Určování nekonečně vzdálených prvků prostorových útvarů geometrických.

(Podává prof. dr. *Emil Weyr.*)

1. Nekonečně vzdálená rovina prostoru.

Předpokládáme-li pevnou soustavu souřadnic rovnoběžných, zní rovnice roviny:

$$ax + by + cz + d = 0$$

a přejdeme-li k souřadnicím Hesse-ovým*)

$$ax + by + cz + dv = 0,$$

což jest všeobecná rovnice roviny pro souřadnice stejnoměrné. Jsou-li pak x, y, z, v poslední rovnici vyhovující hodnoty proměnných, t. j. stejnoměrné souřadnice bodu příslušného rovině touto rovnicí určené, budou (viz čl. 2. uvedeného pojednání.) poměry $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}$ souřadnice rovnoběžné téhož bodu.

Co zvláštní případy rovnice roviny uvádíme:

a) $$x = 0.$$

Body této roviny mají co souřadnice rovnoběžné hodnoty $\frac{0}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}$ t. j. za úsečku x hodnotu 0, z čehož plyne, že přísluší rovině (yz). Jest tudíž $x = 0$ rovnice roviny (yz).

b) $$y = 0$$

Body této roviny mají rovnoběžné souřadnice $\frac{x}{v}, \frac{0}{v}, \frac{z}{v}$ jest tudíž pro veškeré body pořadnice $y = 0$, z čehož jde, že rovnice $y = 0$ přísluší rovině (xz).

---

*) Viz ročník I.: Určování nekonečně vzdálených prvků útvarů geometrických str. 161.

c) $$z = 0$$
přísluší rovině *(xy)* neb rovnoběžné souřadnice bodů této roviny jsou $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{0}{v}$ t. j. třetí z nich jest vždy 0.

d) $$v = 0$$
jest rovnice roviny [která z všeobecné povstane tím, že $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$], jejíž body mají za souřadnice rovnoběžné hodnoty $\frac{x}{0}, \frac{y}{0}, \frac{z}{0}$ t. j. ∞, ∞, ∞, tak že veškeré body této roviny jsou v nekonečné vzdálenosti.

Zajisté sobě musíme pak představovati, že rovina $v = 0$ celá v nekonečné vzdálenosti se nalezá. Naopak vyhovuje každý nekonečně vzdálený bod t. j. bod rovnoběžných souřadnic ∞, ∞, ∞ podmínce $v = 0$, tak že si každý nekonečně vzdálený bod (k vůli důslednosti) co bod roviny nekonečně vzdálené $v = 0$ představovati musíme.

Na základě těchto úvah přicházíme k důležité větě:

„*Veškeré nekonečně vzdálené body prostoru vyplňují nekonečně vzdálenou rovinu, jejíž rovnice zní* $v = 0$."

Tuto pozoruhodnou rovinu nazýváme „*nekonečně vzdálenou rovinů.*"

Stane-li se, že rovnice roviny pro souřadnice rovnoběžné na se vezme tvar
$$d = 0,$$
kde d jest hodnota stálá, pak rovina příslušná jest rovinou nekonečně vzdálenou.

Neb úseky, které rovina:
$$ax + by + cz + d = 0$$
na osách tvoří, jsou, jak známo:
$$-\frac{d}{a}, -\frac{d}{b}, -\frac{d}{c}$$
a stanou se nekonečně velkými, je-li $a = b = c = 0$. Pro ten případ pak rovina sama jest nekonečně vzdálená a její rovnice zní $d = 0$. (Stálá d může býti též nula)

2. Roviny rovnoběžné.

Označíme-li k vůli větší krátkosti jednotlivými písmenami U_1, U_2 levé strany rovnic dvou rovin (1), (2), tak že rovnice ty pak zní:

$$(1)\ U_1 = 0,\ (2)\ U_2 = 0,$$

přisluší rovnice

$$(3) \qquad U_1 - KU_2 = 0,$$

kde K libovolnou stálou značí, též rovině, která průsekem rovin (1) a (2) prochází; poněvadž souřadnice vyhovující současně rovnicím (1), (2) též rovnici (3) vyhovují.

