a poněvadž

$$q(u)_1 = -2qu_4$$

máme konečně

$$(u)_3 + q(u)_1 = 0$$

z čehož dle (7) soudíme, že body $u_4\, u_1\, u_2\, u_3$ skutečně na tomtéž kruhu se nalezají, jak dokázati jsme chtěli.

Při jiné příležitosti ukážeme, jak výhodně lze parametrů (u) k řešení jiných rozmanitých o kuželosečkách jednajících úloh použíti.

Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech.

(Sepsal Prof. Dr. *F. J. Studnička.*)

Kdo se chce vycvičiti v užívání základních pouček o determinantech platících, nenalezne snad vděčnějšího pole nad analytickou geometrii jak v rovině tak v prostoru. Neb tu vyskytuje se stále řešení rovnic, vylučování rozličných veličin jakož i přetvořování výrazů, samé to úlohy, kteréž, jak známo z dějin theorie determinantů, první podnět daly k jejímu vyvinutí.

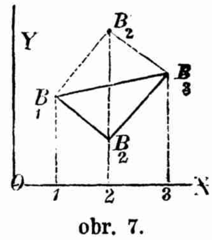
A jelikož nyní již na lepších školách středních možná si zjednati nejprvnějších známostí determinantů, sestavil jsem tuto analytický rozbor trojúhelníku a čtyrstěnu, abych ukázal, jak prospěšně se tu používá některých jednoduchých vlastností těchto zajímavých výrazů kombinatorických, doufaje, že mnohý tím bude povzbuzen k dalšímu studiu v oboru tomto.

I. O trojúhelníku.

Nejjednodušším spůsobem určí se analytický trojúhelník v rovině, ustanoví-li se buď pravoúhelné souřadnice jeho vrcholů neb rovnice jeho stran, načež se snadno vypočítá obsah jeho, určí délka stran a výšek jakož i velikost uhlů jeho.

Značí-li v případě prvním x_k, y_k souřadnice bodu B_k, bude plocha trojúhelníku $B_1\, B_2\, B_3$ — obr. 7. — patrně

$$P = (\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}) - (\mathrm{I}) - (\mathrm{II});$$



obr. 7.

použijeme-li tedy známého vzorce, ustanovujícího ploský obsah lichoběžníku, obdržíme tu

$$2P = (x_3 - x_1)(y_3 + y_1) - (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - (x_3 - x_2)(y_3 + y_2)$$
$$= x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2);$$

dá-li se pak výrazu tomuto tvar determinantu [1])

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (1\,2\,3), \qquad (1)$$

povstane konečně pro plochu trojúhelníku jednoduchý vzorec

$$2P = \Delta = (1\,2\,3). \qquad (2)$$

Kdyby však druhý bod byl tak položen, že by příslušné y_2 protínalo protější stranu trojúhelníku, kdyby tedy na př. byl v B'_2, měli bychom pro plochy $B_1\, B'_2\, B_3$ výraz symbolický

$$2P = -(1\,2\,3) = (1\,3\,2).^{2)}$$

Konečně budiž tu ještě poznamenáno, že determinant Δ možná zjednodušiti odečítáním prvků jednoho řádku od prvků řádků ostatních,[3]) čímž se obdrží, označíme-li podřízené determinanty příslušnými písmenami velkými, [4])

$$2\Delta = (X_1\, Y_2) = (X_2\, Y_3) = (X_3\, Y_1). \qquad (3)$$

Ze vzorce (1) jde na jevo, že pro $\Delta = o$ jest i $P = o$, z čehož jde, že tu všechny tři body leží v jedné přímce; a naopak leží-li tři body v jediné přímce, musí $\Delta = o$.

Abychom ustanovi-li délku jednotlivých stran tohoto trojúhelníku, použijme známých vzorců

$$\begin{aligned} l_1^2 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = X_1^2 + Y_1^2, \\ l_2^2 &= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 = X_2^2 + Y_2^2, \qquad (4) \\ l_3^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = X_3^2 + Y_3^2. \end{aligned}$$

---

[1]) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 20.
[2]) ibid. pag. 22.
[3]) ibid. pag. 26.
[4]) ibid. pag. 17.

