2u}, \tag{5}$$

Směrnice asymptot obdržíme, vložíme-li do tohoto vzorce $u = \pm \sqrt{q}$, což nám dá $tg\alpha = \pm \sqrt{q}$.

Spojíme-li kuželosečku s libovolným kruhem

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + m^2 = 0, \tag{6}$$

kde

$$m^2 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2,$$

a chceme-li určiti parametry u_1 u_2 u_3 u_4 čtyř bodů, v nichž kruh kuželosečku protíná, tu vložme hodnoty z (3) do rovnice kruhu (6), čímž po snadném zjednodušení obdržíme biquadratickou rovnici:

$$m^2 u^4 - 4\beta p\, u^3 + (4p^2 - 4\alpha p - 2m^2 q)\, u^2 + 4\beta p q u$$
$$+ (4p^2 + 4\alpha p q + m^2 q^2) = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou parametry průseků kruhu a kuželosečky. Poněvadž kruh jest třemi body úplně určen, nechá se očekávati, že mezi hodnotami u_1 u_2 u_3 u_4 řečených parametrů bude stávati takové souvislosti, že každá z nich ostatními třemi úplně určena bude.

Připomeneme-li si známou souvislost kořenů a činitelů rovnic, shledáme z poslední rovnice, že

$$(u)_1 = \frac{4\beta p}{m^2}, \quad (u)_3 = -\frac{4\beta p q}{m^2},$$

tak že tedy

$$(u)_3 + q\,(u)_1 = 0, \tag{7}$$

při čemž

$$(u)_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4,$$
$$(u)_3 = u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4.$$

Rovnice (7) vyjadřuje souvislost, o které jsme se dříve zmínili a která nám dovoluje určiti jednoduchým spůsobem jeden z čtyř bodů $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$, známe-li ostatní tři. Rovnici (7) lze považovati za podmínku, by čtyry body $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$ naší kuželosečky na tomtéž kruhu se nalezaly.

Zajímavé jest upotřebení rovnice (7) k důkazu věty o kruzích zakřivenosti, vyřknuté slavným *Steinerem* (viz Crelle sv. . . .) a dokázané analytickým spůsobem (však jen pro ellipsu) slovutným mathematikem *Joachimsthalem* (viz Crelle sv. . . .) jakož i geometrický p. *Augustem* (ibid. sv. . . .). Rovnice (7) nám dovoluje následující pro kuželosečky vůbec platnost mající větu dokázati.

„*Každým bodem kuželosečky procházejí tři kruhy zakřivenosti, které se dotýkají kuželosečky v třech bodech nalezajících se s původním bodem na obvodu téhož kruhu.*“

Budiž u_4 libovolný bod kuželosečky, kterým prokládáme kruhy zakřivenosti. Jest-li u bod, v němž se takovýto kruh kuželosečky dotýká, tu mezi u_4 a u stává relace, kterou obdržíme z rovnice (7), položíme-li $u_1 = u_2 = u_3 = u$. Tu jest především

$$(u)_1 = 3u + u_4,$$
$$(u)_3 = u^3 + 3u^2 u_4$$

a rovnice (7) přejde tudíž v následující:

$$u^3 + 3u^2 u_4 + 3uq + u_4 q = 0 \tag{8}$$

Rovnice tato jsouc stupně třetího nám praví, že každým bodem (u_4) procházejí tři kruhy zakřivenosti, (mimo kruh zakřivenosti, který se v tomto bodu u_4 dotýká), jejichž body styku mají kořeny rovnice (8) za parametry.

Označíme-li tyto kořeny $u_1\ u_2\ u_3$, tu plyne z rovnice (8) bezprostředně:

$$u_1 + u_2 + u_3 = -3u_4,$$
$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = 3q,$$
$$u_1\ u_2\ u_3 = -\ qu_4;$$

z prvních dvou rovnic dále plyne

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -2u_4,$$
$$u_1 u_2 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4 = 3qu_4.$$

Přičteme-li rovnici $u_1\ u_2\ u_3 = -qu_4$ k poslední, obdržíme

$$(u)_3 = 2qu_4$$

a poněvadž

$$q\,(u)_1 = -2qu_4$$

máme konečně

$$(u)_3 + q\,(u)_1 = 0$$

z čehož dle (7) soudíme, že body $u_4\,u_1\,u_2\,u_3$ skutečně na tomtéž kruhu se nalezají, jak dokázati jsme chtěli.

Při jiné příležitosti ukážeme, jak výhodně lze parametrů (u) k řešení jiných rozmanitých o kuželosečkách jednajících úloh použíti.

Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech.

(Sepsal Prof. Dr. *F. J. Studnička.*)

Kdo se chce vycvičiti v užívání základních pouček o determinantech platících, nenalezne snad vděčnějšího pole nad analytickou geometrii jak v rovině tak v prostoru. Neb tu vyskytuje se stále řešení rovnic, vylučování rozličných veličin jakož i přetvořování výrazů, samé to úlohy, kteréž, jak známo z dějin theorie determinantů, první podnět daly k jejímu vyvinutí.

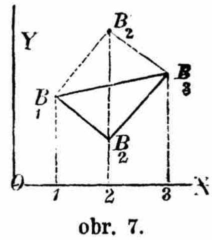
A jelikož nyní již na lepších školách středních možná si zjednati nejprvnějších známostí determinantů, sestavil jsem tuto analytický rozbor trojúhelníku a čtyrstěnu, abych ukázal, jak prospěšně se tu používá některých jednoduchých vlastností těchto zajímavých výrazů kombinatorických, doufaje, že mnohý tím bude povzbuzen k dalšímu studiu v oboru tomto.

I. O trojúhelníku.

Nejjednodušším spůsobem určí se analytický trojúhelník v rovině, ustanoví-li se buď pravoúhelné souřadnice jeho vrcholů neb rovnice jeho stran, načež se snadno vypočítá obsah jeho, určí délka stran a výšek jakož i velikost uhlů jeho.

Značí-li v případě prvním x_k, y_k souřadnice bodu B_k, bude plocha trojúhelníku $B_1\,B_2\,B_3$ — obr. 7. — patrně

$$P = (\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}) - (\mathrm{I}) - (\mathrm{II});$$



obr. 7.

použijeme-li tedy známého vzorce, ustanovujícího ploský obsah lichoběžníku, obdržíme tu

$$2P = (x_3-x_1)(y_3+y_1) - (x_2-x_1)(y_2+y_1) - (x_3-x_2)(y_3+y_2)$$
$$= x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2);$$

dá-li se pak výrazu tomuto tvar determinantu [1])

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (1\,2\,3), \qquad (1)$$

povstane konečně pro plochu trojúhelníku jednoduchý vzorec

$$2P = \varDelta = (1\,2\,3). \qquad (2)$$

Kdyby však druhý bod byl tak položen, že by příslušné y_2 protínalo protější stranu trojúhelníku, kdyby tedy na př. byl v B'_2, měli bychom pro plochy $B_1\,B'_2\,B_3$ výraz symbolický

$$2P = -(1\,2\,3) = (1\,3\,2).^{2})$$

Konečně budiž tu ještě poznamenáno, že determinant $\varDelta$ možná zjednodušiti odečítáním prvků jednoho řádku od prvků řádků ostatních,[3]) čímž se obdrží, označíme-li podřízené determinanty příslušnými písmenami velkými, [4])

$$2\varDelta = (X_1\,Y_2) = (X_2\,Y_3) = (X_3\,Y_1). \qquad (3)$$

Ze vzorce (1) jde na jevo, že pro $\varDelta = o$ jest i $P = o$, z čehož jde, že tu všechny tři body leží v jedné přímce; a naopak leží-li tři body v jediné přímce, musí $\varDelta = o$.

Abychom ustanovi-li délku jednotlivých stran tohoto trojúhelníku, použijme známých vzorců

$$\begin{aligned} l_1^2 &= (x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2 = X_1^2 + Y_1^2, \\ l_2^2 &= (x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2 = X_2^2 + Y_2^2, \qquad (4) \\ l_3^2 &= (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = X_3^2 + Y_3^2. \end{aligned}$$

[1]) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 20.
[2]) ibid. pag. 22.
[3]) ibid. pag. 26.
[4]) ibid. pag. 17.

Délky kolmic neb výšek trojúhelníkových obdrží se pak ze vzorce

$$2P = p_1 l_1 = p_2 l_2 = p_3 l_3 = \Delta,$$

z něhož jde přímo

$$p_1 = \frac{\Delta}{l_1},\ p_2 = \frac{\Delta}{l_1},\ p_3 = \frac{\Delta}{l_3}. \tag{5}$$

A podobně určí se sinusy úhlů trojúhelníkových pomocí vzorce

$$2P = l_1 l_2 \sin\alpha_3 = l_2 l_3 \sin\alpha_1 = l_3 l_1 \sin\alpha_2 = \Delta,$$

z něhož se bezprostředně obdrží

$$\sin\alpha_1 = \frac{\Delta}{l_2 l_3},\ \sin\alpha_2 = \frac{\Delta}{l_3 l_1},\ \sin\alpha_3 = \frac{\Delta}{l_1 l_2} \tag{6}$$

Ze vzorců těchto jde na jevo, že v stejnostranném trojúhelníku, kde tedy

$$l_1 = l_2 = l_3,$$

zároveň platí

$$p_1 = p_2 = p_3,$$
$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \sin\alpha_3$$

Znajíce vzorec (1), ustanovíme snadno i v druhém případě obsah trojúhelníku, jehož strany určeny jsou rovnicemi

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= o \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= o \\ a_3 x + b_3 y + c_2 &= o. \end{aligned} \tag{7}$$

Řešíme-li totiž tuto soustavu rovnic, spojujíce je po dvou, zjednáme si napřed souřadnice průseků, tedy vrcholů trojúhelníkových, načež jen třeba hodnoty takto obdržené dosaditi do vzorce (1), aby se přišlo k cíli.

Označíme-li determinanty, které se tu vyskytnou, příslušnými písmenami velkými, obdržíme z rovnice druhé a třetí [5])

$$x_1 = \frac{A_1}{C_1},\ y_1 = \frac{B_1}{C_1},$$

z rovnice třetí a první

$$x_2 = \frac{A_2}{C_2},\ y_2 = \frac{B_2}{C_2}$$

a konečně z rovnice první a druhé

$$x_3 = \frac{A_3}{C_3},\ y_3 = \frac{B_3}{C_3};$$

---

[5]) ibid. pag. 29.

zavedeme-li tyto hodnoty do vzorce (1), obdržíme tedy, vyloučivše společného dělitele [6])

$$2P = \frac{1}{C_1 C_2 C_3} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Ale prvky posledního determinantu jsou subdeterminanty příslušné k soustavě (7) aneb k determinantu

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

z čehož jde, že hodnota jeho, jelikož jest stupně třetího, rovná se druhé mocnině původního determinantu $\varDelta$ [7]); jest tedy

$$2P = \frac{\varDelta^2}{C_1 C_2 C_3}. \tag{9}$$

Jestli tu $\varDelta = o$, jest i $P = o$, z čehož jde na jevo, že všechny tři přímky protínají se v jednom bodě a naopak; protínají-li se tři přímky v jednom bodě, musí příslušné $\varDelta = o$. [8])

Znajíce vzorec (9), můžeme jednoduchým spůsobem vyjádřiti i výšky trojúhelníku i délky jednotlivých stran jakož i velikost úhlů jimi uzavřených.

Značí-li l_1 délku strany mezi bodem B_2 a B_3 ležící a p_1 příslušnou výšku neb kolmici s protějšího vrcholu B_1 na ni spuštěnou, bude i

$$2P = p_1 l_1, \tag{10}$$

kdež se p_1 analyticky ustanoví vzorcem

$$p_1 = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}};$$

dosadíme-li tedy do tohoto výrazu za x_1 a y_1 známé již hodnoty a položíme-li všeobecně

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \mu_k, \tag{11}$$

obdržíme především pro výšku vzorec

$$p_1 = \frac{a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1}{C_1 \mu_1},$$

---

[6]) ibid. pag. 23.
[7]) ibid. pag. 40.
[8]) ibid. pag. 31.

aneb složíme-li čitatele v Δ, [9])

$$p_1 = \frac{\Delta}{C_1 \mu_1},$$

a podobně

$$p_2 = \frac{\Delta}{C_2 \mu_2}, \qquad (12)$$

$$p_3 = \frac{\Delta}{C_3 \mu_3}. \text{ [10])}$$

Spojíme-li pak vzorce (9), (10) a (12), obdržíme bezprostředně dále

$$l_1 = \Delta \frac{\mu_1}{C_2 C_3},$$

$$l_2 = \Delta \frac{\mu_2}{C_3 C_1}, \qquad (13)$$

$$l_3 = \Delta \frac{\mu_3}{C_1 C_2}.$$

A poněvadž tu

$$p_1 = l_3 \sin \alpha_2, \quad p_2 = l_1 \sin \alpha_3, \quad p_3 = l_2 \sin \alpha_1,$$

označíme-li úhel ležící proti straně l_k krátce α_k, obdržíme pomocí vzorců posledních

$$\sin \alpha_1 = \frac{C_1}{\mu_2 \mu_3},$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{C_2}{\mu_3 \mu_1}, \qquad (14)$$

$$\sin \alpha_3 = \frac{C_3}{\mu_1 \mu_2}.$$

U stejnostranného trojúhelníku platí

$$l_1 = l_2 = l_3,$$

z čehož jde, že tu

$$\mu_1 C_1 = \mu_2 C_2 = \mu_3 C_3 = k,$$

načež z posledních vzorců se obdrží

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{\Delta}{k},$$

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \sin \alpha_3 = \frac{k}{\mu_1 \mu_2 \mu_3},$$

---

[9]) ibid. pag. 17.

[10]) Jelikož μ_k má označení $\pm$, volí se v jednotlivých případech tak, aby p_k bylo positivní.

z čehož plyne pro k výraz

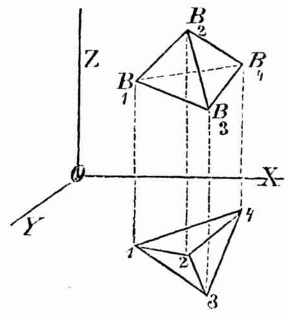
$$k = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{2} \sqrt{3}.$$

II. O Čtyrstěnu.

Zcela podobným spůsobem možná provésti analytický rozbor čtyrstěnu.

Značí-li v prvním případě všeobecně x_k, y_k, z_k souřadnice bodu B_k a chceme-li ustanoviti obsah čtyrstěnu $B_1 B_2 B_3 B_4$ — obr. 8. —, jehož rohy jsou určeny souřadnicemi pravoúhlými x, y, z, rozložme hranol s jehlancovým zakončením na tři hranoly

$$1 2 4 B_4 B_2 B_1, \quad 2 3 4 B_4 B_3 B_2, \quad 1 2 3 B_3 B_2 B_1$$



obr. 8.

a odečtěme od součtu těchto tří hranolů doplňující hranol

$$1 3 4 B_4 B_3 B_1 .$$

Obsah trojbokého hranolu O, jehož tři výšky jsou h_1, h_2, h_3 a základna b, určuje se, jak známo, podle vzorce

$$3 O = b(h_1 + h_2 + h_3);$$

v případě tomto jest b trojúhelník, jehož vrcholy jsou určeny souřadnicemi x, y a plocha tudíž vzorcem (1), takže všeobecně bude

$$6 O = (mnp) (h_1 + h_2 + h_3).$$

Použijeme-li tohoto pravidla spůsobem dříve již vytknutým, obdržíme tedy pro obsah čtyrstěnu

$$T = B_1 B_2 B_3 B_4$$

především vzorec

$$\begin{aligned}6\,T = & (1\,2\,3)\,(z_1 + z_2 + z_3)\\ & + (3\,2\,4)\,(z_3 + z_2 + z_4)\\ & + (4\,2\,1)\,(z_4 + z_2 + z_1)\\ & - (1\,4\,3)\,(z_1 + z_4 + z_3),\end{aligned}$$

z něhož jde, spořádáme-li výraz na pravé straně podlé jednotlivých z a použijeme-li známé stejniny

$$(mnp) = -(nmp) = -(pnm) = -(mpn)\ [11],$$

$$\begin{aligned}6\,T = & z_1\,[(1\,2\,3) + (4\,2\,1) + (3\,4\,1)]\\ & - z_2\,[(1\,2\,4) + (4\,2\,3) + (3\,2\,1)]\\ & + z_3\,[(1\,2\,3) + (3\,2\,4) + (3\,4\,1)]\\ & - z_4\,[(2\,3\,4) + (4\,1\,2) + (1\,4\,3)];\end{aligned}$$

spojíme-li pak determinanty v závorkách obsažené, majíce na zřeteli, že podlé ob. 8.

$$(1\,4\,3) = (1\,2\,3) + (3\,2\,4) + (4\,2\,1),$$

obdržíme dále

$$6\,T = z_1\,(2\,3\,4) - z_2\,(3\,4\,1) + z_3\,(4\,1\,2) - z_4\,(1\,2\,3),$$

což se dá složiti podlé známého pravidla [12] v

$$6T = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & y_1 & 1\\ z_2 & x_2 & y_2 & 1\\ z_3 & x_3 & y_3 & 1\\ z_4 & x_4 & y_4 & 1\end{vmatrix};$$

vyměníme-li konečně druhý sloupec za první a pak třetí za druhý [13], povstane konečně pro obsah čtyrstěnu vzorec podobný (1), totiž

$$6T = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix} = \Delta, \qquad (15)$$

kterýž možná ještě známým spůsobem zjednodušiti v

$$6T = \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1\\ x_3 - x_2, & y_3 - y_2, & z_3 - z_2\\ x_4 - x_3, & y_4 - y_3, & z_4 - z_3\end{vmatrix}. \qquad (16)$$

Jak ze vzorce (15) jde na jevo, stane se $T = o$, všechny body leží tedy v jedné rovině, když determinant $\Delta = o$ a na-

[11]) ibid. pag. 22.
[12]) ibid. pag. 12.
[13]) ibid. pag. 21.

opak, leží-li čtyry body v jedné rovině, musí determinant, sestavený z jich souřadnic podlé vzorce (15), rovnati se 0.

Abychom určili velikost jednotlivých ploch, použijme známé poučky, že čtverec nějaké plochy v prostoru rovná se součtu čtverců průmětů této plochy na tři roviny souřadnicové, načež obdržíme, značí-li P_k plochu ležící proti bodu B_k a $P_{k(mn)}$ průmět její na rovinu mn,

$$P_k{}^2 = P^2_{k(xy)} + P^2_{k(yz)} + P^2_{k(zx)} ;$$

označíme-li pak subdeterminanty patřící k $\varDelta$ stejnými písmenami velkými, bude dále

$$2P_{k(xy)} = Z_k ,$$
$$2P_{k(yz)} = X_k ,$$
$$2P_{k(zx)} = Y_k ,$$

z čehož jde, že všeobecně

$$4P_k^2 = X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2 = M_k^2 . \tag{17}$$

Délky jednotlivých hran nelze jednodušeji vyjádřiti nežli co vzdálenosti dvou bodů určených souřadnicemi, tedy vzorcem

$$l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2, \tag{18}$$

ačkoliv i tu možná výraz na pravé straně poměry determinantů nahraditi.

Co se tkne délky kolmic p_k spuštěných s bodů B_k na protější plochy P_k, ty ustanoví se snadno porovnáním dvou výrazů pro obsah čtyrstěnu; s jedné strany máme totiž podlé vzorce (15)

$$6T = \varDelta ,$$

se strany druhé pak, jak známo ze stereometrie,

$$6T = 2P_k p_k = M_k p_k$$

z těchto dvou rovnic jde tedy všeobecně

$$p_k = \frac{\varDelta}{M_k} . \tag{19}$$

Abychom určili úhly, jež jednotlivé plochy s sebou uzavírají, musíme napřed znáti úhly, jež uzavírají s jednotlivými rovinami souřadnicovými; a tu jest podlé známé poučky o průmětech, značí-li α_k, β_k, γ_k úhly, jež uzavírá plocha P_k s rovinami XY, ZY a ZX,

$$P_{k(xy)} = P_k \cos\alpha_k ,$$
$$P_{k(yz)} = P_k \cos\beta_k ,$$
$$P_{k(zx)} = P_k \cos\gamma_k ,$$

z čehož jde, použijeme-li předešlých vzorců,

$$\cos\alpha_k = \frac{Z_k}{M_k}, \quad \cos\beta_k = \frac{X_k}{M_k}, \quad \cos\gamma_k = \frac{Y_k}{M_k}.$$

Nazveme-li pak úhel, jejž uzavírají roviny P_i a P_k, krátce $(P_i P_k)$ a použijeme-li vzorce z analytické geometrie známého

$$\cos(P_1 P_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2,$$

obdržíme velmi snadno

$$\cos(P_1 P_2) = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{M_1 M_2}. \tag{20}$$

Zavedeme-li sinus místo kosinusu, zjednáme si vzorce jednodušší; obdržímeť především

$$\sin^2(P_1 P_2) = \frac{M_1^2 M_2^2 - (X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2)^2}{M_1^2 M_2^2};$$

podlé významu veličin M_1 a M_2 a podlé zvláštní poučky o determinantech platící [14]) jest ale

$$M_1^2 M_2^2 - (X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2)^2$$
$$= (X_1 Y_2)^2 + (Y_1 Z_2)^2 + (Z_1 X_2)^2;$$

---

[14]) Poučku příslušnou možná tímto způsobem odůvodniti:
Jestli $A = \Sigma \pm a_1 b_2 \ldots l_n$, $B = \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \ldots \lambda_n$, $C = \Sigma \pm A_1 B_2 \ldots L_n$ platí jak známo,

$$C = A \,.\, B, \tag{1}$$

jestli

$$\begin{aligned} A_k &= a_1 \alpha_k + b_1 \beta_k + \ldots + l \lambda_k, \\ B_k &= a_2 \alpha_k + b_2 \beta_k + \ldots + l_2 \lambda_k, \\ &\;\;\vdots \\ L_k &= a_n \alpha_k + b_n \beta_k + \ldots + l_n \lambda_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Poněvadž C jest funkcí veličin A_k, B_k, ..., L_k, jde ze vzorce (1

$$A \frac{\partial B}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial C}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial C}{\partial A_k} \cdot \frac{\partial A_k}{\partial \alpha_k} + \ldots + \frac{\partial C}{\partial L_k} \frac{\partial L_k}{\partial \alpha_k}$$

neb použijeme-li vzorců (2)

$$A \frac{\partial B}{\partial \alpha_k} = a_1 \frac{\partial C}{\partial A_k} + a_2 \frac{\partial C}{\partial B_k} + \ldots + a_n \frac{\partial C}{\partial L_k};$$

taktéž

$$A \frac{\partial B}{\partial \beta_k} = b_1 \frac{\partial C}{\partial A_k} + b_2 \frac{\partial C}{\partial B_k} + \ldots + b_n \frac{\partial C}{\partial L_k},$$

$$\vdots$$

$$A \frac{\partial B}{\partial \lambda_k} = l_1 \frac{\partial C}{\partial A_k} + l_2 \frac{\partial C}{\partial B_k} + \ldots + l_n \frac{\partial C}{\partial L_k}.$$

Znásobíme-li tyto rovnice, jak po sobě jdou, poměry differenciálními

$$\frac{\partial A}{\partial a_k}, \frac{\partial A}{\partial b_k}, \ldots, \frac{\partial A}{\partial l_k},$$

dále platí o těchto determinantech stupně druhého skládajících se ze subdeterminantů [15])

$$(X_1 Y_2) = \Delta (z_3 - z_4)$$
$$(Y_1 Z_2) = \Delta (x_3 - x_4)$$
$$(Z_1 X_2) = \Delta (y_3 - y_4),$$

z čehož jde, sečteme-li, uvedše napřed na druhou mocninu, pomocí vzorce (18)

$$(X_1 Y_2)^2 + (Y_1 Z_2)^2 + (Z_1 X_2)^2 = \Delta^2 l_{34}^2 ;$$

dosadíme-li tedy tento výraz do vzorce předešlého, obdržíme konečně

$$sin (P_1 P_2) = \frac{\Delta l_{34}}{M_1 M_2} \tag{21}$$

a podobně i ostatní až k poslednímu

$$sin (P_1 P_2) = \frac{\Delta l_{12}}{M_3 M_4}.$$

---

a sečteme-li na obou stranách, obdržíme, majíce zřetel k známým vzorcům

$$a_i \frac{\partial A}{\partial a_k} + b_i \frac{\partial A}{\partial b_k} + \ldots + l_i \frac{\partial A}{\partial l_k} = o,$$

$$a_k \frac{\partial A}{\partial a_k} + b_k \frac{\partial A}{\partial b_k} + \ldots + l_k \frac{\partial A}{\partial l_k} = A,$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_k} \frac{\partial B}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial A}{\partial b_k} \frac{\partial B}{\partial \beta_k} + \ldots + \frac{\partial A}{\partial l_k} \frac{\partial B}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial C}{\partial K_k} \tag{3}$$

Jestli pak ve zvláštním případě všeobecně

$$a = \alpha,\ b = \beta,\ c = \gamma,\ \text{tedy}\ A = B, \tag{4}$$

obdrží se konečně vzorec svrchu uvedenou poučku vyjádřující

$$\left(\frac{\partial A}{\partial a_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b_k}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial A}{\partial l_k}\right)^2 = \frac{\partial C}{\partial K_k}. \tag{5}$$

Jestli tedy na př. $A = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3$, bude

$$B_2 = a_2{}^2 + b_2{}^2 + c_2{}^2,$$
$$B_3 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = C_2$$
$$C_3 = a_3{}^2 + b_3{}^2 + c_3{}^2$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_1} = b_2 c_3 - b_3 c_2,\ \frac{\partial A}{\partial b_1} = c_2 a_3 - a_2 c_3,\ \frac{\partial A}{\partial c_1} = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

$$\frac{\partial C}{\partial A_1} = B_2 C_3 - B_3 C_2,$$

a tudíž podlé vzorce (5)

$$(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2) - (a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3)^2$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (b_2 c_3 - b_3 c_2)^2 + (c_2 a_3 - c_3 a_2)^2$$

[15]) ibid. pag. 41.

Abychom konečně ustanovili úhly, jež uzavírají jednotlivé hrany, požijme známých vzorců (17) a

$$2P = ab \sin\gamma,$$

načež obdržíme pro plochu P_1

$$\begin{aligned} 2P_1 &= l_{23}\, l_{34} \sin(2\,3\,4) \\ &= l_{34}\, l_{42} \sin(3\,4\,2) \\ &= l_{42}\, l_{23} \sin(4\,2\,3) = M_1, \end{aligned}$$

z čehož jde bezprostředně

$$\sin(2\,3\,4) = \frac{M_1}{l_{23}\, l_{34}} \text{ a t. d.}$$

Podobně se obdrží v ostatních plochách

$$\begin{aligned} \sin(3\,4\,1) &= \frac{M_2}{l_{34}\, l_{41}} \text{ a t. d.} \\ \sin(4\,1\,2) &= \frac{M_3}{l_{41}\, l_{12}} \text{ a t. d.} \\ \sin(1\,2\,3) &= \frac{M_4}{l_{12}\, l_{23}} \text{ a t. d.} \end{aligned} \tag{22}$$

Abychom konečně vyšetřili všechny poměry čtyrstěnu, určeného rovnicemi omezujících rovin

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 &= o, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 &= o, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 &= o, \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 &= o, \end{aligned} \tag{23}$$

zjednejme si především souřadnice vrcholů; obdržíme tu, spojujíce rovnice tyto po třech,

$$\begin{array}{ll} \text{z 2., 3. a 4.} & x_1 = \dfrac{A_1}{D_1}, \quad y_1 = \dfrac{B_1}{D_1}, \quad z_1 = \dfrac{C_1}{D_1}, \\[2ex] \text{z 3., 4., a 1.} & x_2 = \dfrac{A_2}{D_2}, \quad y_2 = \dfrac{B_2}{D_2}, \quad z_2 = \dfrac{C_2}{D_2}, \\[2ex] \text{z 4., 1. a 2.} & x_3 = \dfrac{A_3}{D_3}, \quad y_3 = \dfrac{B_3}{D_3}, \quad z_3 = \dfrac{C_3}{D_3}, \\[2ex] \text{z 1., 2. a 3.} & x_4 = \dfrac{A_4}{D_4}, \quad y_4 = \dfrac{B_4}{D_4}, \quad z_4 = \dfrac{C_4}{D_4}, \end{array} \tag{24}$$

značí-li A, B, C, D subdeterminanty patřící k prvkům determinantu

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Zavedeme-li hodnoty (24) do vzorce (15), obdržíme pak pro obsah čtyrstěnu T

$$6T = \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix};$$

jelikož ale prvky tohoto determinantu patří co subdeterminanty stupně prvního k determinantu (25), rovná se, jsouc stupně čtvrtého, třetí mocnině determinantu původního, z čehož jde, že obsah čtyrstěnu vyjadřuje vzorec jednoduchý

$$6T = \frac{\varDelta^3}{D_1 D_2 D_3 D_4}. \tag{26}$$

Jestli tu $\varDelta = o$, jest i $T = o$, z čehož patrno, že všechny čtyry roviny protínají se v jednom bodě a naopak, protínají-li se čtyry roviny v jednom bodě, jest i $T = o$.[16]),

Znajíce vzorec (26) ustanovíme snadno ploský obsah jednotlivých trojúhelníků čtyrstěn omezujících; jestiť především

$$3T = P_1 p_1,$$

značí-li P_1 ploský obsah trojúhelníku a p_1 příslušnou výšku neb délku kolmice s protějšího rohu na něj spuštěné; dále tu jest

$$p_1 = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}},$$

aneb zavedeme-li hodnoty ze soustavy (24) a položíme-li všeobecně

$$M_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2}, \tag{27}$$

co konečný vzorec pro délku kolmice p_1

$$p_1 = \frac{\varDelta}{D_1 M_1}.$$

[16]) ibid. pag. 32.

a podobně pro ostatní

$$p_k = \frac{\varDelta}{D_k M_k}. \tag{28}$$

Pomocí vzorce (26) a (28) obdrží se pak velmi snadno všeobecně

$$P_k = \frac{\varDelta^2 M_k D_k}{2 D_1 D_2 D_3 D_4}. \tag{29}$$

Jestli tedy čtyrstěn pravidelný, platí-li tedy podmínka

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4,$$

jest patrně i

$$D_1 M_1 = D_2 M_2 = D_3 M_3 = D_4 M_4 = K,$$

z čehož se dále poznává, že i

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{\varDelta}{K}.$$

Abychom určili úhel a_{pq}, jejž uzavírá rovina P_p s rovinou P_q, použijme známého vzorce

$$\cos a_{pq} = \frac{a_p a_q + b_p b_q + c_p c_q}{M_p M_q},$$

načež obdržíme snadno vzorec

$$\sin^2 a_{pq} = \frac{(a_p b_q)^2 + (b_p c_q)^2 + (c_p a_q)^2}{M_p{}^2 M_q{}^2}, \tag{30}$$

v jehož čitateli se vyskytují podřízené determinanty stupně druhého.

Chceme-li určiti délku jednotlivých hran, považujme ji jakožto vzdálenost dvou bodů v prostoru, načež obdržíme

$$h_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

aneb máme-li zřetel k vzorcům (24),

$$h_{12}^2 = \frac{(A_1 D_2)^2 + (B_1 D_2)^2 + (C_1 D_2)^2}{D_1{}^2 D_2{}^2};$$

použijeme-li dále známého vzorce

$$(a_1 b_2) \varDelta^{n-3} = (C_3 D_4 \ldots L_n)$$ [17],

povstane z něho pomocí vzorce (30) konečně

$$h_{12} = \varDelta \frac{M_3 M_4}{D_1 D_2} \sin a_{34}; \tag{31}$$

---

[17]) ibid. pag. 41.

podobně se vyjádří ostatní délky až na poslední

$$h_{34} = \Delta \frac{M_1 M_2}{D_3 D_4} \sin a_{12} .$$

Abychom konečně ustanovili úhly rovinné, použijme posledního vzorce ve spojení s (29); obdržímeť tu především

$$\begin{aligned} 2P_1 &= h_{23} h_{34} \sin(2\,3\,4) \\ &= h_{34} h_{42} \sin(3\,4\,2) \\ &= h_{42} h_{23} \sin(4\,2\,3) = \frac{\Delta^2 M_1}{D_2 D_3 D_4} \end{aligned}$$

a tudíž pomocí vzorce (29)

$$\left.\begin{aligned} \sin(2\,3\,4) &= \frac{D_3}{M_4 M_1 M_2 \sin a_{12} \sin a_{14}}, \\ \sin(3\,4\,1) &= \frac{D_4}{M_1 M_2 M_3 \sin a_{23} \sin a_{21}}, \\ \sin(4\,1\,2) &= \frac{D_1}{M_2 M_3 M_4 \sin a_{34} \sin a_{32}}, \\ \sin(1\,2\,3) &= \frac{D_2}{M_3 M_4 M_1 \sin a_{41} \sin a_{43}}, \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

z nichž se i ostatní sinusy výměnou dvou ukazovatelů snadno ustanoví.

Přímý důkaz průkladného vzorce Lagrange-ova.

(Podává dr. *F. J. Studnička.*)

Má-li se ustanoviti

$$y_n = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_{k-1} n^{k-1}$$

tak, aby pro k hodnot veličiny n, a sice pro

$$n = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$$

bylo

$$y_n = y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_k},$$

třeba jen vyloučiti k součinitelů

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$$

ze soustavy $k+1$ rovnice

$$
\begin{aligned}
y_n &= A_0 + A_1 n + \ldots + A_{k-1} n^{k-1}, \\
y_{\alpha,1} &= A_0 + A_1 \alpha_1 + \ldots + A_{k-1} \alpha_1^{k-1}, \\
&\;\;\vdots \\
y_{\alpha,k} &= A_0 + A_1 \alpha_k + \ldots + A_{k-1} \alpha_k^{k-1};
\end{aligned}
$$

výsledek, který tu obdržíme, bude patrně

$$
\begin{vmatrix}
y_n, & 1, & n, \ldots, & n^{k-1} \\
y_{\alpha,1}, & 1, & \alpha_1, \ldots, & \alpha_1^{k-1} \\
\vdots & & & \\
y_{\alpha k}, & 1, & \alpha_k, \ldots, & \alpha_k^{k-1}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Determinant tento možná ale rozložiti podlé prvků prvního sloupce, čímž se obdrží, označíme-li subdeterminanty, jak obyčejně, příslušnými písmenami velkými,

$$
y_n Y_n - y_{\alpha,1} Y_{\alpha,1} - y_{\alpha,2} Y_{\alpha,2} - \ldots - y_{\alpha,k} Y_{\alpha,k} = 0, \qquad (1)
$$

kdež o prvním subdeterminantu platí

$$
Y_n = \begin{vmatrix}
1, & \alpha_1, \ldots, & \alpha_1^{k-1} \\
1, & \alpha_2, \ldots, & \alpha_2^{k-1} \\
\vdots & & \\
1, & \alpha_k, \ldots, & \alpha_k^{k-1}
\end{vmatrix},
$$

o následujících pak

$$
Y_n = \Big/^{n=\alpha_1} Y_{\alpha,1} = \Big/^{n=\alpha_2} Y_{\alpha,2} = \ldots = \Big/^{n=\alpha_k} Y_{\alpha,k}.
$$

Řešíme-li tedy rovnici (1) podlé y_n, obdržíme snadno

$$
y_n = \sum_{i=1}^{k} y_{\alpha,i} \frac{Y_{\alpha,i}}{\Big/^{n=\alpha_i} Y_{\alpha,i}} \qquad (2)
$$

Abychom pak ustanovili tyto poměry subdeterminantů, použijme známé poučky,*) že

*) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 15.

$$Y_n = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \ldots (\alpha_1 - \alpha_k).$$
$$(\alpha_2 - \alpha_3) \ldots (\alpha_2 - \alpha_k).$$
$$\vdots$$
$$(\alpha_{k-1} - \alpha_k),$$

z čehož jde bezprostředně

$$Y_{\alpha,1} = (n - \alpha_2)(n - \alpha_3) \ldots (n - \alpha_k)$$
$$(\alpha_2 - \alpha_3) \ldots (\alpha_2 - \alpha_k).$$
$$\vdots$$
$$(\alpha_{k-1} - \alpha_k);$$

dělíme-li tedy tyto součiny, zkrátí se všichni činitelové až na první, čímž povstane

$$\frac{Y_{\alpha,1}}{Y_n} = \frac{(n - \alpha_2)(n - \alpha_3) \ldots (n - \alpha_k)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \ldots (\alpha_1 - \alpha_k)}. \tag{3}$$

A zcela podobným spůsobem určí se i ostatní hodnoty.

Zavedeme-li tedy tyto výrazy do vzorce (2), obdržíme konečně

$$\begin{aligned} y_n = {} & y_{\alpha,1} \frac{(n - \alpha_2)(n - \alpha_3) \ldots (n - \alpha_k)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \ldots (\alpha_1 - \alpha_k)} \\ & + y_{\alpha,2} \frac{(n - \alpha_1)(n - \alpha_3) \ldots (n - \alpha_k)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3) \ldots (\alpha_2 - \alpha_k)} \\ & + y_{\alpha,k} \frac{(n - \alpha_1)(n - \alpha_2) \ldots (n - \alpha_{k-1})}{(\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2) \ldots (\alpha_k - \alpha_{k-1})}, \end{aligned} \tag{4}$$

což jest Lagrange-ův známý vzorec průkladný.

Chceme-li kratším spůsobem jej vyjádřiti, položme

$$N_i = \frac{(n - \alpha_1)(n - \alpha_2)(n - \alpha_3) \ldots, (n - \alpha_4)}{(n - \alpha_i)}, \tag{5}$$

$$P_i = \Big/^{n=\alpha_i} N_i, \tag{6}$$

načež si zjednáme snadno především

$$\frac{Y_{\alpha,i}}{Y_n} = \frac{N}{P_i}$$

a dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce (2), konečně

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} y_{\alpha,i} \frac{N_i}{P_i}. \tag{7}$$

O nepřetržitém úrokování.

(Podává dr. *F. J. Studnička.*)

V našich učebních knihách algebraických vyvinuje se obyčejně vzorec

$$K_n = K_o \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \qquad (1)$$

podle něhož se vypočítává při *celoročním* zúročení K_n čili hodnota kapitálu K_o po n letech, uloženého na p ze sta.

Ze vzorce tohoto vyvádí se pak ostatní pravidla, platící při *polo-* a *čtvrtletním* jakož i *měsíčním* a *denním* zúročení; ale otázka, jak vypadá vzorec ten při nepřetržitém kapitalisování, nebéře se dále v úvahu, ač jest k ní jediný jen krok a jedině tento spůsob přirážeti k jistině úroky z úroků jest racionálním.

Za tou příčinou budiž zde krátce vyloženo, jak možná tuto mezeru vyplniti.

Rozdělíme-li čas jednoho roku na α dílů a přirážíme-li úroky od času α k α, povstane ze vzorce (1)

$$K_n = K_o \left(1 + \frac{p}{100\,\alpha}\right)^{\alpha n}, \qquad (2)$$

aneb položíme-li

$$\frac{p}{100\,\alpha} = \frac{q}{\alpha} = \frac{1}{\omega}, \text{ tedy } \alpha = q\omega,$$

$$K_n = K_o \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega \cdot qn}.$$

Při úrokování nepřetržitém jest pak

$$\lim \alpha = \infty, \text{ tedy i } \lim \omega = \infty$$

a za tou příčinou *)

$$\lim \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = e = 2{\cdot}71828\ldots;$$

pro tento případ obdrží se tedy ze vzorce (2)

$$K_n = K_o\, e^{qn} = K_o\, e^{\frac{np}{100}}. \qquad (3)$$

Poněvadž mocniny stálé veličiny e jsou od stotiny k stotině v tabulky již sestaveny, jest takovéto vypočítávání úroků z úroků nanejvýš snadné.

---

*) Odůvodnění tohoto vzorce nalezneš v *Skřivanově* spisu „Přednášky o algebraické analysi" pag. 76.

Abychom konečně poznali, jaké rozdíly tu může rozličný spůsob úročení spůsobiti, vypočítejme si hodnotu 1000 zl. po 10 letech, berouce 5 ze sta; obdržímeť při úročení

celoročním	. . . .	1628	zl.	89	kr.,
poloročním	. . . .	1638	„	62	„ ,
čtvrtletním	. . . .	1643	„	62	„ ,
měsíčním	. . . .	1647	„	1	„ ,
denním	. . . . .	1647	„	44	„ ,
nepřetržitém	. . .	1648	„	72	„ ,

z čehož zároveň jde na jevo, jak přibývá výnosu stále sice, ale vždy pomaleji, zmenšuje-li se doba úročení.

O síle elektromotorické.

(Podává *Josef Hervert.*)

Až podnes stojí ve vědě fysikální vedle sebe dvoje učení vykládající zjevy galvanické, anižby se bylo podařilo badatelům sebe důmyslnějšími theoretickými výzkumy a sebe rozmanitějšími pokusy zjednati jednomu neb druhému rozhodné nadvlády.

Jedno z nich, založené *Voltou*, a hájené hlavně *Fechnerem*, *Poggendorfem*, *Pfaffem*, *Ohmem*, *Kohlrauschem*, a j. tvrdí, že pouhým dotýkáním se dvou různých těles, zejména kovů, povstává galvanický proud, jelikož mechanická práce vykonaná při sbližování a vzdalování těles se mění v rovnomocný pohyb elektrický. Při sbližování těles přitahují se jich částice na vzájem, pohybují se a nabývají tím jisté rychlosti, která se při doteku ztrácí, takže zanikající živá síla pohybu se proměňuje v galvanický proud.

Naproti tomu učí druhá, lučebná theorie založená *Wollastonem* a zastávaná hlavně anglickými a francouzskými fysiky, *Parrotem*, *Faradayem*, *H. Davym*, *de la Rivem*, *Becquerelem* a jinými, že sice může dotekem nastati elektrické napětí, avšak nikoli trvalý, nýbrž toliko okamžitý proud, jelikož, když tělesa se dotkla a částice jich jsou v klidu, galvanický proud z ničehož povstati nemůže. Jestliže však tělesa na sebe lučebně působí, nastane mezi částicemi lučebné spojení, ale živá síla jich pohybů se mění v elektřinu, načež jiné částice se přitahují, jichžto živá síla opět v elektřinu přechází, takže tím spůsobem lučebná činnost stálým zdrojem galvanického proudu se stává.

Uprostřed takřka mezi tímto dvojím učením stojí theorie založená *Grotthusem* a *Schönbeinem*, kteřížto se domnívají, že pouze lučebná přítažlivost i beze všeho slučování a rozlučování galvanický proud spůsobiti může.

Tím ovšem sporné otázce záhady neubývá, nýbrž spíše se přimnožuje, když nové náhledy se tvoří, jako jsou ku př. prostředkovací názor *Gaugainův* [1]), jenž předpokládá, že v každém molekulu je jakési elektrické napětí, že však množství elektřiny je v rozličných molekulech rozdlíné, takže vzájemným se poutáním a uvolňováním nejen elektrické napětí, nýbrž i galvanický proud povstati může, a názor *Dopplerův* [2]), jenž hledí úkazy ty vysvětliti elektrickým obalem.

Netušeného objasnění dostalo se této otázce o původu síly elektromotorické tak zvaným pokusem *Peltierovým*, který se odchyluje od zákona tohoto: Prochází-li galvanický proud kovovým drátem, zahřívá se tento v přímém poměru s odporem a se čtvercem mocnosti proudu. Pozoroval ť *Peltier* r. 1834 [3]), že proud, procházeje dvěma spojenými kovy, na místě spájeném spůsobuje buď vyšší neb nižší teplotu, než v sousedních bodech kovů podlé toho, jakým směrem jde. Shledal, že se v řečeném místě snižuje teplota, jde-li positivný proud od vizmutu k antimonu, při opačném směru zvyšuje a sice, že pro oba uvedené kovy je ta změna teploty poměrně největší.

Totéž potvrdil i *Moser* svými pokusy [4]).

Peltier domníval se, že se zvýšuje teplota, jde-li proud od špatného vodiče k lepšímu; avšak *Becquerel* [5]) dokázal, že tomu není tak, jelikož se i opačné případy pozorují a objevil

---

[1]) J. M. *Gaugain*: „Sur l'origine unique des forces électromotorice." Ann. de chem. VI. 41.

[2]) *Doppler*: Wien. Denkschr. 2. 1.

[3]) *Peltier*: „Ann. de chim. et de phys. T. 56 p. 371.

[4]) *Moser*: „Repertorium der Physik." Bd. I. p. 349.

[5]) E. *Becquerel*: Ann. de chimie et de phys. T. 20. p. 55.

zároveň, že se též odpor směrem proudu nemění vyjma nepatrné rozdíly, které pocházejí od změny teploty na místě spájeném. Za to však se přesvědčil, že se spájené místo ochlazuje, má-li galvanický proud týž směr jako thermoelektrický, vznikající záhřevem onoho místa, načež *Quintus Icilius* [1]) a *Frankenheim* [2]) rozličnými cestami ukázali, že změna teploty spájeného místa v určitých ovšem mezích, v kterých pokusy ty konali, vždy je poměrna mocnosti proudu, řídíc se tudíž jiným zákonem, než obecný záhřev kovů, který je poměrným čtverci síly proudu.

R. Clausius první pokusil se o to [3]) a po něm *E. Edlund* [4]), aby ukázali, že se nechá tento Peltierův výjev vysvětliti elektromotorickou silou účinnou při doteku dvou různých kovů pomocí všeobecných vět, na kterých spočívá mechanická theorie tepla a se stanoviska tohoto jsou pokusy ty velmi důležity a zajímavy v otázce o původu elektromotorické síly.

Neomylnými pokusy je totiž zjištěno, že na místě spájeném je teplota buď vyšší neb nižší, než v místech sousedných, ač z pokusů *Lenzových* nezvratně vyplývá, že se na místě tom proudem totéž množství tepla vzbuzuje, jako na místech ostatních. Avšak toto teplo, které na místě spájeném mizí, nemůže býti ztraceno, nýbrž musí vykonati jakousi rovnomocnou vnější aneb vnitřní práci. Otázka jest, jaká by mohla býti tato mechanická práce. Patrně jen změna molekulární povahy těles se dotýkajících. Avšak zřejmé pokusy dosvědčují, že se po jistou ovšem mez žádná molekulární změna nevyskytá. Neboť se pozorovalo, že v prstenu spájeném z rozličných kovů se udržuje stálý thermoelektrický proud, dokud se na místech spájených týž rozdíl teplot udržuje. To by však nebylo možno při jakési změně molekulární, poněvadž je známo, že se jí mění elektromotorická síla, jako na př. napínáním, stlačováním a podobně. Nezbývá tudíž, než míti za to, že toto pohlcené teplo přechází v jinou formu pohybu, totiž elektřinu, čili že tento pohyb elek-

[1]) Qu. *Icilius*: Pogg. Ann. Bd. 89 p. 377.
[2]) *Frankenheim*: ibid. Bd. 91. p. 161.
[3]) R. *Clausius*: ibid. Bd. 90. p. 513. a ibid. Bd. 139. p. 230.
[4]) Oefversigt af K. Vetenskaps-Akademiens Förhandl. för 1869 p. 467. Pogg. Ann. Bd. 137. p. 474.

trický je mechanickou rovnomocninou zanikajícího tepla a síla, která tuto přeměnu spůsobuje, je právě elektromotorická síla.

A naopak, když se na místě spájeném budí větší teplo, než v místech ostatních, mění se elektřina v rovnomocný pohyb tepelný a sice jest to opět síla elektromotorická, která tuto přeměnu prostředkuje. Neboť galvanickým proudem se zahřívá drát i na místě spájeném, tím se budí thermoelektrický proud, kterýžto opět spůsobuje v drátě rovnomocný záhřev. Je-li tudíž, jak pokus Peltierův zřejmě dokazuje, teplo původem elektromotorické síly, může dotekem vzbuditi se trvalý galvanický proud. Kdyby ovšem na místě doteku žádného tepla nebylo, nebyl by ani žádný galvanický proud možný, poněvadž by takřka scházel zdroj, z něhož by elektřina vzniknouti mohla.

A tak se podobá elektromotorická síla soubudivé, kterážto proměňuje mechanickou práci v rovnomocný proud a záhřev. Jestliže se totiž spojitý vodič blíží galvanickému proudu a vzdaluje, povstává ve vodiči tom proud přeměnou mechanické práce vykonané při sbližování a vzdalování v elektřinu a tento proud zahřívá zase drát, čímž vzniká teplo rovnomocné oné mechanické práci.

Zahříváme-li spájené místo dvou různých kovů, povstává thermoelektrický proud, kterýžto zahřívá kov a tím vzbuzuje teplo, které musí býti rovnomocným s teplem spotřebovaným k vzbuzení thermoelektrického proudu. Totéž lze pozorovati i u článků hydroelektrických. *Favre* [1]) a *Marié Davy* [2]) ukázali, že množství tepla, které se vyvinuje v článku spojeném drátem menšího neb většího odporu, vždy se rovná onomu teplu, které se vzbuzuje lučebnými proměnami, ať již proud jde neb nejde.

Máme-li tudíž libovolný elektromotor, jehož poly spojeny jsou drátem a je-li E elektromotorická síla a R odpor v elektromotoru a ve vodiči, je veškeré množství tepla proudem vzbuzeného

$$Q = a\frac{E^2}{R^2}.R = aE.\frac{E}{R} = aEJ\,,$$

značí-li a jistou stálou veličinu a J mocnost proudu, jelikož je dle zákona *Ohmova* $J = \frac{E}{R}$ a teplo vzbuzené poměrno odporu

[1]) *Favre*: Ann. de chim. et de phys. T. 40. p. 293.

[2]) *Marié-Davy*: „De la mosure par la pile des quantités spécifiques de chaleur.“ Compt. Rend. 55. p. 1103.

a čtverci mocnosti proudu. Avšak stejné množství tepla musí se spotřebovati k přeměně v elektřinu, nechť je zdroj jeho lučebná proměna aneb plamen aneb se odjímá elektromotoru samému.

Máme-li dva elektromotory, které dávají proud téhož směru a jsou-li E a E_1 elektromotorické síly a R_1 veškerý odpor, je veškeré množství tepla vzbuzeného:

$$Q_1 = a\,\frac{(E+E_1)^2}{R_1^{\,2}}\,R_1 = a\,(E+E_1)\,J_1.$$

Zde se tudíž spotřebuje v každém elektromotoru jisté množství tepla k přeměně v elektřinu a protož snižuje teplota na místě spájeném.

Působí-li elektromotory ve směru opačném a je-li $E > E_1$, obdržíme co výraz vzbuzeného tepla:

$$Q_2 = a\,(E - E_1)\,J_2\,,$$

kdežto proud má směr první síly. Stejného množství tepla však potřebí jest k vzbuzení proudu. Než v prvním elektromotoru se za tím účelem spotřebuje teplo:

$$Q' = a\,E\,J_2 > Q_2$$

a tudíž musí rozdíl $Q' - Q_2 = a\,E_1\,J_2$ v druhém elektromotoru se vzbuditi, z čehož bezprostředně vyplývá zákon Peltierova pokusu: „Prochází-li galvanický proud elektromotorem týmž směrem, jako proud elektromotorem vzbuzený, spotřebuje se teplo; prochází-li směrem opačným, vzniká teplo, které je v obou případech poměrno mocnosti proudu a elektromotorické síle."

Konají-li se tudíž pokusy s týmiž dvěma kovy, avšak při rozličné mocnosti proudu, musí rozdíly teplot na spájeném místě býti poměrny mocnosti proudu, jak již pokusy Iciliovými a Frankenheimovými je dotvrzeno.

Zkouší-li se však rozličné kovy při téže mocnosti proudu, lze kovy ty seřaditi dle jich elektromotorických sil a obdržeti tím i řadu elektrického napětí, která však bude, jak již z předu patrno, lišiti se od řady, v které by kovy dle rozdílů teplot následovaly, poněvadž tyto rozdíly závisí též na měrném teple, větším neb menším ochlazování atd. Pročež jest tento rozdíl teplot největší pro vismut a antimon, ač jeví jen malou elektromotorickou sílu, jelikož má vismut nejmenší měrné teplo a jemu nejblíže stojí antimon.

(Pokračování.)

O znamenání metrických měr a váh.

(Píše prof. *Josef Lošťák.*)

Sotva dostalo se nám vyhlídky, že zavedením metrické soustavy zbaveni budeme dosavadního zmatku s nynějšími měrami a váhami, již hrozí nám druhý zmatek, totiž jakým spůsobem by se znamenati měly metrické míry a váhy. Naznačování toto má zajisté býti stručné, snadné a určité. Avšak jeden spisovatel radí tak, druhý zase jinak, a c. k. normální komise cimentovací ve Vídni nařídila nedávno tohoto znamenání zvláštní spůsob, jenž vytknutým požadavkům sotva vyhovuje. Jest velmi žádoucno, abychom se usjednotili o této věci; protož dovoluji si, podati tuto návrh na znamenání metrických měr a váh, jenž se v praxi snadným a prospěšným osvědčil; má-li kdo lepší návrh, rač jej zde taktéž podati. —

Jednotky metrických měr a váh, totiž *metr*, *ar*, *litr*, *ster* a *gram* znamenejme malými začátečnými písmeny: *m.*, *a.*, *l.*, *s.*, *g.*, což jest nejjednodušší a nejpřiměřenější; jest tedy na př. 7 *m.* tolik jako 7 metrů, 4 *l.* = 4 litry atd. Při násobkách oněch jednotek předkládají se řecká jména číselná: *Deka*, *Hekto*, *Kilo* a *Myria*, skracujme je taktéž začátečnými písmeny, abychom ale hned na vyšší, tedy *větší* oddíly upozornili, *velkými* začátečnými písmeny: *D.*, *H.*, *K.*, *M.*; jest tedy: 5 *Dm.* = 5 Dekametrů, 7 *Ha.* = 6 Hektarů, 7 *Hl.* = 7 Hektolitrů, 4 *Ks.* = 4 Kilostery, 3 *Dg.* = 3 Dekagramy, 8 *Mm.* = 8 Myriametrů (čili 8 *M*etrických *m*il), atd.

Při nižších dílech jednotek předkládají se číselná jmena latinská: *deci*, *centi*, *milli*; skracujme je rovněž začátečnými písmeny, ale jelikož se zde jedná o *menší* oddíly jednotek, *malými* začátečnými písmeny: *d*, *c*, *m*; jest tedy na příklad 2 *dm.* = 2 decimetry, 3 *ca.* = 3 centiary, 4 *ml.* = 4 millilitry, 5 *cg.* = centigramů, 6 *mm.* = 6 millimetrů atd. -- Zmatek takto povstati nemůže, a velká písmena se od malých valně liší jak v písmu tak v tisku.

Při měrách plochového objemu upotřebuje se všeobecně znaménka □; dle výše udaného znamení jest tedy 2 □dm. = 2 čtvercové decimetry, 15 □ cm. = 15 čtvercových centimetrů, 20 □ Km. = 20 čtvercových Kilometrů a podobně. — Rovněž záhodno by bylo, abychom též pro míry objemu krychlového nějaké zvláštní znaménko měli; zde i onde nacházíme sice v rukopisech čtverec přetrhnutý středem dvěma přímkami, jež jsou rovnoběžné se stranami čtverce, aneb čtverec s oběma úhlopříčnami; ale ani toto ani ono znaménko nevede nás ku představě krychle, což zde jedině účelem jest. Snadně však zobrazíme krychli jednoduchým půdorysem a nárysem jejím, kteréžto snadně obdržíme, když obdélník, jehož výška dvakráte tak dlouhá jest jako základna, přetrhneme středem přímkou, která jest rovnoběžná se základnou.

Úlohy.

I. Z mathematiky.

Řešení úlohy 3.

(Podává *V. Jaeger*, technik.)

Předložená řada jest jen zvláštní případ řady

$$S_k = a + 2aq + 3aq^2 + \ldots + kaq^{k-1}.$$

Patrně jest

$$S_k(1-q) = a + aq + \ldots + aq^{k-1} - kaq^k$$

$$= \frac{a(1-q^k)}{1-q} - kaq^k,$$

tedy

$$S_k = a\frac{1-(1+k)q^k + kq^{k+1}}{(1-q)^2}.$$

Pro $a = q = \frac{1}{2}$, $k = \infty$ vyplývá

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots \textit{in inf.} = 2.$$

Řešení úlohy 16.

(Podává *K. Brož*, filosof.)

Jsou-li x, y, z neznámé strany trojúhelníku, pak máme podle úlohy

$$x + y + z = \frac{2p}{\varrho}$$

$$xyz = 4pr$$

$$p^2 = \frac{p}{\varrho}\left(\frac{p}{\varrho} - x\right)\left(\frac{p}{\varrho} - y\right)\left(\frac{p}{\varrho} - z\right)$$

Z poslední rovnice vyplývá v spojení s prvními dvěma

$$xy + xz + yz = \varrho^2 + 4r\varrho + \frac{p^2}{\varrho^2}.$$

Hledané strany jsou tedy kořeny kubické rovnice

$$x^3 - \frac{2p}{\varrho} x^2 + \left(\varrho^2 + 4r\varrho + \frac{p^2}{\varrho^2}\right) x - 4pr = 0.$$

Pro zvláštní v úloze vytknutý případ máme rovnici

$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$$

s kořeny 3, 4, 5.

(Správné rozluštění zaslal též *T. Havlíček*, žák VIII. tř. č. gymnasia v Budějovicích.)

Řešení úlohy 17.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. tř. č. gym. v Budějovicích.)

Případ α.

Jsou-li x, y, z, u neznámé strany čtyrúhelníku, máme podle úlohy

$$xz = yu = a \tag{1}$$
$$x + y + z + u = b \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = c \tag{3}$$

z (1) a (3) jde

$$(x+z)^2 + (y+u)^2 = c + 4a \tag{4}$$

z této rovnice a z (2) pak

$$\left.\begin{aligned} x + z &= \frac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{8a - b^2 + 2c}\right) = f \\ y + u &= \frac{1}{2}\left(b \mp \sqrt{8a - b^2 + 2c}\right) = h \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

konečně z (5) a z (1)

$$x = \frac{1}{2}\left(f \pm \sqrt{f^2 - 4a}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(h \pm \sqrt{h^2 - 4a}\right),$$

$$z = \frac{1}{2}\left(h \mp \sqrt{f^2 - 4a}\right), \quad u = \frac{1}{2}\left(h \mp \sqrt{h^2 - 4a}\right).$$

Případ β.

V tomto případě máme výminečné rovnice

$$xz = yu = a \tag{1}$$
$$x + y + z + u = b \tag{2}$$
$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = d \tag{3}$$

Přičteme-li k (3) rovnici

$$3xz(x+z)+3yu(y+u)=3ab,$$

obdržíme

$$(y+z)^3+(y+u)^3=3ab+d \tag{4}$$

Z této rovnice a z (2) vyplývá konečně

$$x+z=\frac{1}{2}\left(b\pm\sqrt{\frac{12ab-b^3+4d}{3b}}\right)=f,$$

$$y+u=\frac{1}{2}\left(b\mp\sqrt{\frac{12ab-b^3+4d}{3b}}\right)=h.$$

Ostatní jako v případě α.

Řešení úlohy 21.

(Podává *B. Sixta*, technik.)

Majíce integrovati rovnici

$$y''+4xy'+(1+4x^2)y=0, \tag{1}$$

položme

$$y=e^z, \tag{2}$$

čímž přejde rovnice v

$$z''+(z'+2x)^2+1=0;$$

tato nabude substitucí

$$t=z'+2x \tag{3}$$

tvaru

$$t'+t^2-1=0,$$

z kteréž integrací jde

$$x=\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+t}{1+t}+A \tag{4}$$

Z rovnin (3) a (4) jde vyloučením proměnné t

$$z''=\frac{e^{2(x-A)}-1}{e^{2(x-A)}+1}-2x,$$

což integrováno dle x dává

$$z=B-x^2-x+l(e^{2(x-A)}+1).$$

Dle (2) jest tedy obecný integrál rovnice dané

$$y=C_1\,e^{-x(x+1)}+C_2\,e^{-x(x-1)}.$$

Řešení úlohy 22.

(Podává *J. Sallabašev*, žák VI. tř. gymn. malostranského.)

Aby mohla hledaná 4 závaží x, y, z a u vyhověti v úloze udané podmínce, musí se vážiti i differencemi závaží a musí každé z nich býti o 1 větší nežli 2násobný součet jemu předcházejících závaží.

Bude tedy

$$\begin{aligned} x &= 2.0 + 1 = 1 \\ y &= 2x + 1 = 3 \\ z &= 2(x+y) + 1 = 9 \\ u &= 2(x+y+z) + 1 = 27. \end{aligned}$$

(Správné řešení zaslali též *V. Jaeger*, technik, *F. Štejnar*, technik, *A. Sucharda*, technik, *J. Kroutil*, filosof.)

Poznámka.

Jiným spůsobem řešil úlohu tuto *Brunet*, člen francouzského spolku mathematického, čímž zároveň podán důkaz, že i ve Francii si všímají našeho časopisu. Píšeť takto:

Supposons qu' avec un certain nombre de poids nous soyons arrivés à peser de 1 à N, et cherchons, avec un poids de plus, à peser jusqu' à un poids supérieur N' que nous allons déterminer. On voit aisément que le nouveau poids à prendre doit être $2N+1$, car en retranchant toutes les pesées déja obtenues et qui s'échelonnent de 1 à N nous obtiendrons toutes les pesées échelonnées de N à $2N+1$. Si maintenant au nouveau poids $2N+1$ nous ajoutons toutes les pesées obtenues précédemment, nous pourrons peser jusqu' à $3N+1 = N'$. Prenons encore un poids de plus: il vaudra

$$2N' + 1 = 6N + 3 = 3(2N+1).$$

Ainsi chaque nouveau poids que nous prendrons pour répondre à la question sera le *triple* du précédent. Les poids successifs à prendre forment donc une progression géométrique dont la raison est 3; — et comme le poids 1 suffit pour peser 1, le premier terme de la progression est 1, de telle sorte que la série des poids à prendre est celle des puissances de 3.

Pour le problème particulier du Nr. 22, les 4 poids demandés sont

$$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,$$
$$1,\ 3,\ 9,\ 27,$$

qui permettent bien en effet de faire toutes les pesées de 1 à 40.

Řešení úlohy 23.

(Podává *F. Štejnar*, technik.)

Hledané číslo jeviti se bude v tvaru

$$u = 105n + \alpha a + \beta b,$$

v němž znamená α číslo, obsahující činitele 5 a 7 a dávající zbytek 1, byvši 3 děleno, tedy 70, β součinitele dělitelného 3, který dělen 5 a 7 poskytuje zbytek 1, tedy 36. Hledané číslo jest tedy

$$u = 105n + 70a + 36b.$$

(Správné řešení zaslali též *J. Kroutil*, filosof, *J. Kašpr*, *K. Trubáček*, filolog, *A. Sucharda*, technik.)

Řešení úlohy 24.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

Je-li a strana 7miúhelníka, r poloměr kruhu opsaného, jest hledaný poměr

$$x = \frac{a}{r} \text{ a } \sin\frac{\pi}{7} = \frac{x}{2},\ \cos^2\frac{\pi}{7} = 1 - \frac{x^2}{4}.$$

Vložíme-li tyto hodnoty do známé rovnice

$$\sin 7\alpha = 7\sin\alpha\cos^6\alpha - 35\sin^3\alpha\cos^4\alpha + 21\sin^5\alpha\cos^2\alpha - \sin^7\alpha$$

berouce $\alpha = \frac{\pi}{7}$, obdržíme po příslušné redukci

$$x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0,$$

kteroužto rovnici dle methody Lagrange-ovy řešíce obdržíme

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}$$

Řešení úlohy 25.

(Podává *K. Brož*, filosof.)