Jsou-li původní roviny (1), (2) rovnoběžné, tvoří součinitelé souřadnic, jak známo, správnou srovnalost, t. j. máme:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = m.$$

Průsekem obou rovnoběžných rovin prochází též rovina, jejíž rovnice zní

$$U_1 - mU_2 = 0,$$

aneb na základě posledních rovnic

$$(d_1 - md_2)\ v = 0$$

to jest

$$v = 0,$$

kterážto rovnice nám značí nekonečně vzdálenou rovinu prostoru.

Vidíme z toho, že průsekem dvou rovnoběžných rovin prochází nekonečně vzdálená rovina prostoru aneb jinými slovy, že průsek ten se v nekonečně vzdálené rovině nalezá.

To úplně souhlasí s dříve řečeným, že totiž veškeré nekonečně vzdálené body a tedy i veškeré nekonečně vzdálené čáry (a útvary vůbec) v nekonečně vzdálené rovině se nalézati musí. Průsekem dvou rovnoběžných rovin jest nekonečně vzdálená v nekonečně vzdálené rovině ležící přímka; rovnoběžné roviny jsou pak takové které toutéž nekonečně vzdálenou přímkou, procházejí.

V každé rovině

$$ax + by + cz + d = 0$$

nalezá se pouze *jediná* nekonečně vzdálená přímka, poněvadž rovina ta protíná nekonečně vzdálenou rovinu (jako každou rovinu vůbec) jen v jediné přímce.

Přímka ta jest vyjádřena rovnicemi v souřadnicích stejnoměrných:

$$ax + by + cz + dv = 0$$
$$v = 0$$

totiž co průsek obou těmito rovnicemi vyjádřených rovin.

Spojení obou rovnic nám dá:

$$ax + by + cz = 0,$$

což můžeme považovati za rovnici roviny procházející bodem počátečním a protínající nekonečně vzdálenou rovinu v též přímce jako rovina původní.

Z toho též plyne, že roviny, které se liší pouze absolutním členem jich rovnic, jsou rovnoběžné ($m = 1$).

3. Přímky rovnoběžné na vzájem a k rovinám.

Přímku určujeme co průsek dvou rovin; analytický výraz přímky bude tedy dvé současně platících linearných rovnic, které řešeny byvše dle y a z se jeví v tvaru:

$$y = ax + \alpha$$
$$z = bx + \beta$$

a které nazýváme rovnicemi přímky. Přímka ta protíná nekonečně vzdálenou rovinu v jistém jediném bodě: v nekonečně vzdáleném bodě přímky té.

Převedeme-li rovnice přímky na stějnoměrný tvar:

$$y = ax + \alpha v$$
$$z = bx + \beta v$$

tu obdržíme příslušný nekonečně vzdálený bod, připojením rovnice

$$v = 0,$$

což nám dá:

$$y = ax$$
$$z = bx.$$

Tyto rovnice přísluší přímce počátkem souřadnic procházející a nekonečně vzdálenou rovinu v tomtéž bodě protínající jako přímka původní. Pro rovnoběžné přímky mají směrnice a, b tytéž hodnoty, z čehož plyne, že rovnoběžné přímky protínají nekonečně vzdálenou rovinu v tomtéž bodě, aneb že takové přímky procházejí tímtéž nekonečně vzdáleným bodem, tvořice prostorný svazek s nekonečně vzdáleným vrcholem.

Jest-li přímka

$$y = ax + \alpha$$
$$z = bx + \beta$$

rovnoběžnou k rovině

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

tuť musí patrně nekonečně vzdálený bod přímky nalezati se v nekonečně vzdálené přímce roviny poněvadž, přímka rovinu teprv v nekonečné vzdálenosti protíná. Nekonečně vzdálený bod přímky jest pro souřadnice stejnoměrné vyjádřen rovnicemi:

$$y = ax$$
$$z = bx$$

a nekonečně vzdálená přímka roviny jest vyjádřena rovnicí:

$$Ax + By + Cz = 0$$

takže vložíme-li výrazy za y a z do poslední rovnice a krátíme-li usečkou x, obdržíme co podmínku pro rovnoběžnost roviny a přímky:

$$A + Ba + Cb = 0.$$

4. Perspektivní pojímání prostoru.

V předcházejícím položeny jsou základy k perspektivnímu pojímání prostoru, které pro geometrii nanejvýše důležité jest, a které hlavně v následujícím pozůstává:

