# Úlohy.

## I. Z mathematiky.

### Řešení úlohy 3.

(Podává *V. Jaeger*, technik.)

Předložená řada jest jen zvláštní případ řady

$$S_k = a + 2aq + 3aq^2 + \ldots + kaq^{k-1}.$$

Patrně jest

$$S_k(1-q) = a + aq + \ldots + aq^{k-1} - kaq^k$$

$$= \frac{a(1-q^k)}{1-q} - kaq^k,$$

tedy

$$S_k = a\,\frac{1-(1+k)\,q^k + kq^{k+1}}{(1-q)^2}.$$

Pro $a = q = \frac{1}{2}$, $k = \infty$ vyplývá

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots \textit{in inf.} = 2.$$

### Řešení úlohy 16.

(Podává *K. Brož*, filosof.)

Jsou-li $x$, $y$, $z$ neznámé strany trojúhelníku, pak máme podle úlohy

$$x + y + z = \frac{2p}{\varrho}$$

$$xyz = 4pr$$

$$p^2 = \frac{p}{\varrho}\left(\frac{p}{\varrho} - x\right)\left(\frac{p}{\varrho} - y\right)\left(\frac{p}{\varrho} - z\right)$$

Z poslední rovnice vyplývá v spojení s prvními dvěma

$$xy + xz + yz = \varrho^2 + 4r\varrho + \frac{p^2}{\varrho^2}.$$

Hledané strany jsou tedy kořeny kubické rovnice

$$x^3 - \frac{2p}{\varrho} x^2 + \left(\varrho^2 + 4r\varrho + \frac{p^2}{\varrho^2}\right) x - 4pr = 0.$$

Pro zvláštní v úloze vytknutý případ máme rovnici

$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$$

s kořeny 3, 4, 5.

(Správné rozluštění zaslal též *T. Havlíček*, žák VIII. tř. č. gymnasia v Budějovicích.)

### Řešení úlohy 17.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. tř. č. gym. v Budějovicích.)

*Případ $\alpha$.*

Jsou-li $x$, $y$, $z$, $u$ neznámé strany čtyrúhelníku, máme podle úlohy

$$xz = yu = a \qquad (1)$$

$$x + y + z + u = b \qquad (2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = c \qquad (3)$$

z (1) a (3) jde

$$(x+z)^2 + (y+u)^2 = c + 4a \qquad (4)$$

z této rovnice a z (2) pak

$$\left.\begin{aligned} x + z &= \frac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{8a - b^2 + 2c}\right) = f \\ y + u &= \frac{1}{2}\left(b \mp \sqrt{8a - b^2 + 2c}\right) = h \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

konečně z (5) a z (1)

$$x = \frac{1}{2}\left(f \pm \sqrt{f^2 - 4a}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(h \pm \sqrt{h^2 - 4a}\right),$$

$$z = \frac{1}{2}\left(h \mp \sqrt{f^2 - 4a}\right), \quad u = \frac{1}{2}\left(h \mp \sqrt{h^2 - 4a}\right).$$

*Případ $\beta$.*

V tomto případě máme výminečné rovnice

$$xz = yu = a \qquad (1)$$

$$x + y + z + u = b \qquad (2)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = d \qquad (3)$$

Přičteme-li k (3) rovnici

$$3xz(x+z)+3yu(y+u)=3ab,$$

obdržíme

$$(y+z)^3+(y+u)^3=3ab+d \tag{4}$$

Z této rovnice a z (2) vyplývá konečně

$$x+z=\frac{1}{2}\left(b\pm\sqrt{\frac{12ab-b^3+4d}{3b}}\right)=f,$$

$$y+u=\frac{1}{2}\left(b\mp\sqrt{\frac{12ab-b^3+4d}{3b}}\right)=h.$$

Ostatní jako v případě $\alpha$.

## Řešení úlohy 21.

(Podává *B. Sixta*, technik.)