Volíme-li jeden z pevných vrcholů za počátek souřadnic, přímku spojující pevné vrcholy za osu x a probíhá-li třetí vrchol přímku

$$\eta = a\xi + b, \tag{1}$$

pak jsou souřadnice těžiska trojúhelníku

$$x = \frac{1}{3}(\xi + c),\ y = \frac{1}{3}\eta\,, \tag{2a}$$

souřadnice průsečíku výšek

$$x = \xi\,,\ y = \frac{\xi(c-\xi)}{\eta}\,, \tag{2b}$$

v čemž značí c úsečku druhého vrcholu pevného.

Vyloučením veličin ξ a η z rovnic (1) a (2) obdržíme

$$y = ax + \frac{b - ac}{3}$$

a

$$x^2 + axy - cx + by = 0$$

jakožto rovnice hledaných geometrických míst.

Poslední rovnice značí všeobecně hyperbolu, procházející oběma pevnými vrcholy.

(Správné řešení zaslali též *F. Štejnar*, technik, *J. Kašpr.*)

Řešení úlohy 26.

(Podává *K. Brož*, filosof.)

Probíhá-li třetí vrchol kružnici

$$(\xi - p)^2 + (\eta - q)^2 = r^2,$$

pak obdržíme, platí-li označení jako v úloze 25, co rovnice dráhy těžiska a průsečíku výšek

$$\left(x - \frac{c+p}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{q}{3}\right)^2 = \frac{r^2}{9}\,.$$

a

$$y^2\left[(x-p)^2 - r^2\right] + \left[x(c-x) - qy\right]^2 = 0\,.$$

(Správné řešení zaslal též *J. Kašpr.*)

Řešení úlohy 27.

(Podává *J. Kroutil*, filosof.)

Poněvadž $l(\alpha + \beta e^x) = l[e^x(\alpha e^{-x} + \beta)] = x + l(\alpha e^{-x} + \beta)$ může se předložený výraz psáti ve formě

$$\int^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}\, l(\alpha e^{-x} + \beta)}{\frac{a}{x^2} + b} = \frac{1}{b}$$

(Správné řešení zaslali též *K. Brož*, filosof, *V. Zelený*. žák VI. třídy r. gymn. malostr., *A. Lhota*, žák VII. třídy real. gymnasia Maade-a.)

Řešení úlohy 28.

(Podává *B. Sixta*, technik.)

Differencujeme-li řadu

$$y = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{8!} + \qquad (1)$$

dvakráte, obdržíme

$$y' = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} +, \qquad (2)$$

$$y'' = \frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \qquad (3)$$

a sečtením

$$y'' + y' + y = ex$$

nebo

$$y''' - y = 0,$$

kteráž rovnice má integrál formy

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x}, \qquad (4)$$

kde

$$\alpha = 1, \beta = \frac{1}{5}(-1 + i\sqrt{3}), \quad \gamma = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

Integrační stálé A, B, C ustanovíme z rovnic

$$y' = A\alpha e^{\alpha x} + B\beta e^{\beta x} + C\gamma e^{\gamma x},$$
$$y'' = A\alpha^2 e^{\alpha x} + B\beta^2 e^{\beta x} + C\gamma^2 e^{\gamma x},$$

srovnáme-li je a rovnice (4), s (2), (3), (1) a položíme-li zároveň $x = 0$.

Bude pak

$$A + B\beta + C\gamma = 0.$$
$$A + B\gamma + B\beta = 0,$$
$$A + B \;\; + C \;\; = 1,$$

z čehož

$$A = B = C = \frac{1}{3}.$$

Vložíme-li tyto hodnoty do rovnic (1), (2), (3), obdržíme po náležitém upravení

$$y = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos x\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$y' = \frac{1}{3}\left[e^x - 2e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$y'' = \frac{1}{3}\left[e^x - 2e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

čímž součet řad (1), (2) a (3) jest nalezen.

Řešení úlohy 30.

(Podává *B. Sixta*, technik.)

Vyjádříme-li danou podmínku analyticky, bude, jelikož

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \text{ a } r_n = \frac{r^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$rr'' - r'^2 = 0.$$

Integrál této rovnice jest

$$r = a + e^{b\varphi}$$

z čehož viděti, že křivka hledaná jest obecně exponentiální spirála, ve zvláštním případě kruh.

Úloha 31.

Jakým spůsobem amortisuje se při nějakém akciovém podniku během desíti let v poloročních lhůtách 100 akcií po 200 zl. při 5% úročení.

Úloha 32.

Má se řešiti rovnice

$$tg\, 2x + tg\, 3x = 3 tg\, x\ .$$

Úloha 33.

Má se určiti obsah čtyrstěnu omezeného rovinami, jejichž rovnice jsou

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4 &= 0, \\ 2x - 3y + 4z - 1 &= 0, \\ 3x + 4y - z - 2 &= 0, \\ 4x - y - 2z - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Úloha 34.

V řadu postupující podle mocnin proměnné x má se vyvinouti

$$[l(x + \sqrt{1 + x^2})]^2.$$

Úloha 35.

Má se určiti hodnota integrálu omezeného

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \, . \, l \, \frac{5+4\sin x}{5-4\sin x} dx .$$

II. Z fysiky.

Řešení úlohy 9.

(Podává *A. Strnad,* technik.)

Jelikož hledané těžisko na ose x se nalézati bude, stačí k určení jeho úsečka ξ. Značí-li P povrch plochy, bude

$$\xi = \frac{\int x \, dP}{\int dP} = \frac{\int x y \sqrt{1+y'^2} dx}{\int y \sqrt{1+y'^2} dx},$$

ovšem v příslušných mezích.

Zavedením proměnné ω obdržíme

$$\xi = \frac{2}{3} a \frac{\int_0^{\pi} (\omega + \sin\omega) \, d \sin^3 \frac{\omega}{2}}{\int_0^{\pi} (\omega + \sin\omega) \, d \sin \frac{\omega}{2}},$$

tedy $\xi = \frac{2}{15} a \frac{15\pi - 8}{3\pi - 4}$.

Řešení úlohy 11.

(Podává *F. Podhajský,* technik.)

Volíme-li osu kolmou za osu y, dají se síly na hmotný bod působící vyjádřiti rovnicemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\omega^2}{x}, \quad \frac{dy^2}{dt^2} = -g,$$

z nichž vyplývá

$$\frac{2\,dx\,d^2x + 2\,dy\,d^2y}{dt^2} = 2\omega^2 \frac{dx}{x} - 2g\,dy$$

a integrací se obdrží

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\omega^2 lx - 2gy + a\ .$$

Poněvadž však $\frac{ds}{dt}$ značí rychlost bodu v směru tečny, tato však má býti stálou veličinou v, tož následuje co rovnice hledané křivky

$$v^2 = 2\omega^2 lx - 2gy + a$$

nebo

$$y = \frac{\omega^2}{g} lx + A\ .$$

Řešení úlohy 17.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. třídy česk. gymnasia v Budějovicích.)

Je-li rychlost zvuku 1050′, pak se mají k sobě výšky tonů píšťaly parní a ozvěny jako 989 k 1050.

Řešení úlohy 19.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. třídy česk. gymnasia v Budějovicích.)

Poměr odporu galvanického řetězu k jednotce drátu obnáší 12·949 a síla elektromotorická 5·166 k, značí-li k koeficienta boussoly.

Řešení úlohy 21.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. třídy česk. gymnasia v Budějovicích.)

Jelikož poměr hmotnosti Jupitera a země jest 338, poměr poloměrů obou na rovníku 11·66, na točně 10·88, váží libra železa 2·49 liber na rovníku, 2·86 na točně Jupiterově.

Řešení úlohy 22.

(Podává *A. Sucharda*, technik.)

Zinkový povlak musí 0·127055^m tlustý býti.

Řešení úlohy 23.

(Podává *J. Sallabašev*, žák VI. třídy real. gymnasia malostranského.)

Rozdělme stranu AB trojúhelníku ABC v bodu D tak, aby $AD : DB = q : p$ a přímku CD v bodu O tak, aby $CO : OD = (p + q) : r$: Bod O jest bod hledaný.

(Správné řešení podal též *A. Wolf*, žák VII. třídy česk. gymnasia v Budějovicích.)

Řešení úlohy 24.

(Podává *J Kašpr.*)

Vrhne-li se hmotný bod v úhlu α s rychlostí v, dosáhne výšky $\frac{v^2}{2g} sin^2\alpha$ a vrátí se ve vzdálenosti $\frac{v^2}{g} sin\, 2\alpha$ do původního horizontu. Plocha paraboly dráhy jeho obnáší tedy $\frac{v^4}{3g^2} sin^2\alpha\, sin^2\alpha$, který výraz, jak differencováním snadno se dokáže, má největší hodnotu pro $\alpha = 60^0$,

(Správné řešení zaslali též *K. Brož*, filosof, *J. Kroutil*, filosof.)

Řešení úlohy 25.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

Je-li r poloměrem kružnice, x a y souřadnice libovolného bodu na ní, p průřez, T napnutí v tomto bodu, ϱ váha jednotky objemové a a pak libovolná constanta, platí rovnice

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$T\frac{dx}{ds} = \varrho a$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = \varrho p ds,$$

z nichž obdržíme:

$$p = a\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds} = a\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{ar}{y^2} = \frac{p_0}{y^2}.$$

Jest tedy průřez v obráceném poměru se čtvercem pořadnice.

Řešení úlohy 26.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

Na libovolný ve směru svislém nad středem přítažlivosti ve vzdálenosti x položený hmotný bod m působí síla

$$P = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{P_1}{x^3},$$

značí-li P_1 sílu ve vzdálenosti $= 1$ působící.

Integrací obdržíme pak

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{a}\frac{P_1}{m} \cdot \frac{a^2 - x^2}{x}.$$

z čehož

$$t = a\sqrt{\frac{m}{P_1}}\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2\sqrt{\frac{m}{P_1}}$$

Úloha 28.

Roku 1736 pozoroval *Bouguer* kyvadlem, že počet kyvů obnáší za 24 hodin na břehu mořském 98770; na hoře Pichincha jen 98720; jak se mají k sobě g obou míst a jak by se musilo kyvadlo zkrátiti neb prodloužiti, kdyby měl býti počet kyvů na hoře neb dole stejně velkým.

Úloha 29.

Má se určiti těžisko tělesa povstávajícího otočením plochy dvěma parabolám

$$y^2 = 2p\,x, \; y^2 = 2q(a - x)$$

společné kolem osy úseček.

Úloha 30.

Jak se mají k sobě rychlosti, jimiž třeba těleso nějaké přímo vrhnouti, aby doletělo se země na měsíc, s měsíce na slunce a se slunce na zemi, stojí-li měsíc v kvadratuře a v prostřední vzdálenosti od země taktéž v prostřední vzdálenosti od slunce se nacházející.

Úloha 31.

Srazí-li se dvě pružné a stejně rychle proti sobě se pohybující koule, jaký musí býti poměr jejich hmot, aby jedna se zarazila a zůstala stát.

Určování nekonečně vzdálených prvků prostorových útvarů geometrických.

(Podává prof. dr. *Emil Weyr.*)

1. Nekonečně vzdálená rovina prostoru.

Předpokládáme-li pevnou soustavu souřadnic rovnoběžných, zní rovnice roviny:

$$ax + by + cz + d = 0$$

a přejdeme-li k souřadnicím Hesse-ovým*)

$$ax + by + cz + dv = 0,$$

což jest všeobecná rovnice roviny pro souřadnice stejnoměrné. Jsou-li pak x, y, z, v poslední rovnici vyhovující hodnoty proměnných, t. j. stejnoměrné souřadnice bodu příslušného rovině touto rovnicí určené, budou (viz čl. 2. uvedeného pojednání) poměry $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}$ souřadnice rovnoběžné téhož bodu.

Co zvláštní případy rovnice roviny uvádíme:

a) $$x = 0.$$

Body této roviny mají co souřadnice rovnoběžné hodnoty $\frac{0}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}$ t. j. za úsečku x hodnotu 0, z čehož plyne, že přísluší rovině (yz). Jest tudíž $x = 0$ rovnice roviny (yz).

b) $$y = 0$$

Body této roviny mají rovnoběžné souřadnice $\frac{x}{v}, \frac{0}{v}, \frac{z}{v}$ jest tudíž pro veškeré body pořadnice $y = 0$, z čehož jde, že rovnice $y = 0$ přísluší rovině (xz).

---

*) Viz ročník I.: Určování nekonečně vzdálených prvků útvarů geometrických str. 161.

c) $$z = 0$$
přísluší rovině (xy) neb rovnoběžné souřadnice bodů této roviny jsou $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{0}{v}$ t. j. třetí z nich jest vždy 0.

d) $$v = 0$$
jest rovnice roviny [která z všeobecné povstane tím, že $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$], jejíž body mají za souřadnice rovnoběžné hodnoty $\frac{x}{0}, \frac{y}{0}, \frac{z}{0}$ t. j. ∞, ∞, ∞, tak že veškeré body této roviny jsou v nekonečné vzdálenosti.

Zajisté sobě musíme pak představovati, že rovina $v = 0$ celá v nekonečné vzdálenosti se nalezá. Naopak vyhovuje každý nekonečně vzdálený bod t. j. bod rovnoběžných souřadnic ∞, ∞, ∞ podmínce $v = 0$, tak že si každý nekonečně vzdálený bod (k vůli důslednosti) co bod roviny nekonečně vzdálené $v = 0$ představovati musíme.

Na základě těchto úvah přicházíme k důležité větě:

„Veškeré nekonečně vzdálené body prostoru vyplňují nekonečně vzdálenou rovinu, jejíž rovnice zní $v = 0$.“

Tuto pozoruhodnou rovinu nazýváme *„nekonečně vzdálenou rovinu.“*

Stane-li se, že rovnice roviny pro souřadnice rovnoběžné na se vezme tvar
$$d = 0,$$
kde d jest hodnota stálá, pak rovina příslušná jest rovinou nekonečně vzdálenou.

Neb úseky, které rovina:
$$ax + by + cz + d = 0$$
na osách tvoří, jsou, jak známo:
$$-\frac{d}{a}, -\frac{d}{b}, -\frac{d}{c}$$
a stanou se nekonečně velkými, je-li $a = b = c = 0$. Pro ten případ pak rovina sama jest nekonečně vzdálená a její rovnice zní $d = 0$. (Stálá d může býti též nula)

2. Roviny rovnoběžné.

Označíme-li k vůli větší krátkosti jednotlivými písmenami U_1, U_2 levé strany rovnic dvou rovin (1), (2), tak že rovnice ty pak zní:

$$(1)\ U_1 = 0,\ (2)\ U_2 = 0,$$

přisluší rovnice

$$(3) \qquad U_1 - KU_2 = 0,$$

kde K libovolnou stálou značí, též rovině, která průsekem rovin (1) a (2) prochází; poněvadž souřadnice vyhovující současně rovnicím (1), (2) též rovnici (3) vyhovují.

Jsou-li původní roviny (1), (2) rovnoběžné, tvoří součinitelé souřadnic, jak známo, správnou srovnalost, t. j. máme:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = m.$$

Průsekem obou rovnoběžných rovin prochází též rovina, jejíž rovnice zní

$$U_1 - mU_2 = 0,$$

aneb na základě posledních rovnic

$$(d_1 - md_2)\ v = 0$$

to jest
$$v = 0,$$

kterážto rovnice nám značí nekonečně vzdálenou rovinu prostoru.

Vidíme z toho, že průsekem dvou rovnoběžných rovin prochází nekonečně vzdálená rovina prostoru aneb jinými slovy, že průsek ten se v nekonečně vzdálené rovině nalezá.

To úplně souhlasí s dříve řečeným, že totiž veškeré nekonečně vzdálené body a tedy i veškeré nekonečně vzdálené čáry (a útvary vůbec) v nekonečně vzdálené rovině se nalézati musí. Průsekem dvou rovnoběžných rovin jest nekonečně vzdálená v nekonečně vzdálené rovině ležící přímka; rovnoběžné roviny jsou pak takové které toutéž nekonečně vzdálenou přímkou, procházejí.

V každé rovině

$$ax + by + cz + d = 0$$

nalezá se pouze *jediná* nekonečně vzdálená přímka, poněvadž rovina ta protíná nekonečně vzdálenou rovinu (jako každou rovinu vůbec) jen v jediné přímce.

Přímka ta jest vyjádřena rovnicemi v souřadnicích stejnoměrných:

$$ax + by + cz + dv = 0$$
$$v = 0$$

totiž co průsek obou těmito rovnicemi vyjádřených rovin.

Spojení obou rovnic nám dá:

$$ax + by + cz = 0,$$

což můžeme považovati za rovnici roviny procházející bodem počátečním a protínající nekonečně vzdálenou rovinu v též přímce jako rovina původní.

Z toho též plyne, že roviny, které se liší pouze absolutním členem jich rovnic, jsou rovnoběžné ($m = 1$).

3. Přímky rovnoběžné na vzájem a k rovinám.

Přímku určujeme co průsek dvou rovin; analytický výraz přímky bude tedy dvé současně platících linearných rovnic, které řešeny byvše dle y a z se jeví v tvaru:

$$y = ax + \alpha$$
$$z = bx + \beta$$

a které nazýváme rovnicemi přímky. Přímka ta protíná nekonečně vzdálenou rovinu v jistém jediném bodě: v nekonečně vzdáleném bodě přímky té.

Převedeme-li rovnice přímky na stějnoměrný tvar:

$$y = ax + \alpha v$$
$$z = bx + \beta v$$

tu obdržíme příslušný nekonečně vzdálený bod, připojením rovnice

$$v = 0,$$

což nám dá:

$$y = ax$$
$$z = bx.$$

Tyto rovnice přísluší přímce počátkem souřadnic procházející a nekonečně vzdálenou rovinu v tomtéž bodě protínající jako přímka původní. Pro rovnoběžné přímky mají směrnice a, b tytéž hodnoty, z čehož plyne, že rovnoběžné přímky protínají nekonečně vzdálenou rovinu v tomtéž bodě, aneb že takové přímky procházejí tímtéž nekonečně vzdáleným bodem, tvoříce prostorný svazek s nekonečně vzdáleným vrcholem.

Jest-li přímka

$$y = ax + \alpha$$
$$z = bx + \beta$$

rovnoběžnou k rovině

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

tuť musí patrně nekonečně vzdálený bod přímky nalezati se v nekonečně vzdálené přímce roviny poněvadž, přímka rovinu teprv v nekonečné vzdálenosti protíná. Nekonečně vzdálený bod přímky jest pro souřadnice stejnoměrné vyjádřen rovnicemi:

$$y = ax$$
$$z = bx$$

a nekonečně vzdálená přímka roviny jest vyjádřena rovnicí:

$$Ax + By + Cz = 0$$

takže vložíme-li výrazy za y a z do poslední rovnice a krátíme-li usečkou x, obdržíme co podmínku pro rovnoběžnost roviny a přímky:

$$A + Ba + Cb = 0.$$

4. Perspektivní pojímání prostoru.

V předcházejícím položeny jsou základy k perspektivnímu pojímání prostoru, které pro geometrii nanejvýše důležité jest, a které hlavně v následujícím pozůstává:

„*V prostoru stává jen jediné, úplně určité roviny, která v celé své rozsáhlosti v nekonečnu se nalezá; jest to nekonečně vzdálená rovina prostoru. Rovina ta obsahuje veškeré nekonečně vzdálené body a tedy i veškeré nekonečně vzdálené útvary vůbec.*“

Na každé přímce nalezá se jen jediný úplně určitý nekonečně vzdálený bod, totiž průsek přímky s nekonečně vzdálenou rovinou. Veškeré nekonečně vzdálené body v konečnu se nalezající libovolné roviny vyplňují nekonečně vzdálenou přímku, totiž průsek oné roviny s nekonečně vzdálenou rovinou.

Rovnoběžné přímky mají společný nekonečně vzdálený bod.

Rovnoběžné roviny mají společnou nekonečně vzdálenou přímku. Přímka jest k rovině rovnoběžnou, nalezá-li se nekonečně vzdálený bod přímky v nekonečně vzdálené přímce roviny a naopak:

Rovina jest rovnoběžnou k přímce, prochází-li nekonečně vzdálená přímka roviny nekonečně vzdáleným bodem dříve podotknuté přímky.

Poněvadž se veškeré nekonečně vzdálené útvary v nekonečně vzdálené rovině nalezají, soudíme, že každý nekonečně vzdálený útvar jest útvarem rovinným.

6. Nekonečně vzdálené body křivek prostorových.

Máme-li libovolnou prostorovou křivku K stupně n tého, protne tato nekonečně vzdálenou rovinu (jako každou rovinu vůbec) v n bodech n_1 n_2 $n_3 \ldots n_n$, které nazýváme nekonečně vzdálenými body křivky K. Tečny křivky v těchto bodech jsou asymptoty křivky a roviny křivosti t. j. roviny procházející třemi bezprostředně po sobě jdoucími body křivky, v bodech (n) jsou asymptotické roviny křivky.

Poněvadž všeobecné průmety tečny (na roviny souřadnic) jsou tečnami k průmětům křivky, bude míti každá asymptota křivky K za průměty asymptoty průmětů křivky K.

Jsou-li tudíž:

$$F(x, y) = 0$$
$$\Phi(x, z) = 0$$

rovnice naší prostorové křivky a mají-li se ustanovit asymptoty, tu dostačí určit asymptoty křivek rovinných:

$$F(x, y) = 0 \quad \text{a} \quad \Phi(x, z) = 0$$

dle spůsobu v článku: „Určování nekonečně vzdálených“ atd. (I. ročník tohoto časopisu) blíže vyloženého; asymptoty takto obdržené jsou pak průměty asymptot křivky K, takže jich rovnice lze bezprostředně považovat za rovnice asymptot hledaných.

Pokud se jedná pouze o směry, v kterýchž se nekonečně vzdálené body křivky nalezají, dostačí převésti rovnice

$$F(x, y) = 0 \quad \Phi(x, z) = 0$$

zavedením třetí stejnoměrné souřadnice na tvar

$$F\left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}\right) = 0 \qquad \Phi\left(\frac{x}{v}, \frac{z}{v}\right) = 0$$

a položit $v = 0$. Z těchto rovnic řešíme-li, je dle $\frac{y}{x}$ a $\frac{z}{x}$ plyne pak n hodnot každého z obou poměrů; všeobecně

$$\frac{y}{x} = \alpha_i \quad \frac{z}{x} = \beta_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

Takto obdržených n párů rovnic lze pro souřadnice rovnoběžné považovati za rovnice n, bodem počátečním procházejících k nekonečným bodům křivky směřujících přímek.

Chceme-li obdržeti rovnice rovin asymptotických, tu zaveďme do rovnice roviny křivosti:

$$(\xi - x)(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + (\eta - y)(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + (\zeta - z)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0,$$

podíly $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, položme za tyto hodnoty α_i, β_i a současně $x = \infty$ $y = \infty$ $z = \infty$.

6. Racionálné křivky prostorové.

Mezi křivkami prostorovými nejjednodušších tvarů jsou *racionálné křivky* t. j. křivky, jejichž souřadnice lze vyjádřiti co racionální funkce jediné neodvisle proměnné — parametru.

Funkce ty jsou všeobecně funkce lomené společným jmenovatelem opatřené a to z jednoduché příčiny té, poněvadž všecky tři souřadnice všeobecně *současně* nekonečně velkými se stávají.

Rovnice racionálné křivky $n$tého stupně, zní tudíž všeobecně:

$$x = \frac{f_1(u)}{\varphi(u)} \quad y = \frac{f_2(u)}{\varphi(u)} \quad z = \frac{f_3(u)}{\varphi(u)},$$

kde u značí onen parametr a f_1 f_2 f_3 a φ celistvé racionalní funkce tohoto parametru a stupně n, takže

$$\varphi(u) = au^n + bu^{n-1} + cu^{n-2} + \dots lu^2 + mu + p$$

a všeobecně:

$$f_i(u) = a_i u^n + b_i u^{n-1} + c_i u^{n-2} + \dots l_i u^2 + m_i u + p_i$$

Každé hodnotě proměnné u přísluší touto hodnotou úplně určený bod křivky a naopak, každému bodu křivky odpovídá jen jediná hodnota parametru u.

Rovnice $\varphi = 0$ má n kořenů u_1 $u_2 \dots u_n$, které patrně jsou parametry nekonečně vzdálených bodů křivky, poněvadž pro každou z těchto hodnot současně x, y, z nekonečně velkým se stávají.

Rovnice tečny bodu x, y, z zní:

$$\eta = \xi \frac{dy}{dx} + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\zeta = \xi \frac{dz}{dx} + \left(z - x\frac{dz}{dx}\right)$$

Z rovnic křivky plyne:

$$dx = \frac{\varphi f_1' - f_1 \varphi'}{\varphi^2} du$$

$$dy = \frac{\varphi f_2' - f_2 \varphi'}{\varphi^2} du$$

$$dz = \frac{\varphi f_3' - f_3 \varphi'}{\varphi^2} du$$

z čehož jde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi f_2' - f_2 \varphi'}{\varphi f_1' - f_1 \varphi'},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\varphi f_3' - f_3 \varphi'}{\varphi f_1' - f_1 \varphi'}.$$

Po jednoduché redukci obdržíme pak

$$y - x \frac{dy}{dx} = \frac{f_1 f_2' - f_2 f_1'}{f_1 \varphi' - f_1' \varphi}$$

$$z - x \frac{dz}{dx} = \frac{f_1 f_3' - f_3 f_1'}{f_1 \varphi' - f_1' \varphi}$$

tak že rovnice tečny bodu x, y, z (aneb bodu u) zní:

$$\eta (\varphi f_1' - f_1 \varphi') = \xi (\varphi f_2' - f_2 \varphi') - (f_1 f_2' - f_2 f_1'),$$

$$\zeta (\varphi f_1' - f_1 \varphi') = \xi (\varphi f_3' - f_3 \varphi') - (f_1 f_3' - f_3 f_1'),$$

Pro nekonečně vzdálené body jest $\varphi = 0$, rovnice asymptoty zní tedy

$$\eta f_1 \varphi' = \xi f_2 \varphi' + (f_1 f_2' - f_2 f_1')$$

$$\zeta f_1 \varphi' = \xi f_3 \varphi' + (f_1 f_3' - f_3 f_1')$$

při čemž do těchto vzorců za u jeden z kořenů rovnice $\varphi = 0$ vložiti musíme:

Po jednoduchém výpočtu shledáme:

$$dx\, d^2 y - dy\, d^2 x = \left(\frac{du}{\varphi}\right)^3 \begin{vmatrix} \varphi & \varphi' & \varphi'' \\ f_1 & f_1' & f_1'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \end{vmatrix}$$

$$dy\, d^2 z - dz\, d^2 y = \left(\frac{du}{\varphi}\right)^3 \begin{vmatrix} \varphi & \varphi' & \varphi'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \\ f_3 & f_3' & f_3'' \end{vmatrix}$$

$$dz\, d^2 x - dx\, d^2 z = \left(\frac{du}{\varphi}\right)^3 \begin{vmatrix} \varphi & \varphi' & \varphi'' \\ f_3 & f_3' & f_3'' \\ f_1 & f_1' & f_1'' \end{vmatrix}$$

Rovnice roviny křivosti bodu u zní tudíž:

$$\left(\xi-\frac{f_1}{\varphi}\right)\begin{vmatrix}\varphi & \varphi' & \varphi''\\ f_2 & f_2' & f_2''\\ f_3 & f_3' & f_3''\end{vmatrix}+\left(\eta-\frac{f_2}{\varphi}\right)\begin{vmatrix}\varphi & \varphi' & \varphi''\\ f_3 & f_3' & f_3''\\ f_1 & f_1' & f_1''\end{vmatrix}+\left(\zeta-\frac{f_3}{\varphi}\right)\begin{vmatrix}\varphi & \varphi' & \varphi''\\ f_1 & f_1' & f_1''\\ f_2 & f_2' & f_2''\end{vmatrix}=0$$

Přeneseme-li záporné členy na pravou stranu rovnice, a vyvineme-li determinanty po pravé straně dle elementů prvních řádků, snadně uvedeme rovnici roviny křivosti na tvar

$$\xi\begin{vmatrix}\varphi & f_2 & f_3\\ \varphi' & f_2' & f_3'\\ \varphi'' & f_2'' & f_3''\end{vmatrix}+\eta\begin{vmatrix}\varphi & f_3 & f_1\\ \varphi' & f_3' & f_1'\\ \varphi'' & f_3'' & f_1''\end{vmatrix}+\zeta\begin{vmatrix}\varphi & f_1 & f_2\\ \varphi & f_1' & f_2'\\ \varphi'' & f_1'' & f_2''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}f_1 & f_2 & f_3\\ f_1' & f_2' & f_3'\\ f_1'' & f_2'' & f_3''\end{vmatrix}$$

Chceme-li obdržet rovnice rovin asymptotických, dostačí vložit do poslední rovnici $\varphi = 0$, a za u posloupně kořeny rovnice $\varphi = 0$.

V rovnici roviny křivosti vyskytující se devítiprvkové determinanty obsahují v prvním řádku funkce celistvé stupně n tého, v druhém jich první a v třetím jich druhé derivace.

Tu se, jak známo, jednoduchým násobením druhého a třetího řádku jistými činiteli a přičtením k prvnímu a k druhému řádku může každý z těchto determinantů převésti na devítiprvkový determinant, jehož elementy jsou celistvé funkce stupně $(n-2)$ho.

Takovou přeměnou přejde rovnice roviny křivosti v tvar:

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = U$$

přičemž X, Y, Z, U jsou determinanty vytknutého tvaru. Značí-li na př.

$$\begin{aligned}\Phi &= n(n-1)\,\varphi - 2(n-1)\,u\varphi' + u^2\varphi''\\ F_k &= n(n-1)\,f_k - 2(n-1)\,u f_k' + u^2 f_k''\\ \Phi_1 &= (n-1)\,\varphi' - u\varphi''\\ F_{k1} &= (n-1)\,f_k' - u f_k''\end{aligned}$$

bude tedy

$$X=\begin{vmatrix}\Phi, & F_2, & F_3\\ \Phi_1, & F_{21}, & F_{31}\\ \varphi'', & f_2'', & f_3''\end{vmatrix},$$

$$Y=\begin{vmatrix}\Phi, & F_3, & F_1\\ \Phi_1, & F_{31}, & F_{11}\\ \varphi'', & f_3'', & F_1''\end{vmatrix}, \quad \text{a t. d.}$$

Nyní jsou veličiny X, Y, Z, a U celistvé funkce stupně 3 $(n-2)$ho, z čehož mimochodem řečeno plyne, že libovolným bodem ($\xi\ \eta\ \zeta$) prostoru prochází 3 (n—2) rovin křivosti racionálné prostorové křivky n-tého stupně. Parametry příslušných bodů styku obdržíme řešením rovnice

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = U$$

dle u co neznámé.

7. Prostorové křivky třetího stupně.

Racionální křivka prvního stupně jest přímka, racionální křivky stupně druhého jsou kuželosečky. Nejjednodušší racionální nerovinné křivky jsou tudíž racionální prostorové křivky stupně třetího.

Křivky ty (les cubiques, gauches le cubiche gobbe, Raumcurven dritter Ordnung) zdají se míti pro prostor tutéž důležitost jako kuželosečky pro rovinu. Byly též nazvány „*prostorovými kuželosečkami*".

Všeobecná taková křivka jest průsek dvou kuželů druhého stupně, majících společnou povrchovou přímku. Sluší též podotknouti, že každá prostorová křivka třetího stupně jest křivka racionální.

Prostorová křivka třetího stupně vyjadřena jest rovnicemi:

$$x = \frac{a_1 u^3 + b_1 u^2 + c_1 u + d_1}{a u^3 + b u^2 + c u + d},$$

$$y = \frac{a_2 u^3 + b_2 u^2 + c_2 u + d_2}{a u^3 + b u^2 + c u + d},$$

$$z = \frac{a_3 u^3 + b_3 u^2 + c_3 u + d_3}{a u^3 + b u^2 + c u + d}.$$

Determinanty jevící se v rovnici roviny křivosti mají pro tuto křivku hodnoty:

$$X = 8 \begin{vmatrix} cu + 3d, & c_2 u + 3d_2, & c_3 u + 3d_3 \\ bu + c, & b_2 u + c_2, & b_3 u + c_3 \\ 3au + b, & 3a_2 u + b_2, & 3a_3 u + b_3 \end{vmatrix},$$

a obdobně $Y\ Z$ a U.

Výrazy pro $X\ Y\ Z$ a U můžeme rozložit v determinanty jednoduchými prvky opatřené a tu po krátkém počtu shledáme použijeme-li nejkratšího označení determinantu, že

$$\frac{-X}{24} = u^3 (a b_2 c_3) + 3u^2 (a b_2 d_3) + 3u (a c_2 d_3) + (b c_2 d_3)$$

$$\frac{-Y}{24} = u^3 (a b_3 c_1) + 3 u^2 (a b_3 d_1) + 3 u (a c_3 d_1) + (b c_3 d_1)$$

$$\frac{-Z}{24} = u^3 (a b_1 c_2) + 3 u^2 (a b_1 d_2) + 3u (a c_1 d_2) + (b c_1 d_2)$$

$$\frac{-U}{24} = u^3 (a_1 b_2 c_3) + 3u^2 (a_1 b_2 d_3) + 3u (a_1 c_2 d_3) + (b_1 c_2 d_3)$$

Součinitelové souřadnic v rovnici roviny křivosti jsou tudíž skutečně celistvé racionální funkce třetího stupně vzhledem k parametru u; libovolným bodem $(\xi\, \eta\, \zeta)$ prostoru prochází tedy tré rovin křivosti naší křivky t. j. prostorové křivky třetího stupně jsou též křivkami třetí třídy.

Chceme-li rovnice rovin asymptotických, musíme řešiti rovnici

$$au^3 + bu^2 + cu + d = 0$$

a vložit kořeny této rovnice posloupně do rovnice

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = U.$$

Úloha. Dokaž, že asymptotické roviny se na vzájem v třech rovnoběžných přímkách protínají.

Úloha. Dokaž, že se roviny křivosti sestrojené v průsecích křivky s libovolnou rovinou protínají v bodě této roviny. Jak souvisí úseky rovinou libovolnou na osách utvořené se souřadnicemi onoho v rovině té se vyskytujícího bodu (pólu oné libovolné roviny vzhledem ku křivce prostorové stupně třetího).

8. Nekonečně vzdálené křivky ploch.

Libovolná plocha

$$F(x, y\, z) = 0$$

protíná každou rovinu v čáře rovinné (buď reálné neb pomyslné) a tedy protne též nekonečně vzdálenou rovinu v čáře, kterou nazveme *nekonečně vzdálenou křivku* plochy F. Nekonečně vzdálené křivky jsou *rovinné*, any se nalézají v nekonečně vzdálené *rovině*. Máme-li určiti nekonečně vzdálenou křivku algebraické plochy

$$F(x, y, z) = 0,$$

tu zaveďme čtvrtou souřadnici stejnoměrnou t. j. převeďme rovnici na tvar:

$$F\left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}\right) = 0$$

a položme po uspořádání $v = 0$. Výsledek bude stejnoměrná rovnice

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

téhož stupně, jako byla rovnice $F(x, y, z) = 0$.

Rovnice $\varphi = 0$ přináleží co rovnice souřadnice rovnoběžné obsahující kuželi téhož stupně, jako jest plocha F, a jehož vrchol se v bodu počátečním nalezá. Povrchové přímky tohoto kužele směřují k nekonečně vzdáleným bodům plochy F, neb nekonečně vzdálená křivka plochy F vyhovuje, jak jsme shledali, rovnici $\varphi = 0$.

Nekonečně vzdálenou křivku plochy F můžeme tudíž též považovat za průsek nekonečně vzdálené roviny s kuželem $\varphi = 0$.

Jest-li plocha F stupně $n$tého, pak rovnice $F = 0$ je tvaru:

$$\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots = 0,$$

kde φ značí celistvou stejnoměrnou funkci n-tého stupně, souřadnic $x\, y\, z$ φ_1, obdobnou funkci $(n - 1)$-ho, φ_2 $(n - 2)$-ho stupně atd. Rovnice kužele n-tého stupně určující v nekonečně vzdálené rovině nekonečně vzdálenou křivku plochy F, zní $\varphi = 0$.

9. Nekonečně vzdálené kuželosečky ploch druhého stupně.

Plocha druhého stupně

$$F_2 \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A_1yz + 2B_1xz + 2C_1xy + 2A_2x + 2B_2y + 2C_2z + D = 0$$

protíná nekonečně vzdálenou rovinu v kuželosečce určené rovnicí:

$$\varphi \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A_1yz + 2B_1xz + 2C_1xy = 0.$$

Veškeré plochy druhého stupně, jejichž rovnice se shodují co do quadratické části (prvních šest členů), procházejí tudíž toutéž nekonečně vzdálenou kuželosečkou.

Jak známo závisí na prvních šesti součinitelích rovnice směry a poměry hlavních os plochy, tak že tedy plochy druhého stupně procházející toutéž nekonečně vzdálenou kuželosečkou mají hlavní osy týchž směrů a týchž poměrů. Takové plochy jsou však podobné a podobně v prostoru rozpoložené plochy druhého stupně, čímž dokázána věta:

„Podobné a podobně rozpoložené plochy druhého stupně procházejí toutéž nekonečně vzdálenou kuželosečkou."

Toť jest současně příčinou, proč se dvé takových ploch v konečnu pouze dle kuželosečky protínají; neb tato současně s řečenou nekonečně vzdálenou kuželosečkou představuje úplný průsek obou ploch, který musí býti čtvrtého stupně. Jsou-li totiž $F_2 = 0$, $F_2' = 0$ rovnice dvou podobných a podobně rozpoložených ploch druhého stupně, pak jest $F_2 - F_2' = 0$ rovnice roviny obsahující v konečnu se nalezající část průseku obou ploch, což kuželosečka býti musí, poněvadž v takové rovina $F_2 - F_2' = 0$ jak jednu tak i druhou plochu druhého stupně protíná.

10. Imaginární kruh v nekonečnu.

Veškeré koule v prostoru jsou podobné a podobně rozpoložené plochy druhého stupně a protínají tudíž dle dříve dokázaného nekonečně vzdálenou rovinu v též (arci imaginární) křivce druhého stupně, kterou můžeme co rovinný průsek koulí považovat za (imaginární) *kruh.* Tuto veledůležitou křivku nazýváme *„imaginárním kruhem v nekonečnu“* (le cerclé à l' infini, der imaginäre Kugelkreis im Unendlichen). Imaginárním kruhem v nekonečnu probíhají veškeré koule, tak že se v kruhu tom též na vzájem protínají. Kruh imaginární v nekonečnu má pro geometrii prostoru tutéž důležitost jako imaginární kruhové body v nekonečnu pro geometrii roviny.

Snadno každý nahlídne, že kruhové body libovolné roviny jsou průseky roviny s nekonečně vzdáleným imaginárním kruhem.

Co se tkne rovnice imaginárního kruhu v nekonečnu, můžeme ji bezprostředně napsati

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

předpokládajíce souřadnice pravoúhlé; neb $x^2 + y^2 + z^2$ jest všem kulovým rovnicím společná část quadratická.

Rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ značí vlastně imaginární kužel quadratický, který nekonečně vzdálenou rovinu v téže křivce protíná jako každá koule.

Pomocí imaginárního kruhu v nekonečnu lze jednoduchým způsobem zodpovídati rozmanité otázky, tak na př. ony, které se týkají os, hlavních rovin, kruhových řezů, a fokálních křivek ploch druhého stupně, o čemž později snad podrobněji pojednáme.

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí*.)

(Pokračování soustavy krychlové.)

B. Poloměrnost klonoplochá.

a) *S plochami v poloze* $\pm o$.

56. Otupením střídavých rohů krychle, nebo vynecháním střídavých ploch osmistěnu vyvinou se dva *čtyrstěny* (Tetraëder), obmezeny čtyrmi stejnostrannými trojúhelníky, které se stýkají ve 3 rozích a 6 hranách O. (Obr. 1.)

Jeden čtyrstěn jest ke druhému otočen kolem vodorovné osy o 180°.

Známka jejich jest $\pm O$, u Millera $\varkappa$ (111).

Hlavní osy osmistěnu ukončují se ve středu hran, trojúhelné osy ve středu ploch a rohů a mají tedy u každého pólu svého jiné ukončení; kosočtverečné osy nejsou vyznačeny žádným zvláště patrným bodem.

57. Hrany osmistěnu, z něhož jest čtyrstěn vyvinut, doplňují hrany jeho na 180°, pročež jest dle 13)

$$3 \cos O = 1 \text{ nebo } \cos O = {}^1/_3,$$
$$\text{z čehož } O = 70^0\ 31'\ 44''$$

b) *S plochami v poloze* $\pm O_{1/m}$.

58. Trojplochým přikrojením střídavých rohů krychle od ploch, nebo vynecháním potrojných ploch ve střídavých oktantech čtveroúhelného čtyrmecítníka $O_{1/m}$, vyvinou se dva tvary obmezeny 12 stejnoramennými trojúhelníky, které se stýkají v 6 hranách O jako čtyrstěn, a ve 12 hranách H jako $O_{1/m}$; pak ve 4 tupě trojplochých a 4 ostře šestiplochých rozích. (Obr. 2.)

Tvary ty mají všeobecnou podobu čtyrstěnu s nasazenými tupými trojplochými jehlanci na jeho plochy; nazývají se proto *čtyrstěnné dvanáctistěny* (Trigondodekaëder) a známka jejich jest $\pm O_{1/m}$, u Millera $\varkappa$ (*m* 11).

Hlavní osy krychle ukončují se v hranách O; trojúhelné osy v trojplochých a šestiplochých rozích a mají tudíž na každém pólu jiné ukončení; kosočtverečné osy nejsou vyznačeny žádným zvláště patrným bodem.

59. K ustanovení přípony *m* stačí známost jedné hrany.

Jsou-li známy hrany H, počítá se jako v odstavci 23.

Jsou-li známy hrany O, jest, anať odtíná plocha kosočtverečnou osu osmistěnu $r = \sqrt{1/2}$ ve vzdálenosti *m*,

$$m = tang\ \tfrac{1}{2}\ O\ \sqrt{2}.$$

c) S plochami v poloze $\pm O_m$.

60. Trojplochým přikrojením střídavých rohů krychle nebo vynecháním potrojných ploch osmistěnného čtyrmecítníka O_m ve střídavých oktantech, vyvinou se dva tvary obmezeny 12 souměrnými čtyrúhelníky, které se stýkají ve 12 hranách O nad hranami vepsaného čtyrstěnu a ve 12 hranách D jako O_m; pak ve 4 tupých a 4 ostrých trojplochých rozích. (Obr. 3.)

Tvary ty slovou *čtyrúhelné dvanáctistěny* (Deltoiddodekaëder) a známka jejich jest $\pm O_m$, u Millera $\varkappa$ (*m mi*).

Hlavní osy krychle ukončují se ve čtveroplochých rozích; trojúhelné osy v tupých a ostrých trojplochých rozích, a mají tudíž u obou pólů jiné ukončení; kosočtverečné osy nejsou naznačeny zvláště patrným bodem.

61. K ustanovení přípony *m* stačí známost jedné hrany.

Jsou-li známy hrany D, počítá se jako v odstavci 28.

Jsou-li známy hrany O, použije se trojbokého výkrojku $\tfrac{1}{2}\ O$, $\tfrac{1}{2}\ H$, T', v němž $\tfrac{1}{2}\ H = 90^0$, $T' = 60^0$,

$$cos\ (h, t') = 2\ cos\ \tfrac{1}{2}\ O\ \sqrt{1/3},$$

$$(h, t') = (h, r) - 35^0\ 15'\ 52'',$$

$$m = tang\ (h, r)\ \sqrt{1/2}.$$

d) S plochami v poloze $\pm O_s$.

62. Šestiplochým přikrojením střídavých rohů krychle nebo vynecháním šesterečných ploch osmačtyřicítníka O_s ve střídavých

oktantech, vyvinou se dva tvary obmezeny 24 lichostrannými trojúhelníky, které se stýkají ve 12 hranách H a 12 hranách D jako u O_s, a ve 12 hranách O nad hranami vepsaného čtyrstěnu; pak ve 4 tupých a 4 ostrých šestiplochých a v 6 čtveroplochých rozích. (Obr. 4.)

Tvary ty slovou *čtyrstěnné čtyrmecítníky* (Hexakistetraëder) a známka jejich jest $\pm O_s$, u Millera $\varkappa(mn1)$, kdežto pro s $a = {}^1/_m$, $b = {}^1/_n$, $c = 1$.

Hlavní osy krychle ukončují se ve čtveroplochých rozích; trojúhelné osy v tupých a ostrých šestiplochých rozích a mají tudíž u obou pólů jiné ukončení; kosočtverečné osy nejsou naznačeny zvláště patrným bodem.

63. K ustanovení přípon m, n, zapotřebí znáti dvě hrany.

Jsou-li známy hrany H, D počítá se jako u plnoměrného O_s. (Viz odstavce 31. až 40.)

Jsou-li známy hrany H, O, ustanoví se z trojbokého výkrojku $\frac{1}{2}H$, $\frac{1}{2}O$, T', v němž $T' = 60^0$

$$cos\,(h, t') = \frac{2\,cos\,\frac{1}{2}\,O + cos\,\frac{1}{2}\,H}{sin\,\frac{1}{2}\,H\,\sqrt{3}},$$

$$(h, t') = (h, r) - 35^0\,15'\,52'',$$

$$m = r\,tang\,(h, r), \text{ viz odst. 31.}$$

Taktéž jest pro úhel mezi osou r a hranou O' vepsaného osmačtyřicítníka O_s

$$cot\,(r, o') = tang\,\tfrac{1}{2}\,H\,sin\,(h, r)$$

$$\frac{m}{n} = tang\,[(r, o') + 45^0].$$

Jsou-li známy hrany D, O ustanoví se pro úhel (a, d) mezi hlavní osou a hranou D

$$cos\,(a, d) = \frac{cos\,\frac{1}{2}\,O}{sin\,\frac{1}{2}\,D},$$

a pak pro úhel (a, o') mezi hranou O' vepsaného osmačtyřicítníka O_s a hlavní osou z trojbokého výkrojku $\frac{1}{2}D$, A, $\frac{1}{2}O$, v němž $A = 45^0$

$$cot\,(a, o') = \frac{cot\,\frac{1}{2}\,D\,sin\,45^0 + sin\,45^0\,cos\,(a, d)}{sin\,(a, d)},$$

načež jest

$$sin\,\tfrac{1}{2}\,O = \frac{sin\,(a, d)}{sin\,(a, o')}\,sin\,\tfrac{1}{2}\,D,$$

$$m = tang\ \tfrac{1}{2}\ O' \,.\, sin\ (a, o')$$

$$\frac{m}{n} = tang\ (a, o')\,.$$

Zobrazení krychlových klonoplochých tvarů.

64. Zobrazení těch tvarů provádí se jako u plnoměrných tvarů pomocí krychle, do níž se vnesou hlavní a trojúhelné osy.

U klonoplochých tvarů dělí se však trojúhelné osy ve dvě nestejné části, z nichž kratší t se končí v tupějším rohu a má tu samu délku, jako v plnoměrném tvaru, kdežto delší t' se končí v ostřejším rohu.

Vezme-li se pro $\pm\ O_s$ hlavní osa $a = 1$, jest

$$t = \frac{m\sqrt{3}}{m + n + 1}\,.$$

Pro t' jest z trojúhelníka r, t', h, v němž $(r, t') = 35^0\ 15'\ 52''$

$$tang\ 180^0 - (r, h) = -\frac{m}{r} = \frac{t'\,.\, sin\ (r, t')}{r - t'\ cos\ (r, t')}\,,$$

a jelikož

$$sin\ (r, t') = \sqrt{{}^1/_3}$$

$$cos\ (r, t') = \sqrt{{}^2/_3}$$

$$r = \frac{m\sqrt{2}}{m + n}\,,\ \text{jest}$$

$$t' = \frac{m\sqrt{3}}{m + n - 1}\,.$$

Podobně nalezne se po $\pm\ O_{1/m}$

$$t = \frac{m\sqrt{3}}{m + 2}\,,\ t' = \sqrt{3}\,.$$

Pro $\pm\ O_m$

$$t = \frac{m\sqrt{3}}{2m + 1}\,,\ t' = \frac{m\sqrt{3}}{2m - 1}\,.$$

Pro $\pm\ O$

$$t = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,,\ t' = \sqrt{3}\,.$$

Konce takto ustanovených trojúhelných os spojí se přiměřeně s konci hlavních os.

Spojky krychlových klonoplochych tvarů.

65. Klonoploché tvary spojují se spolu a s oněmi tvary, které klonoploché poloměrnosti schopny nejsou, totiž s h, d a

d_n v rozmanité mnohoploché tvary, na nichž obyčejně plochy h neb $\pm o$ neb d převládají.

Následující příklady ukazují upotřebení uvedených vzorců.

Sfalerit (blejno zinkové, obr. 5.) Mezi četnými spojkami tohoto minerálu jest zvláště význačná spojka dvanáctistěnu d s plochami, které střídavé trojploché rohy od hran tak otupují, že stojí spojková hrana D' kolmo na hraně D dvanáctistěnu.

Dle polohy náleží otupující plochy tvaru $\pm o_{1/m}$. V trojbokém výkrojku $\frac{1}{2}O$, $\frac{1}{2}D$, D', v němž $\frac{1}{2}D = 60^0$, $(d, d') = 90^0$, $(o, d) = 144^0 44' 8''$, totiž tentýž úhel jako mezi čtyrstěnem a dvanáctistěnem d, jest

$$cot \tfrac{1}{2} O = \tfrac{1}{3} \sqrt{2}$$

$$O = 129^0 31' 16'', \text{ z čehož dle rovnice (59).}$$

$$m = tang \tfrac{1}{2} O \sqrt{2}$$

$$m = 3.$$

Tudíž jest $\pm O_{1/m} = \pm O_{1/3}$, dle Millera $\varkappa\,(311)$, dle Naumanna $\frac{303}{2}$.

Boracit, obr. 6. 7. Dle polohy ustanovují se plochy h, $+o$, $-o$, d samy sebou.

Plochy, jimiž se otupují hrany dvanáctistěnu d, mají dle pásmové rovnice polohu $\pm o^1/_2 = \pm p$.

Plochy, jimiž se přikrojují rohy mezi h, d, o, mají patrně polohu $\pm O_s$, a jelikož dvě a dvě spojkové hrany těch ploch s osmistěnem spolu jsou rovnoběžné, jest pro ně, jako u stejnohranných osmačtyřicítníků $\pm O_s = \pm i_m$, kdežto $n = \frac{m+1}{2}$.

K dalšímu ustanovení jest zapotřebí znáti jednu spojkovou hranu, buď $(O_s, h) = 147^0 41'$, nebo $(O_s, o) = 151^0 26'$, načež vložením přiměřených hodnot do rovnice 12) ustanoví se m a tudíž i n.

Rychleji dojde se cíle, jsou-li obě spojkové hrany známy, neb pak jest pro $n = \frac{m+1}{2}$,

$$cos\,(O_s, h) = -\frac{m}{\sqrt{S}},$$

$$\cos(O_s, o) = -\frac{m+n+1}{\sqrt{3}\ \sqrt{S}},$$

$$\frac{\cos(O_s, h)}{\cos(O_s, o)} = \frac{2m\sqrt{3}}{3(m+1)} = 0{\cdot}9622, \text{ z čehož}$$

$$m = 5, \text{ a tudíž } n = 3,$$

a tedy pro s $a = {}^1/_5$, $b = {}^1/_3$, $c = 1$; dle Millera $\varkappa$ (531), dle Naumanna $\frac{5\,O\frac{5}{3}}{2}$.

Tetraedrit, obr. 8.

Dle polohy samy ustanovují se h co plochy krychle, o co plochy čtyrstěnu, d co plochy dvanáctistěnu, jelikož otupují hrany mezi h, h.

Plochy, které otupují hrany mezi d, d mají polohu $+O^1/_2$ a $-O^1/_2$ čili $\pm p$. (Viz 24.)

Plochy, které otupují hrany mezi h a d mají polohu d_n.

Plochy, které otupují hrany mezi $O^1/_2$ mají polohu $\pm O_m$.

Všechny tyto plochy leží v pásmu d_n, $-p'$, $-o'_m$, $-p''$.

Dosadí-li se do pásmové rovnice (19)

$$\text{pro } -p',\ a'\,b'\,c' = 12\bar{1},$$

$$-p'',\ a''\,b''\,c'' = 11\bar{2}, \text{ jest}$$

$$3a = b - c.$$

Pro d_n jest $abc = 1n0$, pročež $n = 3$, $d_n = d_3$.

Pro $-O'_m$ jest $abc = 1\bar{m}m$, pročež $m = {}^3/_2$, $\pm O_m = \pm O^3/_2$.

Známky ustanovených ploch jsou tedy:

	d	h	d_3	$-o$	$+p$	$-p$	$-o^3_2$
dle Millera	100.	110.	310.	$\varkappa\,(\bar{1}11)$.	$\varkappa\,(211)$.	$\varkappa\,(21\bar{1})$.	$\varkappa\,(23\bar{3})$.
dle Naumanna	$\infty O \infty$.	∞O.	$\infty O3$.	$-\frac{O}{2}$.	$\frac{2O2}{2}$.	$-\frac{2O2}{2}$.	$-\frac{\frac{3}{2}O}{2}$.

C. Poloměrnost pravolevá.

66. Pravolevé poloměrnosti podléhá jen osmačtyřicítník, kterýž se vynecháním střídavých ploch rozpadává ve dva 24 ploché tvary, z nichž jeden se má ke druhému, jako pravice k levici, nebo jako předmět a obraz jeho v zrcadle. (Obr. 9.)

Tentýž výsledek dá trojploché přikrojení rohů krychle střídavě od pravé nebo od levé strany.

Tvary takto vyvinuté jsou obmezeny 24 nepravidelnými pětiúhelníky, kteréž se stýkají ve 24 hranách H, ve 24 hranách O a ve 24 hranách G; pak v 8 pravidelně trojplochých, 6 pravidelně čtveroplochých a ve 24 nepravidelně trojplochých rozích.

Každý pětiúhelník má troje hrany, dvě hrany O, dvě hrany H a jednu hranu G.

Tvary tyto slovou *pravo-levé čtyrmecítmíky* (Gyroidy) a známka jejich jest p, l (O_s), u Naumanna d, l $\frac{mOn}{2}$.

Poloha hlavních os krychle jest naznačena pravidelně čtveroplochými rohy, v nichž se končí hrany O; poloha trojúhelných os pravidelně trojplochými rohy, v nichž se končí hrany H, a poloha kosočtverečných os středobodem nepravidelných hran G.

67. Pro hlavní osy jest jako v osmačtyřicítníku O_s, $a = 1$, pro trojúhelné osy $t = \frac{m\sqrt{3}}{m + n + 1}$.

Poloha nepravidelných rohů, v nichž se stýká hrana O s hranami H a G, ustanoví se z rovnic oněch tří ploch, které na těch rozích se setkávají.

Jeden z těch rohů povstává setkáním se ploch p, p', p''; a v zcela obdobných poměrech povstávají všechny ostatní nepravidelné rohy.

Rovnice plochy p jest $nx + my + z = 1$

$$p' \quad -x + my + nz = 1$$
$$p'' \quad x + ny + mz = 1.$$

Spojením rovnice první a druhé objeví se

$$\frac{x}{z} = \frac{n - 1}{n + 1},$$

spojením rovnice druhé a třetí

$$y + z = \frac{2}{m + n}.$$

Tyto rovnice značí čáru vedenu v rovině protínající dvě osy y, z ve stejné vzdálenosti a rovnoběžné k třetí ose x, tedy v rovině plochy d.

Dosadí-li se za x, y, z hodnoty jejich z obou předešlých rovnic vycházející, jest pro souřadnice průsečného bodu tří ploch p, p', p'', tedy pro souřadnice nepravidelného rohu

$$x = \frac{(m-n)(n-1)}{S}$$

$$y = \frac{n(m-n)+m+n-2}{S}$$

$$z = \frac{(m-n)(n+1)}{S},$$

kdežto $S = (m+n)[m-1+n(m-n)]$.

Pomocí těchto souřadnic, jakož i pomocí os a a t provede se vyobrazení těchto tvarů, spojí-li se totiž body rohů takto nalezených čarami O, H, G.

68. Zobrazení to dá se ostatně i bez výpočtu souřadnic provésti tím, že se středem střídavých ploch osmačtyřicítníka vedou od tří jejich rohů čáry na tři strany; body, kde se tyto čáry ze střídavých ploch setkávají, naznačují polohu nepravidelných rohů, kdežto konečné body trojúhelných a hlavních os jsou tytéž jako v osmačtyřicítníku O_s.

69. Tvary s poloměrně pravo-levými plochami soustavy krychlové nebyly posud na vyhraněných hmotách pozorovány.

Kdyby se vyskytly, mohly by se objeviti ve spojení se všemi plnoměrnými tvary mimo O_s, an mimo ten tvar žádný jiný není pravo-levého rozkladu schopen.

III. Tvary čtvrtiměrné.

70. Poloměrné tvary rozkladem osmačtyřicítníka O_s vyvinuté, a sice jak rovnoběžně, tak i klonoplošně a pravolevě poloměrné, dají se vynecháním střídavých ploch rozložiti ve dva tvary, kteréž s ohledem na O_s jsou ***čtvrtitvary*** (Tetartoidy). (Obr. 10.)

Tentýž výsledek objeví se trojplochým přikrojením střídavých rohů krychle buď od pravé nebo od levé strany.

Tím způsobem vyvinou se z osmačtyřicítníka O_s čtyry tvary, z nichž dva mají plochy v poloze pravé a dva v poloze levé. Oba pravé tvary a oba levé rozeznávají se od sebe postavou o 180° kolem vodorovné osy otočenou.

Známky jejich jsou $\pm p$, l (O_s) u Millera π $\varkappa$ $(m\,n\,1)$, u Naumanna $\pm d$, $l\,\frac{mOn}{4}$.

Pravolevé čtvrtitvary jsou obmezeny 12 nepravidelnými pětiúhelníky z nichž každý má dvě hrany H, dvě hrany H' a jednu hranu G. Hrany H stýkají se ve třech tupých a hrany H' ve třech ostrých trojplochých rozích; hrany G setkávají se nad plochami opsané krychle s hranami H a H' ve 12 nepravidelně trojplochých rozích.

Tvary ty slovou *pravolevé dvanáctistěny* (tetartoidické Pentagondodekaedry).

71. Poloha hlavních os krychle jest naznačena středobodem hran G; trojúhelné osy t a t' ukončují se v tupých a ostrých trojúhelných rozích a mají jako u klonoplochého čtyrmecítmíka $\pm O$, délku

$$t = \frac{m\sqrt{3}}{m+n+1}, \quad t' = \frac{m\sqrt{3}}{m+n-1}.$$

Polohu nepravidelných rohů ustanoviti lze z rovnic tří ploch p, p', p'', jejichž setkáním povstávají. Pro jeden z těch rohů rovnice plochy p jest $nx + my + z = 1$

$$\begin{aligned} p' \quad & x + ny + mz = 1 \\ p'' \quad & -nx + my - z = 1. \end{aligned}$$

Spojením první a třetí rovnice obdrží se rovnice hrany mezi p a p'', totiž

$$nx + z = o, \quad y = \frac{1}{m},$$

kteréžto rovnice značí čáru vedenu v rovině souřadnice x, z totiž v ploše krychlové.

Spojí-li se pak tyto rovnice hrany s rovnicí plochy p', objeví se pro souřadnice nepravidelného rohu

$$x = \frac{m-n}{m(1-mn)}, \quad y = \frac{1}{m}, \quad z = \frac{m(n-m)}{m(1-mn)}.$$

72. Pomocí těch souřadnic a os a, t, t' dájí se ty tvary zobraziti, což ostatně lze též provésti zvětšením střídavých ploch osmačtiřicítníka ve střídavých oktantech.

73. Přenesou-li se plochy osmačtyřicítníka na ostatní plnoměrné tvary a vynechají-li se pak ve střídavých oktantech střídavé plochy, promění se osmistěn O ve dva čtyrstěny $\pm O$, čtyrmecítmík $O_{1/m}$ ve dva dvanáctistěny $\pm O_{1/m}$, čtyrmecítmík O

ve dva dvanáctistěny $\pm O_m$, čtyrmecítmík d_n ve dva dvanáctistěny $\pm d_n$, a jen krychle h a dvanáctistěn d zůstanou nezměněny.

Řada čtvrtiměrných tvarů obsahuje tedy mimo krychli h a dvanáctistěn d, jak *klonoplošně tak i rovnoběžně poloměrné tvary*, k nimž se druží pravo-levé dvanáctistěny. Spojky čtvrtiměrné mohou tedy obsahovati zároveň plochy klonoploché, rovnoběžné i pravo-levé.

74. Posud byly takové spojky pozorovány jen na *chlorečnanu sodnatém* a na některých jiných podobných solech, kteréž zároveň se vyznamenávají cirkulární polarisací.

(O souvislosti čtvrtiměrných tvarů s cirkulární polarisací a o vyminkách, pod kterými se na těch tvarech objeví, pojednáno bude v tomto časopisu ve zvláštním článku. Jen to budiž podotknuto, že jen čtvrtiměrné vyhraněné hmoty jeví cirkulární polarisaci a sice pod výminkou, že se dva úseky plochy na prvotvaru mají k sobě jako $1:4m$, kdežto m jest liché číslo.)

Spojky ty jeví plochy krychlové h ve spojení s plochami d, $\pm d_n$, $\pm o$, z kteréhož spojení klonoplochých poloh s rovnoběžnou polohou ploch právě vychází čtvrtiměrný ráz těch hmot.

Pravo-levý dvanáctistěn přikrojoval by, kdyby se na těch hmotách objevil, střídavé rohy krychle trojplošně buď od pravé nebo od levé strany, neb přikrojoval by šikmo spojkovou hranu mezi h a $\pm o$.

Srostlice krychlové soustavy.

75. Vyhraněné tvary mají nezřídka mimo své hrany také kouty neb brázdy, neb hrany v neobyčejné poloze, a poloha ploch jejich dá se pak uvésti na dva nebo více stejných tvarů v rozdílné postavě spolu srostlých.

Tvary takové slovou *srostlice* (dvojčata).

Všeobecný zákon pro polohu ploch na srostlicech jest ten, že plocha, dle níž dva tvary jsou srostlé, má polohu k prvotvaru úměrnou, a že jeden tvar ke druhému jest otočen o 180°.

Na tvarech krychlové soustavy objevují se srostlice dvojího druhu; totiž některé spojují se dle plochy krychlové h, jiné dle plochy osmistěnné o.

I. *Srostlice se společnou plochou h.*

76. Srostou-li dva plnoměrné tvary dle plochy h, zachovají oba tvary polohu ploch a os jako v postavě původní a dvojčatný srůst není tudíž patrný.

Jen na tvarech poloměrných stává se tento spůsob srůstu zjevným, an oba polotvary k sobě v obrácené postavě se nacházejí.

Obraz 11. ukazuje srostlice Pyritu s plochami $+d_2$. Kouty v nichž se plochy obou tvarů setkávají, mají patrně polohu hran plnoměrného d_2.

Obraz 12. představuje srostlici Tetraedritu s plochami $+o$, Kouty srostlice mají polohu hran plnoměrného osmistěnu.

II. *Srostlice se společnou plochou O.*

77. Srůst podle plochy o jest nejenom na poloměrných, nýbrž i na plnoměrných tvarech patrný, an při otočení jednoho tvaru ke druhému o 180°, poloha ploch u obou tvarů jest jiná.

Srostlice takové mají jednu z trojuhelných os, totiž onu, která stojí kolmo na společné ploše O, společnou a jeden tvar jest ke druhému kolem té osy o 180° otočen.

78. K poznání poměrů, v nichž se oba tvary k sobě nacházejí, postaviž se prvotvar, totiž krychle, kolmo na jednu z trojúhelných os. Obr. 13.

Vodorovný průmět krychle takto postavené jest pravidelný šestiúhelník a kolmice z pobočných rohů na trojúhelnou osu t spuštěné, dělí tu osu ve tři stejné díly. Neboť

$$\cos(h, t) = \cos 54^\circ 44' 8'' = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}t$$

Poloměr p šestiúhelníka jest

$$p = \sin(h, t) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,.$$

Kolem krychle kolmo na trojúhelnou osu postavené dá se opsati pravidelný šestiboký hranol, jehož poloměr, je-li $h = 1$, jest $p = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ a jehož výška $t = \sqrt{3}$.