„*V prostoru stává jen jediné, úplně určité roviny, která v* celé *své rozsáhlosti v nekonečnu se nalezá; jest to nekonečně vzdálená rovina prostoru. Rovina ta obsahuje* veškeré *nekonečně vzdálené body a tedy i veškeré nekonečně vzdálené útvary vůbec.*“

Na každé přímce nalezá se jen jediný úplně určitý nekonečně vzdálený bod, totiž průsek přímky s nekonečně vzdálenou rovinou. Veškeré nekonečně vzdálené body v konečnu se nalezající libovolné roviny vyplňují nekonečně vzdálenou přímku, totiž průsek oné roviny s nekonečně vzdálenou rovinou.

Rovnoběžné přímky mají společný nekonečně vzdálený bod.

Rovnoběžné roviny mají společnou nekonečně vzdálenou přímku. Přímka jest k rovině rovnoběžnou, nalezá-li se nekonečně vzdálený bod přímky v nekonečně vzdálené přímce roviny a naopak:

Rovina jest rovnoběžnou k přímce, prochází-li nekonečně vzdálená přímka roviny nekonečně vzdáleným bodem dříve podotknuté přímky.

Poněvadž se veškeré nekonečně vzdálené útvary v nekonečně vzdálené rovině nalezají, soudíme, že každý nekonečně vzdálený útvar jest útvarem rovinným.

6. Nekonečně vzdálené body křivek prostorových.

Máme-li libovolnou prostorovou křivku K stupně n tého, protne tato nekonečně vzdálenou rovinu (jako každou rovinu vůbec) v n bodech $n_1\ n_2\ n_3 \ldots n_n$, které nazýváme nekonečně vzdálenými body křivky K. Tečny křivky v těchto bodech jsou asymptoty křivky a roviny křivosti t. j. roviny procházející třemi bezprostředně po sobě jdoucími body křivky, v bodech (n) jsou asymptotické roviny křivky.

Poněvadž všeobecné průmety tečny (na roviny souřadnic) jsou tečnami k průmětům křivky, bude míti každá asymptota křivky K za průměty asymptoty průmětů křivky K.

Jsou-li tudíž:

$$F(x, y) = 0$$
$$\Phi(x, z) = 0$$

rovnice naší prostorové křivky a mají-li se ustanovit asymptoty, tu dostačí určit asymptoty křivek rovinných:

$$F(x, y) = 0 \text{ a } \Phi(x, z) = 0$$

dle spůsobu v článku: „Určování nekonečně vzdálených" atd. (I. ročník tohoto časopisu) blíže vyloženého; asymptoty takto obdržené jsou pak průměty asymptot křivky K, takže jich rovnice lze bezprostředně považovat za rovnice asymptot hledaných.

Pokud se jedná pouze o směry, v kterýchž se nekonečně vzdálené body křivky nalezají, dostačí převésti rovnice

$$F(x, y) = 0 \quad \Phi(x, z) = 0$$

zavedením třetí stejnoměrné souřadnice na tvar

$$F\left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}\right) = 0 \qquad \Phi\left(\frac{x}{v}, \frac{z}{v}\right) = 0$$

a položit $v = 0$. Z těchto rovnic řešíme-li, je dle $\frac{y}{x}$ a $\frac{z}{x}$ plyne pak n hodnot každého z obou poměrů; všeobecně

$$\frac{y}{x} = \alpha_i \quad \frac{z}{x} = \beta_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

Takto obdržených n párů rovnic lze pro souřadnice rovnoběžné považovati za rovnice n, bodem počátečním procházejících k nekonečným bodům křivky směřujících přímek.

Chceme-li obdržeti rovnice rovin asymptotických, tu zaveďme do rovnice roviny křivosti:

$$(\xi - x)(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + (\eta - y)(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + (\zeta - z)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0,$$

podíly $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, položme za tyto hodnoty α_i, β_i a současně $x = \infty$ $y = \infty$ $z = \infty$.

6. Racionálné křivky prostorové.

Mezi křivkami prostorovými nejjednodušších tvarů jsou *racionálné křivky* t. j. křivky, jejichž souřadnice lze vyjádřiti co racionální funkce jediné neodvisle proměnné — parametru.