Majíce integrovati rovnici

$$y''+4xy'+(1+4x^2)y=0, \tag{1}$$

položme

$$y=e^z, \tag{2}$$

čímž přejde rovnice v

$$z''+(z'+2x)^2+1=0;$$

tato nabude substitucí

$$t=z'+2x \tag{3}$$

tvaru

$$t'+t^2-1=0,$$

z kteréž integrací jde

$$x=\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+t}{1+t}+A \tag{4}$$

Z rovnin (3) a (4) jde vyloučením proměnné $t$

$$z''=\frac{e^{2(x-A)}-1}{e^{2(x-A)}+1}-2x,$$

což integrováno dle $x$ dává

$$z=B-x^2-x+l\left(e^{2(x-A)}+1\right).$$

Dle (2) jest tedy obecný integrál rovnice dané

$$y=C_1\,e^{-x(x+1)}+C_2\,e^{-x(x-1)}.$$

## Řešení úlohy 22.

(Podává *J. Sallabašev*, žák VI. tř. gymn. malostranského.)

Aby mohla hledaná 4 závaží $x$, $y$, $z$ a $u$ vyhověti v úloze udané podmínce, musí se vážiti i differencemi závaží a musí každé z nich býti o 1 větší nežli 2násobný součet jemu předcházejících závaží.

Bude tedy

$$
\begin{aligned}
x &= 2.0 + 1 = 1 \\
y &= 2x + 1 = 3 \\
z &= 2(x+y) + 1 = 9 \\
u &= 2(x+y+z) + 1 = 27 .
\end{aligned}
$$

(Správné řešení zaslali též *V. Jaeger*, technik, *F. Štejnar*, technik, *A. Sucharda*, technik, *J. Kroutil*, filosof.)

### Poznámka.

Jiným spůsobem řešil úlohu tuto *Brunet*, člen francouzského spolku mathematického, čímž zároveň podán důkaz, že i ve Francii si všímají našeho časopisu. Píšeť takto:

Supposons qu' avec un certain nombre de poids nous soyons arrivés à peser de 1 à $N$, et cherchons, avec un poids de plus, à peser jusqu' à un poids supérieur $N'$ que nous allons déterminer. On voit aisément que le nouveau poids à prendre doit être $2N+1$, car en retranchant toutes les pesées dèja obtenues et qui s'échelonnent de 1 à $N$ nous obtiendrons toutes les pesées échelonnées de $N$ à $2N+1$. Si maintenant au nouveau poids $2N+1$ nous ajoutons toutes les pesées obtenues précédemment, nous pourrons peser jusqu' à $3N+1=N'$. Prenons encore un poids de plus: il vaudra

$$2N'+1 = 6N+3 = 3(2N+1).$$

Ainsi chaque nouveau poids que nous prendrons pour répondre à la question sera le *triple* du précédent. Les poids successifs à prendre forment donc une progression géométrique dont la raison est 3; — et comme le poids 1 suffit pour peser 1, le premier terme de la progression est 1, de telle sorte que la série des poids à prendre est celle des puissances de 3.

Pour le problème particulier du Nr. 22, les 4 poids demandés sont

$$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,$$
$$1,\ 3,\ 9,\ 27,$$

qui permettent bien en effet de faire toutes les pesées de 1 à 40.

### Řešení úlohy 23.

(Podává *F. Štejnar*, technik.)

Hledané číslo jeviti se bude v tvaru

$$u = 105n + \alpha a + \beta b,$$

v němž znamená $\alpha$ číslo, obsahující činitele 5 a 7 a dávající zbytek 1, byvši 3 děleno, tedy 70, $\beta$ součinitele dělitelného 3, který dělen 5 a 7 poskytuje zbytek 1, tedy 36. Hledané číslo jest tedy

$$u = 105n + 70a + 36b.$$

(Správné řešení zaslali též *J. Kroutil*, filosof, *J. Kašpr*, *K. Trubáček*, filolog, *A. Sucharda*, technik.)