Délky kolmic neb výšek trojúhelníkových obdrží se pak ze vzorce

$$2P = p_1 l_1 = p_2 l_2 = p_3 l_3 = \varDelta,$$

z něhož jde přímo

$$p_1 = \frac{\varDelta}{l_1},\ p_2 = \frac{\varDelta}{l_1},\ p_3 = \frac{\varDelta}{l_3}. \tag{5}$$

A podobně určí se sinusy úhlů trojúhelníkových pomocí vzorce

$$2P = l_1 l_2 \sin \alpha_3 = l_2 l_3 \sin \alpha_1 = l_3 l_1 \sin \alpha_2 = \varDelta,$$

z něhož se bezprostředně obdrží

$$\sin \alpha_1 = \frac{\varDelta}{l_2 l_3},\ \sin \alpha_2 = \frac{\varDelta}{l_3 l_1},\ \sin \alpha_3 = \frac{\varDelta}{l_1 l_2} \tag{6}$$

Ze vzorců těchto jde na jevo, že v stejnostranném trojúhelníku, kde tedy

$$l_1 = l_2 = l_3,$$

zároveň platí

$$p_1 = p_2 = p_3,$$
$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \sin \alpha_3$$

Znajíce vzorec (1), ustanovíme snadno i v druhém případě obsah trojúhelníku, jehož strany určeny jsou rovnicemi

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= o \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= o \\ a_3 x + b_3 y + c_2 &= o. \end{aligned} \tag{7}$$

Řešíme-li totiž tuto soustavu rovnic, spojujíce je po dvou, zjednáme si napřed souřadnice průseků, tedy vrcholů trojúhelníkových, načež jen třeba hodnoty takto obdržené dosaditi do vzorce (1), aby se přišlo k cíli.

Označíme-li determinanty, které se tu vyskytnou, příslušnými písmenami velkými, obdržíme z rovnice druhé a třetí [5])

$$x_1 = \frac{A_1}{C_1},\ y_1 = \frac{B_1}{C_1},$$

z rovnice třetí a první

$$x_2 = \frac{A_2}{C_2},\ y_2 = \frac{B_2}{C_2}$$

a konečně z rovnice první a druhé

$$x_3 = \frac{A_3}{C_3},\ y_3 = \frac{B_3}{C_3};$$

[5]) ibid. pag. 29.

zavedeme-li tyto hodnoty do vzorce (1), obdržíme tedy, vylou-čivše společného dělitele [6])

$$2P = \frac{1}{C_1 C_2 C_3} \begin{vmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \\ A_3 B_3 C_3 \end{vmatrix}.$$

Ale prvky posledního determinantu jsou subdeterminanty příslušné k soustavě (7) aneb k determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

z čehož jde, že hodnota jeho, jelikož jest stupně třetího, rovná se druhé mocnině původního determinantu Δ [7]); jest tedy

$$2P = \frac{\Delta^2}{C_1 C_2 C_3}. \tag{9}$$

Jestli tu $\Delta = o$, jest i $P = o$, z čehož jde na jevo, že všechny tři přímky protínají se v jednom bodě a naopak; protínají-li se tři přímky v jednom bodě, musí příslušné $\Delta = o$. [8])

Znajíce vzorec (9), můžeme jednoduchým spůsobem vyjádřiti i výšky trojúhelníku i délky jednotlivých stran jakož i velikost úhlů jimi uzavřených.

Značí-li l_1 délku strany mezi bodem B_2 a B_3 ležící a p_1 příslušnou výšku neb kolmici s protějšího vrcholu B_1 na ni spuštěnou, bude i

$$2P = p_1 l_1, \tag{10}$$

kdež se p_1 analyticky ustanoví vzorcem

$$p_1 = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}};$$

dosadíme-li tedy do tohoto výrazu za x_1 a y_1 známé již hodnoty a položíme-li všeobecně

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \mu_k, \tag{11}$$

obdržíme především pro výšku vzorec

$$p_1 = \frac{a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1}{C_1 \mu_1},$$

---

[6]) ibid. pag. 23.
[7]) ibid. pag. 40.
[8]) ibid. pag. 31.