Funkce ty jsou všeobecně funkce lomené společným jmenovatelem opatřené a to z jednoduché příčiny té, poněvadž všecky tři souřadnice všeobecně *současně* nekonečně velkými se stávají.

Rovnice racionálné křivky $n$tého stupně, zní tudíž všeobecně:

$$x = \frac{f_1(u)}{\varphi(u)} \quad y = \frac{f_2(u)}{\varphi(u)} \quad z = \frac{f_3(u)}{\varphi(u)},$$

kde u značí onen parametr a f_1 f_2 f_3 a φ celistvé racionalní funkce tohoto parametru a stupně n, takže

$$\varphi(u) = au^n + bu^{n-1} + cu^{n-2} + \ldots lu^2 + mu + p$$

a všeobecně:

$$f_i(u) = a_i u^n + b_i u^{n-1} + c_i u^{n-2} + \ldots l_i u^2 + m_i u + p_i$$

Každé hodnotě proměnné u přísluší touto hodnotou úplně určený bod křivky a naopak, každému bodu křivky odpovídá jen jediná hodnota parametru u.

Rovnice $\varphi = 0$ má n kořenů u_1 $u_2 \ldots u_n$, které patrně jsou parametry nekonečně vzdálených bodů křivky, poněvadž pro každou z těchto hodnot současně x, y, z nekonečně velkým se stávají.

Rovnice tečny bodu x, y, z zní:

$$\eta = \xi \frac{dy}{dx} + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\zeta = \xi \frac{dz}{dx} + \left(z - x\frac{dz}{dx}\right)$$

Z rovnic křivky plyne:

$$dx = \frac{\varphi f_1' - f_1 \varphi'}{\varphi^2} du$$

$$dy = \frac{\varphi f_2' - f_2 \varphi'}{\varphi^2} du$$

$$dz = \frac{\varphi f_3' - f_3 \varphi'}{\varphi^2} du$$

z čehož jde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi f_2' - f_2 \varphi'}{\varphi f_1' - f_1 \varphi'},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\varphi f_3' - f_3 \varphi'}{\varphi f_1' - f_1 \varphi'}.$$

Po jednoduché redukci obdržíme pak

$$y - x \frac{dy}{dx} = \frac{f_1 f_2' - f_2 f_1'}{f_1 \varphi' - f_1' \varphi}$$

$$z - x \frac{dz}{dx} = \frac{f_1 f_3' - f_3 f_1'}{f_1 \varphi' - f_1' \varphi}$$

tak že rovnice tečny bodu x, y, z (aneb bodu u) zní:

$$\eta (\varphi f_1' - f_1 \varphi') = \xi (\varphi f_2' - f_2 \varphi') - (f_1 f_2' - f_2 f_1'),$$

$$\zeta (\varphi f_1' - f_1 \varphi') = \xi (\varphi f_3' - f_3 \varphi') - (f_1 f_3' - f_3 f_1'),$$

Pro nekonečně vzdálené body jest $\varphi = 0$, rovnice asymptoty zní tedy

$$\eta f_1 \varphi' = \xi f_2 \varphi' + (f_1 f_2' - f_2 f_1')$$

$$\zeta f_1 \varphi' = \xi f_3 \varphi' + (f_1 f_3' - f_3 f_1')$$

při čemž do těchto vzorců za u jeden z kořenů rovnice $\varphi = 0$ vložiti musíme:

Po jednoduchém výpočtu shledáme:

$$dx\, d^2 y - dy\, d^2 x = \left(\frac{du}{\varphi}\right)^3 \begin{vmatrix} \varphi & \varphi' & \varphi'' \\ f_1 & f_1' & f_1'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \end{vmatrix}$$

$$dy\, d^2 z - dz\, d^2 y = \left(\frac{du}{\varphi}\right)^3 \begin{vmatrix} \varphi & \varphi' & \varphi'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \\ f_3 & f_3' & f_3'' \end{vmatrix}$$

$$dz\, d^2 x - dx\, d^2 z = \left(\frac{du}{\varphi}\right)^3 \begin{vmatrix} \varphi & \varphi' & \varphi'' \\ f_3 & f_3' & f_3'' \\ f_1 & f_1' & f_1'' \end{vmatrix}$$