### Řešení úlohy 24.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

Je-li $a$ strana 7miúhelníka, $r$ poloměr kruhu opsaného, jest hledaný poměr

$$x = \frac{a}{r} \text{ a } \sin\frac{\pi}{7} = \frac{x}{2},\ \cos^2\frac{\pi}{7} = 1 - \frac{x^2}{4}.$$

Vložíme-li tyto hodnoty do známé rovnice

$$\sin 7\alpha = 7\sin\alpha\cos^6\alpha - 35\sin^3\alpha\cos^4\alpha + 21\sin^5\alpha\cos^2\alpha - \sin^7\alpha$$

berouce $\alpha = \frac{\pi}{7}$, obdržíme po příslušné redukci

$$x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0,$$

kteroužto rovnici dle methody Lagrange-ovy řešíce obdržíme

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}$$

### Řešení úlohy 25.

(Podává *K. Brož*, filosof.)

Volíme-li jeden z pevných vrcholů za počátek souřadnic, přímku spojující pevné vrcholy za osu $x$ a probíhá-li třetí vrchol přímku

$$\eta = a\xi + b, \tag{1}$$

pak jsou souřadnice těžiska trojúhelníku

$$x = \frac{1}{3}(\xi + c),\ y = \frac{1}{3}\eta\,, \tag{2a}$$

souřadnice průsečíku výšek

$$x = \xi\,,\ y = \frac{\xi(c - \xi)}{\eta}\,, \tag{2b}$$

v čemž značí $c$ úsečku druhého vrcholu pevného.

Vyloučením veličin $\xi$ a $\eta$ z rovnic (1) a (2) obdržíme

$$y = ax + \frac{b - ac}{3}$$

a

$$x^2 + axy - cx + by = 0$$

jakožto rovnice hledaných geometrických míst.

Poslední rovnice značí všeobecně hyperbolu, procházející oběma pevnými vrcholy.

(Správné řešení zaslali též *F. Štejnar*, technik, *J. Kašpr.*)

## Řešení úlohy 26.

(Podává *K. Brož*, filosof.)

Probíhá-li třetí vrchol kružnici

$$(\xi - p)^2 + (\eta - q)^2 = r^2,$$

pak obdržíme, platí-li označení jako v úloze 25, co rovnice dráhy těžiska a průsečíku výšek

$$\left(x - \frac{c+p}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{q}{3}\right)^2 = \frac{r^2}{9}\,.$$

a

$$y^2\left[(x - p)^2 - r^2\right] + \left[x(c - x) - qy\right]^2 = 0\,.$$

(Správné řešení zaslal též *J. Kašpr.*)

## Řešení úlohy 27.

(Podává *J. Kroutil*, filosof.)

Poněvadž $l(\alpha + \beta e^x) = l[e^x(\alpha e^{-x} + \beta)] = x + l(\alpha e^{-x} + \beta)$ může se předložený výraz psáti ve formě

$$\int^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}\, l(\alpha e^{-x} + \beta)}{\frac{a}{x^2} + b} = \frac{1}{b}$$

(Správné řešení zaslali též *K. Brož*, filosof, *V. Zelený*. žák VI. třídy r. gymn. malostr., *A. Lhota*, žák VII. třídy real. gymnasia Maade-a.)

Řešení úlohy 28.

(Podává *B. Sixta*, technik.)

Differencujeme-li řadu

$$y = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{8!} + \qquad (1)$$

dvakráte, obdržíme

$$y' = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} +, \qquad (2)$$

$$y'' = \frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \qquad (3)$$

a sečtením

$$y'' + y' + y = ex$$

nebo

$$y''' - y = 0,$$

kteráž rovnice má integrál formy

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x}, \qquad (4)$$

kde

$$\alpha = 1, \beta = \frac{1}{5}(-1 + i\sqrt{3}), \quad \gamma = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

Integrační stálé $A$, $B$, $C$ ustanovíme z rovnic

$$y' = A\alpha e^{\alpha x} + B\beta e^{\beta x} + C\gamma e^{\gamma x},$$

$$y'' = A\alpha^2 e^{\alpha x} + B\beta^2 e^{\beta x} + C\gamma^2 e^{\gamma x},$$

srovnáme-li je a rovnice (4), s (2), (3), (1) a položíme-li zároveň $x = 0$.