aneb složíme-li čitatele v Δ, [9])

$$p_1 = \frac{\Delta}{C_1 \mu_1},$$

a podobně

$$p_2 = \frac{\Delta}{C_2 \mu_2}, \tag{12}$$

$$p_3 = \frac{\Delta}{C_3 \mu_3}. \text{ [10])}$$

Spojíme-li pak vzorce (9), (10) a (12), obdržíme bezprostředně dále

$$l_1 = \Delta \frac{\mu_1}{C_2 C_3},$$

$$l_2 = \Delta \frac{\mu_2}{C_3 C_1}, \tag{13}$$

$$l_3 = \Delta \frac{\mu_3}{C_1 C_2}.$$

A poněvadž tu

$$p_1 = l_3 \sin \alpha_2, \quad p_2 = l_1 \sin \alpha_3, \quad p_3 = l_2 \sin \alpha_1,$$

označíme-li úhel ležící proti straně l_k krátce α_k, obdržíme pomocí vzorců posledních

$$\sin \alpha_1 = \frac{C_1}{\mu_2 \mu_3},$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{C_2}{\mu_3 \mu_1}, \tag{14}$$

$$\sin \alpha_3 = \frac{C_3}{\mu_1 \mu_2}.$$

U stejnostranného trojúhelníku platí

$$l_1 = l_2 = l_3,$$

z čehož jde, že tu

$$\mu_1 C_1 = u_2 C_2 = \mu_3 C_3 = k,$$

načež z posledních vzorců se obdrží

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{\Delta}{k},$$

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \sin \alpha_3 = \frac{k}{\mu_1 \mu_2 \mu_3},$$

---

[9]) ibid. pag. 17.

[10]) Jelikož μ_k má označení $\pm$, volí se v jednotlivých případech tak, aby p_k bylo positivní.

z čehož plyne pro k výraz

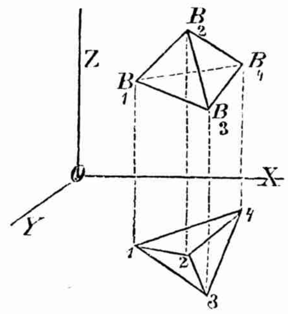
$$k = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{2} \sqrt{3}.$$

II. O čtyrstěnu.

Zcela podobným spůsobem možná provésti analytický rozbor čtyrstěnu.

Značí-li v prvním případě všeobecně x_k, y_k, z_k souřadnice bodu B_k a chceme-li ustanoviti obsah čtyrstěnu $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$ — obr. 8. —, jehož rohy jsou určeny souřadnicemi pravoúhlými x, y, z, rozložme hranol s jehlancovým zakončením na tři hranoly

$$1\,2\,4\,B_4\,B_2\,B_1\,,\quad 2\,3\,4\,B_4\,B_3\,B_2\,,\quad 1\,2\,3\,B_3\,B_2\,B_1$$



obr. 8.

a odečtěme od součtu těchto tří hranolů doplňující hranol

$$1\,3\,4\,B_4\,B_3\,B_1\,.$$

Obsah trojbokého hranolu O, jehož tři výšky jsou h_1, h_2, h_3 a základna b, určuje se, jak známo, podle vzorce

$$3\,O = b(h_1 + h_2 + h_3)\,;$$

v případě tomto jest b trojúhelník, jehož vrcholy jsou určeny souřadnicemi x, y a plocha tudíž vzorcem (1), takže všeobecně bude

$$6\,O = (mnp)\,(h_1 + h_2 + h_3).$$

Použijeme-li tohoto pravidla spůsobem dříve již vytknutým, obdržíme tedy pro obsah čtyrstěnu

$$T = B_1\,B_2\,B_3\,B_4$$

především vzorec

$$\begin{aligned} 6\,T = &\ (1\,2\,3)\,(z_1 + z_2 + z_3) \\ &+ (3\,2\,4)\,(z_3 + z_2 + z_4) \\ &+ (4\,2\,1)\,(z_4 + z_2 + z_1) \\ &- (1\,4\,3)\,(z_1 + z_4 + z_3), \end{aligned}$$