Rovnice roviny křivosti bodu u zní tudíž:

$$\left(\xi - \frac{f_1}{\varphi}\right)\begin{vmatrix} \varphi & \varphi' & \varphi'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \\ f_3 & f_3' & f_3'' \end{vmatrix} + \left(\eta - \frac{f_2}{\varphi}\right)\begin{vmatrix} \varphi & \varphi' & \varphi'' \\ f_3 & f_3' & f_3'' \\ f_1 & f_1' & f_1'' \end{vmatrix} + \left(\zeta - \frac{f_3}{\varphi}\right)\begin{vmatrix} \varphi & \varphi' & \varphi'' \\ f_1 & f_1' & f_1'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \end{vmatrix} = 0$$

Přeneseme-li záporné členy na pravou stranu rovnice, a vyvineme-li determinanty po pravé straně dle elementů prvních řádků, snadně uvedeme rovnici roviny křivosti na tvar

$$\xi \begin{vmatrix} \varphi & f_2 & f_3 \\ \varphi' & f_2' & f_3' \\ \varphi'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} + \eta \begin{vmatrix} \varphi & f_3 & f_1 \\ \varphi' & f_3' & f_1' \\ \varphi'' & f_3'' & f_1'' \end{vmatrix} + \zeta \begin{vmatrix} \varphi & f_1 & f_2 \\ \varphi & f_1' & f_2' \\ \varphi'' & f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix}$$

Chceme-li obdržet rovnice rovin asymptotických, dostačí vložit do poslední rovnici $\varphi = 0$, a za u posloupně kořeny rovnice $\varphi = 0$.

V rovnici roviny křivosti vyskytující se devítiprvkové determinanty obsahují v prvním řádku funkce celistvé stupně n tého, v druhém jich první a v třetím jich druhé derivace.

Tu se, jak známo, jednoduchým násobením druhého a třetího řádku jistými činiteli a přičtením k prvnímu a k druhému řádku může každý z těchto determinantů převésti na devítiprvkový determinant, jehož elementy jsou celistvé funkce stupně $(n-2)$ho.

Takovou přeměnou přejde rovnice roviny křivosti v tvar:

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = U$$

přičemž X, Y, Z, U jsou determinanty vytknutého tvaru. Značí-li na př.

$$\begin{aligned} \Phi\ &= n(n-1)\,\varphi - 2(n-1)\,u\varphi' + u^2\varphi'' \\ F_k &= n(n-1)\,f_k - 2(n-1)\,u f_k' + u^2 f_k'' \\ \Phi_1 &= (n-1)\,\varphi' - u\varphi'' \\ F_{k1} &= (n-1)\,f_k' - u f_k'' \end{aligned}$$

bude tedy

$$X = \begin{vmatrix} \Phi, & F_2, & F_3 \\ \Phi_1, & F_{21}, & F_{31} \\ \varphi'', & f_2'', & f_3'' \end{vmatrix},$$

$$Y = \begin{vmatrix} \Phi, & F_3, & F_1 \\ \Phi_1, & F_{31}, & F_{11} \\ \varphi'', & f_3'', & F_1'' \end{vmatrix}, \quad \text{a t. d.}$$

Nyní jsou veličiny X, Y, Z, a U celistvé funkce stupně 3 $(n-2)$ho, z čehož mimochodem řečeno plyne, že libovolným bodem ($\xi\ \eta\ \zeta$) prostoru prochází $3\,(n-2)$ rovin křivosti racionálné prostorové křivky n-tého stupně. Parametry příslušných bodů styku obdržíme řešením rovnice

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = U$$

dle u co neznámé.

7. Prostorové křivky třetího stupně.

Racionální křivka prvního stupně jest přímka, racionální křivky stupně druhého jsou kuželosečky. Nejjednodušší racionální nerovinné křivky jsou tudíž racionální prostorové křivky stupně třetího.

Křivky ty (les cubiques, gauches le cubiche gobbe, Raumcurven dritter Ordnung) zdají se míti pro prostor tutéž důležitost jako kuželosečky pro rovinu. Byly též nazvány „*prostorovými kuželosečkami*“.

Všeobecná taková křivka jest průsek dvou kuželů druhého stupně, majících společnou povrchovou přímku. Sluší též podotknouti, že každá prostorová křivka třetího stupně jest křivka racionální.