Bude pak

$$A + B\beta + C\gamma = 0.$$
$$A + B\gamma + B\beta = 0,$$
$$A + B + C = 1,$$

z čehož

$$A = B = C = \frac{1}{3}.$$

Vložíme-li tyto hodnoty do rovnic (1), (2), (3), obdržíme po náležitém upravení

$$y = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos x \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$y' = \frac{1}{3}\left[e^x - 2\,e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$y'' = \frac{1}{3}\left[e^x - 2\,e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

čímž součet řad (1), (2) a (3) jest nalezen.

### Řešení úlohy 30.

(Podává *B. Sixta*, technik.)

Vyjádříme-li danou podmínku analyticky, bude, jelikož

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \text{ a } r_n = \frac{r^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$rr'' - r'^2 = 0.$$

Integrál této rovnice jest

$$r = a + e^{b\varphi}$$

z čehož viděti, že křivka hledaná jest obecně exponentiální spirála, ve zvláštním případě kruh.

### Úloha 31.

Jakým spůsobem amortisuje se při nějakém akciovém podniku během desíti let v poloročních lhůtách 100 akcií po 200 zl. při 5% úročení.

### Úloha 32.

Má se řešiti rovnice

$$tg\,2x + tg\,3x = 3tg\,x\,.$$

### Úloha 33.

Má se určiti obsah čtyrstěnu omezeného rovinami, jejichž rovnice jsou

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4 &= 0, \\ 2x - 3y + 4z - 1 &= 0, \\ 3x + 4y - z - 2 &= 0, \\ 4x - y - 2z - 3 &= 0. \end{aligned}$$

### Úloha 34.

V řadu postupující podle mocnin proměnné $x$ má se vyvinouti

$$[l\,(x + \sqrt{1 + x^2})]^2.$$

Úloha 35.

Má se určiti hodnota integrálu omezeného

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \,.\, l\, \frac{5+4\sin x}{5-4\sin x} dx .$$

## II. Z fysiky.

Řešení úlohy 9.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

Jelikož hledané těžisko na ose $x$ se nalézati bude, stačí k určení jeho úsečka $\xi$. Značí-li $P$ povrch plochy, bude

$$\xi = \frac{\int x\, dP}{\int dP} = \frac{\int xy \sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int y \sqrt{1+y'^2}\, dx},$$

ovšem v příslušných mezích.

Zavedením proměnné $\omega$ obdržíme

$$\xi = \frac{2}{3} a \frac{\int_0^\pi (\omega + \sin\omega)\, d \sin^3 \frac{\omega}{2}}{\int_0^\pi (\omega + \sin\omega)\, d \sin \frac{\omega}{2}},$$

tedy $\xi = \frac{2}{15} a \frac{15\pi - 8}{3\pi - 4}$.

Řešení úlohy 11.

(Podává *F. Podhajský*, technik.)

Volíme-li osu kolmou za osu $y$, dají se síly na hmotný bod působící vyjádřiti rovnicemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\omega^2}{x}, \quad \frac{dy^2}{dt^2} = -g,$$

z nichž vyplývá

$$\frac{2\, dx\, d^2x + 2\, dy\, d^2y}{dt^2} = 2\omega^2 \frac{dx}{x} - 2g\, dy$$

a integrací se obdrží

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\omega^2 lx - 2gy + a .$$

Poněvadž však $\frac{ds}{dt}$ značí rychlost bodu v směru tečny, tato však má býti stálou veličinou $v$, tož následuje co rovnice hledané křivky

$$v^2 = 2\omega^2 lx - 2gy + a$$

nebo

$$y = \frac{\omega^2}{g} lx + A .$$

Řešení úlohy 17.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. třídy česk. gymnasia v Budějovicích.)

Je-li rychlost zvuku 1050′, pak se mají k sobě výšky tonů píšťaly parní a ozvěny jako 989 k 1050.

Řešení úlohy 19.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. třídy česk. gymnasia v Budějovicích.)