z něhož jde, spořádáme-li výraz na pravé straně podlé jednotlivých z a použijeme-li známé stejniny

$$(mnp) = -(nmp) = -(pnm) = -(mpn)\ ^{11)},$$

$$\begin{aligned} 6\,T = &\ z_1\,[(1\,2\,3) + (4\,2\,1) + (3\,4\,1)] \\ &- z_2\,[(1\,2\,4) + (4\,2\,3) + (3\,2\,1)] \\ &+ z_3\,[(1\,2\,3) + (3\,2\,4) + (3\,4\,1)] \\ &- z_4\,[(2\,3\,4) + (4\,1\,2) + (1\,4\,3)]; \end{aligned}$$

spojíme-li pak determinanty v závorkách obsažené, majíce na zřeteli, že podlé ob. 8.

$$(1\,4\,3) = (1\,2\,3) + (3\,2\,4) + (4\,2\,1),$$

obdržíme dále

$$6\,T = z_1\,(2\,3\,4) - z_2\,(3\,4\,1) + z_3\,(4\,1\,2) - z_4\,(1\,2\,3),$$

což se dá složiti podlé známého pravidla [12] v

$$6T = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ z_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix};$$

vyměníme-li konečně druhý sloupec za první a pak třetí za druhý [13], povstane konečně pro obsah čtyrstěnu vzorec podobný (1), totiž

$$6T = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \Delta, \tag{15}$$

kterýž možná ještě známým spůsobem zjednodušiti v

$$6T = \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_2, & y_3 - y_2, & z_3 - z_2 \\ x_4 - x_3, & y_4 - y_3, & z_4 - z_3 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Jak ze vzorce (15) jde na jevo, stane se $T = o$, všechny body leží tedy v jedné rovině, když determinant $\Delta = o$ a na-

[11]) ibid. pag. 22.
[12]) ibid. pag. 12.
[13]) ibid. pag. 21.

opak, leží-li čtyry body v jedné rovině, musí determinant, sestavený z jich souřadnic podlé vzorce (15), rovnati se 0.

Abychom určili velikost jednotlivých ploch, použijme známé poučky, že čtverec nějaké plochy v prostoru rovná se součtu čtverců průmětů této plochy na tři roviny souřadnicové, načež obdržíme, značí-li P_k plochu ležící proti bodu B_k a $P_{k\,(mn)}$ průmět její na rovinu mn,

$$P_k^2 = P_{k\,(xy)}^2 + P_{k\,(yz)}^2 + P_{k\,(zx)}^2 ;$$

označíme-li pak subdeterminanty patřící k Δ stejnými písmenami velkými, bude dále

$$2 P_{k\,(xy)} = Z_k ,$$
$$2 P_{k\,(yz)} = X_k ,$$
$$2 P_{k\,(zx)} = Y_k ,$$

z čehož jde, že všeobecně

$$4 P_k^2 = X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2 = M_k^2 . \qquad (17)$$

Délky jednotlivých hran nelze jednodušeji vyjádřiti nežli co vzdálenosti dvou bodů určených souřadnicemi, tedy vzorcem

$$l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2, \qquad (18)$$

ačkoliv i tu možná výraz na pravé straně poměry determinantů nahraditi.

Co se tkne délky kolmic p_k spuštěných s bodů B_k na protější plochy P_k, ty ustanoví se snadno porovnáním dvou výrazů pro obsah čtyrstěnu; s jedné strany máme totiž podlé vzorce (15)

$$6 T = \Delta ,$$

se strany druhé pak, jak známo ze stereometrie,

$$6 T = 2 P_k p_k = M_k p_k$$

z těchto dvou rovnic jde tedy všeobecně

$$p_k = \frac{\Delta}{M_k} . \qquad (19)$$

Abychom určili úhly, jež jednotlivé plochy s sebou uzavírají, musíme napřed znáti úhly, jež uzavírají s jednotlivými rovinami souřadnicovými; a tu jest podlé známé poučky o průmětech, značí-li α_k, β_k, γ_k úhly, jež uzavírá plocha P_k s rovinami XY, ZY a ZX,

$$P_{k\,(xy)} = P_k \cos \alpha_k ,$$
$$P_{k\,(yz)} = P_k \cos \beta_k ,$$
$$P_{k\,(zx)} = P_k \cos \gamma_k ,$$

z čehož jde, použijeme-li předešlých vzorců,

$$cos\,\alpha_k = \frac{Z_k}{M_k}, \quad cos\,\beta_k = \frac{X_k}{M_k}, \quad cos\,\gamma_k = \frac{Y_k}{M_k}.$$