Prostorová křivka třetího stupně vyjadřena jest rovnicemi:

$$x = \frac{a_1 u^3 + b_1 u^2 + c_1 u + d_1}{a u^3 + b u^2 + c u + d},$$

$$y = \frac{a_2 u^3 + b_2 u^2 + c_2 u + d_2}{a u^3 + b u^2 + c u + d},$$

$$z = \frac{a_3 u^3 + b_3 u^2 + c_3 u + d_3}{a u^3 + b u^2 + c u + d}.$$

Determinanty jevící se v rovnici roviny křivosti mají pro tuto křivku hodnoty:

$$X = 8 \begin{vmatrix} cu + 3d, & c_2 u + 3d_2, & c_3 u + 3d_3 \\ bu + c, & b_2 u + c_2, & b_3 u + c_3 \\ 3au + b, & 3a_2 u + b_2, & 3a_3 u + b_3 \end{vmatrix},$$

a obdobně $Y\ Z$ a U.

Výrazy pro $X\ Y\ Z$ a U můžeme rozložit v determinanty jednoduchými prvky opatřené a tu po krátkém počtu shledáme použijeme-li nejkratšího označení determinantu, že

$$\frac{-X}{24} = u^3 (a b_2 c_3) + 3u^2 (a b_2 d_3) + 3u\,(a c_2 d_3) + (b c_2 d_3)$$

$$\frac{-Y}{24} = u^3(a b_3 c_1) + 3u^2(a b_3 d_1) + 3u(a c_3 d_1) + (b c_3 d_1)$$

$$\frac{-Z}{24} = u^3(a b_1 c_2) + 3u^2(a b_1 d_2) + 3u(a c_1 d_2) + (b c_1 d_2)$$

$$\frac{-U}{24} = u^3(a_1 b_2 c_3) + 3u^2(a_1 b_2 d_3) + 3u(a_1 c_2 d_3) + (b_1 c_2 d_3)$$

Součinitelové souřadnic v rovnici roviny křivosti jsou tudíž skutečně celistvé racionální funkce třetího stupně vzhledem k parametru u; libovolným bodem $(\xi\,\eta\,\zeta)$ prostoru prochází tedy tré rovin křivosti naší křivky t. j. prostorové křivky třetího stupně jsou též křivkami třetí třídy.

Chceme-li rovnice rovin asymptotických, musíme řešiti rovnici

$$au^3 + bu^2 + cu + d = 0$$

a vložit kořeny této rovnice posloupně do rovnice

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = U.$$

Úloha. Dokaž, že asymptotické roviny se na vzájem v třech rovnoběžných přímkách protínají.

Úloha. Dokaž, že se roviny křivosti sestrojené v průsecích křivky s libovolnou rovinou protínají v bodě této roviny. Jak souvisí úseky rovinou libovolnou na osách utvořené se souřadnicemi onoho v rovině té se vyskytujícího bodu (pólu oné libovolné roviny vzhledem ku křivce prostorové stupně třetího).

8. Nekonečně vzdálené křivky ploch.

Libovolná plocha

$$F(x, y\, z) = 0$$

protíná každou rovinu v čáře rovinné (buď reálné neb pomyslné) a tedy protne též nekonečně vzdálenou rovinu v čáře, kterou nazveme *nekonečně vzdálenou křivku* plochy F. Nekonečné vzdálené křivky jsou *rovinné*, any se nalézají v nekonečně vzdálené *rovině*. Máme-li určiti nekonečně vzdálenou křivku algebraické plochy

$$F(x, y, z) = 0,$$

tu zaveďme čtvrtou souřadnici stejnoměrnou t. j. převeďme rovnici na tvar:

$$F\left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}\right) = 0$$

a položme po uspořádání $v = 0$. Výsledek bude stejnoměrná rovnice

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

téhož stupně, jako byla rovnice $F(x, y, z) = 0$.

Rovnice $\varphi = 0$ přináleží co rovnice souřadnice rovnoběžné obsahující kuželi téhož stupně, jako jest plocha F, a jehož vrchol se v bodu počátečním nalezá. Povrchové přímky tohoto kužele směřují k nekonečně vzdáleným bodům plochy F, neb nekonečně vzdálená křivka plochy F vyhovuje, jak jsme shledali, rovnici $\varphi = 0$.