Vezme-li se však $p = 1$, jest

$$1 : t = \sqrt{\tfrac{2}{3}} : \sqrt{3},$$

tudíž

$$t = 3\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,.$$

79. Máli se tedy zobraziti krychle v postavě na jedné z trojúhelných os kolmé, vyrýsuje se šestiboký hranol, jehož poloměr jest $= 1$, a výška $= 3\sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

Tato výška sestrojí se z pravoúhelného stejnoramenného trojúhelníku, jehož kathety tedy $p = 1$, hypothenusa $r = \sqrt{2}$, načež $t = \frac{3r}{2}$.

Na vodorovné čáře $2p = ht$, (obr. 14.) vyrýsuje se pak pravidelný šestiúhelník ve vodorovné poloze, na př. pomocí sítě h, o, r, i, z, n, t, v níž $ab = ho = or$ atd. a $ho : hr : rn = 1 : 2 : 3$, a do konečných bodů toho šestiúhelníka postaví se kolmice $t = \frac{3r}{2}$, načež se ty kolmice rozdělí ve tři stejné části a hrany krychle vnesou se do hranolu, jak obr. 13. ukazuje.

80. Dvě krychle se společnou trojúhelnou osou k sobě o 180° otočené, dají se do téhož hranolu vyrýsovati, a pobočný roh jedné krychle připadne nad plochu druhé, obr. 15.

81. Plochy z jedné krychle úměrně odvozené spůsobují také úměrné úseky na hranách druhé o 180° otočené krychle.

Vztáhne-li se plocha, která na jedné krychli spůsobuje úseky $^1/a$, $^1/b$, $^1/c$ a na druhé $^1/a'$, $^1/b'$, $^1/c'$ na tři osy x, y, z, z nichž x y leží pod 90° ve vodorovném průmětu krychle na trojúhelnou osu postavených, a z stojí na nich obou kolmo v poloze osy t, a spustí-li se z $^1/a$ souřadnice x y na z, tak aby ve trojbokém výkrojku $(x, y, z, {}^1/a, p. s)$ byly úhly (obr. 15.) $({}^1/a, z) = ({}^1/a', z) = ({}^1/b, z) = ({}^1/b', z)$ atd. $= \xi$, $(p, y) = \omega$, $(x, y) = 90°$; jest pro onu plochu rovnice

$$mx + ny + rz = 1,$$

a taktéž

$$p = \frac{1}{a} \sin \xi ;$$

$$z = \frac{1}{a} \cos \xi ,$$

$$y = \frac{1}{a} \sin \xi \cos \omega ,$$

$$x = \frac{1}{a} \sin \xi \sin \omega ,$$

a tudíž

$$m \cos \xi + n \sin \xi \cos \omega + r \sin \xi \sin \omega = a.$$

Položíme-li za ω přiměřený úhel a pak místo a postupně b, c a taktéž $a'\,b'\,c'$, jest

pro $1/a$ $\omega = 0$ a tudíž $a = m\cos\xi + n\sin\xi$,
„ $1/a'$, $\omega = 180^0$ „ $a' = m\cos\xi - n\sin\xi$,
„ $1/b$, $\omega = 120^0$ „ $b = m\cos\xi - \frac{1}{2}n\sin\xi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,r\sin\xi$,
„ $1/b'$, $\omega = 300^0$ „ $b' = m\cos\xi + \frac{1}{2}n\sin\xi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,r\sin\xi$,
„ $1/c$ $\omega = 240^0$ „ $c = m\cos\xi - \frac{1}{2}n\sin\xi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,r\sin\xi$,
„ $1/c'$, $\omega = 60^0$ „ $c' = m\cos\xi + \frac{1}{2}n\sin\xi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,r\sin\xi$,

z čehož vychází

$$a + a' = b + b' = c + c'$$

a taktéž

$$a + b + c = a' + b' + c'.$$

Jelikož pak

$$a' = a'$$
$$b' = a + a' - b$$
$$c' = a + a' - c,$$

jest

$$a + b + c = 3a' + 2a - b - c$$

nebo

$$a' = \frac{2b + 2c - a}{3}$$

a obdobně

$$b' = \frac{2a + 2c - b}{3}$$
$$c' = \frac{2a + 2b - c}{3}$$

Je-li tudíž dle Millerových známek pro plochu z jedné krychle odvozenou ustanovena známka abc, má tatáž plocha s ohledem na krychli o 180^0 otočenou, známku $a'\ b'\ c'$, při čemž $a' : b' : c' = 2b + 2c - a : 2a + 2c - b : 2a + 2b - c$.

Dle toho vzorce lze poznati, že srostlice dvou krychlí má 6 ploch polohy O_2 a 6 ploch polohy *h*; srostlice osmistěnu má 6 ploch polohy $O_{1/5}$ a 2 plochy polohy *o*; srostlice dvanáctistěnu *d* má 6 ploch polohy $O_{1/4}$ a 6 ploch polohy *h* atd., a že vůbec každá plocha na srostlici odtíná hrany jak jedné tak i druhé krychle v úměrných vzdálenostech.

82. ***Magnetit***, ***Spinel*** a j. vyskytují se často ve srostlicích osmistěnu, a sice buď jsou oba osmistěny úplné, obr. 16.; nebo jest osmistěn dle plochy s *o* rovnoběžné proříznut a jedna polovina ke druhé kolem trojúhelné osy o 180^0 otočena. Obr. 17.

Ryzí zlato objevuje se někdy ve srostlicech s tvarem $O_{1/3}$, Obr. 18., při čemž společná plocha O jde skrze úhlopříčky ploch $O_{1/3}$. Úhly hran a koutů lze ustanoviti ze spojkové hrany s osmistěnou plochou dle vzorce (12).

Pro spojkovou hranu $O' = (o, o_{1/3})$, pro níž jest na O $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, na $O_{1/3}$ $a' = -1$, $b' = 3$, $c' = 1$, jest

$$cos \tfrac{1}{2} O' = - \frac{1}{\sqrt{33}},$$

z čehož

$$\tfrac{1}{2} O' = 100^0 1\tfrac{1}{2}'$$

a tedy kout $K = 200^0 3'$, tupá hrana $H = 360^0 - 200^0 3 = 159^0 57'$.

K témuž výsledku vede proměna známek dle výše vytknutých vzorců, dle níž má plocha $O_{1/3} = 31\bar{1}$ v otočené poloze známku $7\bar{5}5$. Vezme-li se nejkratší osa $= 1$, jest delší osa 7/5 a rovnice společné spojkové hrany H tvarů $O_{1/m}$, $O_{1/m'}$, je-li $m = 3$, $m' = 7/5$, jest dle (12),

$$cos H = - \frac{m m' + 2}{\sqrt{m^2+2}\,\sqrt{m'^2+2}} = - \frac{31}{\sqrt{11}\,\sqrt{99}} = -0{\cdot}9393,$$

z čehož

$$H = 159^0 57'.$$

O síle elektromotorické.

(Podává *Josef Hervert.*)

(Pokračování).

Měřením tepla na spájeném místě různých kovů vzbuzeného aneb spotřebovaného lze nejlépe poznati vztah mezi elektromotorickými silami rozličných kovů. O to se pokusil *Edlund*, zprvu methodou méně spolehlivou [1]), později velmi důkladnou a přesnou, jejížto výsledky přednesl v prosinci r. 1870 v král. švédské akademii v Stokholmu [2]). K tomu účelu používal *Le Roux* [3]) této methody.

[1]) E. Edlund: „Oefversigt af K. V. Ak. Förh. för 1870 Pogg. Ann Bd. 140 p. 435.
[2]) E. Edlund: Pogg. Ann. Bd. 143 p. 404 a p. 534.
[3]) Le Roux: Ann. de chim. et de phys. TX p. 4.

Dva kalorimetry, stejné a vodou naplněné byly vedle sebe postaveny a do každého zapuštěn vismut spájený s mědí. Na to se oběma vedl galvanický proud, avšak tak, že jedním drátem šel od vismutu k antimonu, druhým ve směru opáčném, tak že se jeden drát více zahříval, než druhý a rozdíl teplot v obou měřený obyčejným teploměrem na desitiny stupně rozděleným udával měřitko hledaného tepla.

Tato methoda má sice tu výhodu, že lze určiti teplo v obyčejných jedničkách tepelných, avšak je málo citlivá, poněvadž se nepatrné rozdíly teplot, které zde jsou pro výsledek velmi závažné, měřiti nedají.

Za tou příčinou vymyslil si *Edlund* zvláštní stroj, jakýsi druh vzdušného teploměru, kterým se teplo na místě spájeném spotřebované aneb vzbuzené spolehlivě měřiti dá a který je, pokud možná, docela nezávislým od obyčejného záhřevu spůsobeného galvanickým proudem a poměrného odporu a čtverci síly proudu. Toto teplo je totiž všeobecně mnohem větší, než ono, které se vzbuzuje na místě spájeném a kteréžto se měřiti má, zvláště v drátech o značném odporu, takže by měřením obou výsledek státi se mohl velmi nespolehlivým. Rovněž tak jest stroj Edlundův co možná neodvislým od změn teploty vůkolního vzduchu a konečně má i měrné teplo zkoušených kovů na konečný výsledek nepatrný vliv, což jest taktéž velikou výhodou, poněvadž by určování měrného tepla bylo velmi nesnadné a nespolehlivé. Tento vzdušný teploměr Edlundův je následujícím spůsobem zařízen (viz obr. 9).

Dva stejné válce z tenkého měděného plechu, zevně postříbřené a, b, do nichž jsou zapuštěny dvě mosazné trubice c, c', jsou obklopeny cinkovými válci p, p', kteréžto jsou polírovány, zevně pokostem natřeny a vodou naplněny, — vše k tomu účelu, aby změny teploty zevnějšího vzduchu měly co možná malý vliv na záhřev drátu.

Do trubic c, c' jsou zasazeny dva spájené dráty, jichžto záhřev se měřiti má, takže místo spájené se nalezá as uprostřed válce, a zároveň jsou trubice ty zality smíšeninou vosku a kalafuny, aby byl drát docela isolován od stěn trubice.

Na jedné straně jsou trubice c a c' spojeny s kraje s mosaznými trubicemi h a h' a pak pomocí kaučukových trubic s vodorovnou skleněnou trubicí mm', v nížto se nachází sloupeček barveného líhu i, jehožto pohyb určuje změny teploty a měřiti se dá na měřitku souběžném, v millimetry rozděleném.

Do trubic h a h' zasazeny jsou v k a k' kohoutky, vrtané v podobě latinského T, takže lze buď obě části trubice spojiti mezi sebou a se vzduchem, aneb obě spojiti, avšak od vzduchu zevnějšího odloučiti aneb konečně jednu neb druhou o sobě spojiti se zevnějším vzduchem, a mají ten účel, aby se pomocí jich rozdíly teplot a tlaku vyrovnati a sloupeček před pokusem na přiměřené místo uvésti mohl. Celý přístroj spočívá na mahagonovém podstavci, který lze libovolně skláněti a sklon na oblouku f měřiti.

Jsou-li v trubici c dva spájené kovy A a B a v druhé c' tytéž dva kovy a prochází-li oběma dvojicemi drátů proud týmž směrem ku př. od A k B, nastává v obou stejný záhřev a tudíž se sloupeček líhu nehýbe, jelikož je veškeré spojení neprůdušně uděláno. I patrno, že záhřev drátu způsobený odporem nemá žádného vlivu na pohyb líhu, poněvadž se oteplení to směrem proudu nemění. Probíhá-li však proud oběma páry drátů směry opačnými, jest záhřev v jednom válci větší než v druhém a musí se tudíž líh pohybovati na stranu menšího záhřevu a sice dotud, dokud teplo, kterého válec záhřevem drátu nabývá, se nerovná teplu, které sáláním vůkolnímu vzduchu uděluje. Pak teprvé nastává rovnováha. V pokusech Edlundových stávalo se to obyčejně as za $^3/_4$ hodiny.

Rozdíl ztrát tepla rovná se pak rozdílu tepla v obou válcích vzbuzeného a dá se následujícím spůsobem z pohybu líhu vyvoditi.

Kdybychom měli jen jeden válec, jehož objem by byl V a kdyby se měnila teplota o t a souvisela trubice mm' se zevnějším vzduchem, byla by změna objemu dle zákona *Gay-Lussacova*:

$$nv = V(1 + \alpha t) - V = \alpha V t,$$

kdež v značí objem trubice pro délku 1^{mm}, n počet dílců, o které se posouvá líh v trubici a α míru roztažnosti vzduchu rovnající se 0·003665.

V pokusech Edlundových bylo

$$\frac{v}{V} = k = \frac{1}{128000}$$

a tudíž:

$$nk = \alpha t,$$

takže, zavedeme-li číselné hodnoty, obdržíme pro $n = 1$, $t = 0{\cdot}002134^0$ C. t. j. když se mění teplota o $0{\cdot}002134^0$ C, posouvá se líh o 1^{mm}, z čehož patrno, že se tímto vzdušným teploměrem Edlundovým dají měřiti změny teploty, obnášející tisíciny stupně Celsiova. Zároveň se přesvědčil Edlund, že přilínání líhu ku stěnám trubice a tření na stěnách jsou tak malé, že nemají žádného, alespoň ne patrného vlivu na pohyb sloupečku v trubici, takže teploty tím strojem stanovené jsou zcela spolehlivy.

To by ovšem platilo jen tehdáž, když bychom měli toliko jeden válec a když by trubice mm' byla ve spojení se vzduchem, takže by se tlak neměnil. Nicméně dá se snadno ukázati, že se nechá uvedeným spůsobem teplota určovati i při zřízení Edlundově. Jestliže se totiž v jednom válci roztahuje vzduch teplem, překáží vzduch v druhém válci volnému se roztahování, takže se tím spůsobem mění tlak. Jeli B tlak před změnou teploty ve válci a b tlak po změně teploty, je dle zákona Mariotto-Gay Lussacova změna objemu:

$$V(1 + \alpha t)\frac{B}{b} - V = nv = nk\,V,$$

z čehož jde:

$$\frac{B}{b} = \frac{1 + nk}{1 + \alpha t}.$$

Poněvadž však jsou oba válce stejné a teplota v jednom o tolik stoupá, oč v druhém klesá, máme pro změnu objemu v druhém válci výraz:

$$V - V(1 - \alpha t)\frac{b}{B} = nv = nk\,V$$

čili

$$\frac{B}{b} = \frac{1 - \alpha t}{1 - nk}$$

a z obou rovnic následuje opět:

$$\alpha t = nk,$$

takže i tu svrchu uvedený vztah mezi teplotou a pohybem líhu platným zůstává.

Z této teploty t a z mocnosti proudu J dá se určiti následujícím spůsobem teplo na místě spájeném vzbuzené aneb pohlcené. Líh přestane se pohybovati, když válec od drátu nabývá tolik tepla, mnoho-li sdílí okolnímu vzduchu. Toto teplo A dá se dle *Dulonga* a *Petita* určiti následující rovnicí:

$$A = Ma^{\tau}(a^{\delta} - 1) + N\delta^{1 \cdot 233}$$

kdež τ je teplota vůkolního vzduchu, δ rozdíl teplot válce a vzduchu, M, N, a stálé veličiny a sice je pro stupně Celsiovy $a = 1{\cdot}0077$. Místo této složité rovnice lze však v pokusu Edlundově použíti rovnice mnohem jednodušší. Rozvineme-li a^{δ} v řadu kladouce $la = c$, obdržíme:

$$a^{\delta} = 1 + c\delta + \frac{c^2\delta^2}{2} + \frac{c^3\delta^3}{3} + ..$$

$$a^{\tau}(a^{\delta} - 1) = c\,a^{\tau}\delta + \frac{c^2 a^{\tau}}{2}\delta^2 + \frac{c^3 a^{\tau}}{3}\delta^3 + \ldots$$

Řada ta je velmi sbíhavá, poněvadž δ v pokusech Edlundových bylo nejvýše 1—2° a poněvadž beře-li se 0·001° C za jedničku, jako v těchto pokusech se děje, $la = c = 0{\cdot}00000767$.

Za tou příčinou lze se v oné řadě obmeziti na první dva členy, takže:

$$A = cMa^{\tau}\delta + \frac{c^2Ma^{\tau}}{2}\delta^2 + N\delta^{1.233}$$

a^{τ} je veličina proměnná, poněvadž se τ mění; jelikož ale změny ty byly v dotčených pokusech nepatrné, lze považovati i a^{τ} za stálé a vyjádřiti A výrazem:

$$A = k\delta + \lambda\delta^2,$$

v němž přiměřeným stanovením veličin k a λ i člen $N\delta^{1.233}$ zahrnut jes t.

Rozdíl teplot válce a vůkolního vzduchu S není znám, dá se však určiti, jelikož je jakousi funkcí rozdílu střední teploty válce a okolního vzduchu, kterážto se mění z dvou příčin, 1. poněvadž odporem drátu vzniká záhřev a 2. poněvadž se na místě spájeném mění teplota. Má-li první příčina za následek změnu střední teploty T a druhá t, je patrně, působí-li obě příčiny v témž smyslu,

$$\delta = f(T + t)$$

a působí-li ve smyslu protivném,

$$\delta = f(T - t).$$

Rozvineme-li funkci f v řadu postupující dle mocnin výrazů $(T + t)$ a $(T - t)$, lze obmeziti se, jak pokusy ukázaly, na první dva členy, takže v jednom případě je

$$\delta = \mu (T + t) + \nu (T + t)^2$$

a v druhém:

$$\delta = \mu (T - t) + \nu (T - t)^2$$

a protož teplo vzbuzené v jednom případě:

$$A_{\mathrm{I}} = a (T + t) + b (T + t)^2$$

a v druhém

$$A_{\mathrm{II}} = a (T - t) + b (T - t)^2$$

Jich rozdíl čili

$$A_{\mathrm{I}} - A_{\mathrm{II}} = 2at + 4b\,Tt$$

značí rozdíl tepla vzbuzeného, když jde proud jednou tím, podruhé opáčným směrem a tudíž dvojnásobné teplo Q, které se na místě spájeném vzbuzuje aneb pohlcuje, takže:

$$Q = at + 2b\,Tt.$$

V rovnici této se měří t pohybem lihu v trubici mm', když jde proud jednou tím, po druhé opáčným směrem. T značí rozdíl teplot válce a vzduchu, který nastane, když se drát odporem zahřívá. Jeli h stálá veličina poměrná odporu spájeného drátu a J mocnost proudu, je teplo galvanickým proudem vzbuzené v drátu odporem podle analogie výrazu A_{I}

$$Q_1 = hJ^2 = a\,T + b\,T^2.$$

Určíme-li z toho výrazu T a zavedeme-li je do Q, obdržíme, poněvadž $Q = a_1\,E\,J$ je poměrno elektromotorické síle a mocnosti proudu:

$$\frac{a_1\,EJ}{2b} = \sqrt{\frac{hJ^2}{b} + \frac{a^2}{4b^2}} \,.\, t$$

čili

$$\frac{a_1\,EJ}{a} = \sqrt{\frac{4bh}{a^2}\,J^2 + 1} \,.\, t$$

a položíme-li

$$\frac{a_1 E}{a} = \alpha \text{ a } \frac{4bh}{a_2} = \beta,$$

obdržíme

$$\alpha = \frac{t}{J} \sqrt{\beta J^2 + 1}.$$

Ve výrazu tomto se měří t pohybem líhového stoupku J tangentní bussolou, kdež β závisí na veličině h a má tudíž pro rozličné dráty rozličnou hodnotu. Chceme-li je určiti, třeba toliko znáti dvé příšlusných hodnot za J a t ku př. J a J_1, t a t_1, Pomocí jich obdržíme:

$$\beta = \frac{J^2 t_1^2 - J_1^2 t^2}{J^2 J_1^2 (t^2 - t_1^2)}.$$

Známe-li však β, dá se α snadno vypočísti. Tato veličina α značí, jak z jejího výrazu patrno, ono teplo, které se na místě spájeném vzbudí aneb pohltí, prochází-li dvojicí drátů proud, jehož mocnost $= 1$, a je, jak svrchu vidno, poměrna elektromotorické síle při doteku dvou kovů účinné, takže může nám býti měřítkem elektromotorických sil, určíli se pro rozličné dvojice kovů. To také *Edlund* učinil, užívaje k tomu cíli kovů lučebně čistěných, spájených pomocí cínu a majících podobu tenkého drátu.

Tím spůsobem nalezl následující hodnoty elektromotorických sil účinných při doteku rozličných kovů počínaje řadu kovem nejvíce positivním a konče ji kovem nejvíce negativním.

+	α
Fe	130·99
Cd	6·88
Zn	0·34
Cu	0·00
Ag	1·29
Au	14·76
Pb	22·20
Sn	24·71
Al	30·77
Pt	45·00
Pd	96·23
Bi	783·01

Tato řada je zároveň řadou elektrického napětí. Srovnáme-li ji však s řadami, jaké určili *Volta*, *Seebeck*, *Munk*, *Pfaff*, *Péclet* a j., vidíme, že se valně od nich liší. Tak ku př. řada ustanovena Pfaffem postupuje od konce positivného k negativnému takto:

$+$ *Zn*, *Cd*, *Sn*, *Pb*, *W*, *Fe*, *Bi*, *Sb*, *Cu*, *Ag*, *Au*, *U*, *Te*, *Pt*, *Pd* —

Rozdíly obou řad jsou velmi značné. Tak jest v řadě Pfaffově *Zn* positivný ve spojení s *Fe*; v Edlundově naopak. V Pfaffově je *Bi* positivný ve spojení s *Pt*; naopak v Edlundově. *Sn* a *Pb* jsou u Pfaffa positivnější, než *Cu*; u Edlunda naopak atd.

Příčina tohoto nesouhlasu dá se snadno nalézti. Edlundova řada udává elektromotorické síly při bezprostředném doteku kovů, kdežto při obyčejném Voltově pokusu, jímžto se řady elektrického napětí určují, působí více elektromotorických sil; neboť je známo, že pevná tělesa na povrchu svém shuštují plyny, takže se při tom dotýkají kovové desky se vzduchem a jinými plyny a plynové částice mezi sebou. Avšak plynové baterie a galvanická polarisace dokazují, že i tímto dotekem povstávají elektromotorické síly, takže pokus Voltův udává výslednici trojích elektromotorických sil, čímž uvedené rozdíly s dostatek jsou odůvodněny.

Aby poznal, kterak souvisí elektromotorické síly uvedených kovů s jich thermoelektrickými vlastnostmi, určoval Edlund u všech uchylky na citlivém magnetoměru s astatickými jehlicemi a zrcadlovým zařízením spůsobené thermoelektrickým proudem při témže rozdílu teplot $+10^0$ a při témže odporu. Za tou příčinou zahnul každou dvojici spájených drátů, takže byly oba rovnoběžny a zapustil je korkovou zátkou do skleněné trubice dole uzavřené, any končily nahoře mosaznými sloupky, do kterých se zapialy dráty vedoucí k magnetoměru. Trubice ta ponořena byla do širší nádoby s vodou obalené bavlnou, aby se pokud možno málo měnila teplota, která se určovala teploměrem procházejícím středem korkové zátky a dotýkajícím se kovů na spájeném místě.

Jelikož jsou uchylky na magnetoměru poměrny mocnosti proudu, obdržel tím spůsobem Edlund měřítko thermoelektrických sil, které podává následující řada, ač se určují pro každý kov ve spojení s mědí.

	$-n$
Fe	146·18,
Cd	9·79,
Zn	0·76,
Cu	0·00,
Ag	1·89,
Au	23·92,
Pb	27·27,
Sn	38·84,
Al	42·15,
Pt	58·41,
Pd	115·04,
Bi	835·10;

kterážto řada, jak patrno, úplně souhlasí s řadou dříve uvedenou pro síly elektromotorické, což ukazuje k zřejmé souvislosti obou sil a společnému jich zdroji, totiž teplu, které se zde proměňuje v elektřinu.

Tomu-li tak, musí záviseti tyto síly na množství tepla, které se proměňuje v elektřinu; čili jinými slovy řečeno, síly ty musí býti funkcemi teploty. To skutečně bylo pozorováno a pokusy zjištěno, dříve ještě než ona souvislost zkusmo byla na jevo vynešená a dá se, jak *A. Wüllner* [1]) ukázal z všeobecných vět mechanické theorie tepla vysvětliti. Tak pozoroval již r. 1823 prvně Angličan *Cumming* [2]), že zlaté, stříbrné, měděné mosazné a cinkové dráty spájené se železným drátem dávají zahřáty byvše na spájeném místě positivnou uchylku, že však do červena rozpáleny byvše spůsobují proud směru opačného, takže je uchylka negativná. Podobně shledal *Becquerel* [3]), když se zahříval drát spájený z mědi a železa, že rostla stále mocnost proudu, až dosáhla při 300° největší hodnoty, odkud jí stále ubývalo, až se konečně v žáru proud obrátil. *Regnault* [4]) a *Wiedemann* [5]) ukázali, že i při nižších teplotách počínaje asi od 50° elektromotorická síla thermoelektrických proudů není

[1]) A. Wüllner: Poggen. Ann. Bd. 145 p. 636. 1872.
[2]) Cumming: Electro-dynamics section 104 p. 193. Cambridge 1827. Cambridge Philos. Trans. 1823 addition to p. 61.
[3]) Becquerel: Ann. de chim. et de phys. T XLI.
[4]) Regnault: „De la mésure des temperatures". Memoires de l'Acad T. XXI.
[5]) Wiedemann: Galvanismus Bch I. 416.

poměrna rozdílu teplot. Tolikéž pozoroval *Le Roux*, že teplo, které se pohlcuje aneb budí, když prochází galvanický proud místem, kde jsou vismut a měď spájeny, je větší, když se dělá pokus při 100°, než při obyčejné teplotě [1]). Nejrozsáhlejší však v příčině té pokusy vykonali *Hankel* [2]) a *Thomson* [3]), takže dle nich je thermoelektrická řada kovů při vyšší teplotě zcela jiná než při nižší teplotě. Zároveň shledal Thomson, že vzniká thermoelektrický proud, i když se jeden a týž kov na jednom místě zahřívá, na druhém ochlazuje. To sice již před ním pozorovali *Seebeck*, *Becquerel*, *Gaugain* a *Magnus*, avšak Thomson nalezl ještě tu zvláštnost, že prochází-li takovým drátem z jednoho a téhož kovu proud, že se pozorují tytéž výjevy, jako u pokusu Peltierova, totiž že u některých kovů, jako u mědi nastává záhřev, jde-li positivný proud od teplejšího místa k studenějšímu, u jiných však kovů, jako železa a platiny, že se naopak pozoruje ochlazení.

Všechny tyto uvedené pokusy poukazují k tomu, že je elektromotorická síla nejen na jednom místě kovů na př. tam, kde jsou spájeny, účinnou, nýbrž i na jiných místech. To dotvrzují i výzkumy Edlundovy.

Dělíme-li totiž řadu thermoelektrických sil příslušnými elektromotorickými silami, obdržíme následující podíly:

Fe — *Cu*	1·12
Cd — *Cu*	1·42
Zn — *Cu*	2·24
Cu — *Ag*	1·47
Cu — *Au*	1·62
Cu — *Pb*	1·23
Cu — *Sn*	1·57
Cu — *Al*	1·37
Cu — *Pt*	1·30
Cu — *Pd*	1·20
Cu — *Bi*	1·07

[1]) Le Roux: Ann. de chim. et de phys. p. 4 T X.
[2]) Hankel: Pogg. Ann. Bd. 62.
[3]) W. Thomson: „On the electro-dynamics properties of metals" Philos Transact. for 1856 p. 649. „Acount of researches in thermoelectricity". Phil. Mag. VIII. p. 62 1854.

Rozdíly podílů těchto nemohou pocházeti nikterakž od chyb pozorování, poněvadž tyto jsou mnohem menší, nechají se však odůvodniti následujícím spůsobem, podávajíce tak zřejmý doklad k uvedenému vysvětlení těchto úkazův.

Je-li totiž elektromotorická síla nejen na místě spájeném účinnou, nýbrž i na jiných místech kovů, dá se vyjádřiti takto:

$$K = E + E_A + E_B,$$

kdež E značí elektromotorickou sílu na místě spájeném, E_A elektromotorickou sílu v kovu A a E_B touž v kovu B účinnou. Avšak Q teplo na místě spájeném vzbuzené aneb spotřebované, je-li mocnost proudu $= 1$, je

$$Q = \alpha = \frac{a_1}{a} E = p E$$

a tudíž poměr obou, jejž svrchu uvedená řada pro rozličné kovy podává:

$$\frac{K}{Q} = \frac{1}{p} + \frac{E_A + E_B}{Q}$$

Kdyby $E_A = E_B = 0$, byl by poměr ten pro všechny kovy stejnou a stálou veličinou, takto ale může dle rozmanitých hodnot E_A a E_B míti rozličnou hodnotu.

Že elektromotorická síla je skutečně funkcí teploty, nalezl *Avenarius* [1]), jenžto uvádí pro ni následující rovnici:

$$E = (t_2 - t_1)\,[a + b\,(t_2 + t_1)],$$

kdež t_2 a t_1 značí teploty spájených míst, a a b stálé veličiny, z nichžto b je mnohem menší a může býti buď positivní, jako pro *Zn* — *Cu*, aneb negativní jako pro zinek a ocel.

Z výrazu toho je patrno, že se může státi E i negativní t. j. směr thermoelektrického proudu obrátiti, jestliže b je neg. a pro vysoké teploty

$$b\,(t_2 + t_1) > a.$$

A takto, jak vidno, jsou všechny uvedené úkazy v překrásném souhlasu, nezvrátí-li jej budoucí pozorování a bádání opět.

---

[1]) Avenarius: Poggen. Ann. Bd. 119 a Bd. 122.

Obecná poučka o funkcích.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

V lonském ročníku časopisu „Nouvelles annales de mathématiques“ pag. 469 podává pan *Moret-Blanc* důkaz následujícího theoremu:

Budiž $f(x)$ libovolná, v mezích od a do x konečná a spojitá funkce. Mezi a a x vložme $(n-1)$ člen řady geometrické

$$a\sqrt[n]{\frac{x}{a}},\quad a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^2},\quad \ldots\quad a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}$$

a označme Mg arithmetický průměr hodnot

$$f(a),\ f\left[a\sqrt[n]{\frac{x}{a}}\right],\ \ldots\ f\left[a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}\right],\ f(x).$$

Dále vložme $(n-1)$ člen řady arithmetické

$$a+\frac{x-a}{n},\ a+\frac{2(x-a)}{n},\ \ldots\ a+(n-1)\frac{x-a}{n}$$

mezi a a x a budiž Ma arithmetický průměr hodnot

$$\frac{f(a)}{a},\quad \frac{f\left(a+\frac{x-a}{n}\right)}{a+\frac{x-a}{n}},\ \ldots\ \frac{f\left(a+(n-1)\frac{x-a}{n}\right)}{a+(n-1)\frac{x-a}{n}},\quad \frac{f(x)}{x}$$

Pro $n=\infty$ jest pak

$$\lim\frac{Ma}{Mg}=\frac{l\,\frac{x}{a}}{x-a}.$$

kterýžto výraz nezávisí na tvaru funkce f.

Podáváme tuto důkaz jiný, kratší a jednodušší.

Položme $\frac{x-a}{n}=\Delta x$,

$$\frac{x-a}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{f\left(a+k\frac{x-a}{n}\right)}{a+k\frac{x-a}{n}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(a+k\Delta x)}{a+k\Delta x}\Delta x=J,$$

dále

$$\frac{x}{a}=b,\quad \frac{1}{n}=\Delta_1 x,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^k}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\ (ab^{k\Delta_1 x})\,\Delta_1 x = J_1\ ;$$

pak bude patrně

$$Ma = \frac{J}{(n+1)\,\Delta x} = \frac{n\,J}{(n+1)\,(x-a)},$$

$$Mg = \frac{J_1}{(n+1)\,\Delta_1 x} = \frac{n\,J_1}{n+1},$$

a tudíž dělíme-li,

$$\frac{Ma}{Mg} = \frac{J}{(x-a)\,J_1}.$$

Přejdeme-li k limitě pro $n = \infty$, obdržíme

$$\lim J = \int_a^x \frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi,\ \lim J_1 = \int_0^1 f(-ab^{\xi})\,d\xi$$

a zavedením nové proměnné $\eta = -ab^{\xi}$ do posledního integrálu,

$$\lim J_1 = \frac{1}{l\,b}\int_a^x \frac{f(\eta)}{\eta}\,d\eta.$$

Z toho následuje konečně

$$\lim \frac{Ma}{Mg}\ \lim = \frac{J}{(x-a)\,J_1} = \frac{l\,b\displaystyle\int_a^x \frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi}{(x-a)\displaystyle\int_a^x \frac{f(\eta)}{\eta}\,d\eta} = \frac{l\,\frac{x}{a}}{x-a},$$

což bylo dokázati.

Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech.

(Podává dr. *F. J. Studnička.*)

(Pokračování).

Na str. 74. tohoto časopisu vyložen jest přímý spůsob, jakým možná ustanoviti obsah čtyrstěnu, znají-li se souřadnice jeho rohů. Ač spůsob tento jest zcela přirozený a přímý, jest v celku dosti rozvláčný, pročež zasluhuje povšimnutí i každý jiný rychleji, byť i nepřímě k cíli vedoucí.

Spůsobů takových podáno již několik, jak *R. Baltzer* nedávno vyložil *), chtěje jednoduchý spůsob svůj odporučiti. K těmto pak připojiti sluší i následující:

Značí li x_k, y_k, z_k souřadnice bodu B_k a B_1 prozatím bod počáteční, takže

$$x_1 = 0, \; y_1 = 0, \; z_1 = 0$$

a spustíme li z bodu B_2 — obr. 8. — kolmou $B_2 P$ na rovinu $B_1 B_3 B_4$, bude pro $B_1 B_k = r_k$

$$2 B_1 B_3 B_4 = r_3 r_4 \sin a_{34},$$

$$B_2 P = r_2 \sin a_{23} \sin (P_2 P_4),$$

kdež význam jednotlivých písmen podle článku uvedeného jest patrný; i jest tudíž

$$6T = r_2 r_3 r_4 \sin a_{23} \sin a_{34} \sin (P_2 P_4),$$

aneb zavedeme-li rožný sinus **)

$$6T = r_2 r_3 r_4 \sin O; \tag{1}$$

a poněvadž, jak známo, též platí

$$\sin^2 O = \begin{vmatrix} 1 & , \cos a_{23}, & \cos a_{24} \\ \cos a_{23}, & 1 & , \cos a_{34} \\ \cos a_{24}, & \cos a_{34}, & 1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

obdržíme z tohoto vzorce, zavedeme-li α_k, β_k, γ_k co kosinusy úhlů, jež uzavírá r_k s osami souřadnicovými, podle poučky

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 = 1,$$

$$\alpha_k \alpha_i + \beta_k \beta_i + \gamma_k \gamma_i = \cos a_{ki},$$

---

*) Viz „Berichte über die Verhandlungen der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig,“ 1870. pag. 97—98.

**) Viz *Studnička* „Základové sférické trigonometrie“ pag. 10.

$$sin^2 O = \begin{vmatrix} \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2, & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3, & \alpha_2\alpha_4 + \beta_2\beta_4 + \gamma_2\gamma_4 \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3, & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2, & \alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4 + \gamma_3\gamma_4 \\ \alpha_2\alpha_4 + \beta_2\beta_4 + \gamma_2\gamma_4, & \alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4 + \gamma_3\gamma_4, & \alpha_4^2 + \beta_4^2 + \gamma_4^2 \end{vmatrix}$$

a tudíž podle známého pravidla o násobení determinantů platícího

$$sin^2 O = \begin{vmatrix} \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, \\ \alpha_4, & \beta_4, & \gamma_4, \end{vmatrix}^2 ,$$

načež poslední vzorec pro $6T$ se promění v

$$6T = \begin{vmatrix} r_2\alpha_2, & r_2\beta_2, & r_2\gamma_2 \\ r_3\alpha_3, & r_3\beta_3, & r_3\gamma_3 \\ r_4\alpha_4, & r_4\beta_4, & r_4\gamma_4 \end{vmatrix} ;$$

považíme-li pak, že tu všeobecně

$$r_k\alpha_k = x_k, \quad r_k\beta_k = y_k, \quad r_k\gamma_k = z_k,$$

obdržíme pro obsah čtyrstěnu, jehož roh leží v bodu počátečním, vzorec

$$6T = \begin{vmatrix} x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

z něhož povstane vzorec známý

$$6T = \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1, & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1, & y_4 - y_1, & z_4 - z_1 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

má-li bod B_1 souřadnice x_1, y_1, z_1.

Ještě rychleji se přijde k cíli, užije-li se normálního tvaru rovnice roviny B_1 B_3 B_4 a vyjádří-li se vzdálenost bodu B_2 od této roviny vzorcem

$$B_2P = x_2 \cos\alpha + y_2 \cos\beta + z_2 \cos\gamma ;$$

abychom určili tyto kosinusy, promítněme plochu B_1 B_3 B_4, jak *Baltzer* v uvedeném pojednání činí, na jednotlivé roviny souřadnicové, načež snadno obdržíme,
značí-li p ploský obsah tohoto trojúhelníku.

$$\cos\alpha = \frac{p_{yz}}{p}, \quad \cos\beta = \frac{p_{zx}}{p}, \quad \cos\gamma = \frac{p_{xy}}{p};$$

dosadíme-li pak tyto hodnoty do vzorce předešlého, bude

$$6T = 2x_2p_{zy} + 2y_2p_{zx} + 2z_2p_{xy},$$

kdež ale podlé známého pravidla

$$2p_{yz} = \begin{vmatrix} y_3, & z_3 \\ y_4, & z_4 \end{vmatrix}, \quad 2p_{zx} = \begin{vmatrix} z_3, & x_3 \\ z_4, & x_4 \end{vmatrix}, \quad 2p_{xy} = \begin{vmatrix} x_3, & y_3 \\ x_4, & y_4 \end{vmatrix}$$

takže dosazením těchto hodnot do vzorce předešlého ihned se obdrží vzorec (3), z něhož přeložením počátečního bodu plyne vzorec (4).

O vzorcích goniometrických.

(Podává *K. Zahradník.*)

Rozdělíme-li kruh třemi průměry na stejné sextanty a vpíšeme-li pak do nich, od určitého rozhraní počínajíce, jedním směrem funkce *sin*, *tang*, *sec*, druhým pak příslušné kofunkce *cos*, *cot*, *cosec*, obdržíme schema

$$\begin{array}{ccccc} & \cos\alpha & & \sin\alpha & \\ \cot\alpha & & & & tg\,\alpha \\ & \mathrm{cosec}\,\alpha & & \sec\alpha & \end{array}$$

v němž obsažena jsou tato pravidla:

1. *Součin funkcí protilehlých rovná se* 1.
2. *Součin funkce první a třetí rovná se druhé neb prostřední.*
3. *Součin funkce první, třetí a páté rovná te součinu druhé, čtvrté a šesté.*
4. *Podíl dvou sousedních funkcí rovná se funkci vedlé dělence položené.* *)

---

*) První dvě pravidla uveřejnil již Dr. Brehm v Grunertově Archivu.

Úlohy.

I. Z mathematiky.

Řešení úlohy 32.

(Podává *Ant. Sucharda*, technik.)

Dosadíme-li do předložené rovnice

$$tg\,2x + tg\,3x = 3tg\,x$$

známé výrazy

$$tg\,2x = \frac{2tg\,x}{1-tg^2 x},\quad tg\,3x = \frac{3tg\,x - tg^3 x}{1-3tg^2 x},$$

obdržíme po snadné redukci

$$tg^4 x - \frac{1}{4} tg^2 x - \frac{1}{4} = 0,$$

z kteréžto rovnice jde

$$tg\,x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}}.$$

(Tutéž úlohu řešil *B. Bečka*, žák VIII. tř. g. v Jičíně, *Lud. Grossman*, žák VI. tř. r. v Litomyšli, *Aug. Hanzlovský*, žák VII. tř. g. v Písku, *Fr. Chmelík*, žák VI. tř. r. g. na M. Straně, *Jos. Kašpr*, žák VIII. tř. g. v Písku, *Fr. Škramlík*, žák VII. tř. r. g. v Táboře, *V. Šťastný*, *B. Wittich*, žák VII. tř. r. g. na M. Straně, *Al. Wolf*, žák VIII. tř. č. g. v Č. Budějovicích).

Řešení úlohy 34.

(Podává *V. Zelený*, žák VI. tř. r. g. na M. Straně.)

Dle poučky Mac-Lauriny obdržíme především

$$l\,(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{x^5}{5} - \cdots$$

a podle známého vzorce

$$\left(\sum_{s=1}^{n} a_s\right)^2 = \Sigma (a_s)^2 + 2\Sigma a_s a_t$$

$$[l(x+\sqrt{1+x^2})]^2 = x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\,\frac{x^4}{3} + \left[\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)^2 + 2\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\right] x^6 - \ldots;$$

spořádáme-li pravou stranu rovnice této, povstane konečně

$$[l(x+\sqrt{1+x^2})]^2 = x - \frac{2}{3}\,\frac{x^4}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\,\frac{x^6}{3} - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\,\frac{x^8}{4} + \ldots,$$

při čemž $x^2 < 1$.

(Tutéž úlohu řešil spůsobem jiným *B. Bečka*, a *J. Kašpr.*)

Řešení úlohy 35.

(Podává *K. Brož*, filosof.)

Hodnota předloženého integrálu omezeného jest $\frac{\pi}{2}$.

Úloha 36.

Mají se určiti všechny kořeny rovnice

$$6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1 = 0.$$

II. Z fysiky.

Řešení úlohy 20.

(Podává *M. Boda*, ing. ve Vídni.)

Poměr průřezů obou drátů bude 1 : 5·88, t. j. drát železný bude míti 5·88 krát větší průřez drátu měděného; průměry se budou míti k sobě, jako 2·08 : 5·058.

(Tutéž úlohu řešil *J. Sallabašev*, žák VI. tř. ob. r. g. na M. Str.)

Řešení úlohy 28.

(Podává *Fr. Chmelík.*)

Kývadlo dolejší musilo by se o $\frac{108745}{97456384}$ své délky prodloužiti, aby stejně kývalo s hořejším a hořejší by se musilo dole o $\frac{108745}{97565129}$ své délky zkrátiti, aby stejně rychle kývalo s dolejším.

(Tutéž úlohu řešil: *Ot. Mušík*, žák VI. tř. r. v Hradc Králové, *A. Pilnáček*, žák VII. tř. g. v Jičíně, *Jos. Sádek*, žák VII. tř. g. v K. Hradci, *Fr. Škramlík*, *B. Wittich*, *Al. Wolf.)*

Řešení úlohy 31.

(Podává *B. Wittich.*)

Hmoty obou koulí mají se k sobě jako 1 : 3.

(Tutéž úlohu řešil: *B. Bečka*, *Fr. Chmelík*, *J. Kašpr*, *Ot. Mužík*, *A. Pilnáček*, *Fr. Škramlík*, *V. Šťastný*, žák VI. tř. r. g. na M. Straně.)

Úloha 32.

Která čísla a jak by se změnila v theorii duhy, kdyby exponenty lomu vody byly vesměs o polovičku větší?

Úloha 33.

Z bodu A pohybuje se hmotný bod počáteční rychlostí

$$c = \frac{k}{a\sqrt{2}}$$

směrem kolmo na $OA = a$ stojícím, zároveň pak tu působí v bodu O síla přítažná

$$\varphi = \frac{2kr + k^2}{2r^3},$$

značí-li k veličinu stálou a r vzdálenost od O; v jaké dráze pohybuje se bod tento, v jaké době a s jakou rychlostí dostane se z A do B, jestli

$$OB = \frac{a}{4}.$$

Věstník literární.

Seznam spisů, jednajících o počtu pravděpodobnosti a theorii nejmenších čtverců. *)

(Sestavil dr. *F. J. Studnička.*)

Airy	On the algebrical and numerical theory of errors of observations. Cambridge 1861.
Barrois	Essai sur l' application du calcul des probabilités aux assurances contre l'incendie. Lille 1835.
Bellavitis	Su la teoria della probabilita. Venezia 1857.
Benard	Note sur une question de probabilité. Paris 1835.
Bernoulli	Ars conjectandi. Basileae 1713.
Bicquilly	Du calcul des probabilités. Toul 1783. (Německý překlad 1788.)
Bienaymé	Sur la probabilité des erreurs. (Jour. de Liouv I. s. t. XVII.)
Binet	Sur une question de l' analyse des probabilités, relat. à une série d' epreuves à chances variables. Paris 1844.
Biver	Theorie analytique des moindres carrés (J. de Liouv I. s. t. XVIII.)
Boole	On the application of the theory of probability to the question of the combinaison of testimonies or judgements. London 1857.
Bordoni	Sugli esami, ossia sul merito di un esaminato. Pavia.
Bosch	Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Rottweil 1864.
Bravais	Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d' un point. Paris 1844.
Bravi	Teorica e pratica del probabile. Bergamo 1840.
Casorati	Intorno ad alcuni punti dela teoria dei minimi quadrati. Roma 1868.
Catalan	Deux problèmes de probabilités (J. de Liouv. I. s. t. I.)
Clark	The laws of chance or a mathematical investigation of the probabilities. London 1758.
Colding	Fremstilling af en approximeret mindste-Quadrat methode. Kjöbenhafen 1857.
Condorcet	Application de l' Analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. Paris 1785.
Coste	Question de probabilité applicable aux decisions rendues par les jurés. (J. de Liouv. I. s. t. VII.)
Cotes	Harmonica mensurarum. Cambridge 1722.

*) Seznam tento není arci úplný, obsahuje jen spisy, o nichž jsem se mohl dozvěděti v Praze; kdo by věděl o spisech sem patřících, nechť mi laskavě oznámí titul jejich.

Cournot Theorie des chances et des probabilités. Paris 1843. (Německy 1849.)

Dedekind Bemerkungen zu einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Cr. J. B. 50.)

„ Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. (Berliner Akademie 1831.)

Degen Tabularum ad faciliorem probabilitatis computationem utilium Enneas. Kiöbenhavn 1824.

Dienger Ausgleichung der Beobachtungsfehler und die Methode der kleinsten Quadratsummen, Braunschweig 1857.

„ Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Prag 1872.

Faà de Bruno Traité élémentaire du calcul des erreurs. Paris 1869.

Fischer Höhere Geodaesie I. Theorie der Beobachtungsfehler. Darmstadt 1845.

Freeden Die Praxis der Methode der kleinsten Quadrate für die Bedürfnisse der Anfänger. Braunschweig 1863.

Fries Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Braunschweig 1842.

Galloway Probabilities. Edinburg 1838.

Gauss Theoria combinationis observationum errorum minimis obnoxiae. Gottingae 1821. (franc. 1855.)

„ Supplementum Theoriae. Gottingae.

Gerling Die Ausgleichsrechnungen der praktischen Geometrie oder der Methode der kleinsten Quadrate. Hamburg 1843.

Goos Zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. Kreuznach 1865.

Gourand Histoire du calcul des probabilités. Paris 1848.

Guibert Solution d' une question relative à la probabilités des jugements rendus à une majorité quelconque. (J. de Liouv I. s. t. III).

Hagen Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1837.

Hansen Commentatio de gradus praecisionis computatione. Berl. 1830.

„ Von der Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig 1867.

Hauteserve Traité élémentaire sur les probabilités. Paris 1834.

„ Application de l' Algèbre élémentaire au calcul des probabilités, suivi d' une Application de ce calcul aux jeux de whist et de piquet, Paris 1840.

Helmert Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendung auf die Geodaesie und die Theorie der Messinstrumente, Leipzig 1872.

Hofmann Anwendung der Combinationslehre auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Freiberg 1841.

Huberdt Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1845.

Hugens De ratiociniis in ludo aleae (Schooten, Exerc. math. libri quinque) Lugd. Batavorum, 1657.

Chauvenet A treatise on the method of least squarest, or the application of the theory of probabilities in the combination of observations, Philadelphia 1868.

Jahn Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf das wissenschaftliche und praktische Leben, Leipzig 1839.

Jellet Die Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von Schnuse, Braunschweig 1860.

Kanner Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1870.

Lacroix Traité élémentaire du Calcul des probabilités, 2. éd. Paris 1822. (německy 1818).

Laplace Théorie analytique des probabilités, Paris 1812. (něm. 1819).

„ Essai philosophique sur les probabilités, Paris 1814.

„ Applications du calcul des probabilités aux operations géodésiques. Paris 1818.

Liagre Calcul des probabilités et théorie des erreurs, Bruxelles.

Littrow Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf das wissenschaftliche und praktische Leben, Wien 1833.

Macleroth Mémoire à consultèr sur la marche et la succession des événements aléatoires, Paris 1840.

Mertz Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf Glücksspiele, Lotterien, Lebensversicherungen, Wahlen, Zeugenaussagen, Urtheilssprüche u. s. w., Frankfurt 1854.

Meyer Essai sur une exposition nouvelle de la théorie analytique des probabilités à posteriori, Liége 1857.

Moivre The Doctrine of Chances or a Method of calculating the Probabilities of Events in Play, 2. ed. London 1738.

Mondesir Solution d' une question qui se présente dans le Calcul des Probabilités. (J. de Liouv. I. s. t. II.)

Montmort Essai d' analyse sur les jeux de hazard. Paris 1708.

Morgan The principle and doctrine of assurances, annuities, on liver etc. London 1821.

„ Essai on probabilities, London 1838.

„ Treatise on theory of probabilities, London 1847.

Müller Theorie nejmenších čtverců, Praha 1870. (lithogr.)

Neovius Särobok i mindsta quadrat-methodee, Äbo 1870.

Oettinger Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1852.

Poisson Recherches sur la probabilité des jugements, précedées des Règles générales du Calcul des probabilités, Paris 1837. (německy 1841.)

Puissant Mémoires sur l' application du Calcul des probabilités aux mesures géodésiques, Paris 1832.

Quetelet Théorie des probabilités, Bruxelles 1853.

Ramus Sur une question des probabilité relative aux corrections des hauteurs barométriques. (Crell, J. Bd. 24.)

(Pokračování.)

O záření tepla v rozličných ústředích.

(Podává Dr. *Aug. Seydler.*)

I.

Náuka o teple domáhá se teprv oné výše rozvoje, na které spatřujeme mechaniku a opírající se o ni vědy, zejmena astronomii a optiku. Století XVII. a XVIII., jež můžeme nazvati zlatou dobou právě uvedených věd (dostačí v ohledu tom poukázati na jmena: *Kepler*, *Galilei*, *Newton*, *Huyghens*, *Euler*, *Clairaut*, *Young*, *Fresnel*) nemůže vykázati se žádným zvlášť vynikajícím výskumem z oboru náuky o teple. Teprv *Fourier* (1807) počal na základech přesných vyšetřovat pohyb tepla v tělesech pevných, a odtud počíná řada skvělých pokroků v náuce jak o teple samém, tak o vztahu jeho k jiným zjevům. Thermodynamika stala se jaksi ohniskem fysikálního bádání, jež i ostatní odborné náuky světlem svým ozařuje. Že teprv novější doba přistoupila k vyšetření úkazů tepla, z toho následuje, že základní věty (principie), kteréž co poslední výsledky zkusného či induktivního bádání obdržíme, a z nichž opět cestou dedukce vyvoditi můžeme všechny úkazy v jistý obor příslušné, nejsou v náuce o teple ještě úplně ustáleny; nejnovější doba však v té věci značně pokročila a můžeme doufati, že se náuka o teple stane časem právě tak průzračnou jako mechanika. Mezi větami, jež bádání v oboru thermodynamiky odkrylo, přisluší jedno z prvních míst zákonu vyslovenému *Clausiem* takto: *) „teplo nemůže samo sebou přejíti ze studenějšího tělesa v teplejší bez současné náhrady či kompensace, t. j. nenastane-li zároveň jiná příslušná proměna“.

Takováto příslušná proměna jest buď současný přechod určitého množství tepla z tělesa teplejšího v studenější, neb proměna určitého množství práce v teplo.

---

[3]) *Clausius* Abhandlungen über die mech. Wärmetheorie sv. I. str. 134.

Za obyčejných poměrů děje se ovšem přechod tepla od teplejšího tělesa k studenějšímu, ku př. při sdílení tepla, při smísení tekutin rozličné teploty, při záření za poměrů jednoduchých. Tato část věty shora uvedené byla také již dávno mlčky uznána, ano od Fouriera i výslovně upotřebena při založení náuky jeho o sdílení tepla.[1]) Jsou však případy, v kterých jest možno pomocí tělesa proměnlivé teploty převáděti teplo z tělesa studenějšího v teplejší [2]); a v takových případech musí vždy zároveň buď určité množství práce upotřebeno býti k tomu, aby jisté množství tepla vzniklo, aneb nastati současný opačný přechod tepla Patrně jest tedy lichý názor těch, kteří jako *Zeuner* pokládají větu Clausiovu za samozřejmou a tudíž vyslovení její za zbytečné; spíše možno nazvat ji nejvyšším *postulatem* theorie tepla jejž sice přísně dokázati nemůžeme, jehož pravděpodobnost nám však důkaz přísný v dostatečné míře nahražuje. Byl však také z druhé strany vysloven náhled, že by bylo možno, zvláštním soustředením paprsků teplových, pomocí zrcadel a čoček, docíliti toho, aby teplo beze zvláštní náhrady přecházelo z tělesa chladnějšího v teplejší. S náhledem tím, který jest nejlepším důkazem proti samozřejmosti věty Clausiovy, setkáváme se zejmena u *Rankine-a.* Na základě svých a Clausiových prací přišel totiž *W. Thomson* [3]) k výsledku tomu, že vesmír blíží se jakémus stavu rovnováhy, poněvadž se neustále mění práce v teplo a neustále teplo přechází z teplejších v studenější tělesa, kdežto opačná proměna není bez kompensace možná. Konečný tento stav byl by dosažen, když by všechna práce byla spotřebována t. j. proměněna v teplo a všechny rozdíly teploty vyrovnány. Vzhledem k tomuto náhledu obírá se Rankine [4]) otázkou, nejsou-li též naopak možné děje takové, jimiž se rozptylené teplo na jednotlivých místech opět soustřeďuje, čímž by vznikaly nové zdroje práce a pohybu teplového ve vesmíru. Kdybychom na př. předpokládali, že éther (ústředí, v kterém se světlo a teplo zářivé pohybuje) jest obmezen, byly by paprsky teplové přijdouce

---

[1]) *Fourier.* Théorie analytique de la chaleur; str. 2.

[2]) *Clausius* l. c. Abhandlung I.; srovn. První zpráva jednoty českých mathematiků str. 51 a násl.

[3]) Phil. Mag. Ser. IV. Vol. IV.

[4]) tamtéž.

k hranicím étheru odraženy a mohly by, jak se domnívá Rankine, soustřediti se v jednom neb v několika ohniskách. Myslí tudíž Rankine, že jest možno soustřediti odrazem teplo vycházející od tělesa určité teploty, tak že v ohnisku vzniká teplota větší. Byť tedy hvězdy vyzařováním neustále se ochlazovaly, vyhasínaly a tudíž na nich veškeren život vyhynul, tož by mohly, přijdouce do některého takového ohniska, vzplanouti, v páry se proměniti, čímž by počátek vzala nová doba života jejich.

Rankine tento náhled pronesl všeobecně, co *pouhou možnost*; Clausius *přísně*, pomocí *mathematiky* možnost tuto zkoumal, a výsledek bádání jeho byl záporný, čímž ubájena jest platnost věty svrchu vytknuté. On určil totiž [1]) množství tepla, jež dvě plochy *stejné teploty* za nejrozličnějších poměrů na vzájem vysílají. To dostačí úplně, neboť kdybychom shledali, že z jedné plochy přechází více tepla na druhou než naopak, tož by v nejbližším okamžení byla již teplota první plochy o něco menší než teplota druhé, a přece by ještě, dokud by teplota její neklesla pod jistou mezi, více tepla od ní k druhé ploše přecházelo než ve směru opáčném.

Dospěl pak Clausius k výsledku následujícímu:

1. Máme-li dvě plochy A a B proti sobě ležící, jež k sobě na vzájem teplo vysílají, volíme-li na první ploše A nekonečně malou částici či prvek ds, na druhé ploše B prvek ds', je-li *mohutnost vyzařovací* [2]) první částice e, druhé částice e', je-li dále rychlost tepla v ústředí s částicí ds bezprostředně se stý-

---

[1]) Clausius, l. c. Abhandlung VIII.

[2]) Při stejné teplotě vyzařují rozličná tělesa v stejné době nestejné množství tepla; říkáme, že mají rozličnou mohutnost vyzařovací (vis emissionis), a tuto můžeme jako každou jinou veličiu měřiti. Mohli bychom se domnívati, že tento jednoduchý a vůbec známý úkaz odporuje větě výše vytknuté; jestli že ku př. postavíme proti sobě dvě zrcadla dutá o společné ose, a jestli umístíme v ohnísku každého zrcadla těleso jiné jakosti, tož bude jedno těleso méně tepla vyzařovati než mu těleso druhé pošle. Však tělesa, jež méně tepla vyzařují, též ho méně pohlcují, a sice jest, jak *Kirchhof* dokázal, *mohutnost pohlcovací* (vis absorptionis) v přímém poměru k mohutnosti vyzařovací, tak že v našem případě sice více tepla *dopadne* na jedno těleso než na druhé, ale každé těleso přece jen stejné množství tepla *pohltí*.

kajícím v, a podobně rychlost tepla v ústředí při prvku ds', v': tož jsou množství tepla, jež oba prvky k sobě na vzájem vysílají, v poměru následujícím

$$e v^2 : e' v'^2$$

2. Z toho následuje dále: nechceme-li předpokládati, že již při jednoduchém záření tepla (tedy bez soustředění) svrchu uvedená věta o přechodu tepla své platnosti pozbývá — což by se všem dosavádním zkušenostem příčilo — musí patrně mohutnost vyzařovací při stejné teplotě býti v opačném poměru čtverce teplové rychlosti v ústředí sousedícím. Neboť pak bude

$$e v^2 = e' v'^2 \tag{1}$$

a množství tepla, jež obě tělesa na vzájem vyzařují, budou stejná.

3. Platí-li věta tato, vyjádřená rovnicí (1), pak si posílají dvě tělesa na vzájem *vždy* stejné množství tepla, ať již nastane nějaké soustředění tepla nebo ne. Byť se i teplo vycházející z jednoho tělesa soustředilo úplně na druhém, nemůže přece těleso toto vyšší teploty nabýti, více tep'a obdržeti než těleso první. —

Postup Clausiových myšlenek jest tedy následující:

Kvantity tepla, jež dvě tělesa stejné teploty na vzájem sobě posílají, mají se k sobě v *každém případě*, tedy při obyčejném záření i při koncentraci, jako

$$e v^2 : e' v'^2$$

Při *obyčejném záření* musíme však na základě všeobecné zkušenosti předpokládati, že není možno, aby teplo přecházelo z tělesa studenějšího v těleso teplejší, a tudíž také aby při stejné teplotě více tepla přecházelo z tělesa jednoho v druhé nežli ve směru opáčném; *proto* musí platiti rovnice (1). Pak ale musí i při soustředení paprsků platiti věta o přechodu tepla částěji již uvedená. Z vývodu toho patrno, že není věta tato samozřejmou; všeobecné platnosti nabývá jen tehdy, platí-li pro jistý obmezenější kruh úkazů (totiž pro obyčejné záření). Tuto platnost smíme však na základě všeobecné zkušenosti dobrým právem předpokládati. Zajímavé jest též, že Clausius hledaje důkaz pro větu svou nalezl zároveň ještě větu jinou, která stanoví poměr mezi mohutností vyzařovací a rychlostí tepla v sousedním ústředí. —

Clausius dokazuje tyto věty své z toho, že paprsky světlové a ovšem i teplové potřebují vždy minimum času, aby od jednoho bodu přišly k druhému, t. j. ze všech možných cest zvolí si vždy nejkratší. Na základě *této* věty mohl ovšem důkaz svůj provésti, aniž by při tom k cestě přihlížel, kterouž se v každém zvláštním případě paprslek bráti musí, a rozřešiti tudíž úlohu svou spůsobem velmi všeobecným a zároveň elegantním. Dlužno však připomenouti, že věta o nejmenší cestě světla neb tepla jest posledním členem v dlouhé řadě dedukcí; aby tedy důležité věty (1.—3.) Clausiem vyslovené staly se všeobecně přístupnějšími, jest velmi žádoucno míti pro ně důkaz jiný, opírající se o věty více známé a průzračné. Jest účelem tohoto pojednání, ukázati, jakým as spůsobem by se důkaz takový dal vésti.

II.

Především lze velmi snadno ukázati, že případ koncentrace nevyžaduje jakési zvláštní úvahy, jelikož se od všeobecnějšího případu jakéhokoliv záření (bez soustředění paprsků) podstatně nelíší. Soustředění nastane tehdáž, kdy se paprsky vycházející z jednoho bodu opět v jednom bodu scházejí, tak že se dvě plochy vyzařující na vzájem teplo v případu tom k sobě mají, jako předmět a příslušný obraz, a že každému bodu jedné plochy přisluší bod plochy druhé.

Pozorujme nyní dvě částice plochové, jež *bez soustředění* na vzájem teplo vyzařují. K vůli jednoduchosti si představme, že částice ty jsou kolmé na kuželech paprskových, jež vyzařují (v. obr. 1). Tohoto zjednodušení smíme vždy upotřebiti, t. j. místo skutečných částic plochových smíme vždy vzíti průměty jejich na rovinu kolmou k vyzářenému kuželi paprskovému; neboť průměty ty budou sice v poměru kosinusovém menší než plochy samé, ale vyzařování jejich bude v poměru právě opáčném větší. Množství tepla, jež částice ds plochy A (obr. 1.) vysílá k částici ds' plochy A', jest v přímém poměru

1. k mohutnosti vyzařovací e (částice ds),
2. k velikosti částice ds,
3. k otvoru $d\sigma$ kužele paprskového, který vycházeje z ds má za základní plochu částici ds', který jest tedy utvořen

z paprsků vycházejících z kteréhokoli bodu částice ds a vedených k obvodu částice ds'. Je-li částice ds nekonečně malá, jest ovšem bod, z kterého kužel vychází, lhostejný. Množství tepla vyzářeného od částice ds k částici ds' jest tedy (volíme-li přiměřenou jednotku pro míru tepla):

$$dQ = e\,ds\,d\sigma \qquad (2)$$

Právě tak lze vyjádřiti množství tepla vyslaného od částice ds' k částici ds:

$$dQ' = e'ds'\,d\sigma' . \qquad (3)$$

Když však nastane soustředění paprsků, tož může se státi ds' obrazem částice ds a naopak, a my pravíme: *každému bodu* částice ds přísluší jistý bod částice ds', a všechny z onoho bodu vycházející paprsky sbírají se v tomto. To jest však jen geometrická abstrakce, která ze stanoviska fysikálního není zcela oprávněna. V skutečnosti nejsou žádné *body*; ony body obsažené v částicích ds a ds', jež jsou v sobě v poměru předmětu a obrazu, jsou v skutečnosti nekonečně malé částice vyššího (druhého) stupně.

Kdežto při obyčejném záření teplo vycházející z částice nekonečně malé přes konečnou plochu se rozprostírá, sbírá se při soustředění na ploše velmi (nekonečně) malé. Z toho již patrno, že žádných mezí nestává mezi obyčejným zářením a mezi soustředěním paprsků; my bychom byli v rozpacích, kdybychom měli udati, *jak malá* musí býti plocha ozářená všemi paprsky vycházejícími z jedné částice protějšího tělesa, aby záření přestalo býti obyčejným a aby nastalo soustředění.

Proto můžeme pojednávati o soustředění tímž způsobem jako o záření obyčejném.