Nazveme-li pak úhel, jejž uzavírají roviny P_i a P_k, krátce $(P_i\,P_k)$ a použijeme-li vzorce z analytické geometrie známého

$$cos\,(P_1\,P_2) = cos\,\alpha_1\,cos\,\alpha_2 + cos\,\beta_1\,cos\,\beta_2 + cos\,\gamma_1\,cos\,\gamma_2\,,$$

obdržíme velmi snadno

$$cos\,(P_1\,P_2) = \frac{X_1\,X_2 + Y_1\,Y_2 + Z_1\,Z_2}{M_1\,M_2}. \tag{20}$$

Zavedeme-li sinus místo kosinusu, zjednáme si vzorce jednodušší; obdržímeť především

$$sin^2(P_1\,P_2) = \frac{M_1^2\,M_2^2 - (X_1\,X_2 + Y_1\,Y_2 + Z_1\,Z_2)^2}{M_1^2\,M_2^2};$$

podlé výzamu veličin M_1 a M_2 a podlé zvláštní poučky o determinantech platící [14]) jest ale

$$M_1^2\,M_2^2 - (X_1\,X_2 + Y_1\,Y_2 + Z_1\,Z_2)^2$$
$$= (X_1\,Y_2)^2 + (Y_1\,Z_2)^2 + (Z_1\,X_2)^2;$$

---

[14]) Poučku příslušnou možná tímto spůsobem odůvodniti: Jestli $A = \Sigma \pm a_1\,b_2 \ldots l_n$, $B = \Sigma \pm \alpha_1\,\beta_2 \ldots \lambda_n$, $C = \Sigma \pm A_1\,B_2 \ldots L_n$ platí jak známo,

$$C = A\,.\,B\,, \tag{1}$$

jestli

$$A_k = a_1\,\alpha_k + b_1\,\beta_k + \ldots + l\,\lambda_k\,,$$
$$B_k = a_2\,\alpha_k + b_2\,\beta_k + \ldots + l_2\,\lambda_k\,, \tag{2}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$L_k = a_n\,\alpha_k + b_n\,\beta_k + \ldots + l_n\,\lambda_k.$$

Poněvadž C jest funkcí veličin A_k, B_k, ..., L_k, jde ze vzorce (1

$$A\frac{\partial B}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial C}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial C}{\partial A_k}\cdot\frac{\partial A_k}{\partial \alpha_k} + \ldots + \frac{\partial C}{\partial L_k}\frac{\partial L_k}{\partial \alpha_k}$$

neb použijeme-li vzorců (2)

$$A\frac{\partial B}{\partial \alpha_k} = a_1\frac{\partial C}{\partial A_k} + a_2\frac{\partial C}{\partial B_k} + \ldots + a_n\frac{\partial C}{\partial L_k};$$

taktéž

$$A\frac{\partial B}{\partial \beta_k} = b_1\frac{\partial C}{\partial A_k} + b_2\frac{\partial C}{\partial B_k} + \ldots + b_n\frac{\partial C}{\partial L_k},$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$A\frac{\partial B}{\partial \lambda_k} = l_1\frac{\partial C}{\partial A_k} + l_2\frac{\partial C}{\partial B_k} + \ldots + l_n\frac{\partial C}{\partial L_k}.$$