Poměr odporu galvanického řetězu k jednotce drátu obnáší 12·949 a síla elektromotorická 5·166 $k$, značí-li $k$ koeficienta boussoly.

Řešení úlohy 21.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. třídy česk. gymnasia v Budějovicích.)

Jelikož poměr hmotnosti Jupitera a země jest 338, poměr poloměrů obou na rovníku 11·66, na točně 10·88, váží libra železa 2·49 liber na rovníku, 2·86 na točně Jupiterově.

Řešení úlohy 22.

(Podává *A. Sucharda*, technik.)

Zinkový povlak musí 0·127055$^m$ tlustý býti.

Řešení úlohy 23.

(Podává *J. Sallabašev*, žák VI. třídy real. gymnasia malostranského.)

Rozdělme stranu $AB$ trojúhelníku $ABC$ v bodu $D$ tak, aby $AD : DB = q : p$ a přímku $CD$ v bodu $O$ tak, aby $CO : OD = (p + q) : r$: Bod $O$ jest bod hledaný.

(Správné řešení podal též *A. Wolf*, žák VII. třídy česk. gymnasia v Budějovicích.)

### Řešení úlohy 24.

(Podává *J Kašpr.*)

Vrhne-li se hmotný bod v úhlu $\alpha$ s rychlostí $v$, dosáhne výšky $\frac{v^2}{2g} \sin^2\alpha$ a vrátí se ve vzdálenosti $\frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$ do původního horizontu. Plocha paraboly dráhy jeho obnáší tedy $\frac{v^4}{3g^2} \sin^2\alpha \sin^2 \alpha$, který výraz, jak differencováním snadno se dokáže, má největší hodnotu pro $\alpha = 60^0$,

(Správné řešení zaslali též *K. Brož*, filosof, *J. Kroutil*, filosof.)

### Řešení úlohy 25.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

Je-li $r$ poloměrem kružnice, $x$ a $y$ souřadnice libovolného bodu na ní, $p$ průřez, $T$ napnutí v tomto bodu, $\varrho$ váha jednotky objemové a $a$ pak libovolná constanta, platí rovnice

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$T\frac{dx}{ds} = \varrho a$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = \varrho p ds,$$

z nichž obdržíme:

$$p = a\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds} = a\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{ar}{y^2} = \frac{p_0}{y^2}.$$

Jest tedy průřez v obráceném poměru se čtvercem pořadnice.

### Řešení úlohy 26.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

Na libovolný ve směru svislém nad středem přítažlivosti ve vzdálenosti $x$ položený hmotný bod $m$ působí síla

$$P = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{P_1}{x^3},$$

značí-li $P_1$ sílu ve vzdálenosti $= 1$ působící.

Integrací obdržíme pak

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{a}\frac{P_1}{m}\cdot\frac{a^2-x^2}{x}.$$

z čehož

$$t = a\sqrt{\frac{m}{P_1}}\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\sqrt{\frac{m}{P_1}}$$

### Úloha 28.

Roku 1736 pozoroval *Bouguer* kyvadlem, že počet kyvů obnáší za 24 hodin na břehu mořském 98770; na hoře Pichincha jen 98720; jak se mají k sobě $g$ obou míst a jak by se musilo kyvadlo zkrátiti neb prodloužiti, kdyby měl býti počet kyvů na hoře neb dole stejně velkým.

### Úloha 29.

Má se určiti těžisko tělesa povstávajícího otočením plochy dvěma parabolám

$$y^2 = 2p\,x,\; y^2 = 2q(a-x)$$

společné kolem osy úseček.

### Úloha 30.

Jak se mají k sobě rychlosti, jimiž třeba těleso nějaké přímo vrhnouti, aby dolet ělo se země na měsíc, s měsíce na slunce a se slunce na zemi, stojí-li měsíc v kvadratuře a v prostřední vzdálenosti od země taktéž v prostřední vzdálenosti od slunce se nacházející.

### Úloha 31.

Srazí-li se dvě pružné a stejně rychle proti sobě se pohybující koule, jaký musí býti poměr jejich hmot, aby jedna se zarazila a zůstala stát.