Co se týče otvorů $d\sigma$ a $d\sigma'$ kuželů paprskových, dlužno ještě následující podotknouti. Kdyby bylo soustředění dokonalé, t. j. kdyby skutečně paprsky vycházející z jednoho bodu spojovaly se opět v bod jediný, pak by patrně kužel paprskový měl dva vrchole. Otvor jednoho vrchole byl by libovolný, otvor druhého vrchole byl by však prvním určen. Tato neurčitost jednoho otvoru byla by podstatným rozdílem mezi soustřeďováním paprsků a zářením obyčejným; neboť při tomto jest velkost obou otvorů určena velkostí a tvarem příslušné (protilehlé) částice plochové. V skutečnosti má se však věc poněkud jinak.

Mysleme si, že ústředí mezi částicemi ds a ds' (obr. 2) jsou tak uspořádána, že částici ds' přisluší nepoměrně velký otvor $d\sigma$ příslušného kužele paprskového u ds; tož i naopak otvor $d\sigma'$ u ds' bude nepoměrně velký u porovnání s částicí ds.

V případě tom budou paprsky BA' a AB' sobě velmi blízky; čím menší jejich vzájemná odchylka, tím menší chyby se dopustíme, předpokládáme-li, že se spojují v paprsek jediný, což také při soustředění skutečně činíme. Mohli bychom tedy pojmouti soustředění paprsků též takovýmto spůsobem: při obyčejném záření jest poměr částice ozářené k otvoru příslušného kužele paprskového konečný, při soustředění nekonečně malý; aneb: všechny paprsky vycházející z plochy nekonečně malé pokrývají na protějším tělese plochu konečnou, při soustředění však plochu nekonečně malou.

III.*

Pro množství tepla, které dvě částice na vzájem vyzařují a které lze vyjádřiti stejným spůsobem jak při obyčejném záření tak při soustředění paprsků, můžeme si zjednati vedle svrchu uvedeného výrazu (rovnice 2. a 3.) též následující. Mysleme si, že vychází z ds kužel paprskový s otvorem $d\omega$ a jiný stejného otvoru z ds'; první kužel vykrojí z plochy ds' částici df', druhý z ds částici df; mezi těmito veličinami a mezi veličinami dříve uvedenými budou pak platit rovnice:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{ds'}{df'}, \quad \frac{d\sigma'}{d\omega} = \frac{ds}{df} \tag{4}$$

a tudíž i další rovnice

$$dQ = \frac{e\, ds\, ds'\, d\omega}{df'} \tag{5}$$

$$dQ' = \frac{e'\, ds\, ds'\, d\omega}{df} \tag{6}$$

a konečně

$$\frac{dQ}{dQ'} = \frac{e\, df}{e'\, df'} \tag{7}$$

Z rovnice té plyne následující věta:

„Množství tepla, jež dvě libovolné částice plochové na vzájem vysílají, mají se k sobě jako částice plochové, které jsou vykrojeny z daných ploch dvěma kuželi paprskovými stejného otvoru, násobené příslušnou mohutností vyzařovací."

Známe-li tedy velkost částic těchto, jest nám tím i množství tepla z jedné strany na druhou přecházejícího (až na jakýs stálý koefficient) dáno; a úlohou naší by bylo v každém zvláštním případě velkost tu vypočítati. Úloha ta jest v složitějších případech dosti obtížná; obmezím se zde pouze na následující velmi jednoduchý případ.

Mezi oběma plochama P a P' budiž obsaženo dvojí ústředí jedno oddělené od druhého plochou tvaru jakéhokoliv. Rychlost paprsků v ústředí u P budiž v, u P' v'.

Paprsek vycházející z bodu A (obr. 3.) plochy P a dopadající na bod B oddělující obě plochy láme se tak, že dopadá na bod B' plochy P'. Utvořme nyní kužel paprskový následujícím spůsobem: v B sestrojíme normálu BZ a proložíme přímkami BZ a BA rovinu BXZ, k této pak sestrojíme kolmici BY, čímž si zjednáme soustavu souřadnic $BXYZ$; v rovině BXY si vytkneme obdélník $BCDE$ a uvedeme též k bodům C, D, E paprsky z A, čímž obdržíme kužel paprskový v podobě jehlance $ABCDE$. Je-li uhel $BAC = d\alpha$, $BAE = d\beta$, platí pro otvor $d\omega$ kužele paprskového rovnice

$$d\omega = d\alpha \, d\beta \tag{8}$$

Příslušná částice df' na ploše P' jest pak obdélník $B'C'D'E'$, předpokládáme-li, což nám dle jedné dřívější poznámky vždy je dovoleno, že částice ta je kolmá k dopadajícímu paprsku. Položme $AB = u$, $BB' = u'$, úhel dopadu $ABZ = \varphi$, úhel lomu $= \varphi'$ $BC = db$, $BE = db'$, $B'C' = dc'$; budiž dále CZ' (obr. 4.) normála k ploše dělící v bodu C, $d\varrho$ její naklonění k normale BZ, r poloměr křivosti oblouku BC na ploše dělící, konečně $d\alpha'$ naklonění lomených paprsků BB' a CC' a u'' vzdálenost jich průseku A' od B. Pak jest

$$dc' = (u' + u'') \, d\alpha' \tag{9}$$

aneb, poněvadž

$$db = \frac{u d\alpha}{\cos\varphi} = \frac{u'' d\alpha'}{\cos\varphi'} \tag{10}$$

$$dc' = \frac{u \cos\varphi' \, d\alpha + u' \cos\varphi \, d\alpha'}{\cos\varphi} \tag{11}$$

Nyní bude naší úlohou vyjádřiti $d\alpha'$ pomocí $d\alpha$. K tomu nám bude napomocna rovnice mezi úhlem dopadu a lomu:

$$\frac{\sin\varphi}{v} = \frac{\sin\varphi'}{v'} \tag{12}$$

z které vyvodíme další rovnici:

$$\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{v} = \frac{\cos\varphi'\, d\varphi'}{v'} \tag{13}$$

differencováním.

Patrně jest

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= -(d\alpha + d\varrho) \\ d\varphi' &= -(d\alpha' + d\varrho) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

a když tyto hodnoty do rovnice (13) vložíme, a $d\alpha'$ z ní určíme, obdržíme

$$d\alpha' = \frac{v'\cos\varphi\, d\alpha + (v'\cos\varphi - v\cos\varphi')\, d\varrho}{v\cos\varphi'} \tag{15}$$

Dále máme rovnici

$$d\varrho = \frac{db}{r} = \frac{u\,d\alpha}{r\cos\varphi} \tag{16}$$

a tudíž

$$d\alpha' = \frac{v' r\cos\varphi^2 + u(v'\cos\varphi - v\cos\varphi')}{v\, r\cos\varphi\cos\varphi'}\, d\alpha \tag{17}$$

Vložíme-li výraz ten do (11), obdržíme konečně

$$dc = \frac{r(u v\cos\varphi'^2 + u' v'\cos\varphi^2) + u u'(v'\cos\varphi - v\cos\varphi')}{r\cos\varphi\cos\varphi'}\,\frac{d\alpha}{v} \tag{18}$$

můžeme tudíž položiti

$$dc' = B\frac{d\alpha}{v} \tag{19}$$

Myslíme-li si nyní, že podobným spůsobem vychází plochý svazek paprskový v téže rovině jako dřívější svazek ABC od plochy P' z bodu A', tož určuje na ploše P malý oblouček dc (co obdobu obloučku dc') a abychom délku jeho určili, nepotřebujeme leč zaměniti ve výrazu pro dc' veličiny u a u', v a v', φ a φ', mimo to ale vzíti buď úhel $d\varrho$ určený oběma normálama neb příslušný poloměr křivosti r záporně. Tím se však veličina B (součinitel zlomku $\frac{d\alpha}{v}$ v rovnici 18.) nemění a my můžeme tudíž bezprostředně napsati rovnici

$$dc = B \frac{d\alpha}{v'} \tag{20}$$

Podobným spůsobem lze určiti veličinu $B'E' = de'$ a obdobnou veličinu de (v. obr. 5.)

Nazveme-li $d\varrho'$ úhel normaly EZ'' v bodu E s normalou BZ, r' příslušný poloměr křivosti, $d\beta'$ naklonění lomeného paprsku EE' k BB', u''' vzdálenost průseku obou paprsku A'' od bodu B, máme pak následující rovnice

$$B'E' = de' = (u' + u''')\, d\beta' \tag{21}$$

$$db' = ud\beta = u'''\, d\beta' \tag{22}$$

a tudíž i

$$de' = ud\beta + u'\, d\beta' \tag{23}$$

Poněvadž se úhel dopadu i lomu paprsku AE od příslušných úhlů φ a φ' paprsku AB neliší leč malou veličinou druhého stupně, tož musíme jiným spůsobem než dříve vyjádřiti $d\beta'$ pomocí $d\beta$. K tomu poslouží nám podmínka, že paprsek dopadající AE, paprsek lomený EE' a normála EZ'' v jedné rovině ležeti musí. Jsou-li $\lambda_1\, \mu_1\, \nu_1\, \lambda_2$ atd. kosinusy směru tří přímek, tož podmínka, že přímky ty mají ležeti v jedné rovině, jest vyjádřena jak známo, rovnicí:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0$$

Jsou pak úhly směru

přímky AE : $90^0 - \varphi$, $90^0 + d\beta$, φ
přímky EE' : $90^0 - \varphi'$, $90^0 + d\beta$, φ'
přímky EZ'' : 90^0 $\quad 90^0 - d\varrho'$, $d\varrho'$

Obdržíme tudíž podmiňující rovnici

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi, & -d\beta, & \cos\varphi \\ \sin\varphi', & -d\beta', & \cos\varphi' \\ 0 & d\varrho', & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

aneb

$$\sin\varphi\, (\cos\varphi'\, d\varrho' + d\beta') = \sin\varphi'\, (\cos\varphi\, d\varrho' + d\beta) \tag{25}$$

čili

$$v\, (\cos\varphi'\, d\varrho' + d\beta') = v'\, (\cos\varphi\, d\varrho' + d\beta), \tag{26}$$

a tudíž

$$d\beta' = \frac{v' d\beta + (v' \cos\varphi - v \cos\varphi') d\varrho'}{v} \tag{27}$$

Jest však

$$d\varrho' = \frac{u d\beta}{r'} \tag{28}$$

a následovně

$$d\beta' = \frac{r' v' d\beta + u (v' \cos\varphi - v \cos\varphi') d\beta}{r' v} \tag{29}$$

a konečně

$$de' = \frac{r' (uv + u'v') + u u' (v' \cos\varphi - v \cos\varphi')}{r'} \frac{d\beta}{v} \tag{30}$$

čili

$$de' = \frac{B' d\beta}{v} \tag{31}$$

My vidíme, že se výraz nazvaný B' opět uemění, zaměníme-li veličiny u a u', v a v', φ a φ' a položíme-li místo r', $-r'$; tato proměna dostačí, abychom si zjednaly výraz pro délku oblouku, jejž určuje na ploše P svazek paprskový vycházející od plochy P' a procházející osou BY. Je-li tedy otvor svazku tentýž jako otvor svazku ABE, totiž $d\beta$, obdržíme rovnici

$$de = \frac{B' d\beta}{v'} \tag{32}$$

Jelikož jsou částice plochové df a df' obdélníky o stranách dc, de, dc', de', máme rovnice

$$df = \frac{B B' d\alpha d\beta}{v'^2} \tag{33}$$

a

$$df' = \frac{B B' d\alpha d\beta}{v^2} \tag{34}$$

Vložíme-li výrazy ty do rovnice (7) obdržíme konečně hledanou rovnici

$$\frac{dQ}{dQ'} = \frac{e v^2}{e' v'^2} \tag{35}$$

kterouž jest důkaz Clausiovy věty proveden; neboť mají-li kvantity tepla, jež dvě částice plochové na vzájem vysílají, býti stejné, musí platiti rovnice

$$e v^2 = e' v'^2$$

A je-li vyhověno této rovnici, pak jsou také ona množství tepla skutečně stejná, ať již přechod tepla spojen jest se soustředěním paprsků či ne. Důkaz zde provedený platí ovšem jen pro případ velmi jednoduchý: tehdy, kdy mezi oběma plochama nachází se toliko dvojí ústředí, u každé plochy jedno; ale my bezprostředně nahlížíme, jakým způsobem by se dal všeobecnějším učiniti. Dostačí k tomu pokračovati stále touže cestou. Kdyby místo plochy P', která dopadající paprsky pohlcuje, zaujímala jiná plocha dělící druhé ústředí od třetího, tož bychom museli paprsky po lomu jejich do třetího ústředí stejným způsobem vyšetřiti. Jediný rozdíl byl by ten, že by průmět svazku paprskového na dělící plochu P' nebyl všeobecně obdélník, nýbrž rovnoběžník (obr. 6). My bychom pak mohli doplniti rovnoběžník ten způsobem v obrazci naznačeným v obdélník o dvojnásobné ploše, a svazek paprskový, jehož základní plocha by byl obdélník ten, bychom v jeho dalším průběhu vyšetřovali způsobem dříve vyvinutým. Co by pak platilo o jednom svazku paprskovém, platilo by ovšem i o druhém, jehož základní plocha by byla polovice základnice prvé. Rovněž bychom pokračovali, kdyby se nalezala čtyry nebo více ústředí mezi oběma plochama, ano i tehdy, kdyby se ústředí nepřetržitě měnilo, v kterém případě bychom museli přejíti od konečného počtu ústředí k nekonečnému. Odraz by mohl při tom pojímán býti co lom, při kterém exponent lomu jest — 1. Tyto poznámky vzhledem k cestě, jakou bychom se chtíce důkaz úplný provésti, bráti měli, dostačí, neb při skutečném počítání obdržíme pro veličiny B a B' výrazy na nejvýš složité, aniž by se nám při tom něco nového a poučného naskytlo.

IV.

Ke konci této úvahy nebude snad zbytečno seznati některé případy, v kterých by se při povrchnějším ohledání dala předpokládati možnost přechodu tepla z tělesa studenějšího v těleso teplejší, čili (což jest stejné) možnost rozdílu v množství tepla, jež dvě tělesa stejné teploty na vzájem vysílají.

Mysleme si ellipsoid rotační (obr. 7.) jehož dutá vnitřní plocha jest zrcadlem; v ohniskách jeho umístěna jsou dvě tělesa A a B na vzájem teplo vyzařující, jež dopadá z jednoho tělesa na druhé buď přímo buď po odražení od vnitří plochy ellipsoidu. Tělesa ta buďtež tak malá, že teplo přímo dopadající můžeme u porovnání s množstvím tepla odraženého zanedbati. Teplo na vzájem vysílané budiž v tomto případě stejné. A nyní obalme těleso A atmosférou průhlednou, v které rychlost paprsků jest a-kráte menší než v ostatním prostoru. Je-li skutečně platen dřívější zákon, že vyzařování jest v opáčném poměru čtverce rychlosti, tož bude v tomto případě vyzařování tělesa A a^2-kráte větší než v prvním.

Jest-li že jsou kvantity tepla, jež obě tělesa A a C v prvním případě na vzájem vysílají, stejné, tož zdá se, obdrží v druhém případě těleso C více tepla než těleso A, poněvadž jeho mohutnost vyzařovací zůstala nepromněněnou, kdežto vyzařování tělesa A se stalo a^2-kráte větší.

Skutečně by tomu tak bylo, kdyby tělesa A a C byla pouhými body, poněvadž však toto fysikálně jest nemožno, tož nemohou se soustřediti všechny z A vycházející paprsky na tělese C, nýbrž určitá část jich musí se minouti toho tělesa a přispěti k oteplení prostoru samého.

Jestliže tedy provedeme proměnu svrchu uvedenou, a tím změníme množství tepla z A vycházejícího, promění se tím zároveň ne sice veškeré teplo z B vycházející ovšem ale část jeho na A dopadající v stejném poměru, takže teplo na vzájem vysílané bude opět na obou stranách stejné. Budiž na př. těleso A i atmosféra jeho koulí, tož patrně zahalují paprsky vycházející z A a dotýkající se povrchu jeho, na př. CC' (obr. 8.) po lomu svém kouli A' jejíž poloměr r' má následující poměr k poloměru r koule A:

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = a.$$

Můžeme tedy těleso A, je-li obklopeno ústředím o rychlosti paprsků $= \frac{1}{a}$, nahraditi jiným tělesem A', jehož povrch jest a^2-kráte větší povrchu tělesa A, jehož mohutnost vyzařovací rovná se mohutnosti tělesa B. Patrně platí substituce ta jak vzhledem k teplu vyslanému od tělesa A k tělesu B, tak i vzhledem k teplu naopak od B k A vyslanému.

Podobný případ byl by následující: dva rotační ellipsoidy protínají se v kruhu, jehož rovina jest kolmá k společné ose a prochází společným ohniskem C (obr. 9.); část obou ellipsoidů ležící v prostoru uzavřeném jest odňata. V ohniskách A, B, C umístěna jsou tři tělesa, která jsouce stejné jakosti, velkosti a teploty na vzájem proti sobě teplo vyzařují. Jsou-li tělesa ta u porovnání s ellipsoidy dostatečně malá, můžeme opět zanedbati teplo přímo vysílané a přihlížeti pouze k teplu odraženému Odráží se však do ohniska C všechno teplo vycházející z A a dopadající na plochu DFE, tedy vyzářené uvnitř prostoru $ADFE$, a toliko paprsky ležící v kuželu DAE minou se tělesa C; totéž platí o paprscích vycházejících z B; i zde nedopadají na C jen paprsky kužele DBE; ostatní všechny (tak zdá se) slouží k oteplení tělesa C. Mohlo by se tedy na první pohled mysliti, (a to vším právem, kdyby bylo možno, aby tělesa A, B, C stala se mathematickými body) že těleso C více tepla příjme než vydá, že teplota jeho tedy stoupá; neboť zdá se, že přijímá všechno teplo vycházející od dvou jemu rovných těles, vyjma teplo vyzářené v obou kuželích paprskových DAE a DBE, jež lze přiměřenou volbou obou ellipsoidů libovolně zmenšiti. Případ ten mohli bychom rozšířiti tak, že bychom sestavili libovolný počet ellipsoidů okolo společného ohniska a umístili v tomto těleso C, v ostatních pak ohniskách stejný počet těles A, B.., jež by vysílala na těleso C odrazem od ellipsoidických zrcadel teplo své. Zde bychom při povrchním rozumování očekávali u větší ještě míře soustředění tepla na tělese C; snadno však odkryjeme při podrobnějším rozboru podobným jako v prvém případě spůsobem v čem by záležela chyba naše. A tak by nás skoumání jednotlivých případů vedlo cestou induktivní k téže větě, kterou Clausius všeobecným spůsobem dokázal.

O differenciálních rovnicích ploch obalujících.

(Podává *G. Blažek.*)

Pohybuje-li se plocha známých vlastností v prostoru takovým spůsobem, že dle daného pravidla svou polohu a tvar svůj mění, jest s ní všeobecně spojena plocha nová, jež se první v každé poloze dotýká, již nazýváme *plochou obalující soustavu ploch prvních.* Plocha obalující obsahuje průsečnice posloupných poloh plochy pohyblivé, lze ji tudíž považovati za povstalou pohybem plochy dané.

Poloha a tvar plochy ustanovuje se však stálými veličinami, *parametry*, v rovnici plochy se vyskytujícími; má-li se tedy pohyb plochy a změna tvaru jejího naznačiti, nutno považovati tyto parametry za veličiny proměnné. Tak na př. vyjadřuje rovnice

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

kouli poloměru r, jejíž střed má souřadnice a, b, c; pohyb a změnu tvaru koule naznačíme tudíž všeobecně změnou veličin a, b, c a r.

Má-li však v pohybu a v změně tvaru panovati jisté pravidlo, nelze parametrům uděliti hodnoty od sebe neodvislé, nýbrž ustanovením zvláštní hodnoty parametru jednoho musíme zároveň znáti hodnoty všech ostatních, t. j. obsahuje-li rovnice pohyblivé plochy $(n+1)$ proměnný parametr, musí mezi nimi panovati n výminečných rovnic; vyjádříme-li pomocí těchto rovnic n parametrů odvisle proměnných parametrem neodvisle proměnným, jenž se a nazývati má, lze rovnici plochy pohyblivé psáti ve formě

$$f(x, y, z, a)=0,$$

neb stručněji

$$f=0;$$

sousední poloha plochy naznačí se přechodem veličiny a v $a+\delta$ v čemž znamená δ veličinu nekonečně malou; rovnice plochy v nové poloze zní tedy

$$\bigg/^{\delta=0} f(x, y, a+\delta) = 0,$$

a spojení obou rovnic značí křivku, v níž se dvě sousední polohy plochy protínají, jejímž geometrickým místem jest dle předešlého plocha obalující. Rovnici této plochy najdeme tedy vyloučením parametru a z posledních dvou rovnic; druhá z nich dá se však patrně nahraditi výrazem

$$\bigg/^{\delta=0} \frac{f(x, y, z, a+\delta) - f(x, y, z, a)}{\delta} = 0,$$

t. j. rovnicí

$$\frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0,$$

tak že ustanovení rovnice plochy obalující záleží na vyloučení parametru a z rovnic

$$f = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0. \qquad (2)$$

Pohyb plochy bývá však v některých případech všeobecným, že nelze z něho vyvinouti potřebný počet výminečných rovnic mezi parametry; pak nezbývá k naznačení pravidelného pohybu než scházející podmínky nahraditi tím, že považujeme parametry neurčité za libovolné funkce jediného, neodvisle proměnného; jsou-li $a_1, a_2, \ldots a_n$ parametry neurčité, pak třeba položiti

$$a_1 = \varphi_1(a), a_2 = \varphi_2(a), \ldots a_n = \varphi_n(a),$$

v čemž všeobecně φ označuje funkci libovolnou.

Nutným následkem okolnosti této jest, že i rovnice plochy obalující obsahuje funkce libovolné; chceme-li však tyto odstraniti, třeba z rovnic (1) a (2) vyvoditi nové, k vyloučení n parametrů sloužící; prostředků k tomu poskytuje nám částečné differencování rovnice (1) podle x a y, při čemž, poněvadž v rovnici plochy obalující veličina a objeviti se nesmí, vedle z i parametr a za funkci veličin x a y se považuje.

Následující řádky mají za úkol vyvoditi nejkratší způsob ustanovení n výminečných differenciálních rovnic za účelem vyloučení n parametrů. Differencování rovnice (1) podle x a y provedeme tím způsobem, že z počátku jen z za odvisle proměnnou, a za stálou veličinu, pak a za odvisle proměnnou, x, y, z však za veličiny stálé považovati budeme; podle známých pravidel počtu differenciálního vyjde

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}=0,$$

t. j. vzhledem k rovnici (2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{3}$$

Uvážíme-li naznačený spůsob differencování, poznáme snadno, že výrazy tyto obsahují vedle původních proměnných x, y, z a parametrů a, a_1, a_2, a_n jen první differenciální poměry veličiny z podle x a y.

Píšeme-li dále

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_1=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=f_2=0, \tag{4}$$

a nakládáme-li s f_1 a f_2 právě tak jak s f, vyvineme

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}=0;$$

vyloučením veličin $\frac{\partial f_1}{\partial a}$ a $\frac{\partial f_2}{\partial a}$ z těchto čtyr rovnic najde se

$$\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial f_2}{\partial x}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}}, \tag{5}$$

a spojením posledních dvou členů této srovnalosti

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}=0,$$

kterážto differenciální rovnice stupně druhého označena budiž znamením

$$f_3=0;$$

nakládajíce s ní jako s rovnicemi (4) najdeme dále

$$\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}},$$

což uvedeno v spojení s rovnicí (5) poskytuje srovnalost

$$\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}}.$$

Spojení druhého neb třetího členu této srovnalosti s členem posledním poskytuje opět rovnici differenciální stupně třetího, již píšeme ve formě

$$f_4 = 0.$$

Naznačeným spůsobem pokračujíce vyvineme sobě n člennou srovnalost

$$\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}} = \dots\dots = \frac{\frac{\partial f_n}{\partial x}}{\frac{\partial f_n}{\partial y}}, \tag{6}$$

v níž všeobecně

$$f_q = \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x} \frac{\partial f_p}{\partial y} - \frac{\partial f_{q-1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial x} = 0$$

a $p < q - 1$, $q > 2$ jest; patrně jeví se f_q co differenciální rovnice stupně $(q-1)$ho.

Spojení srovnalosti (6) s rovnicemi (1) a (3) poskytuje nám soustavu $(n+2)$ rovnic, z nichž lze vyloučiti $(n+1)$ parametr; konečný výsledek jest patrně rovnice differenciální stupně n-tého.

Plocha obalujíc soustavu ploch obsahující $(n+1)$ proměnný parametr dá se tedy vždy vyjádřiti differenciální rovnicí stupně n-tého.

Jak taková rovnice vznikne, vysvětlíme ještě následujícími příklady.

1. Má se ustanoviti differenciální rovnice plochy obalující pohyblivou rovinu, tedy plochy rozvinutelné.

Všeobecná rovnice roviny

$$f = ax + by + cz + d = 0$$

obsahuje čtyry parametry, z nichž však se vždy jeden dělením dá odstraniti; differenciální rovnice plochy rozvinutelné nesmí tedy stupeň druhý přesáhnouti.

Skutecně najdeme řídíce se podle pravidla předešlého,

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = a + c\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = b + c\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} = \frac{c\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{c\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}} = \frac{c\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}},$$

z čehož následuje co rovnice hledaná

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

2. Má se ustanoviti differenciální rovnice plochy točné, t. j. plochy obalující soustavu koulí, jejichž střed se nachází na přímce

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} = -m.$$

Rovnice koule zní

$$f = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0,$$

v níž a, b, c podle podmínky vyhovují srovnalosti

$$\frac{a - x_1}{\cos\alpha} = \frac{b - y_1}{\cos\beta} = \frac{c - z_1}{\cos\gamma} = -m.$$

Poněvadž mezi parametry a, b, c, r panují dvě vyminečné rovnice, třeba k jejich vyloučení ještě dvou rovnic; podle pravidla jsou tyto rovnice

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = x - a + (z - c)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = y - b + (z - c)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

to jest

$$\frac{x - a}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y - b}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{z - c}{-1} = -n. \tag{8}$$

Vyloučením veličin a, b, c, z rovnic (7) a (8) pomocí m a n dá

$$n\frac{\partial z}{\partial x}+m\cos\alpha+x-x_1=0,$$
$$n\frac{\partial z}{\partial y}+m\cos\beta+y-y_1=0,$$
$$-n+m\cos\gamma+z-z_1=0,$$

z čehož konečně vyloučením veličin m a n najdeme

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}, & \cos\alpha, & x-x_1 \\ \frac{\partial z}{\partial y}, & \cos\beta, & y-y_1 \\ -1, & \cos\gamma, & z-z_1 \end{vmatrix}=0$$

co differenciální rovnici plochy točné.

O symbolech analytické geometrie a jich upotřebení.

(Píše *K. Zahradník.*)

I.

V analytické geometrii rovinné rozeznáváme tři tvary rovnice přímky a sice:

$$ax+by+c=0,$$
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$
$$ux+vy+1=0.$$

První rovnici nazýváme *obecnou*, druhou *normální*, třetí konečně *úsekovou* rovnicí přímky. *)

Abychom souvislost těchto rovnic poznali, třeba ukázati, kterak jeden tvar na druhý převésti můžeme. Jsou-li všechny tři rovnice analytickými výrazy jedné přímky, nemohou se lišiti leč koefficientem společným všem členům, jímž rovnice zkrácena.

*) Co se tkne významu koefficientů v rovnici druhé a třetí, jest p délka kolmice spuštěné s počátku na přímku, α značí úhel, jejž uzavírá přímka s osou úseček, u, v jsou převratné negativní hodnoty úseků na ose x a y. O jiných tvarech rovnice přímky pro různé soustavy bude nám jednati později.

Chceme-li tedy tvar první převésti na tvar druhý, násobme první rovnici koefficientem λ, načež bude

$$\lambda ax + \lambda by + \lambda c \equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha - p,$$

z čehož plyne

$$\lambda a = \cos\alpha,\ \lambda b = \sin\alpha,\ \lambda c = -p.$$

Sečteme-li zdvojmocněné první dvě rovnice, obdržíme

$$\lambda^2(a^2 + b^2) = 1$$

z čehož plyne

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},\quad p = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Co se tkne znaménka odmocniny, volíme je tak, aby p bylo kladné.

Rovnice přímky obecná převede se na normální tvar, dělíme-li ji $\pm\sqrt{a^2+b^2}$.

Při výskumech analytických jest velmi prospěšné za rovnici přímky klásti jediné písmenko, kteréž nám přímku a ronici přímky současně označuje, při čemž volme za rovnici přímky obecnou $A = 0$, za normální $P = 0$, za úsekovou $U = 0$, tak že bude totožně:

$$A \equiv ax + by + c = 0,$$
$$P \equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$
$$U \equiv ux + vy + 1 = 0.$$

K označení více přímek upotřebíme přípon či indexů, i bude tedy všeobecně

$$P_k = 0 \equiv x\cos\alpha_k + y\sin\alpha_k = p_k$$

což podobně při ostatních tvarech platí. *)

Rovnice přímky svrchu vytknuté, vyvedeny jsou pro souřadnice bodové vzhledem k osám pravoúhlým. Přímku myslíme

---

*) Myšlenku tuto úplně provedl *J. Plücker* ve svých spisech o analytické geometrii jednajících, čímž tvůrcem se stal nové analytické geometrie a zároveň ukázal mohútnost analytické methody, která nyní o přednost s methodou synthetickou zápolí. Nový rozkvět analytické geometrie též s dalším vývojem algebry, ba vzájemnost mezi touto a onou jest tak těsná, že problemu geometrie přísluší problem algebry a naopak. Tak se vyvinula tak zvaná moderní či nová algebra. Úžasný pokrok nově geometrie či geometrie synthetické v zápětí měl rovný postup analytické geometrie v posledních 50ti letech, výskumy jedné, jsou látkou pro druhou.

si povstalou nepřetržitým pohybem určitéhc bodu aneb co geometrické místo všech bodů na té přímce ležících, jejichž nosičem ona přímka.

2. Máme-li stanovit vzdálenost d bodu $M(\xi, \eta)$ od přímky $P \equiv 0$, promítněme souřadnice bodu daného do prodloužené kolmice s počátku souřadnic na přímku P spuštěné, i obdržíme

$$\xi \cos(\xi p) + \eta \cos(\eta p) = p + d,$$

kdež jest

$$(\xi p) = \alpha, \ (\eta p) = 90^0 - \alpha,$$

aneb

$$\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - p = d$$

z čehož plyne věta:

Výsledek substituce souřadnic bodu pevného do rovnice přímky dané podává nám vzdálenost bodu pevného od přímky dané.

Označíme-li výsledek substituce souřadnic bodu $M(\xi, \eta)$ do $P = 0$ krátce P', platí

$$d = P' = \frac{A'}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{U'}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Pro $d = 0$ vyhovují souřadnice bodu M $(\xi \eta)$ rovnici přímky,´ bod M jest tedy bodem přímky, leží na přímce, neb vzdálenost jeho od přímky rovná se nulle.

3. Dvě přímky stanoví bod; dané-li tedy rovnice dvou přímek

$$P_1 = 0, \ P_2 = 0,$$

známe též souřadnice bodu průsečného, jenž oběma přímkám přísluší. Třeba pouze x a y pokládati v obou rovnicích za stejné, za souřadnice bodu společného a řešením je stanoviti. Souřadnice bodu průsečného, nevyhovují pouze rovnicím

$$P_1 = 0, \ P_2 = 0,$$

nýbrž každé ze přímek, vyjádřených rovnicí

$$P_1 - \lambda P_2 = 0,$$

kde značí λ libovolný koefficient. Značí nám tedy rovnice poslední soujem přímek procházejících průsečíkem přímek $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, tedy svazek paprskový jehož vrchol jest průsečík

$$(P_1 P_2) = t.$$

Libovolné dvě přímky svazku tohoto určují nám bod t; neurčitost tuto vymýtíme, považujeme-li bod za průsečík všech jím probíhajících přímek či paprsků. Názorem tímto i ta výhoda se nám naskytuje, že můžeme bod analyticky vyjádřit rovnicí jedinou

$$P_1 - \lambda\ P_2 = 0.$$

Ke druhému významu tomuto vrátíme se při tvaru přímky $U = 0$, kde též o zákonu reciprocity nám jednati bude.

4. Ukázali jsme, že rovnice předešlá jest analytický výraz svazku paprsků. Budiž jeden taký paprsek $Q = 0$, jenž přísluší určité hodnotě $\lambda = \lambda_1$, tedy

$$P_1 - \lambda_1\ P_2 = 0 = Q_1\,; \qquad (1)$$

tu nastává nám otázka, jaký jest geometrický význam činitele λ_1?

Za tou příčinou volme na přímce Q bod libovolný m. Vzdálenost jeho od přímky P_1 budiž K_1, od přímky P_2 pak K_2, takže podle věty věty ve článku 2.

$$K_1 = P'_1 = \xi \cos\alpha_1 + \eta \sin\alpha_1 - p_1,$$
$$K_2 = P'_2 = \xi \cos\alpha_2 + \eta \sin\alpha_2 - p_2,$$

jest tedy

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{P'_1}{P'_2} = \frac{\xi \cos\alpha_1 + \eta \sin\alpha_1 - p_1}{\xi \cos\alpha_2 + \eta \sin\alpha_2 - p_2};$$

vedle toho rovná se pak též

$$K_1 = tm.\sin(P_1 Q_1),\quad K_2 = tm.\sin(P_2 Q_1)$$

pročež

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{P'_1}{P'_2} = \frac{\sin(P_1 Q_1)}{\sin(P_2 Q_1)},$$

neb

$$P'_1 - \frac{\sin(P_1 Q_1)}{\sin(P_2 Q_1)} P_2 = 0.$$

aneb přejdeme-li k označení souřadnic bodu proměnného na přímce $Q_1 = 0$ kladouce x, y místo ξ, η obdržíme:

$$P_1 - \frac{\sin(P_1 Q_1)}{\sin(P_2 Q_1)} P_2 = 0.$$

Jest tedy

$$\lambda_1 = \frac{\sin(P_1 Q_1)}{\sin(P_2 Q_1)} = \frac{K_1}{K_2} \qquad (2)$$

čímž geometrický význam patrný.

I nazýváme λ_1 poměrem paprsků Q_1 k paprskům P_1 a P_2.*) Pro $\lambda = 0$ přejde Q_1 v paprsek P_1, pro $\lambda = \infty$ sjednotí se opět paprsek Q_1 s paprskem P_2.

Budiž $Q_2 = 0$ čtvrtý paprsek příslušný hodnotě $\lambda = \lambda_2$, tu dle obdoby obdržíme

$$P_1 - \frac{sin\,(P_1\,Q_2)}{sin\,(P_2\,Q_2)}\,P_2 = 0.$$

Každému paprsku přísluší tedy určitý poměr λ, jímž poloha jeho je vzhledem ku dvěma daným stanovena. Dvěma paprskům přísluší dva poměry a podíl těchto poměrů nazýváme *dvojpoměrem* dvou paprsků k dvěma základním paprskům. Jsou-li základní paprsky P_1, P_2, Q_1 pak sdružený poměrem λ_1, Q_2 poměrem λ_2, tu označuje poměr poměru $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ či dvojpoměr

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = q = \frac{sin\,(P_1\,Q_1)}{sin\,(P_2\,Q_1)} : \frac{sin\,(P_1\,Q_2)}{sin\,(P_2\,Q_2)};$$

symboly oněch čtyř paprsku dávají se do závorky, i jest tudíž

$$(P_1\,P_2\,Q_1\,Q_2) = \frac{sin\,(P_1\,Q_1)}{sin\,(P_2\,Q_1)} : \frac{sin\,(P_1\,Q_2)}{sin\,(P_2\,Q_2)} = q \;^{**} \quad (3)$$

Jestli $\lambda_1 = -\lambda_1$, tedy $q = -1$, tu liší se poměry pouze znamením a dvojpoměr se rovná -1.

Takový svazek čtyř paprsků, jehož dvojpoměr rovná se záporné jedničce, nazýváme svazkem harmonickým na př.

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ P_1 - \lambda\,P_2 = 0,\ P_1 + \lambda\,P_2 = 0$$

značí rovnice čtyř přímek harmonických.

Dvojpoměr čtyř paprsků můžeme však i obecněji pojmouti a položiti otázku, jaký jest dvojpoměr čtyř přímek svazku t,

---

*) Porovnej Dr. *Em. Ed. Weyr* „Základové vyšší geometrie“ v Praze 1871. Nákladem Musea (Živa VIII.) pag. 12.; aneb *Ed. Weyr* „První zpráva jedn. česk. math.“ 1870. pag. 6. Prvý spis budu označovatí zkrátka *Žira*; druhý spis *Zpráva I.*

**) Jmeno „dvojpoměr svazku čtyř přímek“ *Steiner* zavedl (Systemat· Entw. pg. 7.), Symbolické označení $(P_1\,P_2\,Q_1\,Q_2)$ zavedl *Möbius* (die Theorie der Kreisverwandtschaft. Abh. der. math. phys. Classe d. k. säch. Gesellschaft der W. díl 2. p. 546). *Chasles* nazývá dvojpomě. funkcí anharmonickou. (Rapport ou fonction anharmonique). Möbius pak nazývá dvojpoměr čtyř elementů v svém („Barycentische Cacul 1827.) Ratio bisectionalis-Doppelschnittverhältnis.

daných rovnicemi

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = 0\,,\quad P_1 - \lambda_3 P_2 = 0\,,$$
$$P_1 - \lambda_2 P_2 = 0\,,\quad P_1 - \lambda_4 P_2 = 0\,. \tag{4}$$

Otázku tuto snadno na předcházející můžeme převésti, položíme-li

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = Q_1\,,\quad P_1 - \lambda_2 P_2 = Q_2$$

Řešením rovnic těchto dle P_1 a P_2 obdržíme

$$P_1 = \frac{\lambda_1 Q_2 - \lambda_2 Q_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,,\quad P_2 = \frac{Q_2 - Q_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,.$$

Vložíme-li hodnoty tyto za P_1 a P_2 do rovnic (4) bude

$$Q_1 = 0\,,\quad Q_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} Q_2 = 0\,,$$
$$Q_2 = 0\,,\quad Q_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} Q_2 = 0\,,$$

tedy

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = q \tag{5}$$

Tvoří-li tyto čtyry přímky svazek harmonický, jest $q = -1$, rovnice (5) pak přejde ve

$$\lambda_1 \lambda_2 - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0\,, \tag{6}$$

Rovnice (5) nás učí, že dvojpoměr nezávisí na poloze základních paprsků. Třeba nám tedy ještě dovoditi, že jest i neodvislý od tvaru rornice přímky.

Označíme-li $\sqrt{a_h{}^2 + b_h{}^2} = \varrho_h$, bude

$$P_1 = \frac{1}{\varrho_1} A_1\,,\quad P_2 = \frac{1}{\varrho_2} A_2$$

a rovnice (1) přejde ve

$$A_1 - \lambda_1 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} A_2 = 0,$$

kde ϱ_1, ϱ_2 pouze na poloze základních přímek A_1 a A_2 závisí. Rovnice jiného paprsku procházejícího průsečíkem $(A_1 A_2)$ bude

$$A_1 - \lambda_2 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} A_2 = 0$$

a dvojpoměr

$$q = \lambda_1 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} : \lambda_2 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Podobně dovoditi můžeme toto pro tvar $U = 0$, čímž hořejší věta stvrzena.

Máme-li tedy $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ rovnice dvou přímek tvaru jakéhokoliv a

$$S_1 - \lambda_1 S_2 = 0, \quad S_1 - \lambda_3 S_2 = 0,$$
$$S_1 - \lambda_2 S_2 = 0, \quad S_1 - \lambda_4 S_2 = 0,$$

co rovnice čtyr přímek průsekem $(S_1 S_2)$ probíhajících, tedy jest dvojpoměr těchto čtyr přímek vyjádřen rovnicí (5). Z toho plyne věta následující: „Dané-li dva svazky přímek

$$R_1 - \lambda R_2 = 0, \quad S_1 - \lambda S_2 = 0,$$

bude vždy dvojpoměr čtyř paprsků jednoho svazku roveň dvojpoměru čtyř příslušných paprsků svazku druhého.“ Dva svazky v také poloze nazýváme promítavými.*) I vysvítá z uvedeného, že dán-li dvojpoměr a tři paprsky, že čtvrtý paprsek jednoznačně určiti můžeme a že tři páry příslušných paprsků dva promítavé svazky úplně určují.

6. Ku dvěma přímkám možno nesčetně mnoho párů přímek harmonicky sdružených určiti. Volíme-li totiž v rovnici (6) λ_3 libovolně, tu vždy příslušný harmonický paprsek stanoviti můžeme. Otázka tato stane se určitou, hledáme-li pár přímek, jenž harmonicky dělí dva jiné páry téhož svazku.**)

Buďtež rovnice daných dvou párů přímek

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_3 P_2 = 0,$$
$$P_1 - \lambda_2 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_4 P_2 = 0,$$

a rovnice páru hledaného

$$P_1 - l_1 P_2 = 0, \quad P_1 - l_2 P_2 = 0,$$

tu dle rovnice (6) plyne:

$$l_1 l_2 - \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$
$$l_1 l_2 - \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0.$$

Z těchto dvou rovnic můžeme $l_1 l_2$ a $l_1 + l_2$, pojímajíce součin a součet za dvě neznámé, řešením stanoviti, při čemž

---

*) *Živa* pag. 34. *Zpráva I.* pag. 15. Ve zprávě užívá se slova **trs** místo svazku, což by skoro lepší bylo, kdyby více se ho užívalo; upotřebuji slova „svazek“ pouze jako více zdomácnělého. Vztah promětnosti označujeme znakem *K*. Označení „promítavý“ projektivisch *Steiner* zavedl, *Möbius* nazývá vztah tento kollinearným, *Chasles* homografickým.

**) Viz *Hesse* „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises“, Leipzig 1865. pag. 30.

obdržíme

$$l_1 + l_2 = a,$$
$$l_1\, l_2 = b.$$

Tyto dvě rovnice zastupují nám rovnicí quadratickou

$$x^2 - ax + b = 0,$$

jejížto kořeny jsou hledané l_1 a l_2.

Stává tedy jednoho a to jediného párů přímek, který dva páry přímek procházejících bodem jediným harmonicky dělí.

Pár tento jest realným neb imaginárným dle toho, jsou-li kořeny rovnice quadratické reálné neb laterálné.

7. Další otázka leží na bíle dni, a sice: Existuje-li pár přímek, který by současně harmonicky odděloval tři páry přímek téhož svazku? *)

Rovnice daných párů přímek buďtež

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_3 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_5 P_2 = 0,$$
$$P_1 - \lambda_2 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_4 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_6 P_2 = 0,$$

hledaného pak párů přímek

$$P_1 - l_1 P_2 = 0,$$
$$P_1 - l_2 P_2 = 0.$$

Otázku snadno řešiti můžeme upotřebením rovnice (6). Hledaný pár nám každý z daných párů harmonicky odděluje, platí tedy:

$$l_1 l_2 - \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 = 0$$
$$l_1 l_2 - \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0$$
$$l_1 l_2 - \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_5 + \lambda_6) + \lambda_5 \lambda_6 = 0$$

Vyloučením $l_1 l_2$ a $l_1 + l_2$ jakožto neznámých, obdržíme hledanou podmíněnou rovnici:

$$\begin{vmatrix} 1, & \lambda_1 + \lambda_2, & \lambda_1 \lambda_2 \\ 1, & \lambda_3 + \lambda_4, & \lambda_3 \lambda_4 \\ 1, & \lambda_5 + \lambda_6, & \lambda_5 \lambda_6 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

aneb ve tvaru rozvedeném

$$(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_1) = 0. \quad (9)$$

Z podmínky (8) vysvítá, že pět paprsků libovolně voliti můžeme, šestý pak že již polohou jich jest určen. I volme tedy tu zvláštní polohu paprsků, by druhý pár ve přímku jedinou

---

*) Porovnej *Zpráva II.* pg. 17. *Živa* pg. 86. *Hesse*: Vorlesungen pg. 81.

a rovněž třetí pár se sjednotil v přímku jedinou, což analyticky vyjádříme

$$\lambda_3 = \lambda_4 = l_1\,,\ \lambda_5 = \lambda_6 = l_2\,,$$

načež rovnice (9) přejde v rovnici

$$l_1\, l_2 - \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\, \lambda_2\,,$$

z čehož jde, porovnáme-li s rovnicí (6), poučka tato: Sjednotí-li se ze tří párů přímek, tvořících involuci, dva páry přímek, každý v přímku jednu, dělí třetí pár tyto dvě přímky harmonicky."* Involuci šesti paprsků můžeme rozličně vyjádřiti; všechny formy její však vyvinouti nám netřeba, poukážeme-li na častěji uvedený spis Dr. *E. Weyra* **) a na *Chasles-ův* „Apercu historique etc. ***) kdež vyvinuty jsou.

Rozličné rovnice, které nám involuci šesti paprsků stanoví nesmí podstatou se lišiti, jelikož jsou pouze různé tvary stejné podmínky, a dají se tedý přímo z jedné a to kterékoliv vyvinouti. My vyvineme ještě dva tvary, které nás bezprostředně ku snadné kanstrukci povedou.

8. Rovnice tří párů přímek téhož svazku (čl. 6.) můžeme snadno převésti na tvar

$$Q_1 - l_1\, Q_2 = 0,\quad Q_1 - l_3\, Q_2 = 0,\quad Q_1 = 0$$
$$Q_1 - l_2\, Q_2 = 0,\quad Q_1 - l_4\, Q_2 = 0,\quad Q_2 = 0$$

položíme-li

$$P_1 - \lambda_5\, P_2 = Q_1$$
$$P_1 - \lambda_6\, P_2 = Q_2$$

Podmínečnou rovnici involutornosti odvoditi můžeme z rovnice (9), vyměníme-li pro $\lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = \infty$ současně λ s příslušným l načež obdržíme

$$l_1\, l_2 - l_3\, l_4 = 0. \tag{10}$$

Nahradíme-li l hodnotou vyplývající z rovnice (2) obdržíme za hledanou podmínečnou rovnici involutornosti šesti přímek, označíme-li rovnice přímek páru prvého $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, druhého pak páru $S_1 = 0$, $S_2 = 0$,

$$\frac{\sin(Q_1\, R_1)}{\sin(Q_2\, R_1)} \cdot \frac{\sin(Q_1\, R_2)}{\sin(Q_2\, R_2)} - \frac{\sin(Q_1\, S_1)}{\sin(Q_2\, S_1)} \cdot \frac{\sin(Q_1\, S_2)}{\sin(Q_2\, S_2)} = 0 \tag{11}$$

*) *Zpráva II.* pg. 18.

**) Kapitola VIII. pg. 86.

***) Překlad od *Sohnke*, Halle 1839. Note x. pg. 318.

Záměnou páru přímek buď R_1 R_2 neb S_1 S_2 za Q_1 Q_2 obdrželi bychom dvě jiné rovnice; neb patrno, že prvým neb druhým párem přímek stejně jako s třetím nakládati jsme mohli.

9. Ještě jeden tvar podmínečné rovnice pro involuci šesti přímek vyvinouti nám třeba, kterýž však vyžaduje k svému odvození známost jiné věty, ku které se tedy dříve obrátíme.

V čl. 3. ukázali jsme že

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$$

značí přímku procházející průsečíkem přímek $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, [λ_1 a λ_2 jsou číselné koefficienty; třebať tu jen veličinou λ_1 děliti a $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\lambda'_1$ položiti, aby se tento tvar převedl na tvar rovnice (1)]. Poznámka tato dostačí, bychom ukázali, že tři přímky se v jednom bodě protínají, platí-li rovnice

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0 \qquad (12)$$

Avšak tato rovnice nic jiného nevyjadřuje, než

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \equiv -\lambda_3 P_3 .$$

Souřadnice bodu průsečného přímek P_1 a P_2 vyhovují rovnicím přímek $P_1 = 0$ a $P_2 = 0$, tedy i rovnici přímky $P_3 = 0$, musí tedy P_3 průsekem P_1 P_2 procházeti, pročež platí věta: „Dané-li tři přímky $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, které se v jediném bodě protínají, můžeme vždy tři činitele λ_1, λ_2, λ_3, určiti tak, by identicky bylo

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0 .$$

10. Rovnice tří párů přímek tvořících involuci můžeme patrně vždy psáti takto:

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_2 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_3 P_2 = 0,$$
$$P_1 + \lambda_1 P_2 = 0, \quad P_1 + \lambda_2 P_2 = 0, \quad P_1 + \lambda_3 P_2 = 0,$$

neb $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ tvoří pár přímek, který dle čl. 4. každý z daných tři párů harmonicky odděluje. Rovnice těchto šesti přímek, tvořících involuci, jsou lineárně složeny ze symbolů přímek P_1 a P_2.*) Místo dvou symbolů můžeme též třech upotřebiti totiž Q_1, Q_2, Q_3, kladouce

$$Q_1 = (\lambda_2 - \lambda_3)(P_1 - \lambda_1 P_2),$$
$$Q_2 = (\lambda_3 - \lambda_1)(P_1 - \lambda_2 P_2),$$
$$Q_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)(P_1 - \lambda_3 P_2).$$

---

*) Viz *Hesse:* Vorlesungen pag 33.

í bude tedy součet identicky

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 \equiv 0.$$

Za touto podmínkou probíhají dle rovnice (12) bodem jediným. Z rovnic pro Q_1 a Q_2 můžeme si P_1 a P_2 vyjadřiti Q_1 a Q_2 a vložíme-li hodnoty tyto do rovnice

$$P_1 + \lambda_3 P_2 = 0,$$

obdržíme po krátké redukci*)

$$P_1 + \lambda_3 P_2 = \frac{Q_2}{\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1}} - \frac{Q_1}{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}} = 0 \qquad (13)$$

Podobně vložíme P_1 a P_2 stanovené z rovnic pro Q_2 a Q_3 do rovnice

$$P_1 + \lambda_1 P_2 = 0$$

a z rovnic Q_3 a Q_1 stanovené P_1 a P_2 do rovnice

$$P_1 + \lambda_2 P_2 = 0.$$

Výsledky tyto obdržíme též pouhou cyklickou záměnou přípon při λ, a Q. Zavedeme-li označení

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} = l_1 \quad \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1} = l_2 \quad \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = l_3$$

přejdou vzhledem ku rovnici (13) rovnice daných tří párů přímek téhož svazku ve

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0,$$

$$\frac{Q_3}{l_3} - \frac{Q_2}{l_2} = 0, \quad \frac{Q_1}{l_1} - \frac{Q_3}{l_3} = 0, \quad \frac{Q_2}{l_2} - \frac{Q_1}{l_1} = 0,$$

ve kterých veličiny l po rovnu libovolné jsou veličinám λ, z nichž jsou složeny.

---

*) K vůli stručnosti třeba $\lambda_1 - \lambda_2 = a_{12}$, $\lambda_2 - \lambda_3 = a_{23}$, $\lambda_3 - \lambda_1 = a_{31}$ položiti načež obdržíme

$$P_1 = \frac{\lambda_1 a_{23} Q_2 - \lambda_2 a_{31} Q_1}{a_{12} a_{23} a_{31}},$$

$$P_2 = \frac{a_{23} Q_2 - a_{31} Q_1}{a_{12} a_{23} a_{31}};$$

násobíme-li λ_3 druhou rovnici a sečteme-li obdržíme:

$$P_1 + \lambda_3 P_2 = \frac{Q_2 (\lambda_1 + \lambda_3)}{a_{12} a_{31}} - \frac{Q_1 (\lambda_2 + \lambda_3)}{a_{12} a_{23}} = 0.$$

Společným činitelem a_{12} můžeme krátiti, a nahradíme-li hodnoty za a_{31} a a_{23}, obdržíme svrchu uvedenou rovnici.

Označíme-li přímku $\frac{Q_3}{l_3} - \frac{Q_2}{l_2} = 0 = S_1$ a podobně ostatní dvě cyklickou záměnou, a přihlížíme-li k rovnici (2) obdržíme

$$\frac{l_3}{l_2} = \frac{\sin(Q_3 S_1)}{\sin(Q_2 S_1)},$$

$$\frac{l_1}{l_3} = \frac{\sin(Q_1 S_2)}{\sin(Q_3 S_2)},$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{\sin(Q_2 S_3)}{\sin(Q_1 S_3)}.$$

Součin těchto tří rovnic podává nám geometrickou podmínečnou rovnici pro involuci šesti přímek a sice

$$\lambda = \frac{\sin(Q_3 S_1) \sin(Q_2 S_2) \sin(Q_1 S_3)}{\sin(Q_2 S_1) \sin(Q_1 S_2) \sin(Q_2 S_3)}.$$

Jak již dříve obecně podotknuto, dá se tato rovnice též z rovnice (11) přímo vyvinouti, neb značí nám jednu a tutéž podmínku. Záměnou Q_1 s S_1 neb Q_2 s S_2 neb Q_3 s S_3 obdržíme tři nové rovnice pro tutéž podmínku. *)

(Dokončení).

Křivky cissoidalné.

(Podává *K. Zahradník*).

Dána budiž libovolná kuželosečka K a přímka P (obr. 10.); na kuželosečce volme libovolný bod o za vrchol svazku paprskového a za střed souřadnic. Q budiž paprsek tohoto svazku; i protíná nám kuželosečku K v jediném bodě m_2 $(x_2 y_2)$, mimo vrchol o a přímku P v bodě m_1 $(x_1 y_1)$. Naneseme-li tětivu $\overline{om_2}$ od bodu m_2 na paprsku Q směrem k o bude $\overline{om_2} = \overline{m_3 m_1}$ čímž obdržíme bod m_3 $(x_3 y_3)$. Každému paprsku Q přísluší určitý jediný bod m_3 a geometrické místo všech bodů m_3 uvedeným zákonem vytvořených jest křivka stupně třetího, již z obdoby vytvoření křivkou cissoidalnou jmenovati chceme.

---

* Porovnej *Živa* pg. 87.

Odečteme-li od rovnice $\overline{om_2} = \overline{m_3 m_1}$ společnou délku $\overline{om_1}$ obdržíme

$$\overline{om_3} = \overline{m_2 m_1} \tag{1}$$

základní to rovnici křivky cissoidálné.

Promítneme-li délky $\overline{om_3}$ a $\overline{m_2 m_1}$ do os, obdržíme pomocí souřadnic bodů m_i dvě nové rovnice, které nám rovnici (1) úplně nahražují a sice

$$x_3 = x_1 - x_2 \tag{2}$$

$$y_3 = y_1 - y_2. \tag{3}$$

Souřadnice bodu m_2 a m_1 vypočteme jakožto průseky přímky Q s kuželosečkou K a přímkou P, jejichž rovnice

$$K \equiv ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$$

$$P \equiv mx + ny + p = o$$

$$Q \equiv y - ux = o$$

Řešením plyne:

$$(QP) = m_1 \begin{cases} x_1 = -\dfrac{p}{m + nu} \\ y_1 = -\dfrac{pu}{m + nu} \end{cases}$$

$$(QK) = m_2 \begin{cases} x_2 = -\dfrac{d + eu}{a + bu + cu^2} \\ y_2 = -\dfrac{(d + eu)\, u}{a + bu + cu^2} \end{cases}$$

Vložíme-li hodnoty tyto do rovnic (2) a (3) obdržíme

$$x_3 = -\frac{p}{m + nu} + \frac{d + eu}{a + bu + cu^2}$$

$$y_3 = -\left(\frac{p}{m + nu} + \frac{d + eu}{a + bu + cu^2}\right) u. \tag{5}$$

Místo $x_3\, y_3$ jakožto souřadnic bodu proměnného můžeme psáti xy. Každé hodnotě za u přísluší určité x a y, tedy určitý bod m na cissoidě. Proměnnou u, pomocí níž můžeme souřadnice libovolného bodu m cissoidy jednoznačně určiti, nazýváme parametrem bodu m. Rovnici v souřadnicích rovnoběžných obdržíme, vyloučíme-li z rovnic (4) a (5) proměnnou veličinu u.

Z (5) plyne $u = \frac{y}{x}$, což vložíme-li do rovnice (4) spůsobuje

$$(ax^2 + bxy + cy^2)(mx + ny + p) - (mx + ny)(dx + ey) = o. \tag{6}$$

Provedeme-li násobení, přejde rovnice tato v rovnici tvaru *)

$$a_1x^3 + b_1x^2y + c_1xy^2 + d_1y^3 + e_1x^2 + f_1xy + g_1y^2 = 0 \quad (7)$$

z čehož seznáváme, že každá křivka má bod dvojný.

Všeobecná rovnice křivek stupně třetího s dvojným bodem má tvar (7); vyskytuje se v ní šest konstant, z čehož vysvítá, že křivka stupně třetího dvojným bodem, šesti body a bodem dvojným úplně určená jest. Z vyvinutí vysvítá, že v rovnici křivky cissoidální (7) též šesti libovolnými konstantami vládneme, čtyřmi od $K \equiv o$, dvě od $P \equiv o$, z čehož patrno, že každá křivka stupně třetího s dvojným bodem jest křivkou cissoidalnou. Rovnice cissoidy Dioklesovy obdržíme z rovnice všeobecné, položíme-li

$$a = 1,\ b = o,\ c = 1,\ d = -a,\ e = o,\ n = o,\ \frac{m}{p} = -a;$$

ze (6) ve tvaru

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

aneb z rovnic (4), (5) vyjadřenou pomocí parametru u ve formě:

$$x = \frac{au^2}{1+u^2},\quad y = \frac{au^3}{1+u^2}.$$

K rovnicím těmto se v příštím sešitu vrátíme, hodlajíce zevrubně cissoidu Dioklesovu pojednati na základě parametru jednoznačného.

Čtyry poučky o ellipsách a ellipsoidech.

(Sděluje *Fr. Strnad*, technik.)

I.

Budiž dáno n přímek v rovině. Místo bodu, pro který součet čtverců vzdáleností od daných přímek má stálou hodnotu k, jest ellipsa. Různým hodnotám k přísluší ellipsy podobné a podobně rozložené, jejichž společný střed činí součet (k)

*) Viz: Dr. *Em. Weyr*: Zur Geometrie der Curven dritter Ordnung. Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Prag 1870, jakož i jeho „Geometrische Mitheilungen I. II. Sitzungsberichte d. k. Akademie 1870 Wien, kdež p. Weyr přečetné zajímavé vlastnosti křivek 3. stupně s dvojným bodem vyvinuje.

hodnotou nejmenší (k_0). *Součet převrácených kvadrátů os ellipsy jest vždy* $\frac{n}{k - k_0}$. (*F. Siacci.*)

Budiž $R_i = x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i = 0$ (1)

$(i = 1, 2, \ldots n)$

rovnice přímek daných vzhledem k soustavě pravoúhlých os.

Rovnice hledaného místa geometrického jest pak

$$\Sigma R_i^2 = 0,$$

aneb ve formě rozvinuté:

$$x^2 \Sigma \cos^2 x_i + 2xy\, \Sigma \cos \alpha_i \sin \alpha_i + y^2 \Sigma \sin^2 \alpha_i - 2x \Sigma p_i \cos \alpha_i -$$
$$- 2y \Sigma p_i \sin \alpha_i + \Sigma p_i^2 - k = 0, \qquad (2)$$

z čehož patrno, že křivka uvažovaná jest stupně 2ho. Snadno lze nahlédnouti, že nemůže míti reálných úběžných bodů, je-li k veličinou reálnou a konečnou a že jest tedy geom. místem bodů vytknuté vlastnosti ellipsa.

K vůli jednoduchosti užijeme známého označení koëfficientů a pišme rovnici její takto

$$E \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} - k = 0. \quad (3)$$

Měníme-li hodnotu k, náleží každé hodnotě k určitá ellipsa E a jest z rovnice (2) patrno, že všechny tak povstalé ellipsy jsou homothetické, t. j. podobné a stejně položené, dále že jsou též soustředné. Pro jistou hodnotu $k = k_0$ přejde příslušná ellipsa ve dvé pomyslných přímek, jichž reálný průsečník jest středem všech ellips. Jest to ona hodnota k, pro kterou determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} - k \end{vmatrix}$$

přejde v nullu.

Přeložíme-li osy souřadné do tohoto středu, ponechajíce směr jich, bude rovnice geom. místa v této soustavě

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a'_{33} - k = 0.$$

Význam veličiny a'_{33} snadno lze vyšetřiti.

Musí totiž míti platnost rovnice

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & 0 \\ a_{12}, & a_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & a_{33} - k_0 \end{vmatrix} \equiv (a'_{33} - k_0) \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

z kteréž bezprostředně vychází

$$a'_{33} = k_0,$$

tak že lze rovnici ellipsy psáti takto:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + k_0 - k = 0. \qquad (4)$$

Jsou-li a a b její poloosy, bude

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{k - k_0} = \frac{\Sigma\, cos^2 \alpha_i + \Sigma\, sin^2 \alpha_i}{k - k_0} = \frac{n}{k - k_0}.$$

Ze zajímavé této relace plyne též, že k_0 jest minimální hodnota pro k; pro hodnoty menší než k_0 byl by součet $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ negativným a tedy ellipsa příslušná pomyslnou.

II.

Budiž O' bod jedné z těchto ellips a O její střed; dále buďtež P, P' paty kolmic spuštěných s bodů O, O' na jednu z daných n-přímek, pak jest vždy

$$\Sigma(\overline{O'P'} - \overline{OP})^2 = \Sigma\overline{O'P'}^2 - \Sigma\overline{OP}^2. \qquad (\textit{Siacci}).$$

Je-li O' libovolný bod ellipsy a O její střed (souřadnice jeho buďtež ξ, η), P' a P pak paty kolmic spuštěných s O' a O na libovolnou z přímek daných, jest, vztahujeme-li vše k osám jdoucím středem,

$$x^2\Sigma\, cos^2 \alpha_i + 2xy\Sigma\, cos\, \alpha_i\, sin\, \alpha_i + y^2\Sigma\, sin^2 \alpha_i + k_0 - k = 0$$

rovnice ellipsy, dále pak

$$\overline{O'P'} = (k - \xi)\, cos\, \alpha_i + (y - \eta)\, \sin \alpha_i$$

$$\overline{OP} = -(\xi\, cos\, \alpha_i + \eta\, sin\, \alpha_i).$$

Tedy jest $\overline{O'P'} - \overline{OP} = k\, cos\, \alpha_i + y\, sin\, \alpha_i$

a $\Sigma(\overline{O'P'} - \overline{OP})^2 = x^2\Sigma\, cos^2 \alpha_i + 2xy\Sigma\, cos\, \alpha_i\, sin\, \alpha_i + y^2\Sigma\, sin^2 \alpha_i$,

aneb $\Sigma(\overline{O'P'} - \overline{OP})^2 = k - k_0 = \Sigma(O'P'^2 - OP^2)$, což bylo dokázati a dá se takto vysloviti:

Vedeme-li bodem ellipsy naší svazek přímek rovnoběžných s danými, tvoří součet čtverců vzdálenosti jich od středu stálou veličinu $k - k_0$.

Věta tato, jakož i předešlá, dají se analogicky pro prostor vysloviti, při čemž přímky vynahradíme rovinami, a ellipsa přejde v ellipsoid; důkaz příslušných vět byl by však téměř totožný s důkazy podanými pro útvary rovinné, pročež jej opomíjíme.

III.

Budiž E ellipsa příslušná stálé K a E_α ellipsa pro soustavu přímek daných, vyjmeme-li jednu z nich (α) a opět pro stálou K: ellipsy E a E_α mají dvojný styk v bodech přímky (α). Dvě ellipsy E_α, E_β odpovídající takto dvěma přímkám (α) (β) dané soustavy mezi společné dvě tetivy rozpolující úhly přímek (α), (β). (*Siacci.*)

Je-li $E = 0$ rovnicí ellipsy odpovídající konstantě k, jest rovnice ellipsy E_α:

$$E - R_\alpha^2 = 0, \qquad (1)$$

z níž jde na jevo, že ellipsy E a E_α dotýkají se vespolek ve dvou bodech přímky R_α.