Znásobíme-li tyto rovnice, jak po sobě jdou, poměry differenciálními

$$\frac{\partial A}{\partial a_k},\ \frac{\partial A}{\partial b_k},\ \ldots,\ \frac{\partial A}{\partial l_k},$$

dále platí o těchto determinantech stupně druhého skládajících se ze subdeterminantů [15])

$$(X_1 Y_2) = \Delta (z_3 - z_4)$$
$$(Y_1 Z_2) = \Delta (x_3 - x_4)$$
$$(Z_1 X_2) = \Delta (y_3 - y_4),$$

z čehož jde, sečteme-li, uvedše napřed na druhou mocninu, pomocí vzorce (18)

$$(X_1 Y_2)^2 + (Y_1 Z_2)^2 + (Z_1 X_2)^2 = \Delta^2 l_{34}^2;$$

dosadíme-li tedy tento výraz do vzorce předešlého, obdržíme konečně

$$sin (P_1 P_2) = \frac{\Delta l_{34}}{M_1 M_2} \tag{21}$$

a podobně i ostatní až k poslednímu

$$sin (P_1 P_2) = \frac{\Delta l_{12}}{M_3 M_4}.$$

---

a sečteme-li na obou stranách, obdržíme, majíce zřetel k známým vzorcům

$$a_i \frac{\partial A}{\partial a_k} + b_i \frac{\partial A}{\partial b_k} + \ldots + l_i \frac{\partial A}{\partial l_k} = o,$$
$$a_k \frac{\partial A}{\partial a_k} + b_k \frac{\partial A}{\partial b_k} + \ldots + l_k \frac{\partial A}{\partial l_k} = A,$$
$$\frac{\partial A}{\partial a_k} \frac{\partial B}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial A}{\partial b_k} \frac{\partial B}{\partial \beta_k} + \ldots + \frac{\partial A}{\partial l_k} \frac{\partial B}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial C}{\partial K_k} \tag{3}$$

Jestli pak ve zvláštním případě všeobecně

$$a = \alpha,\ b = \beta,\ c = \gamma, \text{ tedy } A = B, \tag{4}$$

obdrží se konečně vzorec svrchu uvedenou poučku vyjádřující

$$\left(\frac{\partial A}{\partial a_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b_k}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial A}{\partial l_k}\right)^2 = \frac{\partial C}{\partial K_k}. \tag{5}$$

Jestli tedy na př. $A = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3$, bude

$$B_2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2,$$
$$B_3 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = C_2$$
$$C_3 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2$$
$$\frac{\partial A}{\partial a_1} = b_2 c_3 - b_3 c_2,\quad \frac{\partial A}{\partial b_1} = c_2 a_3 - a_2 c_3,\quad \frac{\partial A}{\partial c_1} = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$
$$\frac{\partial C}{\partial A_1} = B_2 C_3 - B_3 C_2,$$

a tudíž podlé vzorce (5)

$$(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2) - (a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3)^2$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (b_2 c_3 - b_3 c_2)^2 + (c_2 a_3 - c_3 a_2)^2$$

[15]) ibid. pag. 41.

Abychom konečně ustanovili úhly, jež uzavírají jednotlivé hrany, požijme známých vzorců (17) a

$$2P = ab \sin \gamma,$$

načež obdržíme pro plochu P_1

$$\begin{aligned} 2P_1 &= l_{23}\, l_{34} \sin(234) \\ &= l_{34}\, l_{42} \sin(342) \\ &= l_{42}\, l_{23} \sin(423) = M_1, \end{aligned}$$

z čehož jde bezprostředně

$$\sin(234) = \frac{M_1}{l_{23}\, l_{34}} \text{ a t. d.}$$

Podobně se obdrží v ostatních plochách

$$\begin{aligned} \sin(341) &= \frac{M_2}{l_{34}\, l_{41}} \text{ a t. d.} \\ \sin(412) &= \frac{M_3}{l_{41}\, l_{12}} \text{ a t. d.} \\ \sin(123) &= \frac{M_4}{l_{12}\, l_{23}} \text{ a t. d.} \end{aligned} \tag{22}$$

Abychom konečně vyšetřili všechny poměry čtyrstěnu, určeného rovnicemi omezujících rovin