Nekonečně vzdálenou křivku plochy F můžeme tudíž též považovat za průsek nekonečně vzdálené roviny s kuželem $\varphi = 0$.

Jest-li plocha F stupně $n$tého, pak rovnice $F = 0$ je tvaru:

$$\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots = 0,$$

kde φ značí celistvou stejnoměrnou funkci n-tého stupně, souřadnic $x\ y\ z$ φ_1, obdobnou funkci $(n-1)$-ho, φ_2 $(n-2)$-ho stupně atd. Rovnice kužele n-tého stupně určující v nekonečně vzdálené rovině nekonečně vzdálenou křivku plochy F, zní $\varphi = 0$.

9. Nekonečně vzdálené kuželosečky ploch druhého stupně.

Plocha druhého stupně

$$F_2 \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A_1yz + 2B_1xz + 2C_1xy + 2A_2x + 2B_2y + 2C_2z + D = 0$$

protíná nekonečně vzdálenou rovinu v kuželosečce určené rovnicí:

$$\varphi \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A_1yz + 2B_1xz + 2C_1xy = 0.$$

Veškeré plochy druhého stupně, jejichž rovnice se shodují co do quadratické části (prvních šest členů), procházejí tudíž toutéž nekonečně vzdálenou kuželosečkou.

Jak známo závisí na prvních šesti součinitelích rovnice směry a poměry hlavních os plochy, tak že tedy plochy druhého stupně procházející toutéž nekonečně vzdálenou kuželosečkou mají hlavní osy týchž směrů a týchž poměrů. Takové plochy jsou však podobné a podobně v prostoru rozpoložené plochy druhého stupně, čímž dokázána věta:

„Podobné a podobně rozpoložené plochy druhého stupně procházejí toutéž nekonečně vzdálenou kuželosečkou.“

Toť jest současně příčinou, proč se dvé takových ploch v konečnu pouze dle kuželosečky protínají; neb tato současně s řečenou nekonečně vzdálenou kuželosečkou představuje úplný průsek obou ploch, který musí býti čtvrtého stupně. Jsou-li totiž $F_2 = 0$, $F_2' = 0$ rovnice dvou podobných a podobně rozpoložených ploch druhého stupně, pak jest $F_2 - F_2' = 0$ rovnice roviny obsahující v konečnu se nalezající část průseku obou ploch, což kuželosečka býti musí, poněvadž v takové rovina $F_2 - F_2' = 0$ jak jednu tak i druhou plochu druhého stupně protíná.

10. Imaginární kruh v nekonečnu.

Veškeré koule v prostoru jsou podobné a podobně rozpoložené plochy druhého stupně a protínají tudíž dle dříve dokázaného nekonečně vzdálenou rovinu v též (arci imaginární) křivce druhého stupně, kterou můžeme co rovinný průsek koulí považovat za (imaginární) *kruh.* Tuto veledůležitou křivku nazýváme „*imaginárním kruhem v nekonečnu*" (le cerclé à l' infini, der imaginäre Kugelkreis im Unendlichen). Imaginárním kruhem v nekonečnu probíhají veškeré koule, tak že se v kruhu tom též na vzájem protínají. Kruh imaginární v nekonečnu má pro geometrii prostoru tutéž důležitost jako imaginární kruhové body v nekonečnu pro geometrii roviny.

Snadno každý nahlídne, že kruhové body libovolné roviny jsou průseky roviny s nekonečně vzdáleným imaginárním kruhem.

Co se tkne rovnice imaginárního kruhu v nekonečnu, můžeme ji bezprostředně napsati

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

předpokládajíce souřadnice pravoúhlé; neb $x^2 + y^2 + z^2$ jest všem kulovým rovnicím společná část quadratická.

Rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ značí vlastně imaginární kužel quadratický, který nekonečně vzdálenou rovinu v téže křivce protíná jako každá koule.

Pomocí imaginárního kruhu v nekonečnu lze jednoduchým způsobem zodpovídati rozmanité otázky, tak na př. ony, které se týkají os, hlavních rovin, kruhových řezů, a fokálních křivek ploch druhého stupně, o čemž později snad podrobněji pojednáme.