Pro ellipsu E_β platila by rovnice

$$E - R_\beta^2 = 0, \qquad (2)$$

kterouž od rovnic 1) odečtouce, obdržíme

$$R_\alpha^2 - R_\beta^2 = 0 \qquad (3)$$

co rovnici jisté kuželosečky náležející svazku stanovenému ellipsami E_α a E_β. Jest patrno, že kuželosečka přechází tu ve dvé přímek

$$R_\alpha + R_\beta = 0, \qquad R_\alpha - R_\beta = 0,$$

rozpolůjících úhel přímek R_α a R_β, čímž věta vyslovená dokázána.

IV.

Přejdeme-li k útvarům prostorovým a značí-li podobně $E = 0$ rovnici ellipsoidu odpovídajícího konstantě k, a $P_\alpha = 0$ rovnici roviny P_α, bude

$$E - P_\alpha^2 = 0 \qquad (1)$$

rovnicí ellipsoidu E_α, kterýž jest geom. místem bodů, jichž čtverce vzdálenosti od n daných rovin, vyjímaje z nich P_α, tvoří součet k.

Ellipsoid tento, jak porovnáním rovnice jeho s rovnicí ellipsoidu E vychází, dotýká se tohoto podél křivky průsečné s rovinou P_α.

Vytvoříme-li podobným spůsobem ellipsoid E_β vyvinutím roviny P_β, bude rovnice jeho

$$E - P_\beta^2 = 0, \qquad (2)$$

Odečtením rovnice 1) a 2), obdržíme

$$P\alpha^2 - P\beta^2 = 0\,, \tag{3}$$

co rovnici jisté plochy stupně druhého, náležející svazku stanovenému ellipsoidy $E\alpha$ a $E\beta$.

Že zde plocha ta přechází ve dvě roviny

$$P\alpha + P\beta = 0\,, \qquad P\alpha - P\beta = 0\,,$$

kteréž úhly rovin $P\alpha$ a $P\beta$ rozpolují, netřeba šířeji vykládati.

Myslíme-li si ještě ellipsoid $E\gamma$, jehož rovnice bude tedy

$$E - P\gamma^2 = 0\,,$$

protíná tento ellipsoid $E\alpha$ v rovinách $P\alpha^2 - P\gamma^2 = 0$, ellipsoid $E\beta$ pak v rovinách $P\beta^2 - P\gamma^2 = 0$.

Tyto 4 roviny, rozpolující úhly rovin $P\alpha$, $P\gamma$ a $P\beta$, $P\gamma$ stanoví mimo průsečnice ($P\alpha$, $P\gamma$) a $P\beta$, $P\gamma$) ještě 4 přímky, kteréž jsou, jak patrno, geom. místa bodů stejné vzdálenosti od rovin $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$ čili osy kuželů točných, dotýkajících se těchto tří rovin.

Vynecháme-li dvě z daných rovin, na př. $P\beta$ a $P\gamma$, bude geom. místo bodů, jichž součet čtverců vzdáleností od ostatních $n-2$ rovin se rovná k, ellipsoid $E\beta,\gamma$ a rovnice jeho

$$E - (P\beta^2 + P\gamma^2) = 0.$$

Ellipsoid tento dotýká se ellipsoidu $E\beta$ podél průsečnice s rovinou $P\gamma$, ellipsoidu $E\gamma$ pak podél průsečnice s rovinou $P\beta$.

Uvážíme-li však vztah ellipsoidů $E\beta$ a $E\gamma$ k původnímu E, shledáme, že ellipsoid $E\beta,\gamma$ dotýká se ellipsoidu E ve dvou bodech běžících na průsečnici rovin $P\beta$ a $P\gamma$.

Máme-li pak konečně na zřeteli tři ellipsoidy $E\alpha,\beta$, $E\beta,\gamma$, $E\alpha,\gamma$, jichž rovnice jsou

$$E - (P\alpha^2 + P\beta^2) = 0$$
$$E - (P\beta^2 + P\gamma^2) = 0$$
$$E - (P\alpha^2 + P\gamma^2) = 0,$$

shledáme, že první dva protínají se v křivkách obsažených v rovinách $P\alpha^2 + P\gamma^2 = 0$, $P\alpha^2 - P\gamma^2 = 0$, t. j. v těchže křivkách, v kterých se protínají ellipsoidy $E\alpha$ a $E\gamma$; podobně druhý a třetí pak v průsečnici ellipsoidů $E\alpha$ a $E\beta$, první a třetí pak v průsečnici ellipsoidů $E\beta$ a $E\gamma$.

Z toho tedy následuje, že ellipsoidy $E\alpha,\beta$, $E\beta,\gamma$, $E\alpha,\gamma$ mají vespolek tytéž body společné co ellipsoidy $E\alpha$, $E\beta$ a $E\gamma$.

Předcházejícími úvahami dokázána věta následující:

„Jest-li E ellipsoid přislušný dané soustavě n rovin a stálé K, a je-li E_α ellipsoid příslušný tytéž stálé K a tytéž soustavě rovin mimo jedinou z nich (α), dotýkají se ellipsoidy E, E_α dle kuželosečky obsažené v rovině α. Jest-li E_β ellipsoid, který obdobně přisluší vynechané rovině (β), protínají se ellipsoidy E_α, E_β dle 2 kuželoseček obsažených v rovinách rozpolujících úhly rovin (α) a (β). Je-li tudíž E_γ ellipsoid přislušný třetí rovině γ, pak protíná E_γ ellipsoidy E_α a E_β v bodech nalezajících se na osách rotačních kuželů opsaných aneb vepsaných trojstěnu $(\alpha\beta\gamma)$.

Budiž konečně $E_{\alpha\beta}$ ellipsoid, který pro stálou K obdržíme, vynecháme-li roviny α, β. Ellipsoidy E a $E_{\alpha\beta}$ dotýkají se v 2 bodech na přímce $(\alpha\beta)$ se nalézajících a průseky ellipsoidů $E_{\beta\gamma}$, $E_{\gamma\alpha}$, $E_{\alpha\beta}$ jsou též průseky ellipsoidů E a E_β E_γ."

(*Siacci.*)

O kruhu devíti bodů.

(Podává Dr. *E. Weyr.*)

Mějmež libovolný trojúhelník abc (viz obr. 11.) a buďtež $a'\, b'\, c'$ body rozpolující strany $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{ab}$. Body $a'\, b'\, c'$ proložený kruh K nechť protne strany $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{ab}$ v bodech α, β, γ, Poněvadž jak známo $a'b' \,||\, ab$, $a'c' \,||\, ac$, bude

$$\sphericalangle\, b'\, a'\, c' = \sphericalangle\, b'\, a\, c'$$

avšak jest též

$$\sphericalangle\, b'a'c' = b'\gamma c'$$

(co úhly obdvodové na tímtéž obloukem) tak že

$$\sphericalangle\, b'ac' = b'\gamma c'$$

to jest trojúhelník $\triangle\, ab'\gamma$ jest stejnoramenný aneb $ab' = b\gamma'$ a poněvadž $b'c = ab'$, bude $c\gamma \perp ab$. Bod γ jest tudíž pata s vrchole c spuštěné výšky; obdobně lze dokázat, že α a β jsou paty obou ostatních výšek. Tím dokázáno, že kruh K prochází nejen body rozpolujícími strany, nýbrž i patami výšek.

Výšky trojúhelníku protínají se jak známo na vzájem v tomtéž bodě v. Délky $\overline{va}$, $\overline{vb}$, $\overline{vc}$ nazýváme pak hořejšími a $v\alpha$, $v\beta$, $v\gamma$ dolejšími částmi výšek. Buďtež α' β' γ' druhé průseky výšek s kruhem K.

Poněvadž $\gamma' \gamma c' = 90^0$, jest též $\gamma' a' c' = 90^0$ t. j. $\gamma' a' \perp a' c'$ a jelikož $a' c' \perp ac$ a $b\beta \perp ac$, bude též $\gamma' a' \parallel b\beta$ a jelikož $ca' = a'b'$ musí též $c\gamma' = \gamma' v$ býti, t. j. bod γ' rozpoluje hořejší část $\overline{cv}$ výšky $\overline{c\gamma}$.

Zcela obdobně dokážeme, že body α', β' rozpolují hořejší části výšek $\overline{a\alpha}$ a $b\beta$. Kruh K prochází tedy taktéž body $\alpha' \beta' \gamma'$ rozpolujícími hořejší části výšek trojúhelníku abc.

Kruh ten, který dle dokázaného prochází následujícími devěti body:

1. polovinami $a' b' c'$ stran
2. patami α, β, γ výšek a
3. polovinami α', β', γ' hořejších částí výšek

nazýváme „*kruhem devíti bodů*“. (Le cercle des neuf points, Kreis der neun Punkte.)

Úloha. Dokaž, že poloměr kruhu devíti bodů jest polovina poloměru kruhu trojúhelníku abc opsaného.

Úloha. Dokaž, že střed kruhu devíti bodů rozpoluje vzdálenost průseku (v) výšek od středu O kruhu opsaného.

Úloha. Dokaž, že těžisko z trojúhelníku dělí vzdálenost průseku výšek od středu O kruhu devíti bodů dle poměru

$$\left(-\frac{1}{2}\right).$$

O sestrojování racionálních trojúhelníků.

(Sděluje *J. Sobička.*)

Ku kterémukoliv celému číslu co odvěsně najdeme druhou odvěsnu a racionální přeponu takto:

a) je-li číslo liché, rozdělme jeho čtverec na dvě o 1 se lišící části, menší jest druhá odvěsna, větší přepona;

b) je-li číslo sudé, zdvojmocněme jeho půl; odejmeme-li od toho čtverce 1, máme druhou odvěsnu, přičteme-li k němu 1, máme přeponu.

Příklady

ad a) $3^2 = 4 + 5$ tudíž $3^2 + 4^2 = 5^2$
$5^2 = 12 + 13$ „ $5^2 + 12^2 = 13^2$
$7^2 = 24 + 25$ „ $7^2 + 24^2 = 25^2$ a t. d.

ad b) 6 dá $(\frac{6}{2})^2 = 9$ tudíž $6^2 + 8^2 = 10^2$
8 „ $4^2 = 16$ „ $8^2 + 15^2 = 17^2$
10 „ $5^2 = 25$ „ $10^2 + 24^2 = 26^2$ a t. d.

Důkaz:

ad a) $(2n+1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$
ale $(2n^2 + 2n) + (2n^2 + 2n + 1) = (2n + 1)^2$
ad b) $(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$.

Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech.

(Podává Dr. *F. J. Studnička.*)

(Pokračování.)

Na str. 70., 80. a 144. bylo upotřebeno determinantů, aby se určil obsah trojúhelníku a čtyrstěnu pomocí souřadnic vrcholů neb rovnic útvaru omezujících. Nyní jest nám tedy ještě vyložiti spůsob, jakým se pomocí determinantů určuje obsah trojúhelníku a čtyrstěnu, známe-li délky tuto hran, onde stran.

Značí-li, jako prvé, x_k, y_k souřadnice vrcholu B_k, jest podle vzorce (2) pag. 70. obsah trojúhelníku $B_1 B_2 B_3$ vyjádřen vzorcem

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}$$

aneb nahradíme-li determinant tento determinantem stupně čtvrtého, *) vzorcem

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & x_1, & y_1 \\ 0, & 1, & x_2, & y_2 \\ 0, & 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix};$$

*) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 21.

vyměníme-li v determinantu tomto první dva sloupce, obdržíme podle známé poučky [1])

$$2\Delta = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & x_1, & y_1 \\ 1, & 0, & x_2, & y_2 \\ 1, & 0, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}$$

a znásobíme-li obě rovnice tyto podle známého pravidla [2])

$$4\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 1, & 1 & 1 & 1 \\ 1, & x_1 x_1 + y_1 y_1, & x_2 x_1 + y_2 y_1, & x_3 x_1 + y_3 y_1 \\ 1, & x_1 x_2 + y_1 y_2, & x_2 x_2 + y_2 y_2, & x_3 x_2 + y_3 y_2 \\ 1, & x_1 x_3 + y_1 y_3, & x_2 x_3 + y_2 y_3, & x_3 x_3 + y_3 y_3 \end{vmatrix},$$

znásobíme-li prvky všech řádků — 2 a dělíme-li celý determinant 16, nezmění se hodnota jeho [3]), povstane však

$$4\Delta^2 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0, & -2 & -2 & -2 \\ -2, & -2(x_1^2 + y_1^2), & -2(x_2 x_1 + y_2 y_1), & -2(x_3 x_1 + y_3 y_1) \\ -2, & -2(x_1 x_2 + y_1 y_2), & -2(x_2^2 + y_2^2), & -2(x_3 x_2 + y_3 y_2) \\ -2, & -2(x_1 x_3 + y_1 y_3), & -2(x_2 x_3 + y_2 y_3), & -2(x_3^2 + y_3^2) \end{vmatrix},$$

z čehož jde, dělíme-li prvky prvního řádku a prvního sloupce — 2 a násobíme-li celý determinant tudíž 4,

$$16\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1 & 1 & 1 \\ 1, & -2(x_1^2 + y_1^2), & -2(x_2 x_1 + y_2 y_1), & -2(x_3 x_1 + y_3 y_1) \\ 1, & -2(x_1 x_2 + y_1 y_2), & -2(x_2^2 + y_2^2), & -2(x_3 x_2 + y_3 y_2) \\ 1, & -2(x_1 x_3 + x_1 x_3), & -2(x_2 x_3 + y_2 y_3), & -2(x_3^2 + y_3^2) \end{vmatrix};$$

připočteme-li pak k prvkům

$$\left.\begin{matrix} \text{druhého} \\ \text{třetího} \\ \text{čtvrtého} \end{matrix}\right\} \text{ sloupce a řádku } \left\{\begin{matrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ x_3^2 + y_3^2 \end{matrix}\right\} \text{ krát}$$

hodnotu prvků prvního sloupce a řádku, čímž se hodnota determinantu nezmění [4]), obdržíme snadno

$$16\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1 & 1_1 & 1 \\ 1, & 0 & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, & (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 \\ 1, & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 & 0 & (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \\ 1, & (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2, & (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 & 0 \end{vmatrix},$$

z čehož povstane, jmenujeme-li stranu $B_1 B_2$ krátce a, stranu $B_1 B_3$ krátce b a stranu $B_2 B_3$ krátce c a považíme-li, že

---

[1]) ibid. pag. 22. [2]) ibid pag. 35. [3]) ibid. pag. 24. [4]) ibid. pag. 26.

všeobecně tu $B^2_{pq} = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2$,

$$16\Delta^2 = - \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & a^2, & b^2 \\ 1, & a^2, & 0, & c^2 \\ 1, & b^2, & c^2, & 0 \end{vmatrix};$$

znásobíme-li prvky všech sloupců součinem abc a dělíme-li prvky

$$\left.\begin{matrix}\text{druhého} \\ \text{třetího} \\ \text{čtvrtého}\end{matrix}\right\} \text{ sloupce a řádku součinem } \left\{\begin{matrix} ab \\ ac \\ bc \end{matrix}\right.,$$

obdržíme co konečný vzorec pro určení plochy trojúhelníku

$$16\Delta^2 = - \begin{vmatrix} 0, & c, & b, & a \\ c, & 0, & a, & b \\ b, & a, & 0, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix},$$

kdež vyskytuje se tedy souměrný determinant stupně čtvrtého s příčkou prázdnou [1]).

Připočteme-li prvky třech řádků posledních k prvkům řádku prvního, bude $a+b+c$ možná vyloučiti co společného činitele; podobným spůsobem vyloučí se $a+b-c$ atd., čímž se konečně přijde k známému vzorci

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kdež zavedeno označení

$$2s = a + b + c.$$

Co tu o ploše trojúhelníku bylo pověděno, možná provésti i u vzorce vyjadřujícího obsah čtyrstěnu souřadnicemi jeho rohů.

Jak známo platí tu vzorec

$$6T = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix},$$

z něhož se známým spůsobem vyvede

$$36T^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & \Sigma x_1^2, & \Sigma x_1 x_2, & \Sigma x_1 x_3, & \Sigma x_1 x_4 \\ 1, & \Sigma x_1 x_2, & \Sigma x_2^2, & \Sigma x_2 x_3, & \Sigma x_2 x_4 \\ 1, & \Sigma x_1 x_3, & \Sigma x_2 x_3, & \Sigma x_3^2, & \Sigma x_3 x_4 \\ 1, & \Sigma x_1 x_4, & \Sigma x_2 x_4, & \Sigma x_3 x_4, & \Sigma x_4^2 \end{vmatrix},$$

[1]) ibid. pag. 26.

zavede-li se označení

$$\Sigma x_p x_q = x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q;$$

z tohoto tvaru přijde se příslušným násobením a dělením — 2 konečně k vzorci

$$288\, T^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & a^2, & b^2, & c^2 \\ 1, & a^2, & 0, & d^2, & e^2 \\ 1, & b^2, & d^2, & 0, & f^2 \\ 1, & c^2, & e^2, & f^2, & 0, \end{vmatrix},$$

kdež $a, b, \ldots, f$ označují délky jednotlivých hran.

Že tu další zkracování neb přeměňování determinantu není možné tak, jak se dělo u výrazu pro plochu trojúhelníkovou, založeno v podstatě věci samy.

O účincích vodičů souměrně uspořádaných.

(Dopis ku komisi Akademie Pařížské stran zařízení hromosvodů.)

(Od prof. *K. V. Zengera.)*

Již dávno známo jest, že statická elektřina vždy jen na povrchu vodičů se shromažďuje. Z toho následuje, že se mohou vodiči i nevodiči uchrániti před účinky elektřiny, prokryjou-li se vodičem, na němž elektřina se nashromaždí, je-li v okamžiku výboje elektrického s tělesem vnitřním ve spojení.

Kdyby totiž byla obě tělesa sesilována, nastal by návod; ale i tento návod jest nullou, má-li jedno těleso podobu koule, poněvadž elektrické částice koule zevnější jsou souměrně rozloženy kolem povrchu koule vnitřní; pročež nemožno znamenati napnutí elektrické při známém pokusu, vzdalujeme-li pokrývající dvě polokoule od koule vnitřní. Veškerá elektřina nachází se pak na těchto zevnitřních polokoulích. Podmínky, aby ani sdělením ani návodem elektrické napnutí nepovstalo na vnitřním tělese, ať si je vodičem čili nic, jsou tedy: Za prvé, že při nabíjení elektřinou obě tělesa se dotýkají neb vodičem spojena jsou; za druhé, aby vodič zevnější souměrně byl položen kolem tělesa vnitřního, by jej chrániti mohl před účinkem elektrickým.

Že tomu tak, dá se dokázati následujícím strojem, který mám tu čest předložiti akademii a jenžto byl sestrojen panem *Ruhmkorffem.*

Uprostřed desky kruhovité, mosazné, podnožkou skleněnou isolované, nachází se velmi citlivý elektroskop s dvěma pozlátkovými lístky.

Pokrývka elektroskopu jest úplně ze skla. Elektroskop na hoře končí, jako obyčejně, kuličkou mosaznou, ku které se dají upevniti dráty mosazné, rozličně zakřivené. Tyto dráty představují části symetrických křivek, na př. kruhu, ellipsy neb paraboly a jsou souměrně k elektroskopu neb vlastně k oběma lístkům uvnitř elektroskopu rozloženy, tak že každý drát sám představuje jediný element povrchu tělesa rotačního a symetricky rozloženého, na př. koule, ellipsoidu, paraboloidu atd. Osa rotační leží ve směru pozlátkových lístků.

Nabijí-li se souměrný tento drát, který se dotýká spolu koule elektroskopu, elektřinou, nejeví se ni nejmenší účinek na elektroskopu. Lístky zůstanou i tenkráte nepohnuty, padají-li silné výboje stroje elektrického na kouli elektroskopu aneb na drát. Příčina tohoto výjevu zakládá se na tom, že veškerá elektřina nejenom na povrchu se nashromažďuje, nýbrž že také souměrné části drátu na protivných stranách stejné mají náboje a tudíž jejich účinky vesměs se ničí. Toto nashromaždění se elektřiny na povrchu a tento účinek souměrnosti vodiče očividně dokáže se následujícími pokusy:

Přiložíme-li kruhovitý drát ku kouli elektroskopu a necháme-li pak přeskakovati jiskry elektrické na tuto kouli aneb i na drát symetrický, neobjeví se pražádný účinek ani tenkráte, uvedeme-li silně elektrisovanou tyčku skleněnou neb kaučukovou, z níž jiskry srší, mezi drát a skleněnou pokrývku elektroskopu. Odejme-li se nyní drát, aniž by se tyčka elektrisovaná z položení svého proti elektroskopu odstranila, jest účinek velmi silný. Totéž se stane, nedotýká-li se vodič kruhovitý koule elektroskopu a nakloníme-li ho na př. pod úhlem větším než 60° proti prvotnímu položení, kdežto se koule dotýkal. Účinek jest velmi silný, málo slabší, než kdyby drát ten se úplně odstranil. Spojíme-li nyní tento nakloněný drát kruhovitý pomocí vodiče s koulí elektroskopu, jest účinek elektřiny znamenati, ačkoliv jest seslaben; neb obdržíme pak rozdíl účinků při této zrušené souměrnosti v položení drátu proti lístkům na elektroskopu, který rozdíl nyní není více nullou.

Tyto pokusy mohou se taktéž opakovati s dvěma koncentrickými kruhovitými neb parabolickými dráty, jichž plochy uzavírají pravý aneb i libovolný úhel.

Máme vždy souměrné a protivné účinky, jejichž výslednice jest nullou. Tyto pokusy stanou se ještě důkladnějšími a očividnějšími, vezmeme-li místo jednoho dva elektroskopy. Dolejší jest isolován a končí na hoře deskou kruhovitou a mosaznou, na níž pak se souměrné dráty upevní tak, že lístky hořejšího elektroskopu zase se nachází ve spojení s drátem a ve směru osy rotační onoho tělesa, jehožto element povrchový nám drát tento představuje. Tento elektroskop má úplně skleněnou pokrývku a jest od dolejšího isolátorem oddělen. Opakujem-li pokusy dříve uvedené, nepohnou se lístky hořejšího elektroskopu, kdežto lístky dolejšího se ihned odtrhnou.

Tyto pozoruhodné pokusy mohou býti užitečny pro sestrojování hromosvodů, je-li totiž hlavní vedení hromosvodu souměrně rozloženo v podobě kruhovitého, parabolického aneb také elliptického drátu, přecházejíc na př. přes čtyry rohy střechy křížem, tak že spolu přikrývají komíny a ve spojení jsou s dobrým vodičem v bodu, kde se křižují, k střeše vedeny. Bude tu účinek elektřiny atmosférické jistě lépe zamezen než nynějším spůsobem zařizování hlavního vedení hromosvodů.

Také přerušení vedení tohoto souměrného nestane se nebezpečné, jako při zařizování nynějším, kdežto sváděcí tyčka pak přivádí blesk na dům a z místa přetrženého výboj s jistotou očekávati se dá.

Přeřízne-li se drát na stroji dříve uvedeném, jest účinek ještě nullou; poněvadž takřka jen malá část elementu vyňata jest ze souměrného vodiče, čímž se stejnost v napnutí a vyrovnání se protivných účinků jen velmi málo ruší.

Ohneme-li pak tento přeříznutý drát, tak že i souměrnost se ruší, nastane ihned účinek tím větší, čím více symetrie porušena byla.

Dodatky. Následkem pokusů dříve naznačených a v sezení akademie Pařížské dne 9. září předvedených, požádal p. president akademie Faye pana Ruhmkorffa, by svými znamenitými prostředky experimentálními dále prováděl tyto pokusy. Podle vybídnutí toho sestrojil p. Ruhmkorff dráty souměrné takové velikosti, že je mohl jak přilbici postavit na hlavu jednoho ze svých dělníků a použiti tak hlavy lidské místo elektroskopu citlivého, by se přesvědčil, zdali skutečně aneb zdánlivě účinek elektřiny dovnitř mizí. Na tyto dráty pak nechal přeskakovati nejmohutnější jiskry obyčejné elektriky, pak navodící elektriky Holtzovy, anižby byl dělník měl nejmenšího pocitu při těchto tak značných výbojích. Zcela jinak však se měla věc, pouštěl-li místo jisker těchto strojů elektrických jiskry z navodících strojů dynamoelektrických. Byl by málem zabil dělníka. — Vysvětlení tohoto tak značného rozdílu podává však výše uvedená theorie.

Uvažme totiž, že nejenom elektřina na povrchu se shromažďuje, nýbrž také jen jeden druh elektřiny stejnodobně na drátu se nachází, používáme-li statické elektřiny. Docela jinak se věc má, vezme-li se i inductorium Ruhmkorffovo.

Nejenom, že drát střídavě kladnou a zápornou elektřinou se nabíjí, ale i napnutí obou elektřin jest rozličné; neb jiné jest napnutí, uzavře-li se proud navodící, než při přetrhování proudu. Poněvadž ale tyto nestejné výboje velmi rychle jeden za druhým následují, jest stejné napnutí na povrchu drátu souměrného nemožné a při pokusu Ruhmkorffově byla tedy postižena hlava dělníkova nejméně rozdílem elektrického napnutí obou protivných výbojů,

(Compt. Rend. sv. 75. č. 16. pag. 868.)

Úlohy.

I. Z mathematiky.

Úloha 37.

Má se řešiti rovnice

$$2^x - 4^x = 2.$$

Úloha 38.

Jak vypadá dvacátý člen řady, povstávající vyvinutím

$$(x + 2y + 3z + 4u)^{15}$$

podle polynomické poučky.

Úloha 39.

Aby se umořil dluh 2000 zl., platí někdo 20 po sobě jdoucích let každoročně 400 zl.; mnoho-li tu platí procent?

Úloha 40.

Rozdělíme-li 32 karet německých na 8 stejných skupenin jak velká jest pravděpodobnost, že v *jedné* skupenině se vyskytne *a) jeden* král, *b) dva* králové, *c) tři* králové, *d) všichni* králové? A jak velká jest pravděpodobnost, že se vyskytnou *dva* králové v *první* a dva v *poslední* skupenině? Konečně jak velká jest pravděpodobnost, že král *žaludový* se vyskytne v druhé a *zelený* v předposlední skupenině.

II. Z fysiky.

Úloha 34.

Parní kotel má pro bezpečnost záklopku 10□cm. plochy poskytující; při jakém tlaku se otevře, tlačí-li na ni paka 1kg. těžká, jejíž těžiště jest 21 cm. vzdáleno od bodu otáčecího a na níž ve vzdálenosti 48·65 cm. zavěšena jest tíže 7kg., kdežto bod otáčecí jest jen 5 cm. vzdálen?

Úloha 35.

Někdo pozoroval, že meteor se rozpraskl a po 8 sekundách od té doby počínajíc, co uslyšen výbuch, spadl na zem; v jaké výši se to událo a jakou tu rychlostí udeřil na zem?

Věstník literární.

Seznam spisů, jednajících o počtu pravděpodobnosti a theorii nejmenších čtverců. *)

(Sestavil dr. *F. J. Studnička.*)

(Dokončení).

Reuschle	„Über die Deduction der Methode der kleinsten Quadrate aus Begriffen der Wahrscheinlickkeitsrechnung, Crelle's Jour. Bd. XXVI — XXVII.
Ritter	L' application de la méthode des moindres carrés au calcul des observations, Paris 1858.
Roger	Solution d' un problème de probabilités, J. de Liouv. I. s. t. XVII.
Ruffini	Riflessione critica sopra il saggio filosofico intorno alle probabilità del Sig. Laplace, Modena 1821.
Santini	Compendiato esposizione del modo più vantaggiosa di risolvere una serie di equazioni lineari, risultanti da operazioni tutti ugualmente probabili, per la determinazione degli elementi di una proposta teorica, Mem. d. Ist. Venet. XIV. 1870.
Sawitsch	Die Anwendung der Warscheinlichkeitsrechnung, aus d. Russ. von C. Lais, Mitau 1863.
Schell	Über Wahrscheinlichkeit, Stuttgart 1862.
Schiaparelli	Sul principio della media arithmetica nel calcolo dei risultati delle osservazioni, Rend. d. Ist. Lomb. I. 771.
Simpson	Treatise on the nature and laws of chance, London 1740.
Tschebycheff	Démonstration élémentaire d' une proposition général de la théorie des probabilités, Crellés J. Bd. XXXIII.
„	Formule d' interpolation par la méthode des moindres carrés, Mém. cour. d. Belg. XXI., 1870.
Todhunter	History of the mathematical theory of probability from Pascal to Laplace, Cambridge 1865.
„	On the method of least squares, Trans. of Cambr. XI. 1869.
Tsinguer	Théorie élémentaire de la méthode des moindres carrés, Moscou 1862.
Venn	The logic of chance; on essay on the fondations and theory of Probability, London 1866.
Wild	Grundsätze der Warscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung, München 1862.
Zachariae	De mindste Kvadraters Methode, Nyborg 1871.

*) Seznam tento není arci úplný, obsahuje jen spisy, o nichž jsem se mohl dozvědět v Praze; kdo by věděl o spisech sem patřících, nechť mi laskavě oznámí titul jejich.

O zemském magnetismu.

(Podává dr. *Aug. Seydler.*)

V předmluvě k znamenitému spisu svému: „Untersuchungen über den Magnetismus der Erde 1819“, praví *Chr. Hansteen:* „Mathematikové evropští obraceli od času Keplerových a Newtonových zraky své k nebi, by dopodrobna stopovali běh oběžnic a jich vzájemné potržky; přáli bychom si, aby nyní na nějaký čas obrátili zrak svůj dolů ke středu země, neb i zde mohou znamenité zjevy viděti. *Vyslovujeť země zajisté němou řečí magnetky pohyby ve vnitru svém* a kdybychom si dovedli plamenné písmo severní záře dobře vyložiti, bylo by pro nás neméně poučné.... Kdyby se vlády mocnějších národů spojily k tomu účelu, by se pozorování četná konala a kdyby mathematikové pozorování ta spracovali, snad by se mohly nevysvětlené posud magnetické úkazy na zemi s touže jistotou jako pohyby těles nebeských podrobiti počtu.“

A dále cituje výrok jiného spisovatele*): „v náuce o zemském magnetismu vyhlíží to ještě jako v Ptolemaeově planetární soustavě.“

Teprv půl století uplynulo od tohoto výroku a Hansteen mohl ještě před svou smrtí († 11. dubna 1873) s radostí na to pohlížeti, kterak počali oblíbenou vědu jeho pěstovati učenci, kteří vzhledem k ní nejen úlohu Koperníka a Keplera (alespoň z veliké části) již vykonali, nýbrž i o úlohu Newtonovu se značným úspěchem se pokoušeli. Prvními jsou ti, kteří (jako zejmena Gauss) veškerý soubor rozmanitých zjevů magnetických v několik více méně jednoduchých zákonů (obyčejně empirických) zahrnuli; druzí jsou, kteří vycházejíce od určité hypothesi o příčině zemského

*) Schummel Weltstatistik.

magnetismu, na základě jejím zákony ty odůvodniti hleděli. První úloha jest z velké části vykonána; k řešení úlohy druhé přikročuje se šťastnějším úspěchem teprv doba nejnovější. Mezi rozličnými toho druhu pokusy vyniká jak velkou pravděpodobností tak i zvláštním důmyslem hypothesa *Zöllnerova*. Hlavní účel tohoto článku jest podati zprávu o této hypothesi a o některých jiných novějších vymoženostech v oboru tom; pro snadnější orientování předesílám stručný přehled celé náuky o zemském magnetismu.

I. Historický rozvoj náuky.

Starověcí národové evropští znali pouze jednu základní vlastnost magnetu, totiž *přítažlivost* jeho vzhledem k železu, nikoli však *polaritu* jeho, t. j. směrnou sílu, s jakou se vždy obrací jistá přímka magnetu, *osa magnetická*, k severu, kterážto vlastnost se může považovati za kořen naší náuky.

Známost vlastnosti té počala se šířiti u evropských národů teprv v 11. neb ve 12. století, a to prostřednictvím Arabů, kteří opět obdrželi magnetku (kompass co důležitý nástroj plavce) od Číňanů. Těmto sloužila již tisíc let před Kr. na cestách jejich přes nepřehledné stepy střední Asie*), později též na moři, když se čínské lodě odvažovaly až k indickým přístavům a břehům východní Afriky. V jednom slovníku z 3. století po Kr. dočítáme se již o umělém vyrábění magnetek natíráním. Též deklinaci počali již Číňané pozorovati, zavěšujíce magnetku na nit, jak později Coulomb učinil.

Are Frode, norský spisovatel (nar. 1068) vypravuje, že uspořádal třetí vynálezce Islandu, *Floke Vilgerdarson* r. 868 před vyplutím velkou oběť; „neb tehdy neznali ještě námořníci v severních zemích *vodícího kamene*".**) Je-li tento „Leidarstein" skutečně magnetkou, pak byla tato v Evropě známa již za dob Are Frode-a, tedy v 11. století.

První zcela authentická zmínka o směrnosti magnetky a o jejím upotřebení při plavbě objevuje se v satyrické básni *Guyot-a de Provins* „la Bible" (1190) a v popisu Palestiny, sepsaném

*) Na čínských vozích určených pro daleké cesty byla umístěna loutka pohyblivá, jejíž ruka stále k severu ukazovala.

**) Hansteen, l. c. str. 3.

od biskupa Ptolemaidy *Jakuba de Vitry* (1204—1215). Arabské názvy obou polů (zohron a aphron), jež u mnohých spisovatelů nalézáme (ku př. v „Speculum naturale 1254", Vincentia de Beauvais), jasně naznačují cestu, kterou užívání magnetky do Evropy přišlo. Z toho také patrno, že se nazývá bez práva *Flavio Gioja* (okolo 1300) vynálezcem kompassu; on jej bez pochyby jen zdokonalil.

Současně s kompassem šířila se u národů evropských známost *deklinace*, či jak se dříve říkalo *variace*; neboť i při nejpovrchnějším pozorování museli námořníci brzo poznati, že se magnetka odchyluje od směru severního, a že tato odchýlka magnetického meridianu od astronomického jest rozličná na rozličných místech povrchu zemského. Na mapě *Ondřeje Bianca* (r. 1436) jest již „variace" pro rozličná místa zanešena.

Columbus nalezl 13. září 1492 místo bez odchýlky, $2^1/_2{}^0$ východně od ostrova Corvo; on zpozoroval totiž, kterak se zde „variace" severovýchodní proměnila v severozápadní. Tehdy bylo ještě rozšířeno mínění, že jest deklinace na všech místech jednoho poledníku stejná, t. j. že čáry stejné odchýlky, t. zv. čáry isogonické jsou zároveň poledníky. Jelikož se pak náhodou po překročení onoho místa dosavadní velké vedro umírnilo a jelikož Columbus na další cestě moře nesmírným množstvím chaluh pokryté shledal, jakož i z jiných ještě důvodů domníval se, že tvoří poledník místem oním procházející důležité rozhraní zcela rozdílných fysikálních poměrů na povrchu země. To domnělé *fysikální rozhraní* proměnil papež *Alexandr VI.* (4. května 1493, hned po návratu Columbově) v *rozhraní politické*, ustanoviv poledník onen za demarkační čáru mezi majetkem španělským a portugalským. Ustanovení toto mělo bezděky velmi blahodárný vliv na vývoj naší nauky, pobádajíc k pilným pazorováním magnetickým.

Na základě pozorování těchto poznáno brzo, že se křivky stejné odchylky či *isogony* od astronomických poledníků značně odchylují. První všeobecnou mapu „variační" sestavil, ovšem jen na základě velmi nedokonalých pomůcek, kosmograf *Alonso de Santa Cruz*, učitel císaře Karla V., r. 1530.

V století XVI. nalezena jest druhá pro studium zemského magnetismu důležitá veličina, totiž *sklon* či *inklinace*.

Okolo 1530—40 seznal *G. Hartmann*, vikář v Norimberce, že magnetka v těžišti volně zavěšená „pod sebe směřuje“. On se mimo to pilně obíral zákony magnetické přítažlivosti a odpudivosti a umělým vyráběním magnetů.

Ale teprv r. 1576 počal *Robert Normann* v Londýně pozorovati inklinaci pomocí vynalezeného od něho a posud užívaného inklinatoria. Vrstevník jeho *Will. Gilbert* byl první, který si utvořil všeobecnější názor o magnetické síle země. Ve svém spisu „Physiologia nova de Magnete“ (1600) mluví „de magno magnete tellure“, jehož působení připisuje též vznik magnetismu v železných kolmě postavených tyčích. On posmívá se prostému tehdy rozšířenému mínění o jakýchsi magnetických horách, poblíž polů umístěných, jichž se námořníci velmi obávali očekávajíce od nich „ohromný jakýs zázračný vliv“. Gilbert dal také první v Evropě návod k vyrábění umělých magnetů natíráním (pokusy Hartmannovy zdá se že zůstaly nepovšimnutými).

Během XVII. století množila se pozorování deklinace a inklinace, a to hlavně za tím účelem, aby se na základě těchto veličin řešil předůležitý problém délek, t. j. aby se nalezla spolehlivá methoda k určení zeměpisné délky. Jest totiž důležitou úlohou námořníka znáti směr a rychlost své lodě, a určiti její místo na zemi pro každou dobu. Nejprvé určován směr a zároveň zeměpisná šířka pozorováním hvězd, hlavně hvězdy polární; zavedením kompassu přestalo pozorování toto alespoň vzhledem ke směru býti nevyhnutelně nutným. Když se pak později deklinace vynalezla a zároveň domněnka šířila, že deklinace jest podél jednoho poledníku stejná, ale pro rozličné poledníky rozličná, vznikla tím naděje, určiti zeměpisnou délku právě pozorováním deklinace. A i později, když poznán jest nepravidelný průběh křivek stejné odchylky, doufalo se, kombinováním pozorované deklinace s jinými známými veličinami (ku př. se zeměpisnou šířkou) určiti na základě zevrubných map magnetických zeměpisnou délku. Než ani tato naděje se úplně nevyplnila. Předpokládá se totiž při této methodě, že je deklinace každého místa veličinou stálou, od času neodvislou, kterou lze jednou pro vždy určiti; jinak by pozbyly ony magnetické mapy za několik let vší praktické ceny. Shledáno však záhy, že pozorování deklinace, provedené na témž místě v dobách rozdílných, vedlo též k výsledkům rozdílným. Tento spor mezi pozorováním novějším a starším přičítal se z počátku nedokonalosti dřívějšího měření; teprv r. 1634 zjistil *Hellibrand*, že tato postupná změna deklinace jest skutečná. Totéž shledáno později i vzhledem k inklinaci, a *Bond* sestavil r. 1668 tabulku, v které již napřed vypočítal inklinaci v Londýně pro příštích 50 let.

Velkých zásluh o rozvoj náuky naší získal sobě *Halley*, jednak svou theorií, r. 1683 v hlavních rysech vypracovanou, ku které se později vrátíme, jednak a to ještě více svými cestami r. 1698—1702 hlavně k vůli podrobnějšímu studiu zemského magnetismu podniknutými. Na základě bohatých zkušeností svých mohl sestrojiti první obšírnou a důkladnou *mapu „variační“*, která má více než historickou cenu, poskytujíc možnost určiti postupný pohyb křivek isogonických.

Další pokrok učiněn jest *Grahamem* v Londýně, který se r. 1722 ponejprv zevrubně a vytrvale obíral denní periodickou proměnou deklinace. (Již r. 1683 pozoroval *Tachard* v Siamě značné rozdíly v poloze magnetky v rozličných dnech). Deklinace mění se totiž během dne, dílem periodicky, dílem postupně, tak že se hodnota její stává po 24 hodinách ne sice zcela stejnou, ale přec (obyčejně) málo rozdílnou. Známost úkazu toho (nyní vlastně t. zv. *variace*) šířili později též *Celsius* a *Hiörter* v Upsale, kteří zároveň první poznali souvislost severní záře se zemským magnetismem.

Brugmans a dokonaleji *Coulomb* (1784—1788) dokázali podrobnými pokusy zákon magnetické přitažlivosti a odpudivosti, čímž se jedině umožnil další theoretický pokrok naší náuky.

Studium třetí důležité veličiny (třetí magnetické souřadnice) totiž *intensity* počíná teprv koncem minulého století. *Borda* byl první, který toho uznával možnost, že by intensita magnetismu na rozličných místech země byla rozličná, a který navrhoval k měření jejímu kývání magnetky. Návrh jeho byl nejprvé proveden *Lamanonem* na cestách podniknutých r. 1785—87; výsledky těchto pozorování zůstaly však neznámy, jelikož je francouzská akademie neuveřejnila.

Teprv pozorování *Al. Humboldta*, provedená r. 1798—1804 v jižní Francii, ve Španělích, v tropických krajinách Ameriky, v atlantickém a v tichém oceánu, stala se základem našich vědomostí o poměrech intensity zemského magnetismu. Humboldt však rozvoji naší náuky též prospěl mocným vlivem svým jímž dovedl jednak pohnouti mnohé síly vědecké k studiu vědy té, jednak nakloniti vlády k skvělému jich podporování. Tak přijala r. 1829 cís. akademie věd v Petrohradě Humboldtův návrh na zařízení magnetických a meteorologických stanic v četných místech ruské říše a na vystavění fysikálního ústředního observatoria v Petrohradě. Neméně příznivý výsledek měl r. 1836 přípis Humboldtův předsedovi král. společnosti Londýnské; v mnohých osadách roztroušených po všech částech světa zařízeny jsou magnetické stanice a zároveň povolena r. 1839 velká vědecká expedice antarktická pod velením *J. Ross-a*, která měla se zvláštní pečlivostí přihlížeti též k magnetickým poměrům jižní polokoule. Vůbec nastal během XIX. století tak čilý ruch ve studiu náuky naší a vzrostl následkem toho materiál měrou tak úžasnou, že dlužno nynějšího času náuku tu právě jako meteorologii považovati za samostatnou vědu. Mimo právě uvedené vytknu ještě jen některé důležitější zjevy z oboru toho:

R. 1806—1807 provedl Humboldt s Oltmannsem dlouhou řadu pozorování týkajících se *magnetických bouří*, t. j. náhlých nepravidelných a rychle se střídajících proměn v poloze magnetky.

R. 1817—48: řada velkých vědeckých, také pro známost zemského magnetismu důležitých výprav, vyslaných francouzskou vládou hlavně do tichého moře.

R. 1818—51 podobné četné expedice vyslané anglickou vládou do severního ledového moře.

R. 1819 vyšlo svrchu uvedené dílo Hansteenovo, ku kterému připojen atlas obsahující mapy křivek isogonických, isoklinických a isodynamických.

R. 1820 odkryl Oersted působení galvanického proudu na magnetku, a r. 1821 Seebeck thermoelektrický proud; oba vynálezy měly značný vliv na rozvoj myšlenek o původu zemského magnetismu.

R. 1828—29 pokračoval Humboldt ve svých pozorováních počatých r. 1806 a zasadil se o provedení současných pozorování v Petrohradě, Nikolajevě a ve Freibergu, čímž vyšla na jevo úplná současnost magnetických bouří či potržek (perturbací) ve jmenovaných místech, tudíž na velké části povrchu zemského.

Též na své cestě po střední Asii r. 1829 obíral se Humboldt pilně určováním magnetických souřadnic.

R. 1833 počíná *nová doba* pro rozvoj náuky naší. *Gauss* vydal důležitý spis svůj „Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata". Kdežto se dříve určovala intensita zemského magnetismu jen relativně, t. j. kdežto se jen porovnávala intensita na jednom s intensitou na druhém místě, *) může se nyní intensita na každém místě absolutně měřiti, t. j. se známými nám silami porovnávati. Vedle toho rozvíjel Gauss rozsáhlou činnost praktickou: založil v Gottinkách *magnetický spolek*, k němuž během času přistoupili četní pozorovatelé na jiných místech, tak že již r. 1834 mohla se zaříditi současná tak zv. „*terminová*" pozorování v rozličných místech, zařízená hlavně pro studium rychlých proměn intensity.

R. 1839 vyšlo Gaussovo nesmrtelné dílo: „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus."

Od té doby ruch na poli naší náuky ještě vzrůstal. Ku konci r. 1838 smluvili se někteří učenci o společném plánu a r. 1840 počaly dle toho práce v nově zařízených jakož i v dřívějších ústavech.

Na základě vědeckého materiálu takto nahromaděného odkryly se některé zvláštní zákony: tak nalezl *Lamont* v Mnichově *desítiletou periodu* v proměnách deklinace; *Kreil* v Praze vyšetřoval vliv měsíce na deklinaci atd. Vzdor těmto jednotlivým úspěchům poznávalo se čím dále tím více, že máme před sebou zjev zákonnitosti daleko složitější, než se zpočátku očekávalo. Kdyby se byla ona systematická pozorování, jak se z počátku zamýšlelo, obmezila jen na tři leta, nebylo by bývalo vědě tím hrubě pomoženo. Teprv dlouhá řada pozorování a pečlivé vyhledávání empirických zákonů v nich obsažených může nás o pravých příčinách zemského magnetismu poučiti.**)

*) Za jednotku volila se obyčejně intensita pozorovaná Humboldtem na magnetickém rovníku, tam kde tento protíná peruanské kordillery: $7^0\ 2'$ již. š. a $81^0\ 8'$ záp. d.

**) Tento historický přehled sestaven jest hlavně na základě zpráv obsažených ve spisech: *Humboldt*, „Kosmos", Bd. I. II. IV., *Hansteen* „Untersuchungen" atd. a *Lamont*, „Astronomie u. Erdmagnetismus" Nejdůležitější spisy o zemském magnetismu vytknu ku konci celého pojednání.

II. Základní problémy.

Z předešlého přehledu seznali jsme *historický* rozvoj náuky naší; nyní k ní přihledneme se stanoviska *soustavného*.

Vědomosti naše vzhledem k zemskému magnetismu byly by úplné, kdybychom pro *každé místo* a pro *každou dobu* znali magnetickou sílu země, t. j. jak intensitu tak i směr její, zároveň pak souvislost této síly s ostatními silami přírodními. První úlohu můžeme pojmouti takto:

Vedeme-li jakýmsi bodem O povrchu zemského přímku ve směru magnetické síly, t. j. ve směru zavěšené volně pohyblivé magnetky, a rovná-li se délka této přímky intensitě magnetické, pak jest konečným bodem A této přímky stav magnetismu v bodu O pro určitou dobu úplně charakterisován. Poloha bodu A vzhledem k bodu O vyžaduje známost tří *souřadnic*. Z ohledů praktických voleny jsou souřadnice polární, jež lze pomocí obecně užívaných strojů snadno určiti; jest to *sklon* i přímky OA k obzoru bodu O, *odchýlka* δ roviny přímkou OA kolmě k obzoru proložené, jinak t. zv. magnetického poledníka od poledníka astronomického; konečně vodorovná složka T intensity OA, t. j. průmět této přímky na rovinu obzoru *).

Z důvodů theoretických hodily by se někde lépe souřadnice pravoúhelné, jež také Gauss ve své theorii zavedl, jež lze ostatně z polárních velmi snadno vypočítati. Budiž osa OZ normála v bodu O na povrh země vztýčená, OX přímka vodorovná v obzoru na sever a OY přímka podobně na západ vedená, pak bude poloha bodu A určena souřadnicemi X, Y, Z, a tyto jsou zároveň složkami celé intensity J vzhledem k uvedeným osám. Mezi těmito a dřívějšími souřadnicemi platí následující relace:

$$X = T \cos\delta$$
$$Y = T \sin\delta$$
$$Z = T \operatorname{tg} i.$$

Co se určování veličin δ, i, T, týče, musím se obmeziti na některé poznámky. Deklinace a inklinace určuje se pomocí

*) Považujeme-li kolmici v bodu O na povrch země vztýčenou za osu polární, astronomický poledník za plochu základní, pak by byly vlastně dle obvyklého označení polární souřadnice: $90 - i$, δ, $OA = J = \frac{T}{\cos i}$. Rozdíl souřadnic svrchu uvedených od těchto není podstatný.

vůbec známých strojů spůsobem zcela jednoduchým; obtížnější jest měření intensity. Před Gaussem porovnávala se pouze intensita na rozličných místech pomocí kývající magnetky, určovala se tedy jen relativně. Při kývadle mají se působící síly k sobě jako čtverce počtů kyvů vykonaných v téže době. Síla působící v místě O na magnetku jest součinem magnetického momentu magnetky M a vodorovné složky zemského magnetismu T v témž místě (kývá-li magnetka v rovině obzoru). Počet kyvů za minutu budiž n; v místě O' bude intensita vodorovná jiná: J', a tudíž i jiný počet kyvů: n'. *Předpokládáme-li, že se magnetický moment magnetky, s kterou na obou místech pozorujeme, nezměnil, obdržíme úměr*

$$MT : MT' = T : T' = n^2 : n'^2$$

z kterého určíme *poměr* $\frac{T}{T'}$, nikoli však *absolutní hodnotu* obou veličin. Methoda ta má tedy dvojí vadu: relativnost a nespolehlivost (vzhledem k možné proměně veličiny M). Obě vady jsou odstraněny při Gaussově methodě, kterou rozvinul r. 1833 ve spise svrchu uvedeném. Zde pozoruje se mimo kývání ještě úhel, o který se odchýlí z magnetického meridianu pomocná magnetka vlivem magnetky prvé. Úhel ten jest jaksi mírou pro poměr mezi intensitou zemskou a silou té magnetky, t. j. poměr obou veličin $\frac{T}{M}$ jest úkonem onoho úhlu φ a vzájemné polohy obou magnetek. Z důvodů praktických volí se polohy co nejjednodušší; když na př. prodloužení hlavní magnetky stojí kolmě na pomocné magnetce ve středu této, obdržíme rovnici

$$\frac{1}{2} e^3 \frac{T}{M} \sin \varphi = 1 + \frac{a_2}{e^2} + \frac{a_4}{e^4} + \ldots\ldots$$

e jest vzdálenost středu obou magnetek, a_2 a_4 atd. součinitelé závislé od rozdělení magnetismu v nich. Řada ta jest vždy sbíhající, a pro velmi velkou vzdálenost e dostačí podržeti první člen: 1.

K této rovnici připojí se druhá, kterouž obdržíme pozorováním kývání magnetky na základě zákonů kývadlových:

$$MT = \frac{\pi^2 K}{t^2}$$

kde znamená K moment setrvačnosti magnetky a t pozorovanou dobu kyvů. Z obou rovnic si zjednáme vyloučením momentu M intensitu T vyjádřenou mírou absolutní. Toť *základní myšlenka* Gaussovy methody; v praktickém provedení nutno ovšem přihlížeti ještě k mnohým zvláštnostem a podrobnostem. —

Vedle určování absolutních hodnot deklinace, inklinace a intensity pozorují se též denní proměny těchto veličin a to na mnoze stroji rozdílnými, t. zv. stroji variačními.

Variační stroj pro deklinaci jest založen na témž principu jako obyčejné deklinatorium; měří se zde též úhel, jejž tvoří magnetická osa magnetky s astronomickým meridianem.

Variační stroj pro inklinaci jest sestrojen od Lloyda na základě té věty, že se v kolmé železné tyči návodem probouzí magnetismus, jehož moment jest v přímém poměru ke kolmé složce zemského magnetismu a může tudíž býti vyjádřen výrazem $a\,J \sin i$, kde a jest stálým součinitelem. Umístíme-li tedy kolmou železnou tyč vedle magnetky, jejíž moment jest M, odchýlí se tato o úhel φ z magnetického poledníku. Magnetka hledí se vrátiti do původní polohy momentem $MT \sin\varphi$ a pohybovati v opačném směru momentem $a\,MJ \sin i$, tak že obdržíme rovnici

$$MT \sin\varphi = MJ \cos i \sin\varphi = a\,MJ \sin i, \qquad \text{čili}$$

$$a \,tg\, i = \sin\varphi.$$

Mění-li se inklinace i, mění se následkem toho úhel φ a z proměny jeho lze tudíž souditi na proměnu inklinace.

Variačním strojem pro intensitu bývá obyčejně Gaussův bifilární magnetoměr. Na dvou rovnoběžných stejně dlouhých drátech zavěšena jest magnetka, která se otočením drátů uvede do polohy kolmé na magnetický rovník. V poloze té jest roztáčivá síla drátů (torse) v rovnováze se silou směrnou MT, která hledí uvésti magnetku zpět v magnetický poledník. Prvá síla jest téměř stálá (až na malé proměny spůsobené vlivem proměnlivé teploty); druhá síla MT mění se stále a následkem toho i poloha magnetky, a z proměny této polohy lze souditi na proměnu veličiny T.

Při všech variačních strojích měří se tedy proměna v poloze volně zavěšené magnetky, a poněvadž proměna ta jest velmi nepatrná, pozoruje se dle Poggendorffovy methody, totiž tak, že se dalekohledem pozoruje stupnice odrážející se v zrcadle, jež jest umístěno na magnetce a sdílí tudíž pohyb její. Dle rozličné polohy magnetky vidíme rozličné stupně této stupnice a můžeme z čísel pozorovaných vypočítati příslušné magnetické veličiny.

Deklinaci a inklinaci měříme co úhly spůsobem vůbec známým; jaká jest však jednotka intensity J neb její složky T? Především musíme uvážiti, že jest magnetická síla součinem intensity J a množství m magnetismu obsaženého v částici, na kterou působí, a že se každá síla měří urychlením, jež udílí jednotce hmoty. Intensita J má tedy v mnohém ohledu obdobu s tíží (s accelerací g). Při obyčejném spůsobu měření jest jednotka každé síly a tudíž i síly $m\,J$ jeden kilogramm, t. j. síla která jednotce hmoty (hmotě obsažené v 9.809 kilogrammech) udílí urychlení rovnající se jednotce délky (jednomu metru). Přihližeje k malým poměrně silám magnetickým zavedl Gauss jiné základní jednotky: hmotu obsaženou v 1 milligrammu co jednotku hmoty a 1 millimetr co jednotku délky. Jednotka síly $m\,J$ jest pak 9809000000-krát menší než jednotka tíže. Ovšem praví někteří jako Lamont, že jest míra pro magnetické síly jen 9809-krát menší, soudíce takto: hmotě jednoho milligrammu udílí jednotka magnetické síly urychlení 1 millimetru, *téže hmotě* udílí tíže urychlení 9809-krát větší než ona míra. Výrok ten jest ovšem správný, volíme li za jednotku tíže 1 milligramm a obdobně za jednotku hmoty hmotu v 9809 milligrammech obsaženou.

Míra pro veličinu J jest pak ona intensita, která udílí, působíc na jednotku magnetismu m, jednotce hmoty magnetismus ten obsahující jednotku urychlení; a míra magnetismu ono množství, které působíc na stejné množství ve vzdálenosti 1 odpuzuje hmotu 1 urychlením 1. Obě míry, pro J a pro m, na vzájem od sebe závisí, čehož příčina v tom leží, že obě veličiny při pozorování vždy spolu sloučeny, co síla $m\,J$ se objevují.

Vraťme se nyní opět ke geometrickému znázornění magnetických poměrů na zemi pomocí bodu A a O.

Poloha bodu A vzhledem k bodu O jest na rozličných místech rozličná, mění se však též na jednom místě během času, tak že bod A opisuje jakousi křivku, a jest tudíž naší úlohou, určiti křivku tu pro každé místo, čili mathematicky řečeno určiti souřadnice (jedné neb druhé soustavy) co úkony zeměpisné délky, šířky a potom času

K řešení této úlohy musí náuka naše, jako každá jiná náuka přírodní spočívající na zdravých základech, postupně projíti *třemi dobami* svého rozvoje.

První krok bude ten, že se na četných místech a v lhůtách co možná krátkých (in abstracto bychom měli říci: *na všech* místech a *neustále*) pozorují ony tři veličiny, čímž se shromažďuje materiál pro další bádání.

Celá další vědecká práce naše má, ať tak díme, úkol oekonomický *); namáhavé pozorování ono má se učinit buď zcela zbytečným, aneb uvésti na míru co nejskrovnější (poslední případ jest v přírodních vědách, kde se určení jistých konstant theoreticky naprosto provésti nemůže, obyčejnější a tudíž i zde pravdě podobnější). Ku př. dejme tomu, že by se pozorovalo až posud na mnoha stech místech; vědecké spracování těchto pozorování ukáže nám, že dostačí pozorovati pravidelně třeba jen na 84 místech, aby tím magnetický stav země byl dostatečně charakterisován. Další theoretický rozvoj naší náuky zmenší třeba počet tento ještě více, atd.

Bude tedy *druhým* stupněm v rozvoji vědy naší, když dovedeme vyhledati ony empirické zákony, jež činí magnetické souřadnice závislými na místě a času. Vyhledání to může se opět díti dvojím spůsobem: buď můžeme veličiny ty určiti co úkony místa a času spůsobem čistě empirickým, aneb si můžeme zjednati alespoň tvar těchto úkonů úvahami theoretickými, přenechajíce podrobnější jich určení výsledkům našeho pozorování. Rozdíl jest ten, že v prvním případě vzorky mathematické představující veličiny hledané pouze o *zevnějším* vztahu jejich k základním proměnným nás poučují, v druhém pak nám poskytují názor ve *vnitřní* souvislost oněch veličin. Poslední případ jest přechodem k *třetí* době vědy, kde žádný zjev nezdá se nám více nahodilým, nýbrž jest podřízen přísné zákonnitosti, a kde opět tyto jednotlivé zákony, určující zvláštní zjevy, sloučeny jsou jednotnou páskou společného principu aneb alespoň co nejmenšího počtu různých principů, z nichž vše až do nejmenších podrobností vyvoditi se může. Příklad to nejlépe objasní

*) V. Mach: Über die logische Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit, str. 55.

Astronom chtěje znáti pohyby oběžnic musel nejprv pilným a vytrvalým pozorováním se zanášeti; na základě výsledků takto zjednaných byl s to, vyhledati zákony oněch pohybů, nejprv zcela empiricky (epicykly Ptolemaeovy soustavy), později s přibráním mathematických, tudíž deduktivních úvah (Keplerovy zákony); nyní může však na základě šťastně nalezeného jednotného principu (Newtonovy gravitace) zcela dekuktivně vyvoditi pohyb nejen planet, nýbrž i komet, jich perturbace, v novější době též pohyb meteoritů, dvojhvězd atd.

Přiložíme-li to co právě bylo řečeno, za měřítko k naší náuce, musíme uznati, že se přes všechny více méně zdařilé pokusy, uvésti ji na vyšší stupeň rozvoje, nalezá větším dílem posud na prvním stupni. Sbírání materiálu jest posud hlavní její úlohou; při tom se ovšem pilně pracuje ve směru druhém, a četné zákony ovládají již jednotlivé skupiny úkazů. Tak nalezeny již rozličné periodické proměny jednotlivých zjevů magnetických, kteréžto periody naznačují souvislost těchto zjevů s denním pohybem země, s oběhem měsíce kolem země ano i s otáčením se slunce kolem vlastní osy. Největší pokrok učiněn však v ohledu tom *Gaussem*, který určil jednotlivé elementy zemského magnetismu co úkony prostoru, ale jen pro určitou dobu (tedy nikoli co úkony času, což jest daleko obtížnější částí celého problému). O Gaussově theorii pojednáme ihned podrobněji; dříve však přihledneme ještě k důležité pomůcce při studiu zemského magnetismu. Jsou to magnetické mapy, jež obdržíme, spojíme-li křivkami body mající buď stejnou deklinaci neb inklinaci neb intensitu. Tím obdržíme trojí soustavu křivek, jež se nazývají *isogony*, *isokliny* a *isodynamy*, a jež nás na první pohled poučují o stavu zemského magnetismu jakož i porovnáme-li mapy pro rozličné doby zhotovené, o proměnách jeho v času. Mimo křivky právě uvedené mohou se sestrojiti ještě některé jiné, ku př. (zavedeme-li svrchu vytknuté souřadnice X, Y, Z,) křivky stejné veličiny X, neb Y, neb Z, jak je Gauss podává ve svém atlasu zemského magnetismu. Při tom vynikají některé křivky a body na povrchu zemském zvláštní důležitostí; jsou to zejmena následující:

1. Vzhledem k deklinaci *křivka bez odchylky*, t. j. křivka spojující body, kde $\delta = 0$, čili kde magnetka ukazuje právě

na sever; křivka ta odděluje tudíž místa se západní deklinací od míst deklinace východní.

2. Vzhledem k inklinaci

a) *magnetický rovník*, t. j. křivka, na které jest $i = 0$, na které má tudíž magnetka polohu vodorovnou; křivka ta dělí místa severní a jižní inklinace;

b) *magnetické poly*, body, v nichž jest inklinace $= 90^0$, v nichž tedy vodorovná složka intensity mizí; jsou dva, jeden na severní, druhý na jižní polokouli.

3. Vzhledem k intensitě

a) *křivka nejmenší intensity* čili *dynamický rovník*, t. křivka spojující všechny body, v nichž intensita jest menší než intensita všech sousedních *severních* i *jižních* bodů. Však ve směru křivky samé jest opět intensita proměnlivá, pročež křivka ta není isodynamou; nalezáme na ní

b) dva *body nejmenší intensity*; konečně umístěny jsou blíž polů

c) *body největší intensity*, jež třeba dobře rozeznávati od magnetických polů; jsou čtyry (dle Gausse tři) takové body, na každé polokouli dva.

Podrobněji seznáme polohu těchto útvarů a při posledních též velkost příslušné intensity v následujícím odstavci.

III. Starší theoretické pokusy a Gaussova theorie.

Mysleme si nejprvé pro snadnější orientování, že jest země magnetem, jehož osou jest astronomická osa a v němž rozdělení magnetismu vzhledem k této ose i vzhledem k rovníku jest zcela souměrné. Takový byl asi původní názor o zemi co magnetu, ačkoli přísných historických důvodů pro to nemáme. Patrně by pak všecky isogony byly křivkami bez odchýlky a zároveň astronomickými poledníky; isokliny a isodynamy by byly rovnoběžníky, astronomický, magnetický a dynamický rovník byly by totožné, jakož i astronomické, magnetické poly a body největší intensity; bodů nejmenší intensity by vůbec nebylo. To však nesouhlasí ani s nejpovrchnějším pozorováním, a můžeme považovati rozdělení magnetismu právě vylíčené pouze za jakýsi *abstraktní typus*, t. j. isogony mají v celku průběh poněkud podobný jako poledníky, isokliny blíží se též poněkud rovnoběžníkům, magnetický rovník umístěn jest při rovníku astronomickém protínaje jej v několika bodech, magnetické poly nalezají se také blíže polů astronomických atd.

Vzhledem k tomu dopustili se všichni theoretikové před Gaussem *základní chyby*, domnívajíce se, že mají určiti ono skutečné rozdělení magnetismu v zemi, z něhož by se vypočítati mohly pozorované souřadnice magnetické. Majíce úlohu tu za možnou, předpokládali jakési hypothetické, zcela libovolné rozdělení magnetismu a vyšetřovali pak, zda-li výsledky z něho vyvozené souhlasí se skutečností.

První pokusil se o theorii zemského magnetismu *Halley* r. 1683. Seznal brzo, že nevystačí přijetím dvou polů, jednoho severního a jednoho jižního; proto přijal ještě dva poly, o nichž předpokládal, že se pomalu otáčí od východu na západ kolem prvních dvou pevných polů, chtěje tím vysvětliti proměnu časovou v poloze isogonických křivek. Onen pohyb vysvětloval opět tím, že předpokládal uvnitř země jinou menší kouli soustřední (terrella), která se pomaleji otáčela kolem své osy než zevnější obal, a na které byly umístěny ony dva pohyblivé poly, takže prodloužení magnetické osy její protínalo povrch země postupně v jiných bodech, kdežto pevné (vzhledem k povrchu země) poly byly umístěny v povrchu samém.

Tob. Mayer hleděl vysvětliti úkazy magnetické tím, že předpokládal malý magnet umístěný v zemi ve vzdálenosti $^1/_7$ poloměru od středu země; vypočítané na základě této hypothese souřadnice magnetické nesouhlasily však se skutečností. Poněkud všeobecněji pojal otázku tu *Euler*, hledaje, jaký vůbec magnet a v jaké poloze by úkazům magnetickým vyhověl, ovšem že bez úspěchu. On sám podává svůj rozbor co „pouhý pokus, pokročiti zcela nepatrně v pravé theorii magnetické deklinace, která jest bez odporu jedním z nejobtížnějších předmětů, o kterých posud bylo jednáno". Dále postoupil na téže dráze *Hansteen* předpokládaje uvnitř země dva malé magnety rozličné polohy a síly, z jichž působení chtěl vyvoditi úkazy magnetické na zemi. Při dostatečném počtu takových hypothetických magnetů a při železné vytrvalosti u vykonání obrovských výpočtů by se konečně snad podařilo, odůvodniti jakž takž úkazy magnetické, každý ale snadno nahlédne, že jest počínání to zcela libovolné, a tudíž pochybené; vždyť ani a priori nevíme, zda-li nemůže magnetismus několikerým spůsobem být rozdělen v zemi tak, aby účinek na povrchu země, který jediné známe, byl vždy tentýž.