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 &= o, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 &= o, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 &= o, \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 &= o, \end{aligned} \tag{23}$$

zjednejme si především souřadnice vrcholů; obdržíme tu, spojujíce rovnice tyto po třech,

$$\begin{array}{ll} \text{z 2., 3. a 4.} & x_1 = \frac{A_1}{D_1},\; y_1 = \frac{B_1}{D_1},\; z_1 = \frac{C_1}{D_1}, \\ \text{z 3., 4., a 1.} & x_2 = \frac{A_2}{D_2},\; y_2 = \frac{B_2}{D_2},\; z_2 = \frac{C_2}{D_2}, \\ \text{z 4., 1. a 2.} & x_3 = \frac{A_3}{D_3},\; y_3 = \frac{B_3}{D_3},\; z_3 = \frac{C_3}{D_3}, \\ \text{z 1., 2. a 3.} & x_4 = \frac{A_4}{D_4},\; y_4 = \frac{B_4}{D_4},\; z_4 = \frac{C_4}{D_4}, \end{array} \tag{24}$$

značí-li A, B, C, D subdeterminanty patřící k prvkům determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Zavedeme-li hodnoty (24) do vzorce (15), obdržíme pak pro obsah čtyrstěnu T

$$6T = \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix};$$

jelikož ale prvky tohoto determinantu patří co subdeterminanty stupně prvního k determinantu (25), rovná se, jsouc stupně čtvrtého, třetí mocnině determinantu původního, z čehož jde, že obsah čtyrstěnu vyjadřuje vzorec jednoduchý

$$6T = \frac{\Delta^3}{D_1 D_2 D_3 D_4}. \tag{26}$$

Jestli tu $\Delta = o$, jest i $T = o$, z čehož patrno, že všechny čtyry roviny protínají se v jednom bodě a naopak, protínají-li se čtyry roviny v jednom bodě, jest i $T = o$.[16]),

Znajíce vzorec (26) ustanovíme snadno ploský obsah jednotlivých trojúhelníků čtyrstěn omezujících; jestiť především

$$3T = P_1 p_1,$$

značí-li P_1 ploský obsah trojúhelníku a p_1 příslušnou výšku neb délku kolmice s protějšího rohu na něj spuštěné; dále tu jest

$$p_1 = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}},$$

aneb zavedeme-li hodnoty ze soustavy (24) a položíme-li všeobecně

$$M_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2}, \tag{27}$$

co konečný vzorec pro délku kolmice p_1

$$p_1 = \frac{\Delta}{D_1 M_1}.$$

---

16) ibid. pag. 32.

a podobně pro ostatní

$$p_k = \frac{\Delta}{D_k M_k}. \tag{28}$$

Pomocí vzorce (26) a (28) obdrží se pak velmi snadno všeobecně

$$P_k = \frac{\Delta^2 M_k D_k}{2 D_1 D_2 D_3 D_4}. \tag{29}$$

Jestli tedy čtyrstěn pravidelný, platí-li tedy podmínka

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4,$$

jest patrně i

$$D_1 M_1 = D_2 M_2 = D_3 M_3 = D_4 M_4 = K,$$

z čehož se dále poznává, že i

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{\Delta}{K}.$$

Abychom určili úhel a_{pq}, jejž uzavírá rovina P_p s rovinou P_q, použijme známého vzorce

$$\cos a_{pq} = \frac{a_p a_q + b_p b_q + c_p c_q}{M_p M_q},$$

načež obdržíme snadno vzorec

$$\sin^2 a_{pq} = \frac{(a_p b_q)^2 + (b_p c_q)^2 + (c_p a_q)^2}{M_p{}^2 M_q{}^2}, \tag{30}$$

v jehož čitateli se vyskytují podřízené determinanty stupně druhého.

Chceme-li určiti délku jednotlivých hran, považujme ji jakožto vzdálenost dvou bodů v prostoru, načež obdržíme

$$h_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

aneb máme-li zřetel k vzorcům (24),

$$h_{12}^2 = \frac{(A_1 D_2)^2 + (B_1 D_2)^2 + (C_1 D_2)^2}{D_1{}^2 D_2{}^2};$$

použijeme-li dále známého vzorce

$$(a_1 b_2) \Delta^{n-3} = (C_3 D_4 \ldots L_n)$$ [17],

povstane z něho pomocí vzorce (30) konečně

$$h_{12} = \Delta \frac{M_3 M_4}{D_1 D_2} \sin a_{34}; \tag{31}$$

[17]) ibid. pag. 41.