Zcela jinou cestu nastoupil a to s úpěchem nejskvělejším Gauss, určiv pomocí theorie všeobecně platnou formu úkonů představujících magnetické souřadnice, pomocí pozorování pak součinitele úkonů těch. V mnohém ohledu rovná se vědecký čin jeho činu Keplerovu; neboť v obou případech nezjevila se nám ještě pravá příčina daného zjevu, či lépe řečeno souvislost jeho s ostatními zjevy, ovšem ale zákonitost jeho. Podstatný rozdíl, odůvodněný ostatně složitostí cele úlohy při naší náuce, záleží v tom, že Gauss řešil jen část úlohy té, týkající se prostoru, pro druhou část, týkající se času nebylo a bezpochyby posud není dostatečně materiálu; alespoň se nikdo ještě nepokusil o to vyplniti mezeru, kterou byl Gauss zanechal.

Tresť Gaussovy theorie jest následující:

Působení dvou částic magnetických m a m_1 ve vzdálenosti r jest vyjádřeno výrazem

$$\frac{m\,m_1}{r^2},$$

který značí při stejném označení veličin m a m_1 odpuzování, při nestejném označení (při kterém se výraz stane záporným) přitahování obou magnetických částic. Zemi můžeme si myslet složenou ze samých magnetických částic $m_1\ m_2\ m_3 \ldots$ jichž vzdálenost od m jest $r_1\ r_2\ r_3 \ldots$ (Zde nečiníme žádnou zvláštní hypothesi o magnetické náladě země, jako dřívější badatelové, neboť veličiny $m_1\ m_2\ m_3 \ldots$ jsou ještě zcela neurčity). Působení země na magnetickou částici m jest tedy určeno výrazem

$$\frac{m\,m_1}{r_1^{\,2}} + \frac{m\,m_2}{r_2^{\,2}} + \frac{m\,m_3}{r_3^{\,2}} + \ldots = m\,\Sigma\frac{m_k}{r_k^{\,2}} = m\,J,$$

kde znamení součtu Σ vztahujeme ke všem magnetickým částicím země. Intensita J je patrně úkonem souřadnic x, y, z bodu m; my ji můžeme rozložiti dle tří pravoúhelných os ve tři složky X, Y, Z, a obdržíme na základě známých z analytické geometrie prostorové relací následující rovnice, v nichž jsou $x_k\ y_k\ z_k$ souřadnice bodu m_k

$$X = \Sigma\frac{m_k}{r_k^{\,2}}\cdot\frac{x-x_k}{r_k},\quad Y = \Sigma\frac{m_k}{r_k^{\,2}}\cdot\frac{y-y_k}{r_k},\quad Z = \Sigma\frac{m_k}{r_k^{\,2}}\cdot\frac{z-z_k}{r_k}.$$

Gauss dokazuje dále, že lze obdržeti tyto složky X, Y, Z z jediného výrazu jednoduchou mathematickou operací, totiž differencováním; výraz ten, jejž nazývá Gauss *magnetickým potenciálem země* vzhledem k bodu m, jest následující

$$V = -\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \ldots\right) = -\Sigma \frac{m_k}{r_k}$$

Známe-li výraz ten, obdržíme ony složky z následujících rovnic:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x},\ Y = \frac{\partial V}{\partial y},\ Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Z toho patrno, že jest nesmírně důležito, určiti potenciál V; a priori jej ovšem nemůžeme sestrojiti, neznajíce rozdělení magnetismu v zemi, tedy veličiny m_1 m_2 $m_3 \ldots$; my můžeme však určiti tvar jeho, vědouce, že V jest úkonem polohy neb souřadnic bodu m, tedy buď veličin x, y, z, aneb polárních souřadnic: vzdálenosti bodu m od středu země r, jeho zeměpisné šířky φ a délky λ. (Veličiny ty objevují se ve výrazech pro r_k a tudíž i v potenciálu V). Potenciál V můžeme tedy rozvinouti v řadu klesající dle mocnosti veličiny r, které můžeme dáti tvar následující

$$V = \frac{R^2 P^0}{r} + \frac{R^3 P'}{r^2} + \frac{R^4 P''}{r^3} + \frac{R^5 P'''}{r^4} + \ldots$$

Pro povrch země, pro který jediné potenciál potřebujeme jest vzdálenost r rovna poloměru země R, zjednoduší se tudíž výraz pro V následovně

$$V = R\,(P^0 + P' + P'' + P''' + \ldots).$$

V rozpadá se zde v řadu úkonů P zeměpisné šířky φ a délky λ; při dalším rozboru bychom shledali, že $P^0 = 0$, a že P' P'' $P''' \ldots$ obsahují veličiny $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\lambda$, $\cos\lambda$ násobené jistými nám neznámými součiniteli. *Součinitele ty určil Gauss na základě pozorování*; shledal, že dostačí 84 pozorování magnetických souřadnic na rozličných místech, aby se určily součinitelé v prvních čtyřech členech řady pro V, čímž potenciál ten dosti přibližně jest určen. Gauss vypočítal magnetické souřadnice pro 91 jiných míst na povrchu země a shledal, že souhlasily velmi dobře s hodnotami pozorovanými; rozdíly nepatrné zmenší se bezpochyby ještě více, až bude možno vypočítat ještě několik dalších členů svrchu uvedené řady. (Pokračování.)

Začátky mathematické krystalografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí.*)

Tvary soustavy stejnoklonné.*)

1. Soustava stejnoklonná obsahuje tvary, které se dají úměrnými úseky ze stejnoklonu (Rhomboedru) vyvinouti. (Ročník I. str. 12.)

Stejnoklon co prvotvar s plochami v poloze h.

2. Prvotvarný stejnoklon (obr. 1.) jest obmezen 6 stejnými kosočtverci, které se stýkají v 6 polárních hranách H, a v 6 pobočných H', při čemž $H + H' = 180^0$.

Rohy jsou dvoje: dva stejnohranné polární, a 6 lichohranně pobočných.

---

*) Podávám zde novou theorii stejnoklonné (rhomboedrické) soustavy, jednodušší nežli posavadní, anať jest pouhou obdobou theorie krychlových tvarů.

Němečtí krystallografové a přední zástupce jejich *Naumann*, berou za základ té soustavy čtyři osy, což jednak ruší souměrnost soustavní, jelikož všechny ostatní soustavy vztahují ke třem osám a nad to nepodávají, jak bude později ukázáno, koeficienty úseků čtvrtiměrných minerálií cirkulární polarisací vyznačených, tak jak je tato polarisace vyžaduje; ba ve vlastním smyslu čtvrtiměrných tvarů ani neznají.

Angličtí krystallografové a jiní, kteří se dle návodu *Millera* řídí, vztahují sice všechny plochy rhomboedrických tvarů na tři stejnoklonné osy; avšak jakož stereografický průmět, jejž Miller pěstuje, nikdy nenahradí názornost krystallových obrazů dle šikmého průmětu, tak jest i způsob jeho výpočtu neprůhledný, jelikož nepřispůsobil trigonometrický výpočet krystallografii, nýbrž naopak krystallografii starým trigonometrickým vzorcům. Této závadě jest odpomoženo všeobecnými krystallografickými vzorci v I. ročníku toho časopisu (str. 10—24).

Nejvíce přibližují se přirozenému způsobu výpočtu francouzští krystallografové, zejmena *Dufrénoy* ve své učební knize. Avšak i jeho methodě vadí nejasnost a neobratnost mathematického výkladu.

Zde ponejprvé jest ze stanoviště všeobecně analytického bezprostřední poměr hran rhomboedrických tvarů k úsekům na hranách protvaru (základního rhomboedru) znázorněn, a sice jak uvedené vzorce ukazují, způsobem překvapně jednoduchým.

3. *Osa*, která spojuje polární rohy, slove *hlavní*, a poznamená se, jsouc obdobou trojúhelné osy ve tvarech krychlových, písmenem *t*. (Ročník I. str. 61. 2.)

Stejnoklonné tvary staví se kolmo na tuto osu, anať v té postavě jest souměrnost jejich nejpatrnější.

Vodorovný průmět stejnoklonu kolmo na osu *t* postaveného, jest pravidelný šestiúhelník, pročež se dá stejnoklon do šestibokého hranolu vepsati.

Kolmice *p* z pobočných rohů stejnoklonu na osu *t* spuštěná, dělí ji ve 3 stejné díly.

Neboť v trojbokém výkrojku $^1/_2\, H$, $^1/_2\, D$, T, v němž $^1/_2\, D = 90^0$, $T = 60^0$, jest

$$\cos T = \operatorname{tang}(d, t) . \cot(h, t),$$

z čehož

$$\text{an } \cos T = {}^1/_2,$$
$$\cot(d, t) = 2 \cot(h, t),$$

a tudíž kladouce,

$$\cot(d, t) = \frac{t'}{p}, \quad \cot(h, t) = \frac{t''}{p},$$

jest

$$\frac{t'}{p} = \frac{2t''}{p}$$

nebo

$$t'' : t' : t = 1 : 2 : 3.$$

Délka osy *t* ustanoví se z úklonu polární hrany k ose *t*, a jest pro délku prvotvárné hrany $h = 1$,

$$t = 3 \cos(h, t).$$

Úhly (h, t) a (d, t) ustanoví se z trojbokého výkrojku $^1/_2\, H$, $^1/_2\, D$, T; an jest

$$\cos(h, t) = \cot {}^1/_2\, H \sqrt{{}^1/_3},$$
$$\cos(d, t) = 2 \cos {}^1/_2\, H \sqrt{{}^1/_3}.$$

Mimo hlavní osu *t* rozeznávají se ještě tři *stejnoklonné osy* $= a = 1$, kteréž spojují středy protilehlých ploch, a jejichž délka a vzájemný úklon se rovná délkám a vzájemnému úklonu hran prvotvaru, s nimi rovnoběžných. Též se rozeznávají tři stejně dlouhé *vedlejší osy* $= r$, kteréž spojují středy protilehlých pobočných hran. Osy tyto jsou obdobou kosočtverečných os *r* tvarů krychlových, stojí na ose *t* kolmo a v jedné rovině, a setkávají se v středobodu pod úhlem 60^0.

Ve vodorovném šestiúhelném průmětu prvotvaru jest osa r poloměrem šestiúhelníka do něho vepsaného, takže $sin\, 60^0 = \frac{r}{p}$ kdežto $p = sin\,(h,\, t)$, $sin\, 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, pročež

$$r = \tfrac{1}{2} \sin\,(h,\, t)\sqrt{3}.$$

Jelikož v trojbokém výkrojku $\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}D, T$, v němž $(d, h) = \frac{1}{2}\alpha$, jest

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\sin\,(h,\, t)\sqrt{3},\ \text{jest též}$$

$$r = \tfrac{1}{2}\sin\alpha.$$

4. Známka prvotvárného stejnoklonu jest h, u Millera $= 100$.

Tvary z prvotného stejnoklonu odvozené.

5. Stejnoklon jest obdobou krychle a tudíž také tvary z něho odvozené jsou obdobou odvozených tvarů krychlových. Při odvození tvarů ze stejnoklonu sluší k tomu zřetel obraceti, že tvary stejnoploché povstávají jen změnou stejných hran neb rohů prvotvaru. Jiné tvary povstávají tedy přikrojením polárních hran neb rohů a jiné přikrojením pobočných hran nebo rohů.

Tvary tak vyvinuté mají plochy v poloze buď *dvanácti-četné* nebo *osmičetné*, a jsou buď *plnoměrné*, *poloměrné* nebo *čtvrtiměrné*.

6. Velký díl hmot v té soustavě vyhraněných má však na svých tvarech plochy v takové poloze, jako na srostlicech krychlových s jednou společnou trojúhelnou osou, a tvary takové dají se tudíž odvésti od dvou se prostupujících stejnoklonů kolem hlavní osy o 180^0 k sobě otočených. (II. ročník str. 128—130.)

Tvary takové slovou *dvoustejnoklonné* (dirhomboedrické) a také ty jsou buď plnoměrné, poloměrné neb čtvrtiměrné. Tvary soustavy stejnoklonné mají tudíž dvojí ráz; totiž ráz jednoduše stejnoklonný nebo dvoustejnoklonný.

Tvary jednoduše stejnoklonné.

I. Plnoměrné.

A. S plochami dvanáctičetnými.

a) S plochami v poloze $d_{\pm 1}$

7. Otupením všech 12 hran prvotvarného stejnoklonu vyvine se tvar 12plochý (obdoba kosočtverečného dvanáctistěnu, I. ročník str. 61.), obmezený dvojími plochami, an má stejnoklon dvojí hrany.

Šest ploch otupuje polární hrany H (Obr. 2.) v poměru $1:1:{}^1/_0$, pročež známka jejich $= d$, u Millera $= 110$.

Šest jiných ploch otupuje pobočné hrany H' (Obr. 3.) v poměru $-1:1:{}^1/_0$, pročež známka jejich $= \underline{d}_1$, u Millera $= \bar{1}10$.

8. Plochy d o sobě vyvinuté sestavují *stejnoklon polárních hran* se 6 polárními hranami D, a 6 pobočnými D'. Tvar ten jest s ohledem na prvotvar v úhlopříčné postavě, totiž hrany jeho leží nad plochami prvotvaru.

9. Plochy $\underline{d}_1$ o sobě vyvinuté sestavují *pravidelný šestiboký hranol pobočných hran* (hexagonální prisma) se 6 hranami $D = 120^0$. (Obr. 3.)

b) S plochami v poloze $d_{\pm n}$

10. Dvouplochým přikrojením všech 12 hran prvotvarného stejnoklonu vyvine se tvar 24plochý (obdoba krychlového čtyrmecítmíka, I. ročník str. 62), obmezený dvojími plochami, z nichž 12 přikrajuje polární hrany H (Obr. 4.) v poměru $n:1:{}^1/_0$, pročež známka jejich $= d_n$, u Millera $= n10$; kdežto 12 ploch přikrojuje pobočné hrany H' (Obr. 5.) v poměru $-:n\,1:{}^1/_0$, pročež známka jejich $= \underline{d}_n$, u Millera $\bar{n}10$.

11. Plochy d_n o sobě vyvinuté, sestavují pro ten případ, že n větší neb menší než 2, *lichohranný šestiboký jehlanec polárních hran*, tak zvaný *Skalenoeder*, obmezený 12 lichostrannými trojúhelníky, kteréž se setkávají u každého polu v 6 polárních hranách H a D střídavě ostřejších a tupějších a pak v 6 pobočných hranách S. (Obr. 6.)

12. Vzájemná závislost hran skalenoedrů vůbec dá se vyhledati dle všeobecné rovnice (Ročn. I. str. 23, 15.). Hrana ${}^1/_2\,H$ povstává setkáním se ploch $abc = nm1$, $a'b'c' = 1\bar{1}0$; hrana ${}^1/_2\,D$ povstává setkáním se ploch $abc = nm1$, $a'b'c' = \bar{1}10$; hrana ${}^1/_2\,S + 90^0$, totiž spojková hrana skalenoedru a hranolu $\underline{d}_1$ povstává setkáním se ploch $abc = nm1$, $a'b'c' = 0\bar{1}1$; z čehož dosažením za abc, $a'b'c'$ vytknutých hodnot

$$\cos{}^1/_2\,H = \frac{(n-m)\,K}{\sqrt{GG'}},$$

$$\cos {}^1/_2 D = \frac{(1-n)K}{\sqrt{GG'}}$$

$$\cos ({}^1/_2 S + 90^0) = \sin {}^1/_2 S = \frac{(1-m)\ K}{\sqrt{GG'}}.$$

Z rovnic těch vychází, že

$$\cos {}^1/_2 H + \cos {}^1/_2 D = \sin {}^1/_2 S,$$

tak že z dvou známých hran skalenoedru lze třetí ustanoviti.

13. Přípona n dá se po d_n ustanoviti tak jako v krychl. soustavě (I. ročník str. 62, 63).

Neboť vezme-li se pro ${}^1/_2 H$, $abc = n10$, $a'b'c' = 1\bar{1}0$,
pro ${}^1/_2 D$, $abc = n10$, $a'b'c' = 011$, jest

$$\frac{\cos {}^1/_2 H}{\cos {}^1/_2 D} = n-1.$$

14. Je-li na tvaru d_n; $H = D$, jest $n = 2$, a skalenoeder promění se *v pravidelný šestiboký jehlanec* (hexagonalní Pyramidu) *polárních hran*, obmezený 12 stejnoramennými trojúhelníky, kteréž se setkávají u každého pólu v 6 hranách H, a pak v 6 pobočných hranách S. Obr. 7.

Známka toho tvaru jest $d_2 = i$, u Millera $= 210$.

15. Plochy $\underline{d_n}$ o sobě vyvinuté sestavují *skalenoeder pobočných hran*, do něhož jest prvotvar vepsaný. Obr. 5.

16. Přípona n pro tvar $\underline{d_n}$ ustanoví se z rovnic polovičných polárních hran, pro něž jest na hraně

$${}^1/_2 H, abc = 0n1, a'b'c' = 110,$$

na hraně

$${}^1/_2 D, abc = 0n\bar{1}, a'b'c' = \bar{1}01,$$

z čehož dle všeobecné rovnice

$$\frac{\cos {}^1/_2 H}{\cos {}^1/_2 D} = n.$$

B. S plochami osmičetnými.

a) *S plochami v poloze* $0_{\pm 1}$

17. Otupením všech 8 rohů prvotvarného stejnoklonu vyvine se tvar osmiplochý (obdoba osmistěnu), obmezený dvojími plochami, z nichž dvě odtínají polární rohy (Obr. 8.) v poměru 1 : 1 : 1, pročež známka jejich $= 0$, u Millera $= 111$; kdežto druhých šest ploch odtíná pobočné rohy jeho (Obr. 9.) v poměru $-1 : 1 : 1$, pročež známka jejich $= \underline{o_1}$, u Millera $= \bar{1}11$.

18. Plochy o o sobě vyvinuté neuzavírají prostor a mohou se tedy objeviti jen ve spojení s jinými plochami. Obr. 8.

Plochy ty slovou *polární*, neb *Pinakoidy*.

19. Plochy $\underline{o}_1$ o sobě vyvinuté sestavují *stejnoklon pobočných rohů* s polárními hranami O a pobočnými hranami O'. Stejnoklon ten jest v úhlopříčné postavě.

b) S plochami v poloze $O_{\pm 1/m}$

20. Trojplochým přikrojením všech 8 rohů prvotvarného stejnoklonu od úhlopříček ploch jeho vyvine se tvar 24plochý (obdoba čtyrúhelného čtyrmecítmíka), obmezený trojími plochami.

Šest ploch přikrojuje polární rohy trojplošně (Obr. 10.) v poměru $^1/m : 1 : 1$, pročež známka jejich $= O_{1/m}$, u Millera $= m11$. Šest ploch přikrojuje poboční rohy jednoplošně od vodorovné úhlopříčky prvotvaru (srovnej obr. 9.) v poměru $- {}^1/m : 1 : 1$, pročež známka jejich $= \underline{o}_{1/m}$, u Millera $= m\bar{1}1$.

Dvanáct jiných ploch přikrojuje konečně poboční rohy dvouplošně od nakloněné úhlopříčky prvotvaru (srovnej obr. 12.) v poměru $1 : {}^1/m : -1$, totiž přikrojuje spojkovou hranu mezi h a o_1, obr. 12., pročež známka jejich $= \bar{o}_{1/m}$, u Millera $1 m \bar{1}$.

21. Plochy $o_{1/m}$ o sobě vyvinuté, sestavují *tupý stejnoklon* s polárními hranami H a pobočnými H'.

22. Příponu m lze ustanoviti jako u krychlového tvaru o^1/m (I. ročn. str. 64) dle rovnice

$$\frac{m+2}{m-1} = \frac{cot\,(r,\,t),}{cot\,(d,\,t),}$$

kdežto (r, t) znamená úklon prvotvarné plochy a (d, t) úklon odvozené plochy k ose t.

Úklony ploch k ose t ustanoví se dle rovnice v odstavci 3. uvedené.

23. Plochy $\underline{o}_{1/m}$ (srovnej obr. 9.) o sobě vyvinuté sestavují *ostrý stejnoklon* s polárními hranami H a pobočnými H'.

Přípona m ustanoví se dle též rovnice, jako při $o_{1/m}$.

24. Je-li po $\underline{o}_{1/m}$ přípona $m = -2$, jest $cot\,(d,\,t) = {}^1/_0$, totiž plochy odvozeného prvotvaru jsou rovnoběžné s osou t, a tvar se promění *v pravidelný šestiboký hranol pobočných rohů* se 6 hranami $H = 120^0$. Hranol $\underline{d}_1$ otupuje jeho hrany. Známka jeho jest $o_{1/2} = \underline{p}_1$, u Millera $= \bar{2}11$.

25. Plochy $O_{1/m}$ o sobě vyvinuté sestavují *skalenoeder úhlopříčky*. Obr. 13.

26. Přípona m ustanoví se pro $\bar{O}_{1/m}$ rovnicí

$$\frac{\cos {}^1/_2 H}{\cos {}^1/_2 D} = \frac{m-1}{2.}$$

27. Je-li na skalenoedru $\bar{O}_{1/m}$ hrana $H = D$, jest $m = 3$, a tvar se promění *v pravidelný šestiboký jehlanec úhlopříčky*, jehož známka jest $\bar{O}_{1/3} = \bar{1}$, u Millera $= 13\bar{1}$.

c) S plochami v poloze $O_{\pm m}$

28. Trojplochým přikrojením všech 8 rohů prvotvarného stejnoklonu vyvine se tvar 24plochý (obdoba osmistěnného čtyrmecítmíka), obmezený trojími plochami.

Šest ploch přikrojuje polární rohy trojplošně od hran (Obr. 11.) v poměru ${}^1/m : {}^1/m : 1$, neb $1 : 1 : m$, pročež jejich známka $= O_m$, u Millera $= mm1$.

Šest ploch přikrojuje pobočné rohy jednoplošně od vodorovné úhlopříčky prvotvaru (srovnej obr. 9.) v poměru $1 : 1 : -m$, pročež známka jejich $= \underline{O}_m$, u Millera $mm\bar{1}$.

Dvanáct jiných ploch konečně přikrojuje pobočné rohy dvouplošně od nakloněné úhlopříčky prvotvaru v poměru $1 : m : -1$, pročež známka jejich $= \bar{O}_m$, u Millera $m1\bar{m}$.

Tentýž výledek dá přikrojení rohu mezi pobočnou hranou prvotvaru h a plochou stejnoklonu o_1 rovnoběžně se spojkovou hranou (h, o_1); nebo přikrojení pobočných hran stejnoklonu $\underline{o}_1$ Obr. 13.

29. Plochy O_m o sobě vyvinuté sestavují *obrácený tupý stejnoklon*, jehož polární hrany D leží nad plochami prvotvaru.

30. Přípona m ustanoví se jako pro krychlový tvar O_m dle rovnice (I. ročník str. 65).

$$\frac{2m+1}{m-1} = \frac{\cot(r, t)}{\cot(h, t)},$$

kdežto (r, t) znamená úklon prvotvárné plochy a (h, t) úklon odvozené plochy k ose t.

31. Plochy $\underline{O}_m$ o sobě vyvinuté sestavují *obrácený ostrý stejnoklon* s hranami D a D'.

Přípona m ustanoví se dle vzorce předešlého.

31. Je-li pro $\underline{O}_m$ přípona $m = -2$, jest $cot\,(r, t) = cot\,(h, t)$, totiž oba stejnoklony, prvotvarný a odvozený mají osy t stejné a jsou tudíž stejné, jsouce k sobě obráceny o 180°.

Tvar $\underline{O}_2$ budeme znamenati (h).

Spojka obou tvarů h a (h) dá šestiboký jehlanec, kterýž jest k jehlancům ze skalenoedrů povstalým, v úhlopříčné postavě. Obr. 14.

33. Plochy $\overline{O}_m$ o sobě vyvinuté sestavují *obrácený skalenoeder úhlopříčky*. Obr. 13.

34. Přípona m ustanoví se rovnicí

$$\frac{cos\ {}^1/_2\,H}{cos\ {}^1/_2\,D} = \frac{1-m}{2m.}$$

35. Je-li po $\overline{O}_m$ $H = D$, jest $m = {}^1/_3$, a tvar se promění v pravidelný šestiboký jehlanec úhlopříčky $\overline{O}_{1/3} = \overline{i}$.

d) S plochami v poloze $O_{\pm s}$

36. Šestiplochým přikrojením všech 8 rohů prvotvarného stejnoklonu vyvine se tvar 48plochý, (obdoba 48stěnu) obmezený čtverými plochami.

Dvanáct z nich přikrojuje polární rohy šestiplošně (ob. 15.) v poměru ${}^1/m : {}^1/n : 1$ a známka jejich jest O_s, kdežto s značí vytknutý poměr úseků; u Millera $m\,n\,1$.

Tři jiné dvanáctiploché tvary přikrojují pobočné rohy dvouplošné (ob. 16.) v poměr $\pm {}^1/m : \pm {}^1/n : \pm 1$; jejich známka jest $= \underline{O}_s$, kdežto s znamená vytknutý poměr úseků; u Millera $= \overline{h\,k\,l}$, kdežto v pořádku abc znamená každé písmeno kladnou neb zápornou hodnotu úseků.

37. Plochy O_s o sobě vyvinuté sestavují *tupý skalenoeder* s polárními hranami H, D a pobočnými S.

38. Přípony m, n ustanoví se jako u krychlového O_s (I. ročník str. 67.) rovnicemi.

$$\frac{cos\ \frac{1}{2}H}{cos\ \frac{1}{2}D} = \frac{n-m}{1-n},$$

$$m' = \frac{2\,m}{n+1},$$

kdežto m' znamená jmenovatele přípony stejnoklonu $O_{1/m'}$ kterýž otupuje polární hrany D nad plochami prvotvaru.

39. Je-li pro O_s $H = D$ jest $n = \frac{m+1}{2}$ a skalenoeder přejde v *tupý šestiboký jehlanec*, jehož známka jest $= i_m$, u Millera $m \frac{m+1}{2} 1$.
Ustanovení jeho provede se dle rovnice

$$m' = \frac{4m}{m+3},$$

kdežto m' znamená stejnoklon $O_{1/m'}$, kterýž otupuje jeho polární hrany D.

40. Pro skalenoeder, který přikrojuje polární hrany stejnoklonu d jest $n = m - 1$ a známka jeho jest obdobně rhombickým 48stěnem krychlovým $= r_m$, u Millera $= m\, m - 1\; 1$.

Je-li v tom případu $H = D$, jest $m = 3$, $n = 2$, pročež $r_3 = r_i$; u Millera $= 321$.

41. Plochy $\underline{O_s}$ o sobě vyvinuté sestavují *troje ostré sklalenoedry*, jejichž podoba závisí na poměru úseků. Přípony m, n ustanoví se, znamenají li $^1/a$, $^1/b$, $^1/c$ úseky na hranách prvotvaru, dle rovnice

$$\frac{\cos \frac{1}{2} H}{\cos \frac{1}{2} D} = \frac{a - b}{b - c},$$

kdežto pro a, b, c dosadí se hodnoty s patřičnými známkami $\pm$. Ostatně počítá se jako při O_s.

42. Je-li po $\underline{O_s}$ $H = D$, jest $n = \frac{m+1}{2}$ a tvar přejde v *ostrý šestiboký jehlanec*, jehož známka jest $= \underline{i_m}$, u Millera $= \underline{m}\; \frac{m+1}{2}\; 1$.

Ustanovení provede se v podstatě taktéž jako při i_m.

43. Je-li po $\underline{O_s}$ připona $n = m - 1$, přejde tvar v *12boký hranol*, jehož plochy přikrojují hrany hranolu d_I.

Tvar ten má dvoje hrany H a D a jest tudíž souměrný a nikoliv pravidelný. (obr. 16).

Známka jeho jest $= \underline{r_m}$; u Millera $= \bar{m}\; m - 1\; 1$.

44. V hranolu $\underline{r_m}$ jest

$$\tfrac{1}{2} H + \tfrac{1}{2} D = 150^{\circ},$$

pročež stačí k ustanovení jediná hrana, a sice dle téže rovnice, dle níž se ustanovuje v soustavě krychlové tvar r_m (I. ročník str. 68.):

$$\cot D' \sqrt{3} = 2m - 1,$$

kdežto

$$D' = 90^0 - \tfrac{1}{2} H = \tfrac{1}{2} D = 60^0.$$

45. Kdyby bylo $H = D$, proměnil by se ten hranol v pravidelný 12boký hranol, a hrany jeho byly by $H = D = 150^0$, tudíž $D' = 15^0$.

Jelikož $cot\, 15^0 = 2 + \sqrt{3}$, bylo by též $m = 2 + \sqrt{3}$, což jest výraz neúměrný a tudíž na vyhraněných tvarech nemožný.

Spojka $\underline{d}_1$ a $\underline{p}_1$ jeví se sice co pravidelný 12boký hranol, avšak poloha ploch jest jiná, než u hranole $\underline{r}_m$, v němž by bylo $H = D$.

Stejnoklonné plnoměrné tvary dle Naumanna.

46. *Naumann* a jeho stoupenci vztahují plochy stejnoklonných tvarů na tři ze čtyr os, z nichž tři r v jedné rovině se protínají pod úhlem 60^0 a čtvrtá t na nich stojí kolmo.

Jakým spůsobem Naumann tvary odvozuje, bude později ukázáno; zde se jedná jen o výklad známek Naumannových pro naše plnoměrné stejnoklonné tvary a o porovnání jich s našimi známkami.

Naumann poznamenává základní čili prvotvarný stejnoklon (Rhomboeder) písmenem R.

Při výpočtu nebéře $h = 1$, nýbrž $r = 1$, pročež $\frac{1}{2} p = tang\, 30^0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$, nebo $p = 2 \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Pro délku poloosy t jest $cot\,(h, t) = \dfrac{\frac{2}{3}\, t}{2 \sqrt{\frac{1}{3}}} = t \sqrt{\frac{1}{3}}$ a tudíž

$$t = cot\,(h, t) \sqrt{3}.$$

Odvozené stejnoklony vztahuje Naumann k hlavní ose $m\, t$, kteráž roste od 0 až do ∞. Proto značí Naumann stejnoklony všeobecně $m\, R$, obrácené $- m\, R$, Pinakoid $o\, R$, hranol rohů ∞R.

Pro dva stejnoklony v zárovné postavě jest $\dfrac{cot\,(h, t)}{cot\,(h', t)} = m$, kdežto h znamého hranu prvotvaru, a h' odvozeného tvaru.

Plochy *jehlanců šestibokých* odtínají jedno r ve vzdálenosti $= 1$, druhé ve vzdálenosti $= 2$; Naumann jim dává známku $m\, P2$ a dle toho *hranolu pobočných hran* známku $\infty P2$.

Je-li S pobočná hrana těch jehlanců, jest $m = tang \frac{1}{2} S$.

Skalenoedry vztahuje Naumann na stejnoklony do jejich pobočných hran vepsané a znamená je $m\, R\, n$, kdežto m znamená vlastně $m\,t$ totiž hlavní osu vepsaného stejnoklonu a n koefficient, jímž se osa $m\,t$ násobí, aby měla délku hlavní osy skalenoedru. Pro výpočet vyvinuje Naumann z daných hran rovnice

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{\cos\frac{1}{2}H}{\cos\frac{1}{2}D},$$

$$m\,t = \cot\xi'\sqrt{3},$$

$$\cos\xi' = \frac{\tang\frac{1}{2}S}{n\sqrt{3}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}S = \frac{2n}{n+1}\cos\tfrac{1}{2}H.$$

Pro *12boký hranol* (obr. 16.), v němžto každá plocha odtíná jedno r ve vzdálenosti $=1$, druhé ve vzdálenosti $=n$, jest v trojúhelníku r, n, s, v němž $(r, s) = \frac{1}{2}H$, $(r, n) = 60^0$

$$\tang\tfrac{1}{2}H = \frac{n\sin 60^0}{1-n\cos 60^0},$$

nebo an $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$,

$$\tang\tfrac{1}{2}H = \frac{n\sqrt{3}}{2-n}.$$

V trojúhelníku p, r, s, v němž $(r, s) = \frac{1}{2}H$, $(r, p) = 30^0$ jest

$$\tang\tfrac{1}{2}H = \frac{n\sqrt{3}}{2-n} = \frac{p\sin 30^0}{1-p\cos 30^0},$$

nebo an $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$$p = \frac{n\sqrt{3}}{n+1}.$$

V hranolu ∞R jest $n=1$, a tudíž $p = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; v hranolu $\infty P2$ jest $n=2$, tudíž $p = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$.

47. *K převedení známek našich* vztahujících se ke třem hranám nebo osám stejnoklonným prvotvaru *na známky Naumannovy*, které se vztahují k osám r', r'' k sobě pod úhlem 60^0 nakloněným, a k ose t' na nich kolmé, vyznačí se délka těch os hodnotami našich přípon, a pak se vezme $r' = 1$.

Z rovnic všeobecné krystallografie pro soustavy kosoúhelné (I. Ročník str. 22.) vychází délka čáry ze středobodu na plochu krystallu vedené ze souřadnic jejích

$$k^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha + 2xz\cos\beta + 2xy\cos\beta.$$

Pro soustavu stejnoklonnou, v níž $\alpha = \beta = \gamma$, jest tudíž

$$k^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (y z + x z + x y)\, 2 \cos \alpha .$$

Postaví-li se za k osy r', r'', t', a pro plochu odtínající hranu prvotvaru v poměru $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} : \mathfrak{c}$, rovnice

$$\frac{x}{\mathfrak{a}} + \frac{y}{\mathfrak{b}} + \frac{z}{\mathfrak{c}} = 1 ,$$

jest pro osu r', an pro ni $x = 0$ a y záporné

$$-\frac{y}{\mathfrak{b}} + \frac{z}{\mathfrak{c}} = 1 , \quad y = z$$

pročež

$$y = z = \frac{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}{\mathfrak{b} - \mathfrak{c}} ,$$

a obdobně pro $y = 0$,

$$x = z = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}}{\mathfrak{a} - \mathfrak{c}} .$$

Z toho máme, berouce hranu prvotvaru $h = 1$, pro poloosu r'

$$2\, r' = \sqrt{2 y^2 - 2 y^2 \cos \alpha} ,$$

kdežto α znamená úhel v rovině ploch h u pólu, nebo po dosazení vytknuté hodnoty z a y

$$r' = \frac{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}{\mathfrak{b} - \mathfrak{c}} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} .$$

Jelikož však

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sin \tfrac{1}{2} \alpha = r$$

(viz odstavec 3), jest

$$(1) \quad r' = \frac{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}{\mathfrak{b} - \mathfrak{c}}\, r ,$$

a obdobně

$$(2) \quad r'' = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}}{\mathfrak{a} - \mathfrak{c}}\, r .$$

Pro poloosu t' jest $x = y = z$ a tudíž dosazením jejich do rovnice plochy

$$x = y = z = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}}$$

z čehož

$$2\, t' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + (xy + xz + yz)\, 2 \cos \alpha} ,$$

nebo

$$2\,t' = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\,\sqrt{3}\,\sqrt{1+2\cos\alpha}\,.$$

Pro úhel $\frac{1}{2}\alpha$ jest dle odstavce (3)

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\sin(h,\,t)\sqrt{3}\,,$$

a jelikož

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = 1 - \frac{3\sin^2(h,t)}{2}\,,$$

jest

$$2\cos\alpha = 2 - 3\sin^2(h,\,t)\,,$$

a taktéž

$$1+2\cos\alpha = 3 - 3\sin^2(h,t) = 3\cos^2(h,t),$$

pročež

$$2\,t' = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\;3\cos(h,t),$$

nebo an

$$3\cos(h,t) = 2\,t$$

$$(3) \qquad t' = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\,.\,t$$

Vezme-li se dle Naumanna pro vedlejší osy $r = 1$, pro hlavní osy $t = 1$, mají dle vytknutých rovnic (1, 2, 3), do nichž se vloží za $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ přiměřené hodnoty úseků, a v nichž se osy r', r'', t', dělí hodnotou osy r', následující vzorce platnost k převedení našich známek na Naumannovy známky:

$h \;= R.$

$(h) = -R.$

$d \;= -\frac{1}{2}R.$

$\underline{d_1} \;= \infty P2.$

$\overline{d}_n \;= m'Rn'$, při čemž $m' = t''$ osa stejnoklonu do pobočných hran vepsaného, a $n' = \frac{t'}{t''}$, $t' = \frac{n}{n+1}$. Pro vepsaný stejnoklon $O_{1/m''}$ dá pásmová rovnice $m'' = n-1$, načež jest $t'' = \frac{m''-1}{m''+2} = \frac{n-2}{n+1}$; tudíž

$$m' = \frac{n-2}{n+1}\,,\; n' = \frac{n}{n-2}\,.$$

$d_2 = i = \frac{2}{3}\,P2\,.$

$\underline{d_n} \;= Rn'$, při čemž $n = \frac{t'}{r'} = \frac{n+1}{n-1}\,.$

$o \quad = oR$

$\underline{o}_1 \quad = -2R$

$O_{1/m} = m'R,$ při čemž $m' = \dfrac{t'}{r'} = \dfrac{m-1}{m+2}.$

$\underline{O}_{1/m} = m'R,$ při čemž $m' = \dfrac{m+1}{m-2}.$

$\underline{O}_{1/2} = \underline{p}_1 = \infty R.$

$\overline{O}_{1/n} = m'Rn'$, při čemž pro stejnoklon do pobočných hran vepsaný $m' = t'' = \dfrac{m-3}{m}$, $t' = \dfrac{m+1}{m}$, $n' = \dfrac{t'}{t''} = \dfrac{m+1}{m-3}.$

$\overline{O}_{1/3} = \overline{i} = \frac{4}{3}P2$

$O_m = -m'R,$ při čemž $m' = \dfrac{t'}{t''} = \dfrac{1-m}{2m+1}.$

$\underline{O}_m = -m'R,$ při čemž $m' = \dfrac{m+1}{1-2m}.$

$\overline{O}_m = -2Rm.$

$$O_s = m'Rn', \quad \text{při cemž } m' = \frac{\frac{m}{n}(m+1) - 2m}{\frac{m}{n}(m+1) - m},$$

$$n' = \frac{\frac{m}{n}(m-1)}{\frac{m}{n}(m+1) - 2m}.$$

$i_m = m'P2,$ při čemž $m' = \dfrac{2(m-1)}{3(m+1)}.$

$\underline{r}^m = \infty Pn',$ při čemž $n' = \dfrac{2m-1}{m+1}.$

Zobrazení stejnoklonných plnoměrných tvarů.

48. Stejnoklonné tvary rýsují se v postavě na hlavní ose kolmé, a každý z nich dá se do šestibokého hranolu vepsati.

a) Hranol $\underline{d}_1$ jest totožný s hranolem kolem prvotvaru opsaným a rýsuje se jak bylo při srostlicích krychlové soustavy udáno (II. ročník str. 129.) Poloměr šestiúhelného průřezu jest $p = sin(h, t)$.

b) Hranol p_1 rýsuje se v úhlopříčné postavě k předešlému a jeho poloměr jest $r = \frac{1}{2} \sin(h, t) \sqrt{3}$.

c) Dvanáctiboký hranol r_m má mimo vedlejší osy r, které se končí v hranách H, ještě mezi osy $p = \frac{r(2m-1\sqrt{3}}{3m}$, které se končí v hranách D. (obr. 16.)

d) Šestiboké jehlance $i_{\pm m}$ vyobrazí se na základě šestiúhelníka s poloměrem $p = \sin(h, t)$, na nějž se postaví osa t'.

e) Stejnoklony sestrojí se z hranolu d_1, jemuž še dá délka t', načež se hranol rozdělí ve tři stejné díly a body v hranách nalezené spojí se, jak ukazuje obr. 13. v II. ročníku číslo III.

f) Skalenoedry rýsují se dle vzorce $S_{t''}^{t'}$, při čemž t'' znamená hlavní osu stejnoklonu do pobočných hran vepsaného a t' hlavní osu skalenoedru.

Vyrýsuje se tudíž stejnoklon s osou t'', načež se té ose dá délka t', a póly její spojí se s pobočnými rohy vepsaného stejnoklonu.

Spojky stejnoklonných plnoměrných tvarů.

49. Spojky plnoměrné stejnoklonné jsou velmi rozmanité; obyčejně však na nich převládá některý stejnoklon, skalenoeder, jehlanec neb hranol. Ustanovení jejich děje se jako v krychlové soustavě s ohledem na polohu ploch k prvotvaru. Dle pásmové rovnice (I. ročník str. 24.) ustanoví se plochy, jimiž se hrany známých ploch otupují neb přikrojují.

Vychází z toho zejmena na jevo, že *každým skalenoedrem jest ustanovena poloha pěti stejnoklonů*, a sice *a)* pro stejnoklon do pobočných hran S vepsaný; *b)* do polárních hran H; *c)* do polárních hran D vepsaný; *d)* pro stejnoklon, jenž otupuje hrany H a *e)* jenž otupuje hrany D.

Příklady následující vysvětlí ustanovení spojek dle rovnic a vzorců uvedených.

(Pokračování.)

Příspěvek k theorii nástrojů zrcadelných.

(Podává *Emanuel Čubr.*)

Zvláštní druh strojů, jimiž se úhly k účelům geodaetickým neb astronomickým měří, jsou nástroje zrcadelné. Zakládají se buď na odrazu neb na lomu světla, aneb na obou úkazech zároveň.

Při valné části těchto nástrojů, tak při sextantu, Fallonově zrcadelném pravídku, kruhu hranolovém Pistora a Martinse a p. tvoří hlavní část pohyblivé zrcádko, a theorie jejich má základ svůj v známém zákoně katoptriky, že úhel, v kterémž se obraz otočí, jest dvakrát tak velký jako onen, o nějž jsme zrcadlo otočili. Theorie tato předpokládá, že osa, o kterouž se zrcadlo otáčí, se nalezá v rovině, kteráž světlo odráží.

Podmínka tato snadno by se dala vyplnit při zrcadlech kovových, jichž lesklá plocha repraesentuje v skutku mathematickou takřka rovinu, světlo odrážející. Jinak jest to při zrcadlech skleněných, jichž se při takových nástrojích výhradně užívá.

Budiž $MNPQ$ (obr. 19.) průřez zrcadla skleněného, povstalý rovinou kolmou, svítícím bodem S procházející. Paprsek SA, na rovinu MN pod úhlem $\alpha = l\,AS$ dopadající, vniká do skla, při čemž se zlomí pod úhlem $\beta = l'\,AB$, přichází pod týmž úhlem na plochu PQ; zde odražen dopadá pod úhlem β na plochu MN, a po opětném zlomení opouští zrcadlo ve směru CS' pod úhlem $\alpha = S'Cp$. Výsledek jest tentýž, jakoby paprsek bez lomu byl došel až k bodu m a odsud byl ve směru mS' odražen. Poloha bodu m mění se patrně s úhlem α, a souhrn těchto bodů bude tvořit plochu ideálnou, která zastupovati by mohla hmotné zrcadlo. Plocha tato bude plochou rotační, povstalou otáčením jisté křivky kolem kolmice SY, která spuštěna jest z bodu S na rovinu MN.

K analytickému určení této křivky tvořící považujeme $On = x$ a $mn = y$ za souřadnice bodu m vzhledem k pravoúhelné soustavě NO, OY s počátkem O. Vzdálenost bodu S od roviny MN nazvemež $e = SO$ a tloušťku skla $d = Bn$. Jest pak

$$x = On = OA + An = e\,tg\,\alpha + d\,tg\,\beta \qquad (1)$$

$$y = mn = \frac{An}{tg\,\alpha} = d\,\frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha} \qquad (2)$$

Z podmínky

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$

plyne

$$tg\,\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}},$$

čímž se promění rovnice (1) a (2) v následující:

$$x = e\,tg\,\alpha + \frac{d\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \qquad (3)$$

$$y = d\sqrt{\frac{1 - \sin^2\alpha}{n^2 - \sin^2\alpha}} \qquad (4)$$

Z rovnice (4) plyne:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{d^2 - n^2y^2}{d^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = d\sqrt{\frac{n^2 - 1}{d^2 - y^2}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{d^2 - n^2y^2}{n^2 - 1}}$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice (3) obdržíme konečně:

$$xy = (e + y)\sqrt{\frac{d^2 - n^2y^2}{n^2 - 1}} \qquad (5)$$

co rovnici oné žádané křivky. Rovnice ta jest vzhledem ku y stupně čtvrtého.

K bližšímu seznání této křivky dostačí zde následující dva případy.

1. Je-li $x = 0$, dopadá-li tedy paprsek kolmo k rovině MN, jest

$$y = \frac{d}{n}.$$

Při skle zrcadlovém jest

$$n = \frac{3}{2},$$

tedy

$$y = \frac{2}{3}d.$$

A vskutku je při sextantech a podobných nástrojích pohyblivé zrcádko tak připevněno, že osa otáčení je o $\frac{2}{3}$ tloušťky skla od přední plochy vzdálená.

2. Je-li $x = \infty$, paprsek tedy rovnoběžný k zrcadlu, plyne z rovnice (5)

$$y = 0.$$

Plocha ideálná, která zastupuje v theorii zrcadlo, není tedy nikoliv rovinou, nýbrž plochou křivou, která kolmo pod svítícím bodem o hodnotu $\frac{d}{n}$ od vrchní roviny zrcadla vzdálena jest a této do nekonečna se přibližuje.

Při poměrně nepatrné tloušťce skla a malém rozměru zrcadla můžeme ploše té substituovat rovinu k oběma plochám zrcadla rovnoběžnou. V skutečnou rovinu přejde, jsou-li paprsky dopadající rovnoběžné.

Avšak poloha této roviny mění se, jakmile jest směr dopadajících paprsků jiný a blíží se horní ploše zrcadla tím více, čím větší jest úhel dopadu.

Z toho vysvitá, že při strojích zrcadlových nikdy neleží osa, o kterouž se pohyblivé zrcádko otáčí, v rovině světlo odrážející, vyjma jediný případ kolmého dopadu paprsků, který ale právě nemá praktické důležitosti. Jedná se tedy o to, určit vliv, jaký jeví excentricita osy otáčení na měřený úhel.

Budiž *mn* (obr. 20) stopa roviny světlo odrážející a *o* průchod osy, kolem které se otáčí. Paprsek *Sa* od nekonečně vzdáleného předmětu přicházející odráží se ve směru *as*. Otočme pak zrcádko o úhel $a o a' = \varphi$, takže paprsek od jiného, taktéž nekonečně vzdáleného předmětu *S'* po odrazu rovnoběžným ku *sa* se stane. Úhel směrů *Sa* a *S'a'*, totiž $\sphericalangle\, S c S'$ nazvemež δ.

Jestiť

$$\sphericalangle\, s a c = 2\alpha$$
$$\sphericalangle\, s' a' c = 2\beta,$$

a považujeme-li $s a c a' s'$ co čtyrúhelník s dvěma rovnoběžnými stranami, bude

$$2\alpha + 2\beta + \delta = 360^0 \tag{6}$$

Jest však dále

$$\sphericalangle\, n a o = \sphericalangle\, n' a' o = \omega$$

a tudíž v čtyrúhelníku $a o a' c a$:

$$(\omega - \alpha) + \varphi + (180 - \omega - \beta) + (360 - \delta) = 360^0,$$

z čehož plyne:

$$2\varphi - 2\alpha - 2\beta - 2\delta = 360^0. \tag{7}$$

Spojením rovnice (6) a (7) obdržíme konečně:

$$\delta = 2\varphi.$$

Bez ohledu k poloze osy otáčení rovná se tedy úhel měřený dvojnásobnému úhlu, o nějž se zrcádko otočilo. Nestálost ideálné roviny odrazu nemá tudíž na velikost měřených úhlů pražádného vlivu.

Větu poslední dokázal prof. Wastler v Hradci Štýrském roku 1864 *)

Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech.

(Podává Dr. *F. J. Studnička.*)

(Pokračování.)

O transformaci souřadnic prostorových. **)

Vedeme-li daným bodem v prostoru roviny kolmo na jednotlivé osy pravoúhlé soustavy souřadnicové, bude poloha jeho určena úseky x, y, z na těchto osách rovinami spůsobených.

Chceme-li tedy přejíti k nové soustavě pravoúhlé se společným bodem počátečním, veďme týmtéž bodem roviny kolmo na nové osy souřadnicové, načež obdržíme co nové souřadnice úseky ξ, η. ζ. Úloha o transformaci souřadnic bude pak řešena pro tento případ, dovedeme-li ξ, η, ζ vyjádřiti pomocí x, y, z a naopak.

Uzavírá-li kolmice s počátečního bodu soustavy na rovinu nějakou vedená a délku δ mající s jednotlivými osami úhly α, β, γ, jest rovnice této roviny

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \delta = 0.$$

Podlé toho platí, značí-li krátce α_k, β_k, γ_k kosinusy úhlů, jež uzávírá původní osa některá s příslušnou novou, pro nové souřadnice vzorce

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ \eta &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ \zeta &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \tag{1}$$

---

*) Viz: „Friedrich Hartner, Handbuch der niedern Geodaesie, Wien 1872."

**) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 40.

při čemž musí koöfficienty, jelikož nové osy stojí kolmo na sobě, vyhoviti zvláštním podmínkám

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0, \\ \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 &= 0, \\ \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

a vedlé toho ještě všeobecnějším podmínkám

$$\begin{aligned} \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Abychom řešili opačnou úlohu a vyjádřii x, y, z pomocí nových souřadnic ξ, η, ζ, nutno soustavu (1) podlé těchto neznámých řešiti; obdrží se tu, značí-li

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

a zavede-li se nejkratší označení subdeterminantů,

$$\begin{aligned} x \Delta &= (\beta_2 \gamma_3) \xi + (\beta_3 \gamma_1) \eta + (\beta_1 \gamma_2) \zeta, \\ y \Delta &= (\gamma_2 \alpha_3) \xi + (\gamma_3 \alpha_1) \eta + (\gamma_1 \alpha_2) \zeta, \\ z \Delta &= (\alpha_2 \beta_3) \xi + (\alpha_3 \beta_1) \eta + (\alpha_1 \beta_2) \zeta. \end{aligned} \tag{5}$$

Abychom ustanovili hodnotu determinantu Δ a jeho subdeterminantů, spojme první vzorec soustavy (3) s prvním a třetím soustavy (2), čímž obdržíme tři rovnice

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_1 + \beta_1 \beta_1 + \gamma_1 \gamma_1 &= 1, \\ \alpha_2 a_1 + \beta_2 \beta_1 + \gamma_2 \beta_1 &= 0, \\ \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0, \end{aligned}$$

z nichž jde řešením, použijeme-li stejného označení,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \Delta &= (\beta_2 \gamma_3), \\ \beta_1 \Delta &= (\gamma_2 \alpha_3), \\ \gamma_1 \Delta &= (\alpha_2 \beta_3). \end{aligned}$$

A podobným spůsobem bychom obdrželi dále

$$\begin{aligned} \alpha_2 \Delta &= (\beta_3 \gamma_1), & \alpha_3 \Delta &= (\beta_1 \gamma_2), \\ \beta_2 \Delta &= (\gamma_3 \alpha_1), & \beta_3 \Delta &= (\gamma_1 \alpha_2), \\ \gamma_2 \Delta &= (\alpha_3 \beta_1), & \gamma_3 \Delta &= (\alpha_1 \beta_2). \end{aligned}$$

Dosadíme-li tedy tyto hodnoty subdeterminantů do soustavy (5) a zkrátíme-li Δ, obdržíme konečně

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ y &= \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ z &= \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta, \end{aligned} \tag{6}$$

čímž druhá úloha naše, vyjádřiti původní souřadnice novými, jest řešena.

Při tom možná ještě snadno určiti některé podmínky, jimž tyto koëfficienty jsou též podrobeny.

Znásobíme-li rovnice

$$\begin{aligned} \alpha_1 \Delta &= (\beta_2 \gamma_3), \\ \alpha_2 \Delta &= (\beta_3 \gamma_1), \\ \alpha_3 \Delta &= (\beta_1 \gamma_2), \end{aligned} \tag{7}$$

jak po sobě jdou, veličina α_1, α_2, α_3 a sečteme-li je, obdržíme, zřetel majíce k významu determinantu Δ, především

$$(\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2)\Delta = \alpha_1 (\beta_2 \gamma_3) + \alpha_2 (\beta_3 \gamma_1) + \alpha_3 (\beta_1 \gamma_2) = \Delta,$$

a tudíž, zkrátíme-li,

$$\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2 = 1$$

ku kteréžto podmínce stejným spůsobem se druží

$$\begin{aligned} \beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 + \beta_3{}^2 &= 1, \\ \gamma_1{}^2 + \gamma_2{}^2 + \gamma_3{}^2 &= 1; \end{aligned} \tag{8}$$

znásobíme-li však tytéž rovnice (7), jak po sobě jdou, veličinami β_1, β_2, β_3, obdržíme, poněvadž se na pravé straně vyskytne determinant s dvěma stejnými sloupci,

$$(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3)\Delta = \beta_1 (\beta_2 \gamma_3) + \beta_2 (\beta_3 \gamma_1) + \beta_3 (\beta_1 \gamma_2) = 0,$$

z čehož jde, zkrátíme-li,

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0,$$

k čemuž podobným spůsobem se druží ještě podmínky

$$\begin{aligned} \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 &= 0, \\ \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Pomocí podmínek v soustavě (8) a (9) obsažených možná konečně i hodnotu determinantu Δ ustanoviti; uvedeme-li totiž rovnici (7) na druhou mocnost a sečteme-li, obdržíme především

$$(\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2)\,\Delta^2 = (\beta_2 \gamma_3)^2 + (\beta_3 \gamma_1)^2 + (\beta_1 \gamma_2)^2,$$

a vyjadříme-li pravou stranu podlé známého pravidla rozdílem

$$(\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 + \beta_3{}^2)(\gamma_1{}^2 + \gamma_2{}^2 + \gamma_3{}^2) - (\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3)^2$$

a užijeme-li příslušných podmínek soustavy (8) a (9), konečně

$$\Delta^2 = 1 \text{ neb } \Delta = \pm 1 \tag{10}$$

což obsahuje poučku i od jinud známou,*) že *modulus orthogonální snbstituce rovná se* ± 1.

Jaké znamení se tu má zvoliti, o tom rozhoduje směr, jakým se od původní soustavy přechází k nové; jestli točivý

---

*) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 88.

pohyb, kterým se jednotlivé osy uvádějí z původní polohy do nové, u všech stejného smyslu, *svorný*, platí znamení svrchní (+), v opačném případě spodní (—).

Zvolíme-li tedy směr nových os tak, že

$$\Delta = +1,$$

obdržíme konečně z podmínek soustavy (7) a podobných ještě

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\beta_2 \gamma_3), & \alpha_2 &= (\beta_3 \gamma_1), & \alpha_3 &= (\beta_1 \gamma_2), \\ \beta_1 &= (\gamma_2 \alpha_3), & \beta_2 &= (\gamma_3 \alpha_1), & \beta_3 &= (\gamma_1 \alpha_2), \\ \gamma_1 &= (\alpha_2 \beta_3), & \gamma_2 &= (\alpha_3 \beta_1), & \gamma_3 &= (\alpha_1 \beta_2). \end{aligned} \tag{11}$$

Spojíme-li tedy všechny tyto výsledky, poznáme snadno, že *devět koefficientů, vyskytujících se při orthogonální substituci neb při této transformaci pravoúhlých souřadnic musí vyhověti dvaadvaceti podmínkám* a sice soustavám (2), (3), (8) a (9) po třech, vzorci (10) jednu a soustavě (11) devět podmínek obsahující.

Podmínky (11) konečně souvisí ještě s jinou poučkou o determinantech; obdržímeť pomocí jich

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\beta_2 \gamma_3), (\gamma_2 \alpha_3), (\alpha_2 \beta_3) \\ (\beta_3 \gamma_1), (\gamma_3 \alpha_1), (\alpha_3 \beta_1) \\ (\beta_1 \gamma_2), (\gamma_1 \alpha_2), (\alpha_1 \beta_2) \end{vmatrix},$$

kdež poslední determinant, sestaven jsa ze subdeterminantů soustavy předcházející, sluje determinantem *přidruženým* a co takový rovná se *druhé* mocnině *) determinantu původního, z čehož jde

$$\Delta = \Delta^2 \text{ neb } \Delta = 1,$$

jak původně bylo za základ položeno.

O normálách určitého druhu křivek.

(Od *Al. Strnada.*)

Následující řádky mají za účel odvození věty o normálách křivek vytvořených na základě stálé délky neb stálého úhlu.

1. Předpokládejme přímku stálé délky, pohybující se tím způsobem, že konečné body její a, b opisují křivky K_a, K_b v rovině

---

*) V rovině možná podobnou cestu nastoupiti, nejedná-li se o čas.

R, dále pak rovinu R' sjednocující se s R, avšak pohybující se zároveň s $\overline{ab}$ tak, že veškeré útvary v ní s body a, b v pevném spojení se nalezají.

Tu bude každý bod m roviny R' vytvořovati určitou křivku K_m, každá přímka M obalovati křivku K_M. Normály všech takto odvozených křivek mají společnou vlastnost, kterou zde odvoditi chceme.

Buďtež (viz obr. 21.) K_a, K_b dané křivky základní. Vytkněme na nich dvě družiny bodové $a\,b$, $a'\,b'$, tak že tedy $\overline{a\,b} = \overline{a'b'}$; uprostřed tetiv $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ vztyčme pak kolmice N_a, N_b, kteréž protínati se budou v bodu o.

Přijde-li $\overline{a\,b}$ z původní své polohy do $\overline{a'\,b'}$, přijde libovolný bod m do polohy m', přímka M do polohy M'. Poněvadž $\overline{ao} = \overline{a'o}$, $\overline{bo} = \overline{b'o}$, můžeme si mysliti polohu $\overline{a'b'}$ povstalou z $\overline{ab}$ otočením okolo o o náležitý úhel; totéž však platí o všech útvarech roviny R': přemístění jich jest jen otočení okolo o. Z toho následuje, že body m, m' leží na kružnici Γ_m, jejíž střed jest v o, přímky M, M' pak dotýkají se kružnice Γ_M, soustředné s předešlou.

Dejme nyní tomu, že bod a' stane se soumezným (nekonečně blízkym) s bodem a, tedy i b' soumezným s b; pak jsou příslušné polohy m, m' též soumeznými body křivky K_m, přímky M, M' soumeznými tečnami křivky K_M. Kolmice N_a, N_b stanou se normálami křivek K_a a K_b v bodech a, b.

Kružnice Γ_m má nyní s K_m dva soumezné body, tudíž i tečnu a normálu společnou; touto jest přímka $\overline{mo}$. Podobně má kružnice Γ_M s K_M dvě soumezné tečny společné, následovně i dotyčný bod a normálu; jest to kolmice s o na M spuštěná.

Z úvahy této vychází věta, již jsme dokázati chtěli:

„Normály křivek odvozených K_m a_M prochází průsečíkem příslušných normál křivek základních K_a, K_b.“

Že místo dvou křivek základních může také býti jediná, v níž jest pak $\overline{ab}$ tetivou stálé délky, netřeba podotýkati.

Co zvláštní případy křivek K_m a K_M sluší vytknouti:

a) geom. místo bodu dělícího $\overline{ab}$ v stálém poměru,

b) křivku obalovou přímek $\overline{ab}$.

Jednoduchý příklad poskytuje tu přímka stálé délky, jejíž konečné body pohybují se po dvou k sobě kolmých přímkách; obaluje pak astroidu a každý bod její opisuje ellipsu.

Sestrojení bodu dotyčného na tečně křivky první, tečny pak v daném bodu křivky druhé jest dle předcházejícího zřejmé. Věta vyslovená podává také prostředek ku sestrojení tečen, respective normál, křivek konchoidických. Jak z toho snadno poznati lze, *mají všechny křivky konchoidické o společné základně tutéž polární subnormálu.* *)

2. Obalují-li ramena stálého úhlu (AB) dvě různé aneb sjednocující se křivky L_A a L_B, opisuje každý s nimi neproměnně spojený bod m křivku K_m, každá přímka M pak obaluje křivku určitou K_M. Spůsobem obdobným jako větu v odstavci (1) lze dokázati, že „*normály takto odvozených křivek prochází průsečíkem příslušných normál křivek základních L_A a L_B.*"

Totéž vysvitá však též z následujícího: Spojíme-li bod m s body a, b přímkami A, B, budou tyto, je-li $\overline{ab}$ stálá délka a abm stálý trojúhelník, tvořiti stálý úhel (AB) a obalovati určité křivky L_A, L_B, o nichž dle uvedeného víme, že normály jich jdou bodem o. Vycházíme-li od křivek těchto co základních a vztahujeme-li veškeré útvary pohyblivé roviny R' k tečnám A, B, přesvědčíme se ihned o správnosti věty vyslovené.

Tato platí specielně o geometrickém místu vrcholu úhlu (AB), pro kterýž případ podal analytický důkaz Enneper. **)

Konečně poukazujeme ještě k dvěma zvláštním spůsobům odvozování křivek z daných základních, kteréž v právě uvedeném obsaženy jsou.

a) Nejprvé jsou to *průmětnice* v širším smyslu, t. j. geom. místo vrcholu stálého úhlu, jehož jedno rameno prochází pevným bodem (pólem), druhé pak obaluje křivku základní Tento druh odvodí se z obecného patrně tím, že jedna z křivek základních stane se křivkou třídy první, to jest bodem, veškeré tečny její tvoří pak svazek paprskový, jehož středem tento bod jest.

b) Jsou-li křivky L_A a L_B v takovém vztahu, že ku př. L_B jest evolutou pro L_A, lze považovati tečnu křivky L_A a normálu k ní náležející za rameno stálého úhlu (pravého), kteráž křivky L_A a L_B obalují.

---

*) Viz: Hermite, Cours d' analyse, 1ière partie, pag. 92.

**) Viz: Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik u. Physik 1871 str. 342.

Průsečíkem příslušných normál jest tu střed křivosti pro odpovídající bod na křivce L_A. Tečnami a normálami křivky L_A dáno jest nesčíslné množství soustav pravoúhelných (béřeme-li tečny ku př. za osy úseček, normály za osy pořadnic).

Geom. místem bodu majícího tentýž vztah ke všem těmto soustavám jest určitá křivka (prof. Tilšer nazývá ji *čarou posuvnou* čili *posuvnicí* čáry základní *), čarou obalovou přímky stejného vztahu ke všem těmto soustavám bude opět jiná křivka. Oběma náleží ta společná vlastnost, že *normály jich jdou příslušným středem křivosti křivky základní.*"

O společném původu některých integrálů omezených.

(Podává Dr. *F. J. Studnička.)*

Historický rozvoj nějaké nauky liší se obyčejně od soustavného, jelikož tu z jednoho neb několik hlavních východišť se takořka organicky celá síť pouček utkává, kteréž nesouvisle během času bádáním rozmanitým byly objeveny. Napřed se obyčejně hromadí materiál a teprv když tolik ho pohromadě, že se na stavbu celé budovy může pomýšleti, vyskytuje se základní myšlenka, stavební plán, podlé něhož se jednotlivé poučky co stavební prostředky pojí k jednotnému celku, k vědecké soustavě.

Co platí o celku, vztahuje se poměrně i k částem co podřízeným celkům, co soustavám nižšího druhu; spojujíce roztroušené poučky pomocí jednoho pravidla v jednotnou vazbu připravujeme materiál k stavbě hlavní, skládáme prvky stavební v členy obsáhlejší a spojujeme stavivo v integrující části celé budovy.

Co tuto všeobecně bylo proneseno o vědách exaktních, platí zejmena o rozběhlé nauce o integrálech omezených; i zde jest hojnost rozptýleného materiálu, kterýž dosud nebyl v jednotu vyšší uveden, i zde jest mnoho jednotlivých vzorců, které

*) Viz: Tilšer, Soustava deskr. geometrie, seš. 1. str. 92.

lze jedinou poučkou obsáhnouti, jakž pozná se z krátkého příkladu, jejž tuto chceme vyložiti.

Učiníme-li v známém integrálu

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{x^n + e^{ai}} = \frac{\pi}{n} \frac{e^{i(\frac{m}{n} - 1)a}}{\sin\frac{m}{n}\pi} \qquad \textit{(Minding)}$$

jmenovatele reálným, obdržíme snadno pomocí známých stejnin, rozloučivše reálné a imaginárné členy,

$$\int_0^\infty \frac{x^{m+n-1} + x^{m-1}\cos a}{x^{2n} + 2x^n \cos a + 1} dx = \frac{\pi}{n} \frac{\cos(\frac{m}{n} - 1)a}{\sin\frac{m}{n}\pi} \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\sin a}{x^{2n} + 2x^n \cos a + 1} dx = -\frac{\pi}{n} \frac{\sin(\frac{m}{n} - 1)a}{\sin\frac{m}{n}\pi} \tag{2}$$

z kterýchžto vzorců možná celou řadu zvláštních vyvésti, vyhoví-li se jen podstatným podmínkám, jakým podléhá vzorec původní. Položíme-li tu především

$$a = 0,$$

obdržíme ze vzorce (1)

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{x^n + 1} = \frac{\pi}{n} \operatorname{cosec}\frac{m}{n}\pi, \qquad \textit{(Euler)} \tag{3}$$

z kteréhožto vzorce jde pro $n = 1$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{x + 1} = \pi \operatorname{cosec} m\pi, \qquad \textit{(Legendre)} \tag{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^m dx}{x + 1} = -\pi \operatorname{cosec} m\pi, \tag{5}$$

a spojíme-li oba vzorce,

$$\int_0^\infty x^{m-1} \frac{x-1}{x+1} dx = -2\pi \operatorname{cosec} m\pi, \tag{6}$$

a podobně pro $n = 2$.

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec}\frac{m}{2}\pi, \qquad \textit{(Cauchy)} \tag{7}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}\sec\frac{m}{2}\pi; \quad \textit{(Schlömilch)} \quad (8)$$

pro $m = 1$ jde pak ze vzorce (3)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1} = \frac{\pi}{n}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n} \quad \textit{(Euler)} \quad (9)$$

a pro $n = 4$, $m = 1$ a $m = 3$ pozná se, že

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}; \quad (10)$$

podobně se obdrží se vzorce (5) a (8) pro $m = \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx = +\pi, \quad \textit{(Öttinger)} \quad (11)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \textit{(Euler)} \quad (12)$$

Položíme-li ve vzorci (1) a (2)

$$a = \frac{\pi}{2},$$

obdržíme nový vzorec

$$\int_0^\infty \frac{x^{m+n-1}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{2n}\sec\frac{m}{n}\frac{\pi}{2} \quad \textit{(Poisson)} \quad (13)$$

a se vzorcem (3) souhlasící

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{2n}\operatorname{cosec}\frac{m}{n}\frac{\pi}{2};$$

ze vzorce (13) jde na př. pro $n = 3$, $m = -2, 0, 2$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}, \quad \textit{(Euler)} \quad (14)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{6}, \quad \textit{(Euler)} \quad (15)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}, \qquad \textit{(Euler)}\ (16)$$

což se i obdrží ze vzorce (3) pro $m = 1, 3, 5$;
z téhož vzorce obdrží se pro $n = 1$ opět

$$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} \sec \frac{m}{2}\pi$$

a z tohoto konečně, položíme-li

$$x = tg\,\omega,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^m\,\omega\,d\omega = \frac{\pi}{2} \sec \frac{m}{2}\pi, \qquad \textit{(Cauchy)}\ (17)$$

takže na př. pro $m = \frac{1}{2}$ bude

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \sqrt{tg\,\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad (18)$$

Položíme-li konečně ve vzorci (1)

$$a = \pi,$$

obdržíme především

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n-1} = -\frac{\pi}{n} \cot \frac{m}{n}\pi \qquad \textit{(Mascheroni)}\ (19)$$

z kteréhožto vzorce jde pro $n = 1$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x-1} = -\pi \cot m\pi, \qquad \textit{(Cauchy)}\ (20)$$

a taktéž pro $n = 2$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^2-1} = -\frac{\pi}{2} \cot \frac{m}{2}\pi, \qquad \textit{(Mascheroni)}\ (21)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{x^2-1} = \frac{\pi}{2}\, tg \frac{m}{2}\pi, \qquad (22)$$

z kteréhožto vzorce jde na př. pro $m = \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{23}$$

Derivujeme-li vzorec (2) podlé a a položíme-li pak

$$a = 0,$$

obdržíme nový vzorec

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(x^n+1)^2} = -\frac{m-n}{n^2}\,\pi \operatorname{cosec}\frac{m}{n}\pi, \quad \text{(Ohm)} \tag{24}$$

z něhož jde na př. pro $m = 1$, $n = 2$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}; \quad \text{(Cauchy)} \tag{25}$$

položíme-li pak

$$a = \pi,$$

obdržíme vzorec podobný

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(x^n-1)^2} = -\frac{m-n}{n^2}\,\pi \cot\frac{m}{n}\pi, \tag{26}$$

z něhož jde na př. pro $m = 1$, $n = 4$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{3}{16}\pi, \tag{27}$$

pro $m = \frac{3}{2}$, $n = 2$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x^2-1)^2}\,dx = +\frac{\pi}{8}. \tag{28}$$

Násobíme-li vzorec (2) da a integrujeme-li pak v mezích α, β, obdržíme především

$$\int_0^\infty x^{m-n-1}\, l\, \frac{x^{2n}+2x^n\cos\beta+1}{x^{2n}+2x^n\cos\alpha+1}\,dx =$$

$$-\frac{2\pi}{m-n}\,\frac{\cos\left(\frac{m}{n}-1\right)\beta - \cos\left(\frac{m}{n}-1\right)\alpha}{\sin\frac{m}{n}\pi}, \tag{29}$$

z kteréhožto vzorce jde pro $\alpha = 0$, $\beta = \pi$

$$\int_0^\infty x^{m-n-1}\, l\,\frac{x^n - 1}{x^n + 1}\, dx = \frac{\pi}{m-n} \cot \frac{m}{n} \frac{\pi}{2}; \tag{30}$$

a z tohoto pro $m = n + 1$

$$\int_0^\infty l\,\frac{x^n - 1}{x^n + 1}\, dx = -\pi\, tg\, \frac{\pi}{2n} \tag{31}$$

a tudíž pro $n = 2$

$$\int_0^\infty l\,\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx = -\pi; \tag{32}$$

ze vzorce (30) jde podobně pro $n = 1$

$$\int_0^\infty x^{m-2}\, l\,\frac{x - 1}{x + 1}\, dx = \frac{\pi}{m-1} \cot \frac{m}{2} \pi \quad (Cauchy) \tag{33}$$

a z tohoto konečně pro $m = n + 2$

$$\int_0^\infty x^n\, l\,\frac{x - 1}{x + 1}\, dx = \frac{\pi}{n+1} \cot \frac{n}{2} \pi, \tag{34}$$

takže pro $n = \frac{1}{2}$ se obdrží

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\, l\,\frac{x - 1}{x + 1}\, dx = \frac{2}{3}\pi. \tag{35}$$

Podobným spůsobem bychom mohli derivováním a integrováním za integračním znamením vyvésti ze vzorce (1) nové vzorce a v nich pak za a klásti přiměřené hodnoty zvláštní. čímž bychom obdrželi celou řadu zvláštních integrálů omezených Z několika ukázek těchto jde patrně na jevo, jak z jednotlivého vzorce všeobecnějšího možná rozličnými obraty si zjednati celou řadu vzorců odvozených, které tímto spůsobem jsou vázány v zvláštní celek, jež všeobecnější onen vzorec zastupuje v soustavě vědecké.

Věstník literární.

Co v I. ročníku časopisu tohoto pag. 215. bylo slíbeno, vyplněno a provedeno letošním rokem; překlad výtečného spisu Baltzerova „Elemente der Mathematik" jest již ukončen a nákladem *Th. Mourka* vytištěn.

Dra. RICHARDA BALTZERA

ZÁKLADOVÉ MATHEMATIKY.

ZE ČTVRTÉHO OPRAVENÉHO VYDÁNÍ

PŘELOŽIL

MARTIN POKORNÝ,

PROFESSOR PŘI OBECNÍM GYMN. REÁL. V PRAZE.

DÍL PRVÝ.

PROSTÁ ARITHMETIKA, OBECNÁ ARITHMETIKA, ALGEBRA.

Toť úplný titul nového spisu mathematického, jímž naše mathematická literatura vůbec a školní zvlášť byla v pravém smyslu slova obohacena.

Poukazujíce k tomu, co o spisu tomto již l. r. bylo řečeno, odporučujeme jej opětně *všem profesorům mathematiky na středních školách* našich, aby si ho dopodrobna prohlédli a možná-li vůbec, podlé něho jednotlivé části neb i celou algebru přednášeti se pokusili; mámeť pevně za to, že čím dále tím více obliby v něm budou míti a že se zajisté tu i tam pokusí, aby jej co učební knihu na svůj ústav zavedli. Mimo to pak zvláště upozorňujeme na spis tento *ředitelstva paedagogických ústavů* našich, jsouce přesvědčeni, že pro kandidaty učitelství není přiměřenější učební knihy nad tuto, pováží-li se zároveň, že se tu přednáší posluchačům zralejšího úsudku a vážnější snahy; má-li učitel řádně učiti, musí se mu především dostati řádných, přesných výkladů o všech věcech, aby nic nezůstalo nejasného, mlhavého, hlavně pak třeba mu přihlížeti k správnosti výměrů a základních pouček. A tu vyniká kniha Baltzerova, která též přes sto velezajímavých historicko-literárních poznámek obsahuje, nad celou řadou jiných tak znamenitě, že již do několika jiných jazyků byla přeložena a do mnoha pokročilejších a pokroků si všímajících ústavů zavedena.

Namítne snad mnohý, že tu příliš mnoho látky nakupeno, že zejmena výklady o determinantech a poučky o funkcích algebraických není ani možná na středních školách přednášeti. Ale i kdyby tomu *naprosto* tak bylo, není na škodu knize, obsahuje-li více; neb co se zdá, jakoby se nehodilo do těsného rámce našich středních škol, toť možná vypustiti a přenechati soukromé pilnosti žáků nadanějších a horlivějších. Ostatně nebude dlouho možná se obejíti bez známosti elementárních vlastností determinantů na středních školách; Bavorsko a Rusko potřebu těchto vědomostí již uznalo a podlé toho program vyučování mathematického i doplnilo.

Zároveň tu oznamujeme, že od redaktora těchto listů sepsán a nákladem *Fr. A. Urbánka* vydán

„Uvod do analytické geometrie v prostoru",

čímž doplněn spis Skřivanův „o analytické geometrii v rovině" jednající v celek, vyhovující aspoň nejnutnějším potřebám našich studujících na vysokých školách, kterým jest mathematika jen vědou pomocnou.

Std.

O zemském magnetismu.

(Podává dr. *Aug. Seydler.*)

(Dokončení.)

Mimo uvedené již dílo uveřejnil *Gauss* s *W. Webrem* r. 1840 atlas zemského magnetismu, v němž podává mapy a tabulky pro magnetický potenciál $V:R$; pro ideální rozdělení magnetismu na povrchu země, pro složky pravoúhelné X, Y, Z zemského magnetismu, pro celou intensitu $\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}$, pro její vodorovnou složku $\sqrt{(X^2+Y^2)}$, pro deklinaci δ a pro inklinaci i. Mapě pro ideální rozdělení magnetismu na povrchu země musíme takto rozuměti: rozdělení magnetismu *v zemi* může býti při stejném působení na povrch nekonečně rozmanité; mezi všelikými těmi spůsoby rozdělení můžeme vyhledati též ten, při kterém veškerý magnetismus umístěn jest *na povrchu země*. Rozdělení takové nahražuje nám co do účinku úplně *skutečné*, *neznámé* rozdělení v zemi, a sluje na rozdíl od tohoto *ideální*. Vyhledání jeho jest úlohou zcela určitou, připouštějící jen jedno rozřešení; a právě tohoto rozřešení výsledek podává nám výše naznačená mapa.

Uvedené mapy a tabulky sestrojeny jsou v Gaussově atlasu pouze na základě theorie; jich porovnání s mapami jinými, založenými na pouhém pozorování, jakéž nám poskytnuli *Hansteen*, *Duperrey*, *Erman* a jiní, bude tudíž nejlepším prostředkem přesvědčiti se o větší neb menší dokonalosti a obsáhlosti theorie vzhledem k empirickému materiálu. Porovnání takému položen zde za základ *Berghausův* fysikální atlas, jehož čtvrté oddělení obsahuje pět magnetických map od Duperreye a Ermana. Vzhledem k důležitějším křivkám svrchu (v. č. V. str. 213) uvedeným obdržíme tyto výsledky:

1. *Křivka bez odchylky* probíhá nejprv severním polem geografickým i magnetickým, umístěným v severní Americe na ostrově Boothia Felix *), a procházejíc Kanadou a jezerem Huronským, vniká blíž Washingtonu do atlantického oceánu, jejž protíná ve směru jihovýchodním, dotýkajíc se ostrova Portorika; vniká pak do jižní Ameriky při ústí Orinoka, překročuje delta řeky Maraňonu a vstupuje po druhé do atlantického oceánu blíže Rio de Janeiro. Na to prochází jižním polem magnetickým, pak též geografickým vstupujíc na východní polokouli. Zde béře se nejprv ve směru severozápadním skrze západní Australii, přes Javu, Sumatru a poloostrov Malakka, kde se obrací nejprv na sever, pak na severovýchod, a počíná opisovati ohromnou kličku přes Anam, na východ přes Filippiny, odtud na sever okolo Japonska a přes Ochocký záliv do Sibíře, kde se obrací na severozápad, na západ, a dostoupivši v 125° vých. Pař. délky největší sev. šířky 69°, na jihozápad i jih; vinouc se okolo jezera Baikalského Mongolskem, přibližuje se v Zadní Indii své dřívější poloze až na 80 mil, a opisujíc kolem Přední Indie velký téměř parabolický oblouk, obrací se opět na severozápad a pohybuje se přes východní cíp Arabie, Iran, Kaspické moře, Rusko a Laponsko ku severnímu polu. Křivka na základě Gaussovy theorie sestrojená jest na západní polokouli s předešlou křivkou téměř totožná; větší rozdíl jeví se na východní polokouli. Zde se totiž dělí křivka theoretická ve dvě části; jedna probíhá západní Australií a jde pak okolo Javy, Sumatry a Přední Indie přes východní Arabii a Kaspické jezero na sever; druhá část, která patrně nahražuje onu kličku křivky empirické má uzavřený vejčitý tvar; probíhá skrz Filippiny, severní Japonsko, Sibíř, Mongolsko a Čínu; severní vrchol její leží v 130° vých. délky a 62° sev. šířky. Rozdíl ten zdá se ostatně býti podstatnější nežli v skutku jest. Rovník protíná naše křivky v těchto bodech:

---

*) Mimochodem řečeno musí každá isogona procházeti oběma poly: *geografickým*, poněvadž zde jest směr geografického poledníka neurčitý, a *magnetickým*, poněvadž zde opět směr maguetky aneb magnetického poledníku jest neurčitý; neboť v magnetickém polu mizí vodorovná složka zemského magnetismu.

křivku empirickou v 72°, 84°, 100°, 304° vých. délky,
křivku theoretickou v 69°, ... 308° „

V theoretické křivce chybí oba prostřední průřezy, jelikož vejčitý onen tvar, jenž jest aequivalentem kličky utvořené křivkou empirickou, až k rovníku nesahá (jižní vrchol jeho leží v 125° vých. d. a 15° sev. š.).

2. *a*) ***Magnetický rovník*** (v němž inklinace = 0°) jest křivkou dvojí křivosti. Dle Duperreye protínal r. 1825 rovník geografický ve 3° vých. d., procházel střední Afrikou, dosáhl v Abyssinii největší sev. šířku 13°, načež vstoupil protnuv obě Indie a ostrov Celebes ve 177° vých. délky do jižní polokoule, kde procházel celým tichým oceánem a jižní Amerikou, dostoupiv v její východní části největší jižní šířky 16°, načež se opět geogr. rovníku blížil, až k němu opět na západním břehu Afriky v 3° vých. délky dospěl. Dle theorie jest průběh magnetického rovníku tentýž, vyjma malé odchylky, jež se jeví v poloze průseků s geogr. rovníkem: průseky ty leží totiž v 7° a 170° vých. délky, největší sev. šířka obnáší 15°, největší již. šířka 16°. Rozdíl ten jest ještě nepatrnější, považíme-li, že mapa Duperreyova a Gaussova nejsou zcela současné.

2. *b*) ***Magnetické poly*** (v nichž inklinace = 90°) leží
sev. v. 70° sev. š., 259° vých. d.
a již. v. 76° již. š., 135° vých. d.

Severní pol nalezen jest přímo kapitánem ***Rossem***, o poloze jižního soudí se z pozorování v okolních místech. Dle Gaussovy theorie mají ležeti
severní pol: v 74° sev. š. 262° vých. d.
jižní pol: v 73° jižn. š. 150° vých. d.

Co první přiblížení souhlasí hodnoty tyto dostatečně s předcházejícími.

3. *a*) ***Křivka nejmenší intensity*** (dynamický rovník), sestrojená na základě Gaussovy theorie, vstupuje do záp. Afriky v 7° již. šířky, probíhá ji ve směru severovýchodním, a jde pak téměř rovnoběžně s rovníkem přes indické moře a tichý oceán, překročuje rovník na jih asi ve 200° vých. d., probíhá ve směru jihozápadním Ameriku a vzdaluje se v atlantickém oceánu až na 20° již. š. od rovníka. Průběh ten souhlasí v hlavních rysech s křivkou sestrojenou *Sabine-em*. (Duperrey nemá křivku tu na

své mapě; co on nazývá středním magnetickým rovníkem, má zcela jiný význam). Intensita střídá se na křivce té od 0,809 až do 1,055 (co míra volena zde jednotka Humboldtova, viz č. V. str. 107).

3. *b*) *Body nejmenší intensity* musí se ovšem nalézati na předešlé křivce; dle Gausse jsou to body:

350° vých. d. 17° již. š. s intensitou 0,809
179° „ 5° „ s intensitou 0,930

Polohu bodu prvního určil *Ermann* dosti rozdílně; nalezl v 323° vých. d. a 20° již. š. intensitu 0.706; zdali je poloha druhého bodu empiricky určena, nemohl jsem nalézti.

3. *c*) *Body největší intensity* jsou dle pozorování čtyry, a následující jich poloha a intensita:

266° vých. d.	52° sev. š.,	int. = 1,878		
116° „	60° „	„ = 1,74	(1,76)	
135° „	64° již. š.,	„ = 2,06		
233° „	60° „	„ = 1,96		

Bod první určil *Sabine* a *Lefroy*, bod druhý *Erman*, bod třetí na základě Rossových pozorování *Sabine*, poloha čtvrtého bodu určeného *Rossem*, jest velmi hypothetická, a i poloha třetího bodu dosti pochybná.

Porovnáme-li výsledky tyto a předešlé, vidíme, že jest poměr intensity největší a nejmenší asi 3 : 1. Gaussova theorie poskytuje nám jen tři body největší intensity:

259° vých. d., 55° sev. š., int. = 1,763
118° vých. d., 71° sev. š., int. = 1,692
158° vých. d., 70° již. š., int. = 2,260.

Oba severní body souhlasí dostatečně; jižní bod liší se co jednotlivý polohou svou značně od obou bodů empiricky určených.

Celistvý výsledek tohoto porovnání jest, že sice Gaussova theorie úkazům dostatečně vyhovuje, že však nutno mnohem lépe určiti součinitele ve všeobecných výrazech pro jednotlivé veličiny magnetické (Gaussem nazvané *elementy zemského magnetismu*), aby theorie a pozorování úplně se shodovaly.

IV. Časové proměny zjevů magnetických.

Mathematický rozbor úkazů zemského magnetismu byl by Gaussovou theorií zakončen, kdyby úkazy ty byly pouhými úkony prostoru, i nezbývalo by, jak už řečeno, leč uvésti theorii vypočítáním náležitého množství příslušných součinitelův v úplný souhlas se skutečností. Avšak magnetické veličiny jsou i časem proměnlivé, a nastává nám druhá a to obtížnější úloha, určiti je co úkony času. Úloha tato jest posud velmi nedokonale řešena; vedle Gaussovy theorie, která jest jakoby z jedné litiny, spatřujeme rozptylené, empiricky nalezené, pro rozličné části země jinak a jinak znějící věty o závislosti magnetických úkazů na čase. Co do času mění se úkazy magnetické jednak *postupně*, jednak *periodicky*; zřetel badatelů obrací se nyní zejmena k posledním proměnám. Takových period proniká se v jednotlivém úkaze více, a jsou k tomu často ještě zakryty proměnami postupnými; tak by na př. měla magnetka následkem denní periody vrátit se v určitou hodinu do polohy, kterou zaujímala v tutéž hodinu v den předcházející; leč jiné periody zamezují částečně návrat ten, a magnetka se během dne k své včerejší poloze pouze přibliží.

Z toho vidíme, kterak důležito, abychom mohli jednotlivé periody od sebe odděliti a takto osamotněné blíže vyšetřiti. Děje se to následujícím spůsobem. Délka periody rozdělí se na stejné části (ku př. den na 24 hodiny) a pozoruje se veličina, kterou chceme vyšetřiti, na př. deklinace ke konci každé té části; pak se vezme co možná velký počet takových pozorování (na př. celý ročník) a utvoří se průměrná čísla všech *soudobných* pozorování. Ony příčiny, které mají jinou než právě vyšetřovanou periodu, mění následkem toho pozorovanou veličinu jednou ve směru kladném, jednou ve směru záporném, a proměny ty se tudíž alespoň z větší části v průměru ruší, kdežto zbývající periodická proměna se stále týmž spůsobem opakuje a tudíž i ve výsledku objeví. K mathematickému vyjádření period hodí se velmi dobře trigonometrické funkce; často užívá se se zvláštním prospěchem následující empirický vzorec:

$$u = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right) + b \sin\left(4\pi \frac{t}{T} + \beta\right) + \ldots$$

T jest zde délka periody, t libovolný čas, a, α, b, β, stálé součinitelé, jichž hodnotu určíme na základě většího počtu pozorovaných veličin obyčejně methodou nejmenších čtverců. Určíme-li takto úkon u pro delší řadu po sobě jdoucích period, shledáme často, že veličiny a, b, ... α, β, ... nejsou stejné, nýbrž opět časem proměnlivé a to nezřídka *periodicky* proměnlivé. S veličinami a, b, ... α, β, ... můžeme pak podobným jako dříve spůsobem naložiti, čímž obdržíme periodu vyššího stupně, která v sobě periodu prvotní zahrnuje. Tak jeví se v periodické variaci denní obyčejně též vyšší perioda roční.

Naskytuje se ještě otázka, dle čeho poznáme periodu nějakou. Značnější a kratší periody, ku př. denní variace prozrazují se obyčejně samy sebou; na periody skrytější a delší dlužno souditi z úvah theoretických. Obyčejně jsou to doby, v nichž se jiný, nám již velmi dobře známý úkaz též periodicky opakuje, na př. rok. Z toho patrno, že na př. měsíc (co 12. část roku) sotva as bude periodou pro úkazy magnetické, poněvadž žádné jiné úkazy nemají tuto periodu. Periodu rotace sluneční (v. níže) lze naznačiti co vzor periody velmi skryté, k jejímuž nalezení bylo nutno vyjíti od theoretické úvahy.

Obraťme se po tomto všeobecném přehledu k důležitějším periodám při úkazech zemského magnetismu.

1. *Denní perioda.* Nejlépe seznáme periodu tu z následujícího přehledu, obsahujícího průměry všech denních pozorování v r. 1870 v Praze pro uvedené hodiny:

	6 hod. ráno	10 hod. dop.	2 hod. odp.	6 hod. večer	10. hod. večer
Dekl.	11° 57′,36	12° 0′,41	12° 8′,08	12° 1′,80	11° 59′,42
Inkl.	65 13,80	65 14,20	65 14,06	65 13,84	65 13,79
Inten.	4,6218	4,6150	4,6187	4,6226	4,6229

My vidíme, že nyní u nás (v Evropě) deklinace od východu slunce až do 1—2 hod. s poledne roste, to jest že se magnetka stále na západ pohybuje; k 10. hodině večerní vrací se do své polohy ranní, tak že pohyb přes noc až do 6. hodiny ranní jest jen nepatrný. Zákon ten osvědčil se pro celou severní polokouli a platí i pro jižní polokouli s tím toliko rozdílem, že se na této děje dopolední pohyb ve směru východním. Zajímavý jest spůsob, jakým *Duperrey* úkaz ten vysvětluje. Když ráno vychází slunce, otepluje část země ležící východně od pozorovatele, čímž se intensita magnetická této části zmenší.

Následkem toho ohýbá se isodynamická křivka, procházející stanoviskem pozorovatele, vzdalujíc se od rovníku buď na sever neb na jih dle toho, nalézá-li se pozorovatel na severní neb jižní polokouli. Magnetka, která vždy stojí kolmě na křivce isodynamické, musí se tudíž dopoledne pohybovati na severní polokouli na západ, na jižní na východ. Rovněž vysvětluje se oteplením západní (vzhledem k pozorovateli) polokoule návrat magnetky v její ranní polohu.

Zákon denního periodického pohybu magnetky ztrácí svou platnost v zemích polárních, kde vodorovná složka intensity magnetické spůsobující jedině deklinaci, jest velmi malá, a při rovníku, kde pohyb jest vůbec velmi malý a střídavý.

Denní pohyb v inklinaci jest daleko menší a tudíž i daleko obtížnější, určiti periodicitu jeho. Z uvedených čísel lze souditi, že má inklinace maximum o 10. hod. dop. a minimum o 10. hod. večerní; přes noc (od 10. hod. večer do 6. hod. ráno) mění se inklinace velmi málo. Tentýž zákon vyslovil i *Kupffer*, podotýkaje zároveň, že mininium jest mnohem nestálejší, anož se dostavuje často již o 5. hod. odpol. Tentýž zákon platí též pro Mnichov, Paříž a jiná evropská města; jak se však jinde, zejmena pro jižní polokouli musí změniti, není posud dostatečně známo.

Intensita jeví u nás u porovnání s inklinací opačný zákon; má totiž maximum o 10. hod. večer a minimum o 10. hodině ráno. I zde jest až posud dílem materiál samý, dílem spracování jeho nedostatečné.

2. *Perioda roční* co druhá důležitá perioda jeví se dílem v denních neb měsíčních průměrech co perioda jednoduchá, dílem v periodě denní t. j. v příslušných součinitelích co perioda vyššího stupně. Perioda první jest však velmi skrytá následkem postupné (sekulární) proměny magnetických veličin; pouze v deklinaci jest poněkud značnější. Zdá se, že má příčinu svou v postavení slunce vzhledem k zemi.

Dle *Cassini-ho* roste západní odchylka v Evropě od ledna až k dubnu, ubývá jí od dubna až k červenci, a přibývá opět, rychleji do října, pomaleji do ledna. *Arago* shledal, že lze na základě pozorování vykonaných v Paříži a v Salemu (ve Spojených Státech) vysloviti následující věty, v kterých se jeví závislost roční periodické změny od proměn sekulárních:

a) Roste-li postupně (sekulárně, každým rokem) západní odchylka magnetky, tož nastává každý rok mezi dubnem a červencem pohyb opačný;

b) pohyb tento jest tím větší, čím větší jest roční proměna odchylky; jestli-že dostoupila západní odchylka svého maxima, jest-liže tedy roční její proměna zmizí, zmizí též onen pohyb opačný; podobně zmizí i v tom případě, kdy se odchylka stále zmenšuje, kdy se magnetka vrací do poledníka.

Mohli bychom si úkaz ten znázorniti přílivem, kde vlna dostoupivší až k břehu opět se vrací, načež druhá opět ku předu a to o něco více než první postoupí.

Druhá roční perioda týká se denních proměn. Dle čísel dříve uvedených byl rozdíl mezi největší a nejmenší deklinací v témž dni po celý rok 1870 průměrně 10',72; tato ať tak díme amplituda denních proměn není však po celý rok stejná; obnášela v tomtéž roce

v lednu	6',05	v květnu	15',40	v září	11',31
v únoru	6 ,73	v červnu	15 ,17	v říjnu	9 ,07
v březnu	11 ,30	v červenci	15 ,58	v listopadu	8 ,12
v dubnu	14 ,37	v srpnu	14 ,64	v prosinci	6 ,58

Z uvedených čísel vidíme, že jest zmíněná amplituda proměnlivá, a perioda její souhlasí nápadně s periodou roční teploty.

To se dá velmi dobře srovnati s výkladem Duperrey-ovým o příčině denních proměn deklinace; neboť čím větší rozdíly v denní teplotě, tím větší musí též býti ony proměny.

Není pochyby, že se podobná perioda jeví i při inklinaci a intensitě; jest však daleko menší a ještě málo proskoumána.

3. *Perioda měsíční.* Měsíc kalendářský jest ovšem založen na pohybu luny, avšak přispůsoben délce roku a délka jeho tudíž vlastně libovolná; nemůžeme tedy, jak již řečeno, měsíční periodu v tomto smyslu v úkazech magnetických očekávati. Avšak perioda o něco kratší, vyměřená dobou oběhu měsíce kolem země, tedy as 28·5 dne dlouhá, byla skutečně *Kreilem* nalezena. *)

---

*) *Kreil,* Einfluss des Mondes auf die magnetische Declination zu Prag in den Jahren 1839—1849.

On totiž shledal, že jeví během jedné takové periody deklinace dvojí maximum a dvojí minimum.

4. *Jedenáctiletá perioda.* Neunavný pozorovatel skvrn slunečních *Schwabe* nalezl na základě pozorování z roku 1826—30 jedenáctiletou periodu v množství oněch skrvn. Podobnou periodu nalezl r. 1851 *Lamont* ve velikosti denního pohybu magnetky. Po něm obírali se touto periodou *Gautier*, *Sabine*, zvláště pak *Wolf* *), jenž ji určil na $11^1/_9$ let. Shledal, že nastává maximum počtu skvrn a maximum denního pohybu magnetky, a rovněž tak minimum, vždy současně. I anomalie jednoho úkazu objevují se při úkazu druhém, jak vidíme z této tabulky:

maximum		minimum	
skvrn	mag. proměn	skvrn	mag. proměn
1816·8	1817·5	1823·2	1823·8
1829·5	1829·7	1833·8	. . . .
1837·2	1837·7	1844·0	1844·2
1848·6	1848·9	1856·2	1856·3
1860·2	1860·0		

Na základě tohoto souhlasu vyslovuje *Wolf* mínění, že mezi oběma zjevy panuje příčinný svazek takový, že se na obou může odměřiti intensita společné příčiny jako na dvou rozdílných stupnicích.

5. *Perioda rotace sluneční.* Již z předešlého patrno, že jsou velké proměny na povrchu slunce spojeny se současnými proměnami ve směru a síle zemského magnetismu. Ony proměny na povrchu slunce dějí se *po sobě* během 11-leté periody; ale nalézáme je též *vedle sebe*, přihlížíme-li k rozličným částem povrchu slunce. Jelikož pak všechny části ty během jedné sluneční rotace k zemi obráceny jsou, objeví se nám snad též tato perioda v úkazech magnetických. Tato úvaha přiměla ředitele pražské hvězdárny, p. dr. *K. Hornsteina* k tomu, aby některé

---

*) *Wolf:* Über die elfjährige Periode in den Sonnenflecken und erdmagnetischen Variationen, Poggendorfs' Ann. CXVII.

řady pozorování, především deklinaci v r. 1870 vzhledem k oné periodě proskoumal*). V tomto případě byla úloha poněkud obtížnější, poněvadž doba otáčení se slunce kolem své osy není posud přesně určena. Hornstein položil si proto opačnou úlohu: z dané periody t. j. z dané řady periodicky postupujících čísel určiti délku její. Pravdě nejpodobnější hodnota této délky, obdržená pomocí deklinace a inklinace v Praze a deklinace ve Vídni obnáší *26.33 dní* co výsledek prvního pokusu určiti dobu oběhu slunce kolem své osy pomocí magnetky. Číslo 26·33 dní značí *synodický* oběh slunce, t. j. dobu, po jejímž uplynutí zaujímá slunce své dřívější postavení vzhledem k zemi. Pravý t. j. siderický oběh slunce kolem své osy trvá, na základě onoho čísla, 24·55 dní, což téměř úplně souhlasí s číslem obdrženým pozorováním skvrn v pásmu aequatoriálním slunce (24·54 dní). —

Tím byla by řada důležitějších periodických proměn ukončena; zbývá ještě promluviti o *sekulárních proměnách*, o nichž posud není rozhodnuto, jsou-li též periodické neb ne. Až posud dějí se proměny ty postupně. Deklinace byla v XVI. stol. východní vracela se pak ponenáhlu k 0°, kterouž dostihla ke konci XVII. stol., načež byla západní a rostla stále až na začátek tohoto století; nyní jí opět ubývá. To nejlépe vidíme z následujícího přehledu pozorování Pařížských:

roku	1580	dekl.	11° 30′	vých.	roku	1805	dekl.	22° 5′	záp.
„	1618	„	8° 00′	„	„	1814	„	22° 34′	„
„	1663	„	0° 00′	„	„	1835	„	22° 4′	„
„	1700	„	8° 10′	„	„	1851	„	20° 25′	„
„	1780	„	19° 25′	„					

R. 1580 měla východní deklinace maximum, r. 1663 měnila se v západní, a r. 1814 dospěla do maxima záp. odchylky.

Inklinace mění se mnohem pomaleji než deklinace, a stále jí ubývá, jak z následující tabulky patrno:

roku	1661	inkl.	75° 00′	roku	1820	inkl.	68° 20′
„	1758	„	72° 15′	„	1835	„	67° 24′
„	1805	„	69° 12′	„	1851	„	68° 35′

*) *C. Hornstein*: Über die Abhängigkeit des Erdmagnetismus von der Rotation der Sonne; Sitzb. der k. Ak. der Wissensch. II. Abth. 1871.

Intensita mění se zajisté též zároveň s těmi příčinami, jež mají za následek sekulární proměnu v deklinaci. Avšak doba, v které se pěstuje pozorování intensity, jest příliš krátká, než abychom proměnu tu tak podrobně znali, jako při deklinaci. V první polovici tohoto století vzrůstala intensita v Evropě, nyní opět ubývá, jakož i ostatní magnetické souřadnice. To vidíme na př. v následujícím přehledu veličin těch v Praze pozorovaných, průměrných to hodnot pro uvedené roky:

	r. 1869	r. 1870	r. 1871
Deklinace	12° 7',73	12° 0',91	11° 54',20
Inklinace	65° 19',12	65° 13',92	65° 12',46
Intensita	4,6311	4,6206	4,6193

Velmi dobře lze sekulární proměny studovati na mapách magnetických. Tak vidíme na př., že v XVII. a XVIII. století isogony v celku stále na západ se pohybovaly, při čemž se však též tvar jejich neustále měnil.

Ještě se musím několika slovy zmíniti o *magnetických potržkách* čili *perturbacích.* V některých dnech pozoruje se velmi velký a nepravidelný pohyb magnetek ve variačních strojích. Během několika minut promění se na př. deklinace často o $\frac{1}{2}°$ kdežto obyčejná proměna od rána až do 2 hodin odp. 8'—10' obnáší. Tak pozoroval *Farquharson* 24. března roku 1830 v Aberdeenshiru (ve spojených státech)

o 9 hod. 5 min. pohyb o 32' na západ
o 9 „ 10 „ „ 25' na východ
o 9 „ 15 „ „ 34' na západ

Současně pozoroval skvělou *severní záři.* Obyčejně pozorují se takové potržky tehdy, kdy se objevuje zároveň severní záře; zdá se, že oba tyto zjevy jsou jen různými stránkami téže základní příčiny, t. j. porušení magnetické neb elektrické rovnováhy v zemi. Pozoruhodné jest, že se 11-letá perioda skvrn slunečních jeví též v těchto potržkách; v době maxima oněch skvrn opakují se též magnetické perturbace i polární záře častěji. K této souvislosti mezi počtem skvrn slunečních a polárních září poukázal *Loomis* r. 1865 ve výr. zprávách Smithsonského ústavu.

Jiný důležitý zákon objevený v magn. potržkách jest ten, že nastávají po celé zemi téměř současně; ano celý průběh proměn magnetických jest na rozličných místech země podobný, s tím toliko rozdílem, že absolutní hodnota proměn těch jest tím větší, čím větší jest zeměpisná šířka stanoviska pozorovatele a že jest směr čili znamení jejich opačné pro pozorovatele umístěné na jižní polokouli.

Zákon ten nalezen na základě současných pozorování zavedených *Gaussem* od r. 1834 a provedených na velmi četných stanicích v určité dny od 5 do 5 minut.

Též při zemětřesení a při vulkanických erupcích jeví se značný pohyb magnetek; tak na př. pozoroval *Bernouilli*, že se inklinace změnila r. 1767 při zemětřesení o $^1/_2{}^0$, a *De la Torre* pozoroval při výbuchu Vesuvu, že se měnila deklinace o několik stupňů.

V. Pokusy o vysvětlení zemského magnetismu. — Hypothesa Zöllnerova.

Posud přihlíželi jsme při úkazech zemského magnetismu pouze k jich kvantitativním vztahům, tedy ze stanoviska ryze mathematického; tím jsme je však nevysvětlili, t. j. neuvedli do kruhu známých nám již úkazů přírodních. O takové vysvětlení můžeme se pokusiti teprv tehdy, když se nám podaří vymaniti magnetické úkazy vůbec z jejich isolovanosti a připoutati je k známým úkazům mechanickým, thermickým, elektrickým atd. První rozhodný krok učiněn v ohledu tom od *Oersteda* r. 1820 odkrytím působení proudu galvanického na magnetku. Na základě tohoto vynálezu byla záhy — nejdříve od *Ampère*-a — vyslovena domněnka, že se stává země magnetickou následkem proudů elektrických, jež obíhají kolem země směrem od východu na západ. Domněnka ta nabyla velké pravděpodobnosti, když se existence takových, ovšem v rozličných směrech zemi probíhajících proudů *Becquerelem*, *Lamontem*, *Matteuccim*, *Secchim* a jinými zjistila, naskytla se však ihned nová otázka, odkud proudy ty průvod svůj berou. Když *Seebeck* nalezl (r. 1821) thermo-elektrické proudy, ihned povstala domněnka, že proudy v zemi vznikají též denními proměnami v teplotě země. Vzhledem k denním variacím zemského magnetismu rozvinul *Dela Rive* názor ten v soustavu, hledaje příčinu oněch variací v thermických proudech kolujících v zemi i ve vzduchu. Proti tomu ozvali se vážní hlasové; zejmena *Lamont* podotýká, že by thermické ty proudy musely být velmi silné, aby tak značný účinek, jako jsou denní proměny v zemském magnetismu, jevily, že by však potom přítomnost jejich i jinak snadno se pozorovati mohla. *Lamont* sám domnívá se, že slunce jest elektrické, že tudíž vzniká návodem v polovici země k slunci obrácené elektřina opačná, v odvrácené polokouli tatáž, kterou i slunce má elektřina; následkem otáčení se země kolem své osy vzniká tím jakýs proud elektrický, za 24 hodin na spůsob přílivu a odlivu kolem země obíhající, jenž může býti či hlavní či podružnou příčinou úkazů zemského magnetismu. Jakým spůsobem *Duperrey* vykládá denní magnetické variace, bylo již svrchu vypsáno.

Zcela originální názor ve věci té vytvořil sobě *Faraday*. opíraje se při tom o paramagnetické vlastnosti kyslíku. Následkem těchto vlastností jest vzduch velmi magnetickým ústředím jehož magnetismus se však oteplením, proměnou tlaku či hutnosti atd. značně mění. Tím mění se však i poloha *magnetických křivek* umístěných (ovšem jen ideálně) ve vzduchu. Tyto magnetické křivky obdržíme, myslíme-li si mezi poly magnetu na dané ploše (na př. na povrchu země) umístěno nekonečně mnoho malých magnetek, jež se mohou pouze kolem osy své otáčeti. Každá magnetka zaujme pak zcela určitou polohu, a řada takových určitě položených magnetek vytvoří magnetickou křivku, jak vidíme na př. při známém pokuse se železnými pilinami nasypanými na papír, pod nímž se nalézá silná magnetická tyč. Na zemi jsou prvky magnetických křivek částice vzduchu a mimo to všechny magnetky, jichž magnetická osa se musí oněch křivek dotýkati. Každou klimatickou proměnou, a tudíž ustavičně mění se poloha křivek těch, které tvoří velmi pohyblivou soustavu kolem země, a tím vysvětlují se stálé denní proměny v poloze magnetky a jich perioda denní i noční. Patrně předpokládá zde *Faraday* určité rozdělení magnetismu v zemi a vysvětluje pouze proměny příslušných úkazů. Ostatně snadno nahlédneme, že všichni až posud uvedení činitelové mohou býti částečnými příčinami úkazů zemského magnetismu a spolupůsobiti, aniž by byli jich základní příčinou.

Obmezuji se na tyto stručné poznámky a obracím se k theorii *Zöllnerově*, která vzdor hypothetické povahy své (a to nemůže ani vůči posavadním theoriím býti výčitkou) jednak pro novotu a smělost svou, jednak pro snadnost, s jakou přehlíží všechny čelnější zjevy zemského magnetismu, bedlivějšího zasluhuje uvážení. *F. Zöllner* uveřejnil ji nejprvé roku 1871 (20. října) ve zprávách kr. saské společnosti nauk pod názem: „Ueber den Ursprung des Erdmagnetismus uud die magnetischen Beziehungen der Weltkörper". Zöllner vychází od zákona rotace, který byl pro slunce a větší oběžnice nalezl a v pojednání „über das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten" šíře rozvinul. On nalezl, že se nachází atmosféra na slunci v neustálém proudění; na rovníku vystupují teplejší plyny tvoříce proudy aequatoriální, kdežto od polu studenější proudy polární k rovníku plynoucí vznikají.

Proudy tyto působí na tekutý povrch slunce jednak *thermicky*, jednak *mechanicky*, zadržujíce hořejší vrstvy v jejich pohybu kolem osy. Následkem toho trou se nejen proudy polární o povrch slunce, nýbrž i hořejší vrstvy tohoto povrchu, zůstávajíce při svém pohybu kolem osy za vrstvami spodními. Při tom sluší podotknouti, že se bezpochyby jednotlivé vrstvy ty lučebně od sebe různí.

Něco podobného platí i pro zemi naši. V jejím nitru, jež se nachází v stavu žhavě-tekutém, vznikají ochlazením při polu spodní proudy polární a vrchní aequatoriální, jež se tudíž dotýkají kůry zemské na vnitřní její straně. Přicházejíce od rovníka mají jeho rychlost, a tudíž se ve větších šířkách ve směru západním předbíhají, zcela na spůsob větrů passátních, jež vějí na severní polokouli ve směru jihozápadním, na jižní ve směru severozápadním.

Tyto proudy pohybující se v nitru země mohou míti následky mechanické, thermické, ale i elektrické, t. j. porušení elektrické rovnováhy. To následuje z pokusů provedených od *Quincke* r. 1859 *). Quincke nalezl, že vzniká galvanický proud, kdykoli tekutina jakás protéká průlinami nějakého tělesa; proud ten má směr tekutiny a jeho intensita závisí na jakosti upotře-

*) *Quincke*. Über eine neue Art electrischer Ströme. Poggendorffs'. A.CVII.

bené tekutiny. Předmětem tím obírali se později též jiní (Wiedemann, Armstrong a j.) a povšechný výsledek jest následující: „všechny proudy v tekutinách jsou spojeny s proudy elektrickými, zvlášť stýká-li se tekutina částečně s pevnými tělesy; směr obou druhů proudů jest stejný.

Upotřebíme-li výsledek ten na uvedené již proudy podzemní, tož vidíme, že vznikají proudy galvanické, jichž směr jest v tekutině na severní polokouli jihozápadní, a tudíž v koře zemské severo-východní. Nerovnosti na vnitřní straně kory zemské jsou jakoby poly galvanického proudu.

Tyto proudy, jichž původ není tedy ani kosmický (solární), ani klimatický, jsou příčinou zemského magnetismu.

Základní úkazy se touto hypothesou dostatečně vysvětlují. Požadavek vyslovený *Gaussem* na základě jeho theorie, aby se příčina zemského magnetismu hledala hluboko pod zemí, jest zde vyplněn. Takové podzemní proudy musí na vnitřní straně rozmanité proměny provésti, místy se odplavují vyvýšeniny, jinde se náplav usazuje, čímž se konečně i proudy samé, jich směr a mohutnost mění. Proměny takové mají v následek *sekulární variace* zemského magnetismu. Jest to velikou předností Zöllnerovy hypothesy, že se z ní tyto proměny, jež posud byly všemu vysvětlení naprosto nepřístupny, samy sebou naskytují. Musíme předpokládati, že jest tvářnost povrchu zemského, rozdělení pevniny a moře, v jakési souvislosti s tvářností vnitřní plochy kůry zemské. Souvislost ta přenesla by se ovšem i na magnetické úkazy; a skutečně nalezl *Menzzer* *) zajímavé vztahy mezi tvarem pevnin a polohou magnetických polů. Velmi dobře vysvětluje se v Zöllnerově hypothesi též vznik *magnetických potržek (perturbací) a jich souvislost s úkazy vulkanickými.* Každá náhlá proměna v rychlosti takého podzemního proudu, buď že vznikla odtrhnutím a ponořením částí vnitřní kory, aneb vulkanickým výbuchem aneb zemětřesením, musí se ve spůsobě vlny šířiti skrz celé tekuté nitro země, čímž se vysvětluje téměř současné objevení se takých proměn po celé zemi. Též četné *Kreilem*, *Lamontem* a j. sebrané doklady současného objevení

*) *Menzzer.* Über den Zusammenhang der Configuration des festen Landes und der Lage der magnetischen Pole, Poggendorffs' Ann. Ergänzgrbd. V.

se zemětřesení a magnetických variací nalézají v Zöllnerově hypothesi zcela přirozeně svůj výklad. Magnetické úkazy až posud probrané vysvětlují se v této theorii poměry čistě terrestrickými; leč jsou jiné ještě úkazy, jež naznačují jakýsi vztah země k ostatním tělesům nebeským.

I tento vztah vysvětluje Zöllnerova hypothesa.

Na povrchu slunce panují totiž podobné proudy jako uvnitř země, a musíme z těch příčin považovati slunce jako zemi za magnetické těleso, ovšem z příčin snadno pochopitelných s opačnou polaritou. Vůbec můžeme vysloviti větu: „všechna kolem osy své se otáčející tělesa mají magnetické poly, jež nesplývají s poly rotace. Během postupného ochlazování mění polarita znamení své, tak že těleso žhavě-tekuté má opačnou polaritu tělesa pevného (pevným obalem opatřeného).“

Z toho vyplývá nutně magnetický vztah mezi zemí a sluncem, k němuž přistupuje ještě prostřední vliv působící mechanicky, kterýž má za následek proměnu vnitřních proudů pod povrchem země. Oba vlivy jsou současné, a z toho se vysvětluje současnost *zemětřesení, magnetických potržek a polárních září.*

Dále vidíme, že každá příčina, která mění periodicky magnetický stav slunce, musí míti za následek též i proměnu magnetického stavu země se stejnou periodou. Takovou příčinu spatřujeme v periodickém stoupání a ubývání počtu skvrn slunečních. Skvrny ty jsou překážkou pro volný pohyb plynových proudů na povrchu slunce, tím stává se zpátečný pohyb proudů těch vzhledem k spodním částem rychlejším, a tudíž se zvýšuje intensita galvanických proudů pohybem tím spůsobených, t. j. *magnetický stav slunce.* Viděli jsme již dříve, že v době největšího množství skvrn slunečních denní odchylky magnetky jsou též největší, a že se vůbec všechny magnetické zjevy co do kvantity stupňují.

Rovněž jest pomocí četných pozorování stvrzena souvislost mezi náhlými převraty na povrchu slunečním, jaké zvláště v novější době často se pozorují, a při kterých se často vyvržené částice hmotné až na půl poloměru slunečního od povrchu slunce vzdalují a mezi podobnými převraty magnetických poměru na zemi, jež se nám jeví v intensivních potržkách, t. zv. *magnetických bouřích.*

Jiný vliv magnetický vykonávaný sluncem na zemi jeví se v periodě rotace sluneční, obrážející se v úkazech magnetických. Poloha magnetických polů slunce mění se během každé rotace, a tím se onen vliv úplně vysvětluje.

Ony proudy na povrchu slunce jsou možny jen v tom případě, když není povrch slunce stejně teplý, když na něm existují na př. dva poly nejmenší teploty. Zöllnerova hypothesa vyžaduje tudíž rozdíly v teplotě sluneční, jež by se musily jeviti v rozličném vyzařování různých částí povrchu slunečního Jest tedy zvláštní podporou uvedené hypothese, že byl skutečně rozdíl takový nalezen, a to *D'Arrestem*, ředitelem hvězdárny Kodaňské, *) v obšírném pojednání, a dříve již částečně *Secchim*, *Carlinim* a *Nervanderem*. Objevilo se na př. že rozdíl v střední teplotě pařížské v těch případech, kdy slunce obrací k zemi svůj nejteplejší a svůj nejstudenější poledník, obnáší 0°,604 C. v Paříži; tentýž rozdíl jest pro Milán 0°,712 C.

Ony proudy plynové, jež dle Zöllnerovy hypothese musí panovati na povrchu slunce, prozrazují se dle nejnovějších pozorování *Secchi-ho* tvarem protuberancí, jichž hořejší část směřuje k polu nejmenší teploty.

Z toho stručného přehledu theorie Zöllnerovy poznáváme, že uvádí na společný princip velké množství úkazů nejen magnetických nýbrž i jiných, spadajících v obor astrofysiky; toť ale přední podmínka každé dobré theorie. Důkladnější hlavně *numerické* propracování musí okázati, zda-li theorie ta jest více než duchaplný nápad. **)

---

*) Über die ungleiche Wärmevertheilung auf der Sonne, Verh. der kön. sächs. Ges. d. Wiss. 1853.

**) Slíbený v předešlém čísle přehled čelnějších spisů jednajících o zemském magnetismu bude uveřejněn v lit. věst. příštího ročníku.

O symbolech analytické geometrie a jich upotřebení.

(Píše *K. Zahradník.*)

(Pokračování.)

11. Častěji zmínili jsme se dříve o páru přímek, vyjadřujíce jej dvěma rovnicemi, totiž rovnicemi dvou přímek, z nichž se zmíněný pár skládal. Položíme si nyní za úkol vyjadřiti taký pár přímek rovnicí jedinou.

Jsou-li $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ rovnice dvou přímek, nutno jejich součin

$$P_1 P_2 = 0 \tag{14}$$

považovati za rovnici páru přímek; neb souřadnice každého bodu, jenž na jedné neb na druhé přímce leží, vyhovují této rovnici a naopak, musí všechny body, jejichž souřadnice rovnici (14) vyhovují, buď na přímce $P_1 = 0$ neb $P_2 = 0$ ležeti. *) Rovnici páru přímek tedy obdržíme co součin rovnic přímek tohoto páru.

Dané-li rovnice dvou přímek ve tvaru

$$P_1 - \lambda P_2 = 0, \quad P_1 - \mu P_2 = 0,$$

bude rovnice tohoto páru přímek

$$P_1^2 - (\lambda + \mu) P_1 P_2 + \lambda \mu P_2^2 = 0,$$

aneb obecně, položíme-li

$$\lambda + \mu = -\frac{B}{A}, \quad \lambda\mu = \frac{C}{A},$$

$$A P_1^2 + B P_1 P_2 + C P_2^2 = 0 \tag{15}$$

Jiný pár přímek

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = 0, \quad P_1 - \mu_1 P_2 = 0,$$

procházejících týmž bodem $(P_1 P_2)$, bude dán rovnicí

$$A_1 P_1^2 + B_1 P_1 P_2 + C_1 P_2^2 = 0 \tag{16}$$

kde $$\lambda_1 + \mu_1 = -\frac{B_1}{A_1}, \quad \lambda_1\mu_1 = \frac{C_1}{A_1}.$$

Podmínka, by jeden pár přímek dělil harmonicky druhý pár, jest (dle rov. (6), pag. 177.)

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1 \mu_1 = 0,$$

*) Viz Hesse Vorlesungen pg. 65.

kterážto rovnice po dosazení hodnot za $\lambda\, \mu, \ldots$ přejde v:

$$A_1\, C - \tfrac{1}{2} B_1\, B + C_1\, A = 0. \tag{17}$$

Rovnice (15) při proměnných koëfficientech A, B, C představuje nám veškeré páry přímek, jež harmonicky dělí určitý pár přímek, stává-li mezi oněmi koefficienty lineárné rovnice:

$$Aa + Bb + Cc = 0.$$

Dle výměru involuce (čl. 7) tvoří tři takové páry involuci přímek.*) Tak na př. tvoří páry přímek (15) a (16) a třetí pár přímek, daný rovnicí:

$$A_2\, P_1{}^2 + B_2\, P_1\, P_2 + C_2\, P_2{}^2 = 0 \tag{18}$$

involuci, lze-li tři veličiny a, b, c tak určiti, by vyhověly následujícím třem rovnicím:

$$\begin{aligned} A\, a + B\, b + C\, c &= 0, \\ A_1 a + B_1 b + C_1 c &= 0, \\ A_2 a + B_2 b + C_2 c &= 0. \end{aligned}$$

Z theorie determinant známe, že

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

z čehož soudíme že, dají-li se tři veličiny a, b, c tak určiti, že vyhoví posledním třem rovnicím, též jiné tři veličiny α, β, γ, se nalézti dají, které vyhovují následujícím třem rovnicím:

$$\begin{aligned} A\, \alpha + A_1 \beta + A_2 \gamma &= 0, \\ B\, \alpha + B_1 \beta + B_2 \beta &= 0, \\ C\, \alpha + C_1 \beta + C_2 \gamma &= 0, \end{aligned}$$

kteréžto tři rovnice též podmínku involuce vyjadřují.

---

*) Máme-li na př. kuželosečku se středem, jejíž rovnice jest

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 = a_{33}\,,$$

bude rovnice dvou průměrů združených

$$(y - x\, tg\, \Theta)\, [(y\, (a_{12} + a_{22}\, tg\, \Theta) + x\, (a_{11} + a_{12}\, tg\, \Theta)] = 0$$

aneb násobí-li se

$$y^2\, (a_{12} + a_{22}\, tg\, \Theta) + xy\, (a_{71} - a_{22}\, tg^2\, \Theta) - x^2\, tg\, \Theta\, (a_{11} + a_{12}\, tg \Theta) = 0.$$

Rovnice páru asymptot (buď při hyperbole realných neb imaginárných při ellipse) jest pak $a_{22}\, y^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{11}\, x^2 = 0$.

Coefficienty těchto rovnic vyhovují rovnici (17) neodvisle na úhlu Θ z čehož plyne, že asymptoty rozdělují libovolný pár sdružených průměrů harmonicky. Sdružené průměry tvoří tedy *involuci paprskovou.*

Rovnice uvedené podávají nám následující větu:

Tři páry přímek, procházejících týmž bodem a daných rovnicemi (15, 16, 18), tvoří involuci, dají-li jejich rovnice násobené stálými činiteli za součet identicky nullu.

II.

12. Přistupmež nyní k upotřebení daných vět, z nichž zjevno bude, jakých výhod nám ono zkrácené označení přímky poskytuje.

Má se určiti podmínka, vedle které tři příčky vedené vrcholi daného trojúhelníka se protínají v bodě jediném.

Budiž $a_1\, a_2\, a_3$ daný trojúhelník; rovnice jeho stran $a_1\, a_2$, $a_2\, a_3$, $a_3\, a_1$ buďtež $P_3 = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, rovnice pak příček procházejících vrcholi $a_1\, a_2\, a_3$ budou posloupně:

$$P_2 - \lambda_1\, P_3 = 0 \equiv Q_1$$
$$P_3 - \lambda_2\, P_1 = 0 \equiv Q_2$$
$$P_1 - \lambda_3\, P_2 = 0 \equiv Q_3$$

Znásobíme-li druhou rovnici λ_1, třetí pak $\lambda_1\, \lambda_2$ a sečteme-li je, obdržíme

$$(1 + \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3)\, P_2 \equiv 0 \equiv Q_1 + \lambda_1\, Q_2 + \lambda_1\, \lambda_2\, Q_3$$

tedy

$$\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 = 1 \qquad (1)$$

neb přejdeme-li ku geometrickému významu coefficientu λ (čl. 4. pag. 175), obdržíme:

$$\frac{\sin(P_2\, Q_1)}{\sin(P_3\, Q_1)} \cdot \frac{\sin(P_3\, Q_2)}{\sin(P_1\, Q_2)} \cdot \frac{\sin(P_1\, Q_3)}{\sin(P_2\, Q_3)} = 1 \qquad (2)$$

Rovnici tu v jinou změniti můžeme, nahradíme-li sinusy úseky na stranách. Označíme-li průsek $(Q_1\, P_1) = b_1$, $(Q_2 P_2) = b_2$ $(Q_3\, P_3) = b_3$,*) bude

$$\frac{a_1\, b_3}{a_2\, b_3} = \frac{a_2\, a_3 \,.\, \sin(P_2\, Q_3)}{a_1\, a_3 \,.\, \sin(P_1\, Q_3)}$$
$$\frac{a_2\, b_1}{a_3\, b_1} = \frac{a_3\, a_1 \,.\, \sin(P_3\, Q_1)}{a_2\, a_1 \,.\, \sin(P_2\, Q_1)}$$
$$\frac{a_3\, b_2}{a_1\, b_2} = \frac{a_1\, a_2 \,.\, \sin(P_1\, Q_2)}{a_3\, a_2 \,.\, \sin(P_3\, Q_2)}$$

*) Příslušný výkres snadno si každý sám sestaví.

Znásobíme-li tyto rovnice, ohdržíme vzhledem k rovnici (2):

$$a_1 b_3 . a_2 b_1 . a_3 b_2 = a_2 b_3 . a_3 b_1 . a_1 b_2,$$

známou to větu Cevovu.

Z rovnice (1) plyne pak dále:

α) Přímky rozpolovací vnitřní úhly trojúhelníku daného, protínají se v bodě jediném; neb $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

β) Přímky rozpolovací dva zevnější a jeden vnitřní úhel trojúhelníku daného protínají se v bodě jediném, neb v tomto případě jsou dvě λ rovné -1, třetí pak $+1$.

γ) Kolmice z vrcholů na základnice spuštěné protínají se v bodě jediném; neb obecně jest

$$\lambda_3 = \frac{sin\,(P_1 Q_3)}{sin\,(P_2 Q_3)}.$$

Stojí-li $Q_3 \perp P_3$, bude $\sphericalangle (P_1 Q_3) = 90^0 - \alpha_2$; označíme-li úhel ve vrcholi a_2 písmenem α_2, bude tedy

$$sin\,(P_1 Q_3) = cos\,\alpha_2$$
$$sin\,(P_2 Q_3) = cos\,\alpha_1,$$

pročež

$$\lambda_3 = \frac{cos\,\alpha_2}{cos\,\alpha_1};$$

podobně obdržíme pro λ_1 a λ_2 cyklickou záměnou přípon

$$\lambda_1 = \frac{cos\,\alpha_3}{cos\,\alpha_2},\quad \lambda_2 = \frac{cos\,\alpha_1}{cos\,\alpha_3}.$$

δ) Přímky spojující vrchole trojhranu se středy stran protilehlých (těžné přímky) protínají se v bodě jediném. Neb

$$\lambda_3 = \frac{sin\,(P_1 Q_3)}{sin\,(P_2 Q_3)} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$$

Značí-li b_3 střed strany $a_1\,a_2$, podobně b_1, b_2 středy stran ostatních, bude

$$\varkappa_1 = a_2 b_3\, sin\,\alpha_2,$$
$$\varkappa_2 = a_1 b_3\, sin\,\alpha_1,$$

tedy

$$\lambda_3 = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = \frac{sin\,\alpha_2}{sin\,\alpha_1}$$

neb $a_2 b_3 = a_1 b_3$.

Rovnice (2) jsme obdrželi pro involuci šesti přímek, *) z čehož plyne věta: „*Vedeme-li z daného bodu rovnoběžky ku*

* pg. 183. třeba pouze místo P psáti Q, a místo Q položiti S a přejde nám rovnice (2) v rovnici vyjadřující podmínku involuce. Na str. 183.

stranám a příčkám protínajícím se v bodě jediném, obdržíme involuci šesti přímek.“ Větu tu můžeme i následovně vyslovit: „*Dané čtyry body můžeme třikráte po dvou spojit a vedeme-li daným bodem k těmto párům rovnoběžky, tvoří tyto involuci.*“

Na základě této věty mohli bychom sestrojiti šestou přímku příslušnou ku třem párům přímek tvořících involuci, dáno-li pět přímek, ale seznáme později daleko jednoduší sestrojení, pročež toto pomíjíme.

13. *Jsou-li dva trojúhelníky v také poloze, že kolmice z vrcholů jednoho trojúhelníka na strany druhého spuštěné, jediným bodem probíhají, tu probíhají též kolmice z vrcholů druhého trojúhelníka na strany prvého trojúhelníka spuštěné bodem jediným.*

Označmež strany prvého trojúhelníku $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, druhého pak trojúhelníku $P_1' = 0$, $P_2' = 0$, $P_3' = 0$. Vrchole trojúhelníků označme písmenou a s příponou protilehlé strany, tedy $(P_1 P_2) = a_3$, $(P_3' P_2') = a_1'$, atd.

Rovnice přímky vedené vrcholem a_3 kolmo na stranu $P_3' = 0$ bude:

$$P_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_3') - P_2 \cos(\alpha_3' - \alpha_1) = 0, \tag{1}$$

neboť rovnice přímky procházející vrcholem a_3 čili průsekem přímek $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ jest

$$P - \lambda_3 P_2 = 0 = Q_3, \tag{2}$$

aneb v rozvedeném tvaru,

$$x(\cos\alpha_1 - \lambda_3 \cos\alpha_2) + y(\sin\alpha_1 - \lambda_3 \sin\alpha_2) - (p_1 - \lambda_3 p_2) = 0.$$

Má-li přímka Q_3 státi kolmo na přímce

$$P_3' \equiv 0 = x\cos\alpha_3' + y\sin\alpha_3' - p_3',$$

musí dle známé podmínky kolmosti dvou přímek býti

$$\cos\alpha_3'(\cos\alpha_1 - \lambda_3\cos\alpha_2) + \sin\alpha_3'(\sin\alpha_1 - \lambda_3\sin\alpha_2) = 0,$$

z kteréžto rovnice si můžeme λ_3 jednoznačně ustanovit a sice bude tu

$$\lambda_3 = \frac{\cos(\alpha_3' - \alpha_1)}{\cos(\alpha_2 - \alpha_3')} \tag{3}$$

---

vyskytují se v této rovnici chyby tiskové; třeba ji takto psáti, což ostatně z násobení oněch tří rovnic patrno:

$$1 = \frac{\sin(Q_3 S_1)\sin(Q_1 S_2)\sin(Q_2 S_3)}{\sin(Q_2 S_1)\sin(Q_3 S_2)\sin(Q_1 S_3)}$$

Položíme-li hodnotu za λ_3 do rovnice (2), obdržíme uvedenou rovnici (1).

Podobně najdeme rovnice kolmic s vrcholů a_1, a_2 na $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ spuštěných, které též ze symetrického označení cyklickou záměnou obdržíme a sice:

$$\begin{aligned} &P_2 \cos(\alpha_3 - \alpha_1') - P_3 \cos(\alpha_1' - \alpha_2), \\ &P_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_2') - P_1 \cos(\alpha_2' - \alpha_3). \end{aligned} \tag{4}$$

kdež

$$\lambda_1 = \frac{\cos(\alpha_1' - \alpha_2)}{\cos(\alpha_3 - \alpha_1')}, \quad \lambda_2 = \frac{\cos(\alpha_2' - \alpha_3)}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2')}.$$

Dle čl. 12, (1) probíhají tyto kolmice bodem jediným, platí-li $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, neb

$$\cos(\alpha_6 - \alpha_2') \cos(\alpha_2 - \alpha_3') \cos(\alpha_3 - \alpha_1') = \cos(\alpha_1' - \alpha_2) \cos(\alpha_2' - \alpha_3) \cos(\alpha_3' - \alpha_1), \tag{5}$$

kteroužto rovnici též obdržíme vyloučením P_1, P_2, P_3 z rovnic (1 a 4) ve tvaru determinantu:

$$\begin{vmatrix} 0, & \cos(\alpha_3 - \alpha_1'), & -\cos(\alpha_1' - \alpha_2) \\ -\cos(\alpha_2' - \alpha_3), & 0, & \cos(\alpha_1 - \alpha'_2) \\ \cos(\alpha_2 - \alpha_3'), & -\cos(\alpha_3' - \alpha_1), & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Záměnou α s α' obdržíme z (5) rovnici podmínečnou, by kolmice spuštěné z vrcholu trojúhelníku druhého na strany prvého probíhaly týmž bodem. Zaměníme-li tedy α s α' vidíme, že rovnice (5) se nemění, čímž uvedená věta stvrzena.

14. Prvé než přistoupíme k dalším příkladům, vyložíme ještě jednu větu, kterouž ihned velmi prospěšnou býti shledáme.

Známe-li tři přímky P_1, P_2, P_3, kteréž se neprotínají v bodě jediném, můžeme vždy rovnici jiné přímky P vyjádřiti pomocí symbolů daných tří přímek a to tvarem:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \tag{1}$$

Neb, je-li obecně

$$P_k \equiv x \cos\alpha_k + y \sin\alpha_k - p_k = 0,$$

tu přejde rovnice (1) ve

$$x(\lambda_1 \cos\alpha_1 + \lambda_2 \cos\alpha_2 + \lambda_3 \cos\alpha_3) + y(\lambda_1 \sin\alpha_1 + \lambda_2 \sin\alpha_2 + \lambda_3 \sin\alpha_3) - (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3) = 0,$$

kterážto rovnice nám bude představovati rovnici přímky P, položíme-li

$$\lambda_1 \cos\alpha + \lambda_2 \cos\alpha_2 + \lambda_3 \cos\alpha_3 = \cos\alpha,$$
$$\lambda_1 \sin\alpha_1 + \lambda_2 \sin\alpha_2 + \lambda_3 \sin\alpha_3 = \sin\alpha,$$
$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_2 p_3 = p.$$

Z těchto tří rovnic můžeme ale λ_1, λ_2, λ_3 vždy určiti předpokládáme-li, že neprochází dané tři přímky bodem jediným. Podobně jako v čl. 9. můžeme tuto větu následovně vyjádřiti:

Známe-li čtyři přímky $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, $P_4 = 0$, můžeme nalézti čtyry činitele λ té vlastnosti, že identicky bude

$$\lambda P + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0.$$

Tato rovnice nám totiž vyjadřuje, že pod výrazem $-\lambda P$ vyrozumívati máme výraz $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$. Princip tento objasníme několika příklady :

15. *Mají-li dva trojúhelníky takovou polohu, že průsečíky příslušných stran leží na přímce, tu prochází přímky, jež spojují příslušné vrchole těchto trojúhelníků bodem jediným.*

Dva trojúhelníky v takové poloze*) nazýváme homologické, perspectivické, neb collineární, přímku, na které se příslušné strany protínají, osou homologie, atd. a bod, jímž procházejí přímky spojující vrchole, středem homologie atd.

Strany prvého trojúhelníka buďtež $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ a přímka, ve které se příslušné strany trojúhelníka protínají budiž dána rovnicí

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \equiv Q. \qquad (1)$$

Druhého trojúhelníka strana $\overline{b_2 b_3}$**) prochází průsečíkem c_1 přímky Q s příslušnou stranou $\overline{a_2 a_3} = P_1$ neb dle podmínky protínají se strany $\overline{a_2 a_3}$ a $\overline{b_2 b_3}$ v bodě c_1, jenž leží na Q; tudíž můžeme psáti rovnici přímky $\overline{b_2 b_3}$ dle čl. 3. ve tvaru

$$Q - \mu_1 P_1 = 0;$$

Dokud μ libovolné, značí nám tato rovnice dle dřívějšího svazek paprsků, jehož vrchol $(Q P_1)$.

Za určitou hodnotu $\mu = \mu_1$, obdržíme určitý paprsek tohoto svazku, jenž bude totožný s prodloužením strany trojúhelníka

---

*) Porovnej kapitolu VI. pg. 62. Tato věta i se svou reciprokou větou připisuje se *Desarguesovi* (1593—1662). *Poncelet* pojmenoval dva trojúhelníky v také poloze *homologickými* (podobně i pojmenování osa a střed homologie od něho); *Möbius* nazývá dva trojúhelníky v také poloze *collinearnými*, *Weyr* pak *perspektivickými*.

**) Příslušný výkres nechť si laskavý čtenář sám vyvede.

$\overline{b_2 b_3}$, pročež pak (2) bude rovnicí strany $b_2 b_3$. Podobně rovnicemi stran $b_3 b_1$ a $b_1 b_2$ budou

$$Q - \mu_2 P_2 = 0 \tag{3}$$

$$Q - \mu_3 P_3 = 0 \tag{4}$$

Odečteme-li rovnici (2) od (3), obdržíme

$$\mu_1 P_1 - \mu_2 P_2 = 0. \tag{5}$$

Přímka rovnici (5) vyjádřená prochází průsekem stran $\overline{b_2 b_3}$ a $\overline{b_3 b_1}$ tedy vrcholem b_3; dle tvaru rovnice (5) poznáváme, pak, že též probíhá průsečíkem stran P_1 a P_2, tedy a_3.

Dle uvedeného jest tedy (5) rovnice přímky

$$\overline{a_3 b_3} \ \ldots \ \mu_1 P_1 - \mu_2 P_2 = 0;$$

podobně

$$\overline{a_1 b_1} \ \ldots \ \mu_2 P_2 - \mu_3 P_3 = 0.$$

$$\overline{a_2 b_2} \ \ldots \ \mu_3 P_3 - \mu_1 P_1 = 0.$$

Součet těchto tří rovnic rovná se identicky nulle, tedy $\overline{a_3 b_3}$, $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_2 b_2}$ probíhají bodem jediným.

16. *Dán budiž trojúhelník $a_1\ a_2\ a_3$, proložme vrcholi tři příčky, protínající se v bodě jediném a vyšetřme vlastnosti tohoto skupení přímek.*

Rovnice stran $\overline{a_2 a_3}$, $\overline{a_3 a_1}$, $\overline{a_1 a_2}$ buďtež posloupně $P_1 = 0$ $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, rovnice pak příček $\overline{a_3 b_3}$, $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_2 b_2}$ budou posloupně

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 &= 0 \equiv Q_3, \\ \lambda_2 P_2 - \lambda_3 P_3 &= 0 \equiv Q_1, \\ \lambda_3 P_3 - \lambda_1 P_1 &= 0 \equiv Q_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Spojme paty příček b_1, b_2, b_3, čímž obdržíme tři přímky $b_1 b_2 = R_3$, $b_2 b_3 = R_1$, $b_3 b_1 = R_2$. Tyto přímky protínají protilehlé strany trojúhelníka v bodech

$$c_1 = (R_1\ P_1),\ c_2 = (R_2\ P_2),\ c_3 = (R_3\ P_3).$$

Veďme dále přímky $\overline{a_1 c_1} = T_1$, $\overline{a_2 c_2} = T_2$, $\overline{a_3 c_3} = T_3$. Rovnice přímek R, S, T můžeme nyní dle uvedeného principu vyjádřiti pomocí symbolů přímek P.

Přímka $R_1 = b_2 b_3$ procházející bodem b_2 (průsečíkem přímek $P_2 = 0$ a $Q_2 = 0$) a bodem b_3 (průsečíkem přímek $P_3 = 0$ a $Q_3 = 0$) vyjádřena jest rovnicí

$$\lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 - \lambda_1 P_1 = 0 \equiv R_1 \tag{2}$$

neb vzhledem k rovnicím (1) můžeme rovnici (2) dáti tvar

$$\lambda_2 P_2 - Q_2 = 0,$$
$$\lambda_3 P_3 - Q_3 = 0.$$

z nichž prvá nám ukazuje, že přímka R prochází průsekem přímek P_2 a Q_2, tedy bodem b_2, druhá pak že prochází též průsekem přímek P_3 a Q_3; tedy skutecně zní, jak svrchu uvedeno, rovnice přímky $b_2 b_3$.

$$R_1 \equiv \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 - \lambda_1 P_1 = 0,$$

a podobně přímky

$$\overline{b_3 b_1} \quad R_2 \equiv \lambda_3 P_3 + \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 = 0$$
$$\overline{b_1 b_2} \quad R_3 \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 - \lambda_3 P_3 = 0$$

Přímky tyto protínají protilehlé strany trojuhelníka v bodech téže přímky S, jejíž rovnice jest

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \equiv S \qquad (4)$$

Důkaz lze snadně provésti následovně: $R_1 - \lambda P_1 = 0$ jest rovnice svazku paprsků, jehož vrchol jest $(R_1 P_1) = c_1$; pro $\lambda = -2\lambda_1$ obdržíme rovnici určitého paprsku tohoto svazku a sice, přihlížíme-li k rovnici (2)

$$\lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 - \lambda_1 P_1 + 2\lambda_1 P_1 = 0,$$

kterážto rovnice po redukci úplně s rovnicí $S = 0$ se shoduje. Jest tedy S určitý paprsek svazku

$$R_1 - \lambda P_1 = 0,$$

pročež prochází též jeho vrcholem c_1.

Důkaz totožně se vede pro bod c_2 a c_3; leží tedy body c_1, c_2, c_3, na přímce S, jejíž rovnice jest (4).

Zbývá nám ještě rovnice přímky $T = \overline{ac}$ pomocí symbolů přímek P vyjádřiti. Rovnice přímky $T_3 = a_3 c_3$ zní:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0 \equiv T_3 \qquad (5)$$

neb z tvaru jejího vysvítá, že prochází bodem $a_3 = (P_1 P_2)$; mimo to můžeme tuto rovnici psáti ve tvaru

$$T_3 \equiv R_3 + \lambda_3 P_3 = 0,$$

z čehož patrno, že přímka T_3 prochází průsekem přímek $(R_3 P_3)$ totiž bodem c_3.

Jest tedy rovnice přímky

$$\overline{a_3 c_3} \quad T_3 \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0,$$

podobně přímky

$$\overline{a_1 c_1} \quad T_1 \equiv \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0,$$
$$\overline{a_2 c_2} \quad T_2 \equiv \lambda_3 P_3 + \lambda_1 P_1 = 0.$$

Nyní máme rovnice veškerých přímek našeho obrazce vyjádřené symboly přímek základního trojhranu. Pohledneme-li na obrazec, jenž se snadno podlé předešlého udání sestrojí, vidíme, že *každým vrcholem trojúhelníka probíhají čtyry přímky a rovnice jeví nám jejich harmonickou vlastnost.*

Vezmeme na př. vrchol a_1. jímž procházejí přímky $\overline{a_1 a_3}$, $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_1 c_1}$, jsou rovnice jejich posloupně

$$P_2 = 0, \quad \lambda_2 P_2 - \lambda_3 P_3 = 0 \equiv Q_1,$$
$$P_3 = 0, \quad \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \equiv T_1,$$

a dle čl. 4. tvoří tyto čtyry přímky harmonický svazek, jelikož

$$(P_2 P_3 Q_1 T_1) = -1.$$

Podobně obdržíme pro vrchole a_2, a_3

$$\begin{aligned}(P_3 P_1 Q_2 T_2) &= -1, \\ (P_1 P_2 Q_3 T_3) &= -1,\end{aligned} \tag{7}$$

Porovnáme-li rovnice (1) a (6), vidíme, že tři přímky T_1, $T_2 Q_3$, podobně $T_2 T_3 Q_1$, $T_3 T_1 Q_2$ probíhají jediným bodem. Z vyšetřování uvedeného plynou pak následující vzájemné věty:

1. Vedeme-li v rovině trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$ libovolnou příčku S, kteráž seče strany trojúhelníku v bodech $c_1 c_2 c_3$ a stanovíme-li si na každé bod harmonicky sdružený k bodu průsečnému příčky se stranou vzhledem k vrcholům trojúhelníku, tu procházejí přímky spojující tyto harmonicky sdružené body s protilehlým vrcholem týmž bodem O.

2. Vedeme-li v rovině trojúhelníku libovolnou příčku a volíme-li na stranách trojúhelníku dva body, které tyto strany s příčkou harmonicky dělí, pak leží tyto dva body s průsečíkem strany třetí s příčkou na téže přímce.

Pakli jest příčka nekonečně vzdálená, přejdou tyto dvě věty v následující:

α) *Spojíme-li v trojúhelníku středy stran s protilehlými vrcholi, procházejí spojující přímky bodem jedinym.*

β) *Přímka spojující v trojúhelníku středy dvou stran jest ku třetí straně rovnoběžná.*

Nebude snad od místa, připojím-li některé zvláštní případy uvedených rovnic, kterýchž při řešení různých úloh lze upotřebiti Přihlížejíce ku čl. 12.γ, a ku rovnicím (3) tohoto čl., obdržíme

$$P_1 \cos a_1 + P_2 \cos a_2 + P_3 \cos a_3 = 0$$

co rovnici přímky, kteráž spojuje dvě paty výšek trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$; dále, že

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 = 0$$

značí rovnici přímky, na níž leží průseky přímek spojujících podvojně paty výšek daného trojúhelníku s protilehlými stranami. Podobně

$$P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 - P_3 \sin \alpha_3 = 0$$

jest rovnice přímky spojující středy dvou stran trojúhelníka; tyto přímky protínají protilehlé strany v bodech ležících na přímce, jejíž rovnice zní

$$P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 = 0;$$

rovnice tato však značí nám přímku nekonečně vzdálenou, čímž též věta výsledná (β) dokázána.

17. Harmonické vlastnosti čtyrúhelníka úplného plynou zcela ze čl. 16; neb přihlížíme-li místo k trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$, ku čtyrúhelníku $a_1 a_2 c_1 c_2$, budou body a_3, m c_3 průseky diagonal, tedy body diagonálnými. Tu ihned dokázati můžeme, že *paprsky diagonalnými body procházející jsou harmonické.**) Vezměmež na př. diagonalný bod a_3, jímž probíhají paprsky

$$\begin{array}{ll}
\overline{a_3 a_2} & P_1 = 0, \\
\overline{a_3 a_1} & P_2 = 0, \\
\overline{a_3 b_3} & \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 = 0 \equiv Q_3, \\
\overline{a_3 c_3} & \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0 \equiv T_3.
\end{array}$$

Tvar těchto rovnic (čl. 4) podává nám současně důkaz věty uvedené. Této vlastnosti úplného čtyrúhelníku upotřebuje se ku sestrojení čtvrtého harmonického paprsku, dané-li jsou tři paprsky.

---

*) Kapitola III. pg. 32.

O evolutách křivek rovinných.

(Sděluje dr. *Emil Weyr.*)

1. Evolutou dané rovinné křivky C_n n-tého stupně nazýváme křivku E zahalující veškeré normály dané křivky C_n; křivka E jest též místo středů křivosti dané křivky C_n. Neb dvě nekonečně blízké normály křivky C_n co nekonečně blízké tečny evoluty E protínají se v příslušném bodu styku, kterýžto průsek však, jak známo, jest též středem křivosti pro C_n.

Stupeň evoluty E bude tudíž počet středů křivosti křivky C_n na libovolné přímce se nalezajících; třída evoluty E pak jest počet libovolným bodem procházejících normál křivky C_n.

2. Pootočíme-li křivku C_n kolem libovolného bodu c o nekonečně malý úhel, tu každý bod B křivky C_n popíše nekonečně malý oblouk kruhový poloměru cB a středu c. Jest-li však B pata s bodu c na křivku C_n spuštěné normály, pak onen nekonečně malý oblouk jest část tečny křivky C_n v bodu B a nová poloha bodu B náleží tudíž původní poloze křivky C_n. Jelikož po onom nekonečně malém pootočení obdržíme s křivkou C_n shodnou této křivce nekonečně blízkou křivku, která tudíž jest též n-tého stupně; a poněvadž všeobecně dvě křivky stupňů p, q se v pq bodech protínají, tu obdržíme pro náš případ $n.\,n = n^2$ průseků obou nekonečně blízkých poloh křivky C_n. Průseky ty jsou pak paty s bodu c na křivku C_n spuštěných normál.

„*Každým bodem prochází n^2 normál křivky n-tého stupně.*“

„*Evoluta křivky n-tého stupně jest n^2-té třídy.*“

„*Každý bod v rovině křivky n-tého stupně jest středem n^2 kruhů křivky se dotýkajících.*“

Všecky tyto tři věty praví patrně v různých formách totéž.

3. „*Počet n^2 bodem procházejících normál zmenší se pro každý dvojný bod křivky C_n o dvě jednice.*“

Všeobecná křivka n-tého stupně nemá bodů dvojných.

Předpokládejmež nyní, že C_n v δ má bod dvojný, kterýmž nechť procházejí dvě větve A, B, a buďtež A' B' těmto větvím odpovídající (nekonečně blízké) větve křivky, kterouž z C_n obdržíme nekonečně malým pootočením kolem libovolného bodu c. Tu pak protíná na př. větev A větev B' v bodě bodu δ nekonečně blízkém aniž by $c\delta$ byla normála křivky C_n; totéž platí o větvích A' a B. Takovým spůsobem shrnuty jsou v δ dva průseky dvou nekonečně blízkých poloh křivky C_n, aniž by (všeobecně) $c\delta$ byla normála křivky C_n. Počet zbývajících průseků, které zavdávají podnět k normálám bodem c procházejícím, jest tudíž pouze $n^2 - 2$. Tím věta dokázána.

Má-li C_n δ bodů dvojných, bude počet normál libovolným bodem c procházejících $(n^2 - 2\delta)$.

„*Každým bodem prochází* $(n^2 - 2\delta)$ *normál křivky n-tého stupně opatřené* δ *body dvojnými. Evoluta takové křivky jest pouze* $(n^2 - 2\delta)$*-té třídy.*“

4. Největší počet dvojných bodů, který se může vyskytnouti při křivce n-tého stupně, aniž by se tato rozpadla na křivky stupňů nižších, jest

$$\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

V tomto případě jest křivka racionální.

Třída evoluty takové křivky jest tudíž

$$n^2 - (n-1)(n-2) = 3n - 2.$$

„*Každým bodem prochází* $(3n - 2)$ *normál racionální křivky n-tého stupně.*“

„*Evoluta racionální křivky n-tého stupně jest třídy* $(3n-2)$“.

5. Pro racionální křivky n-tého stupně můžeme se i jinou cestou týchž a ještě dalších výsledků dodělati.

Mohouce na takových křivkách, (jejichž body se nechají určiti hodnotami jediné proměnné co funkce racionální) v úvahu bráti soustavy bodů buď průmětné aneb souvislosti složitější (víceznačné), mysleme si soustavu kruhů společného středu c.

Každý kruh středu c dotýkající se křivky K určuje bodem c procházející normálu křivky C_n. Každý kruh naší soustavy co křivka 2. stupně protíná křivku C_n v $2n$ bodech. Veškeré skupeniny takových průseků tvoří involuci $2n$-tého stupně; neb jedním bodem jest celá taková skupenina určena, poněvadž jediný bod určuje úplně jím procházející kruh středu c. Involuce na křivce C_n takto povstavší má

$$2(2n-1) = 4n - 2$$

bodů dvojných. Poněvadž však nekonečně vzdálená přímka, co přímka dvojitá představuje též kruh naší koncentrické soustavy, tu musíme n nekonečně vzdálených bodů křivky C_n považovati za právě tolik dvojných bodů naší involuce, tak že tedy zbývá $3n - 2$ dvojných bodů v konečnu, z nichž každý jest bodem styku křivky s kruhem středu c a tudíž patou kolmice s bodu c na křivku C_n spuštěné. Bodem c tedy v skutku prochází $(3n - 2)$ normál racionální křivky C_n n-tého stupně.

6. Jest-li s bodem návratu racionální křivky C_n, tu pak bodem tím procházející kruh středu c protíná v s křivku C_n v dvou nekonečně blízkých bodech, aniž by $\overline{cs}$ byla normála křivky C_n. Každý bod návratu jest tedy dvojným bodem takovým naší involuce, který neurčuje bodem c procházející normálu.

Každý bod návratu zmenšuje tudíž počet normál o jedničku. Totéž platí o křivce neracionální, neb takovou si vždy v nejbližším sousedství bodu s můžeme mysleti co křivku racionální (jiného stupně). Jelikož bod návratu z bodu dvojného povstane tím, že tečny tohoto splynou v jedinou přímku a jelikož bod dvojný již co takový zmenšuje počet normál o dvě tu vidíme, že:

„*Každý bod návratu zmenšuje počet normál daným bodem procházejících a tedy i třídu evoluty o tři jednice.*“

Má-li tudíž libovolná křivka C_n n-tého stupně δ bodů dvojných a s bodů návratu pak počet normál libovolným bodem procházejících aneb třída evoluty, jest $(n^2 - 2\delta - 3s)$.

7. Počet normál neb třída evoluty se i tím zmenší, prochází-li křivka C_n imaginárními body kruhovými v nekonečnu.

Má-li na př. racionální křivka C_n v každém z obou kruhových bodů r-násobný bod, pak každý kruh koncentrické soustavy protíná pouze v $(2n - 2r)$ bodech, tak že involuce má pouze $2(2n - 2r - 1)$ bodů dvojných, ku kterým též náleží $n - 2r$ bodů, v nichž mimo body kruhové nekonečně vzdálená přímka křivku C_n protíná. V konečnu se pak nalezá pouze:

$$4n - 4r - 2 - n + 2r = 3n - 2r - 2$$

aneb

$$(3n - 2) - 2r.$$

Kruhové body, náleží-li křivce co body r-násobné zmenší tudíž počet normál bodem procházejících aneb třídu evoluty o $2r$ jedniček. Je-li n číslo sudé pak největší možná hodnota pro r jest $\frac{n}{2}$ a nejnižší třída evoluty racionálních křivek sudého stupně n jest tudíž $3n - 2 - n = 2(n - 1)$.

Je-li n číslo liché, pak největší hodnota pro r jest $\frac{n-1}{2}$ a nejnižší třída evoluty racionálních křivek lichého stupně n jest tudíž $3n - 2 - n + 1 = 2n - 1$.

Při tom předpokládáme, že v konečnu nestává bodů návratu. Kdyby takových bodů v konečnu bylo s, pak by nejmenší stupně evolut byly $2(n-1) - s$ a $(2n - 1 - s)$ dle toho, je-li n číslo sudé neb liché.

8. Dotýká-li se základní křivka v bodu t nekonečně vzdálené přímky, pak lze každou bodem t' bodu t vzhledem ku kruhovým bodům harmonicky sdruženým bodem procházející přímku považovati za normálu křivky C_n.

Bod t tvoří tudíž co křivka první třídy část evoluty. Z toho soudíme:

„*Má-li základní křivka t styků s nekonečně vzdálenou přímkou, zmenší se počet normál bodem procházejících aneb třída evoluty o t jednotek.*“

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí.*)

Příklady spojek plnoměrně stejnoklonných.

50. *Calcit*, obr. 17. (v sešitu předešlém). Co prvotvar vyvoliž se onen stejnoklon, dle jehož ploch ten mineral se štípá, a kterýž má hrany $H = 105^\circ 5'$.

Na vyobrazeném tvaru jest $(h, d) = 142^\circ\, 32^1/_2{}'$, pročež $H = 180^\circ - 2\,(180^\circ - 142^\circ 32\,^1/_2{}') = 105^\circ 5'$ a tudíž náleží plocha h prvotvaru.

Dle polohy jest d plocha stejnoklonu polárních hran. Plochy d_n a $\underline{d}_n{}'$ náleží skalenoedrům, neb d_n přikrojuje polární a $\underline{d}_n{}'$ poboční hrany prvotvaru. Pro $\underline{d}\,'$ jest $H = 104^\circ 38'$, $D = 144^\circ 24'$, z čehož dle vzorce (16)

$$\frac{\cos\frac{1}{2}H}{\cos\frac{1}{2}D} = n' = 2$$

pročež $\underline{d}_n{}' = d_2$.

Plocha $\underline{O}_m'$ otupuje hrany H skalenoedru $\underline{d}_2$, proto leží v pásmu ploch $\underline{d}_2$.

Pro jednu plochu $\underline{d}_2$ jest $abc = \bar{1}20$,

pro druhou plochu $\underline{d}_2$ jest $a'b'c' = \bar{1}0\underline{2}$,

pro plochu $\underline{O}_m'$ jest $a''b''c'' = 1mm$,

pro kteréž hodnoty dá pásmová rovnice (viz všeobecnou krystallografii v ročníku I. 19.) $m' = 1$, pročež $\underline{O}_m' = \underline{O}_1$.

Plocha d_n má se skalenoedrem $\underline{d}_2$ vodorovné spojkové hrany, proto leží v pásmu 0, d_n, d_2.

Pro O jest $abc = 111$,

pro d_n jest $a'b'c' = 1n0$,

pro $\underline{d}_2$ jest $a''b''c'' = 02\bar{1}$,

pro kteréž hodnoty dá pásmová rovnice $n = 3$, pročež $d_n = d_3$.

Plocha $\underline{O}_m$ přikrojuje pobočný roh prvotvaru od hran a náleží tudíž ostrému obrácenému stejnoklonu; zároveň však přikrojuje tupější polární hrany skalenoedru d_3, pročež leží dvě plochy tohoto skalenoedru s plochou O_m v jednom pásmu.

Pro jednu plochu d_3 jest $abc = 031$.

pro druhou plochu jest $a'b'c' = 130$,

pro plochu $\underline{O}_m$ jest $a''b''c'' = mm\bar{1}$,

pro kteréž hodnoty dá pásmová rovnice

$$m = {}^3/_2, \text{ pročež } \underline{O}_m = O_{3/2}.$$

Plocha $\underline{O}_m''$ přikrojuje též pobočný roh prvotvaru; úklon její k ploše $\bar{d}$ jest $= 116^0 15'$, kdežto úklon plochy d k ose t jest $= (h, t)$, z čehož pro $cos\,(h, t) = cot\,\tfrac{1}{2} H \sqrt{\tfrac{1}{3}}$,

$$(h, t) = 63^0 45'.$$

Jelikož plocha $\underline{O}_m''$ uzavírá s pinaboidem O úhel

$$(\underline{O}_m'', \bar{O}) = 116^0 15' + 63^0 45' - 90^0,$$

jest $$(\underline{O}_m'', 0) = 90^0,$$

totiž plocha O_m'' stojí kolmo na O a náleží hranolu $\underline{O}_{1/2} = \underline{p}_1$.

Známky ustanovených ploch jsou tedy:

	h	d	$\underline{d}_2$	d_3	$\underline{O}_{1/2}$	$\underline{O}_1$	$\underline{O}_{3/2}$
dle Millera:	100	110	$02\bar{1}$	031	$11\bar{2}$	$11\bar{1}$	$33\bar{2}$
dle Naumanna:	$R.$	$-\tfrac{1}{2}R.$	$R3.$	$\tfrac{1}{4}R3.$	$\infty R.$	$-2R.$	$-\tfrac{5}{4}R.$

51. *Haematit z Elby*, obr. 18. (v sešitu předešlém). Plochy h berou se co plochy prvotvaru; $(h, h) = H = 86^0$, z čehož dle rovnice

$$cos\,(r, t) = 2\,cos\,\tfrac{1}{2} H \sqrt{\tfrac{1}{3}},\ (r, t) = 32^0 23'.$$

Plocha $O_{1/m}$ (ve výkresu byla známka její od rytce vynechána, leží u pólu trigonální osy) náleží tupému stejnoklonu; $(O_{1/m}, h) = 143^0 54'$, z čehož $(d, t) = 68^0 29'$ a dle rovnice

$$\frac{cot\,(r,t)}{cot\,(d,t)} = \frac{m+2}{m-1},$$

$m = 2$, tudíž $O_{1/m} = O_{1/2} = p$.

Plocha $O_{1/m'}$ (ve výkresu jest známka její od rytce vynechaná, jest to úzká ploška nad h) má k h úklon $= 165^0 51'$, z čehož $(d, t) = 46^0 32'$ a pak

$$m' = {}^{11}/_2 \text{ a tudíž } O_{1/m'} = O_{2/11}.$$

Plocha i (ve výkresu jest známka její od rytce vynechána, leží vedle $\bar{O}_{1/m}$) má vodorovné poboční hrany a náleží proto šestibokému jehlanci; zároveň má rovnoběžné hrany s nakloněnou úhlopříčkou prvtvoru pročež jest známka její $\bar{O}_{1/3} = i$.

Plocha $O_{1/m}$ náleží skalenoedru úhlopříčky; úklon její k h jest $= 163^0 42'$, pročež $\frac{1}{2} D = 163^0 42' - 90^0 = 73^0 42'$.

Z výkrojku $\frac{1}{2} D$, $\frac{1}{2} H$, T, v němž $(d, t = 32^0 23'$, $T = 60^0$, vychází

$$cos\,\tfrac{1}{2} H = cos\,(d, t)\,.\,sin\,\tfrac{1}{2} D\,.\,sin\,T - cos\,\tfrac{1}{2} D\,.\,cos\,T,$$

z čehož $\frac{1}{2} H = 55^0 51'$, načež dle rovnice

$$\frac{cos\,\frac{1}{2} H}{cos\,\frac{1}{2} D} = \frac{m-1}{2},$$

$m = 5$ a tedy $\bar{O}_{1/m} = \bar{O}_{1/5}$.

Známky celého tvaru jsou

	h	$O_{1/2}$	$O_{2/11}$	$\bar{O}_{1/5}$	$\bar{O}_{1/3}$.
dle Millera:	100	211	1121	$15\bar{1}$	$12\bar{1}$.
dle Naumanna:	R	$\frac{1}{3} R$.	$\frac{3}{5} R$.	$\frac{2}{5} R3'$.	$\frac{4}{3} P2$.

Příspěvek k theorii determinantů.

(Podává Dr. *F. J. Studnička.*)

Jak známo, jsou všechny případy velmi důležité, v nichž determinant stává se identicky nullou; pročež jest i neméně důležito všechny tyto případy znáti.

K těm, které se výslovně ve spisech, jednajících o determinantech, uvádějí, přidružiti sluší i následující dosud nikde zvláště nevytknuté.

1. *Hodnota determinantu rovná se 0, jest li poměr differencí neb rozdílů soulehlých prvků dvojích řad rovnoběžných stálým.*

2. *Hodnota determinantu rovná se 0, jestli poměr l-té difference $(l+1)$ní řady k m-té differenci $(m+1)$ní řady stálým*, při čemž difference tyto tvoří se v jednotlivých řadách tak, jakoby prvky jejich představovaly arithmetické řady.

Jak patrno, obsažena první poučka v druhé, jelikož z ní pro

$$l = m = 1$$

bezprostředně plyne. Za tou příčinou možná tedy obmeziti se na důkaz této poučky všeobecnější.

Jak známo,*) možná determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

převésti beze změny hodnoty buď na tvar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \delta a_{11} & \dots & \delta^{n-1} a_{11} \\ a_{21} & \delta a_{21} & \dots & \delta^{n-1} a_{21} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & \delta a_{n1} & \dots & \delta^{n-1} a_{n1} \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

zavedeme-li všeobecné označení

$$\delta^{k+1} a_{pq} = \delta^k a_{p,q+1} - \delta^k a_{p,q},$$

aneb na podobný tvar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ da_{11} & da_{12} & \dots & da_{1n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ d^{n-1} a_{11} & d^{n-1} a_{12} & \dots & d^{n-1} a_{1n} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

---

*) Viz *Studnička* „Nové poučky o determinanteh“. Časop. pro pěstov. math. a fys. Roč. I. pag. 204.

zavedeme-li příslušné označení obdobné

$$d^{k+1} a_{pq} = d^k a_{p+1,q} - d^k a_{p,q}$$

Z prvního i druhého vzorce jde patrné na jevo, že musí hodnota determinantu rovnati se 0, jakmile pro $k = 1, 2 \ldots n$

$$\frac{\delta^l a_{k1}}{\delta^m a_{k1}} = p \text{ neb } \frac{d^l a_{1k}}{d^m a_{1k}} = p;$$

neb toť známá vlastnost determinantu, že hodnota jeho rovná se 0, jak mile poměr soulehlých prvků dvou rovnoběžných řad jest stálým.

Co platí o l-tých a m-tých rozdílech, platí i o rozdílu prvním, čímž i poučka 1. jest odůvodněna.

Ostatně možná tuto jednodušší poučku i neodvisle od převodních vzorců (1) neb (2) dokázati.

Platí-li totiž o determinantu Δ podmínka v poučce (1) obsažená, že pro $k = 1, 2, 3, \ldots n$

$$\frac{a_{bk} - a_{dk}}{a_{pk} - a_{qk}} = p, \tag{3}$$

rozveďme tuto podmínku na dvě a sice pro libovolné d

$$a_{bk} = a_{dk} + pd_k. \tag{4}$$

$$a_{pk} = a_{qk} + d_k, \tag{5}$$

dosaďme pak za a_{bk} a a_{pk} hodnoty příslušná do determinantu Δ a odečtěme od prvků b-tého sloupce soulehlé prvky sloupce d-tého a podobně od prvků p-tého sloupce soulehlé prvky sloupce q-tého, načež vyloučením společného činitele p, který se v b-tém sloupci vyskytne, povstane nový determinant, v něž jest b-tý a p-tý sloupec totožný, za kteroužto příčinou hodnota determinantu rovná se 0.

Tento důkaz, zakládající se na poučce, že:

1. hodnota determinantu se nemění, připojíme-li k prvkům nějaké řady multipla soulehlých prvků řady rovnoběžné, a že
2. hodnota determinantu rovná se 0, jsou-li dvě řady jeho totožné, a že
3. společný faktor všech prvků nějaké řady jest společným faktorem celého determinantu,

tento důkaz možná nahraditi jiným, dosadí-li se do determinantu Δ za a_{bk} a a_{pk} hodnoty podmínkami (4) a (5) určené a rozloží-li se takto obdržený determinant podlé známého vzorce rozkladního; budeť tu

$$\Delta = \underset{a_b = a_d}{/} \ \underset{a_p = a_q}{/} \Delta + \underset{a_b = pd}{/} \Delta + \underset{a_p = d}{/} \Delta + \underset{a_p = d}{/} \ \underset{a_b = pd}{/} \Delta$$

kdež bude pro podmínku (4) a (5)

$$\underset{a_b = a_d}{/} \ \underset{a_p = a_q}{/} \Delta = 0,$$

podobně pro podmínku (4)

$$\underset{a_b = pd}{/} \Delta = 0,$$

pro podmínku (5) taktéž i

$$\underset{a_p = d}{/} \Delta = 0$$

a konečně i pro poučku (2) a (3).

$$\underset{a_p = d}{/} \ \underset{a_b = pd}{/} \Delta = p \ \underset{a_p = d}{/} \ \underset{a_b = d}{/} \Delta = 0,$$

z čehož jde na jevo, že v tomto případě tedy i součet všech členů rovná se 0 a tudíž

$$\Delta = 0,$$

jakž bylo dříve již dokázáno.

Jak patrno, možná první s počátku uvedenou poučku trojím spůsobem odůvodniti; který spůsob se má voliti, jedná-li se o soustavu nauky o determinantech, o tom rozhodne místo, na které se chce tato poučka do soustavy vložiti.

Úlohy.

I. Z mathematiky.

Úloha 41.

Do tak zvaných dědičných společností, jaké pojišťovna „Praha" zřizuje, vkládal by někdo 14 po sobě jdoucích let po 10 zl. a obdržel by konečně 250 zl.; jak by tu peníze vložené byly zúrokovány?

Úloha 42.

Velká osa ellipsy měří 12, parametr 6 délkových jednotek jak velká jest výstřednost a jak velký jest úhel, v němž se jeví velká osa s vrcholu malé osy?

Úloha 43.

Mají se určiti maxima a minima funkce nerozvinuté

$$f(x, y) \equiv x^4 - 2\,ay^3 - 3\,a^2 y^2 - 2\,a^2 x^2 + a^4 = 0$$

a vyložiti význam těchto výsledků, značí-li x a y pravoúhlé, souřadnice, rovnice předcházející tedy křivku rovinnou.

Úloha 44.

Mají se určiti zvláštní body plochy

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2 x^2 - b^2 y^2 + c^2 z^2 = 0.$$

Úloha 45.

Má se integrovati rovnice

$$y''' - 3\,y'' + y' - y = e^x.$$

II. Z fysiky.

Úloha 36.

Jak daleko by dojel parní vůz, který za 8 minut 1 míli urazí, kdyby se na vodorovné dráze náhle pára uzavřela, obnáší-li míra tření $\varrho = 0{\cdot}05$?

Úloha 37.

Parní vůz pohybuje se v oblouku, jehož poloměr jest $r = 99^m$; aby se nepřekotil, jakou rychlost nesmí přesáhnouti, leží-li těžisko jeho $1{\cdot}57^m$ vysoko a měří-li šířka kolejí $1{\cdot}5^m$?

Úloha 38.

Na skleněný hranol, jehož lomný úhel měří 62^0, dopadá v rovině kolmo na hranu postavené žlutý paprsek ($n = 1{\cdot}533$) tak, že uzavírá s kolmicí úhel $52^0\,30'$; jak se tu po vystoupení svém odchýlí od prvotního směru?

Úloha 39.

V středních bodech stran nepravidelného pětiúhelníku táhnou do vnitř směrem kolmo na strany jdoucím síly přiměřené délkám příslušných stran; kdy tu nastane rovnováha?

Úloha 40.

Při slavnosti Jungmannově v Praze vyšel dne 12. července průvod s pochodněmi o 9 hod. večer; bylo to ještě za soumraku občanského čili nic?

Úloha 41.

Mají se určiti pravoúhlé souřadnice těžiska čtyrúhelníku, jehož rohy určeny jsou souřadnicemi

$$\begin{array}{l|l|l|l|}
x_1 = 1 & x_2 = 3 & x_3 = 5 & x_4 = 7 \\
y_1 = 2 & y_2 = 4 & y_3 = -1 & y_4 = 3
\end{array}\;.$$

Věstník literární.

Pravé vyšel v známé elegantní úpravě B. G. Teubnerovské

LEHRBUCH DER ARITHMETIK UND ALGEBRA

FÜR LEHRER UND STUDIRENDE

VON

Dr. E. SCHRÖDER,

PROFESSOR AM PRO- UND REALGYMNASIUM IN BADEN-BADEN.

I. BAND.

Die sieben algebraischen Operationen.

Na 360 stránkách velkého oktávu vyloženy jsou se všemi možnými důvody algebraické výkony přímé i obrácené, kteréž na str. 119 takto jsou roztříděny:

Algebraische Operationen:

	Directe		Inverse
1. Stufe	Addition		Subtraction
2. „	Multiplication		Division
3. „	Elevation	Potenziren	Radiciren
		Exponenziren	Logarithmiren

Spisovatel vykládá sám v předmluvě zcela upřímně, že chtěl býti jen 1. *úplným* a že tudíž žádný důležitější sem patřící spis nezůstal nepovšimnut — na důkaz toho uvádí celých 8 spisů! — 2. v každém ohledu beze vší pedanterie *přesným* a 3. v pravém smyslu slova *systematickým.* Jak předsevzetí své provedl, pozná každý nejlépe z podrobného pročtení spisu tohoto; neb několika slovy není možná naznačiti všechny momenty, o něž se tu právě jedná. V celku však sluší vyznati, že spis tento jest na nejvýš důkladným, ba předůkladným, takže mnohdy, jak *Schopenhauer* již poznamenal, samým odůvodňováním věci o sobě jasné se jen zmahá nedůvěra v čtenáři, zdali to pravda, o čem dosud byl přesvědčen.

Abychom aspoň jednu ukázku jeho důkladné methody podali, uvádíme postup pouček na str. 96 et seqq.

I. Ein Product aus zwei Factoren bleibt ungeändert, wenn man diese Factoren intervertirt.

II. Ein Product aus drei Factoren bleibt ungeändert, wenn man die beiden letzten intervertirt.

III. Ein Product ändert sich nicht, wenn man die zwei ersten Factoren vertauscht.

IV. Ein Product ändert sich nicht, wenn man die zwei letzten Factoren vertauscht.

V. Ein Product ändert sich nicht, wenn man irgend zwei aufeinander folgende Factoren vertauscht.

VI. In jedem Producte von beliebig vielen Zahlen kann man die Ordnung der Factoren nach Willkür verändern, ohne dass der Werth des Productes alterirt wird.

Škoda, že professor *Jandera* již umřel! tomu by spis tento zajisté spůsobil nesmírnou radost. Nechť aspoň žáci jeho mu věnují patřičnou pozornost.

Abychom pak i ukázali, že při vší přesnosti, jakou tu staví na odiv, sem a tam není zcela přesným, uvádíme jeho *zákon kommutativní*, jaký o sečítání pag. 55 takto vyslovuje: „*Der Werth der Summe bleibt ungeändert, wenn man irgend welche Glieder derselben miteinander vertauscht*“ a přec se ví, že na př. součet harmonické řady

$$S = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \ldots \textit{ in inf}$$

se zvětší o $\frac{1}{2b} l \frac{p}{q}$, seřadíme-li členy po sobě jdoucí tak, aby na p positivních následovalo q negativních. Patrně tu měl spisovatel na zřeteli součet konečného počtu členů neb sčítanců, do vyjádření zákona kommutativního však nepřijal obmezení tohoto.

Ku konci budiž ještě poznamenáno, že spisovatel užívá se zvláštní zálibou nově zavedených cizích slov; nejsme sice pro takový purismus, jaký chce zavésti *R. Grassmann*, jemuž se tu pag. 147. vytýká, že jest zbytečno jmenovati Einheit *Stift*, Summe *Gesamt*, Glieder *Stücke*, Addiren *Fügen*, Minnend *Vorrath*, Subtrahend *Abzug*, Factor *Fach*, Product *Zeug*, Multipliciren *Weben*, Potenz *Höhe*, Wurzel *Tiefe*, tolik však přec i podlé naší mateřčiny poznáváme, že k velkému počtu již zavedených cizojazyčných slov ještě nové zaváděti jest zcela neoprávněno, ba škodlivo.

Std.

Seznam spisů, jednajících o počtu pravděpodobnosti a theorii nejmenších čtverců. *)

(Sestavil dr. *F. J. Studnička.*)

(I. Doplněk).

Berghan. Über die Methode der kleinsten Quadrate, Blankenberg, 1843.

Bessel. Untersuchung über die Warscheinlichkeit der Beobachtungsfehler, (Astron. Nachr. XV.)

*) Viz pag. 150. a 200. tohoto ročníku.

Bessel. Ein Hülfsmittel zur Erleichterung der Anwendung der kleinsten Quadrate (ibid. XVII.)

„ Neue Formeln Jacobi's für einen Anwendungsfall der Methode der kleinsten Quadrate, (ibid. XVII.)

„ Bestimmung des mittleren Fehlers einer Beobachtung, (ibid. XXI.

Bienaymé. Sur la probabilité des résultats moyen des observations (Sav. Etr. V.) 1838.

Borchardt. Über Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate (Crellés J. LVIII.).

Buňakovski. Основанія математич. теоріи вѣроятностей, Petrohrad, 1846.

Cauchy. Sur le système de valeurs qu'il faut attribuer à divers éléments déterminés par un grand nombre d' observations, Paris, 1814.

„ Divers Mémoires et discussions avec M. Bienaymé au sujet de la méthode des moindres carrés, (Compt. rend.) 1853.

Clemens. Über die Methode der kleinsten Quadrate, Tilsit, 1848.

Deparcieux. Essai sur la probabilité de la vie humaine, 1746.

Donkin. Au essay on the theory of the combination of observations, (Oxford, 1844).

Ellis. On the fundation of the theory of probabilities, (Cambr. Ph. Soc. VIII.)

Ellis. On the theory of the least squares, (ibid.)

Enke. Über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrat-Summen, Berlin, 1833.

„ Über die Methode der kleinsten Quadrate, (Berl. astr. Jahrb. 1834, 5, 6).

Euler, Probabilité dans le jeu de rencontre, (Hist. Acad.), Berlin 1751.

Hauber. Theorie der mittleren Werthe, (Baumgartner Journal VII.)

Henke. Über die Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig 1868.

Herschel. On theory of probabilitis, London 1869.

Hulltmann. Sur les moindres carrés, Stockholm 1860.

Huyn. Théorie des jeux de hasard, 1788.

Ivory. On the method of the least squares, (Phil. Mag. 1825, 6).

Jullien. Sur la probabilité des erreurs, (Ann. de Tort) Rome, 1858.

Laurent. Traité du calcul des probabilités, Paris, 1873.

Legendre. Méthode des moindres carrés, (Mém. de l'Inst. 1810, 1.)

Lobatschewsky. Probabilité des résultats moyens d'observations répétées, (Crellés J. 1824).

Nicole. Méthode pour déterminer le sort des joueurs, (Hist. Acad.) Paris 1730.

Ostrogradsky. Probabilité des jugements, (Acad. Petrop. 1834).

Parisot. Traité de calcul conjectural, Paris 1810.

Pascal. Lettres de Pascal et Farmat, (Divers questions sur le Calcul des probabilités), Paris 1862.

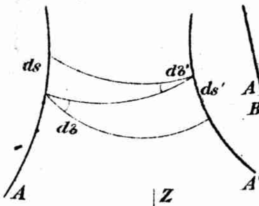
Paucker. Über die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, Mittau 1819.

Peters.	Über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers, (Astron. Nachr. 1822.)
Plana.	Sur la theorie des erreurs, (Acad. de Turin, 1811, 2).
Poisson.	Loi des grands nombres, (Compt. rend. 1835.)
„	Sur la probabilité des résultats moyens des observations (Conn. des Temps, 1827—32).
Poudra.	Question de probabilité résolue par la Géometrie, Paris 1819.
Puissant.	Application du Calcul des probabilités à la mesure de la précision, Paris 1830.
Ritter.	Manuel théorique et pratique de l'application de la méthode des moindres carrés, Paris, 1856.
Simon.	Exposition des principes de Calcul des probabilités, Journ. des Act. franc. I.)
Trembley.	Disquisitio circa calculum probabilium. (Comm. Gott. XII.).
Verdam.	Verhandeling over de Methode der kleinsten Quadrate.
Vorländer.	Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen, Leipzig, 1858.
Winckler.	Allgemeine Sätze zur Theorie der unregelmässigen Beobachtungsfehler, (Sitzungsb. der k. Akad., Wien 1866.)
Windelband.	Die Lehre vom Zufall, Berlin 1870.
Zech.	Eine Abhandlung zur Methode der kleinsten Quadrate.

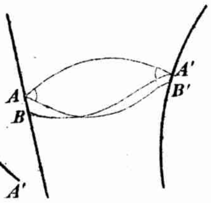
Abecední seznam přispívatelů:

(Hvězdičkou poznamenaní podali samostatné články, ostatní řešili úlohy.)

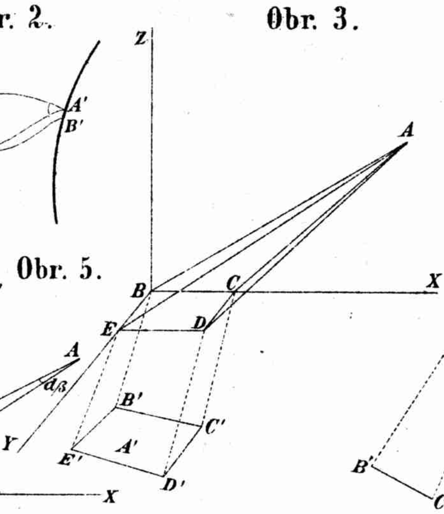
Obr. 1.



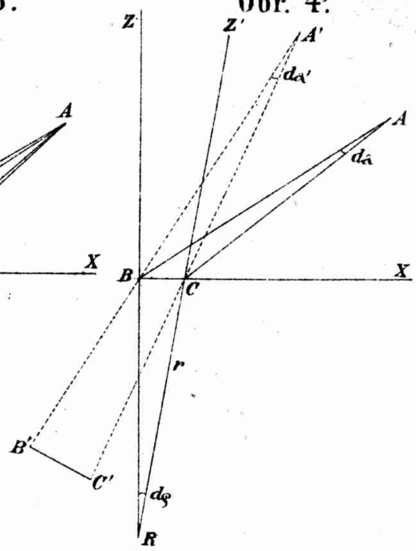
Obr. 2.



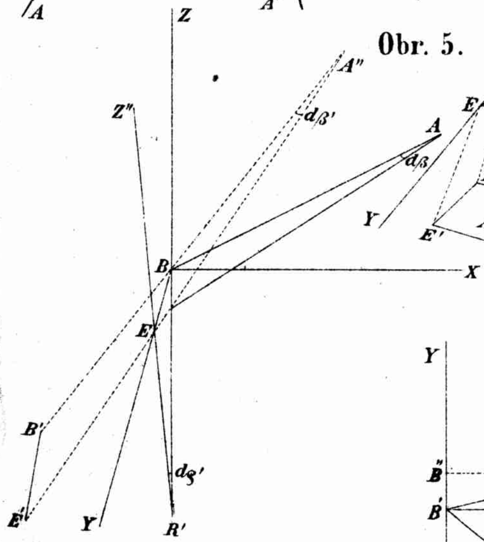
Obr. 3.



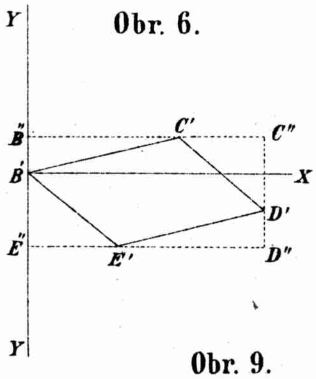
Obr. 4.



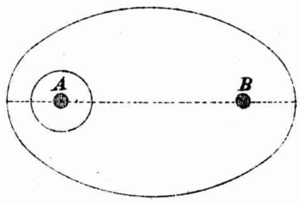
Obr. 5.



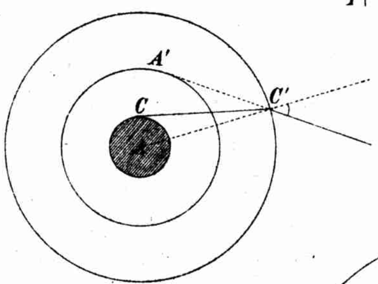
Obr. 6.



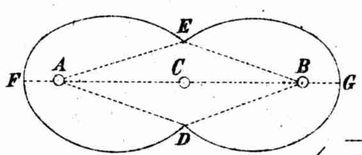
Obr. 7.



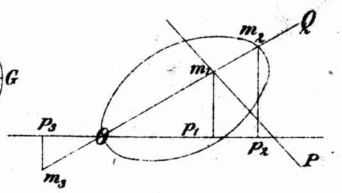
Obr. 8.



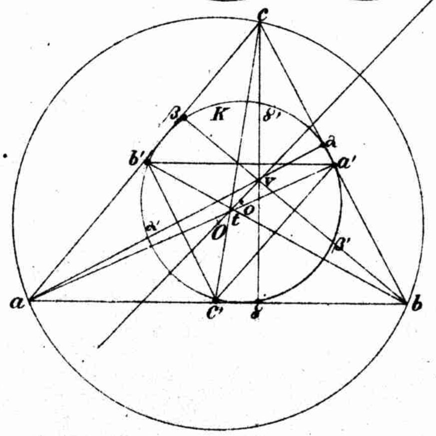
Obr. 9.

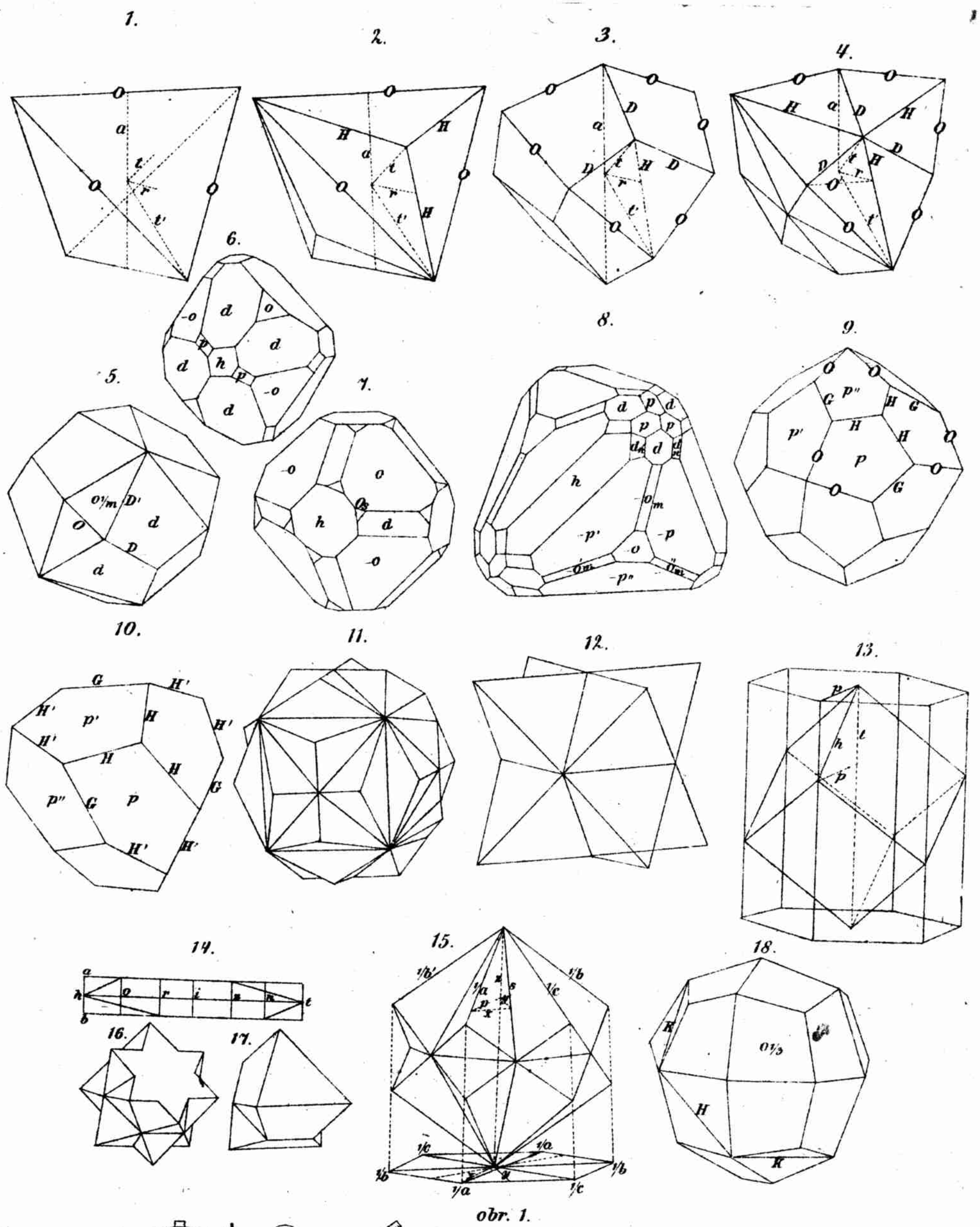


Obr. 10.

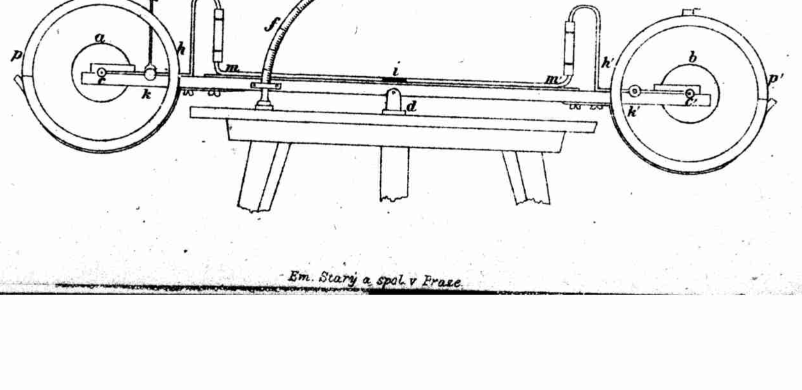


Obr. 11.



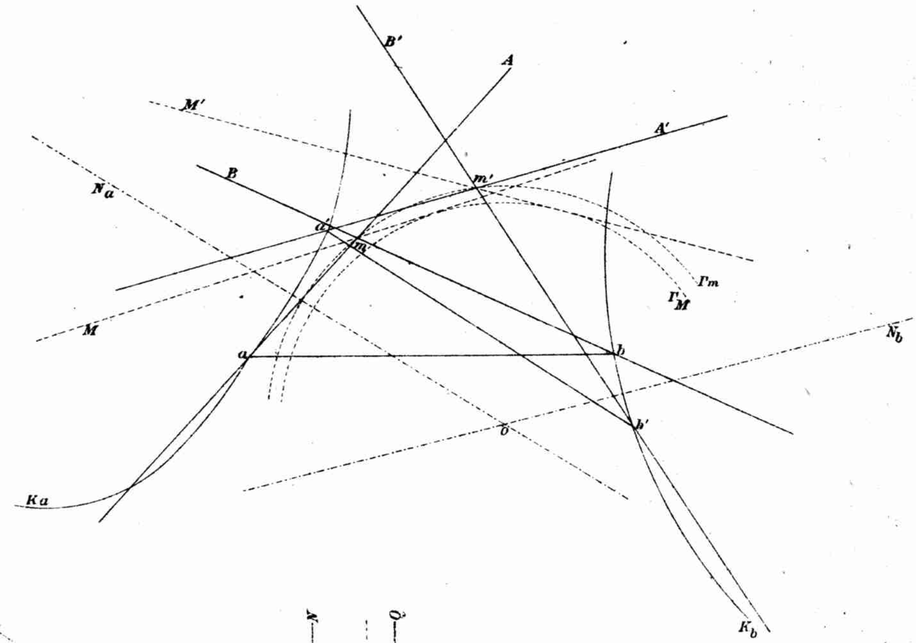


obr. 1.

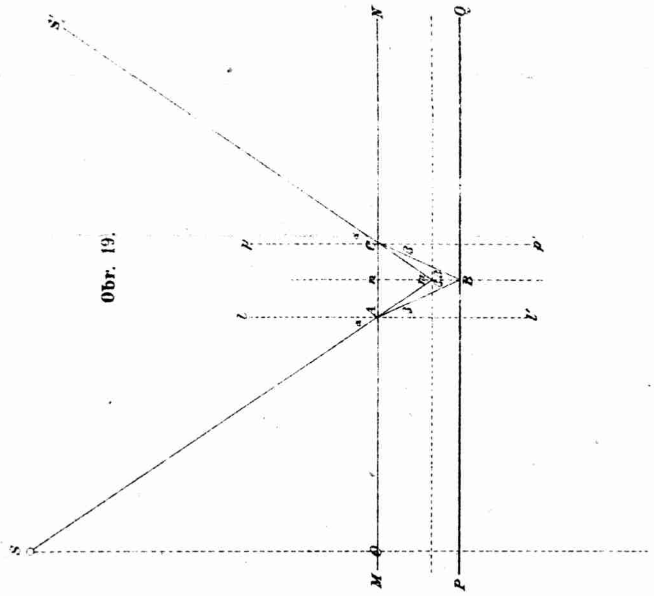


Em. Starý a spol. v Praze.

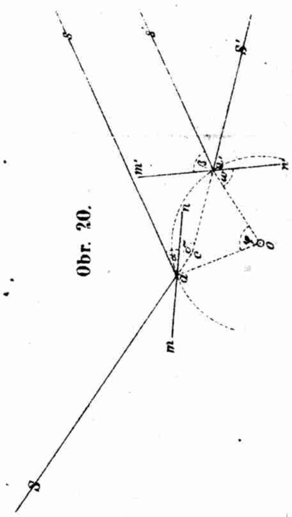
Obr. 21.

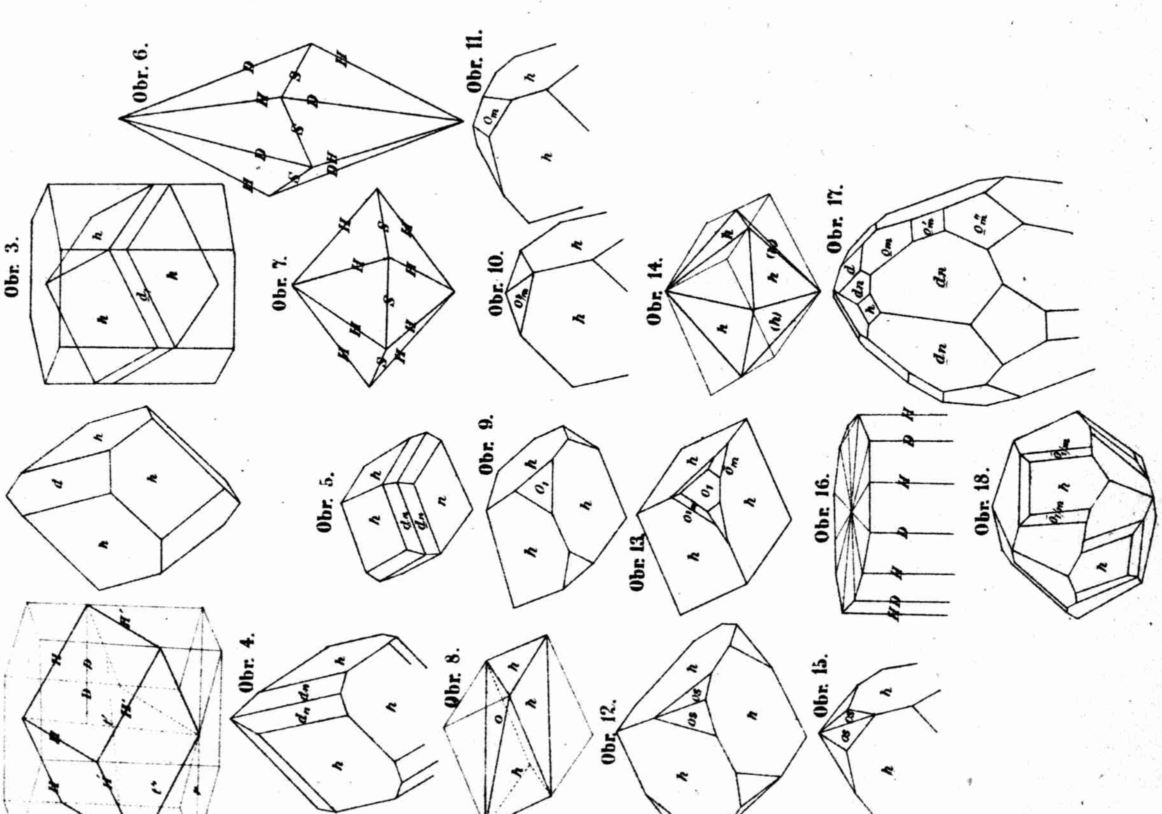


Obr. 19.



Obr. 20.





Obr. 1. Obr. 2. Obr. 3. Obr. 4. Obr. 5. Obr. 6. Obr. 7. Obr. 8. Obr. 9. Obr. 10. Obr. 11. Obr. 12. Obr. 13. Obr. 14. Obr. 15. Obr. 16. Obr. 17. Obr. 18.