O kuželosečkách a jich kruzích zakřivenosti.

(Přednáška, kterouž prof. Dr. *Emil Weyr* dne 20. října 1872 započal novou činnost Jednoty českých mathematiků.)

Pro veškeré úlohy, týkající se pouze vzájemného rozpoložení bodů téže křivky, osvědčuje se býti velmi výhodným upotřebení jediné proměnné veličiny — *parametru* —, jejímiž hodnotami pak jednotlivé body dotyčné křivky určeny jsou. Každá vlastnost křivky, týkající se pouze vzájemné polohy více bodů této křivky, vyjadřuje se pak jistou rovnicí, do kteréž vcházejí pak parametry oněch bodů.

Jest-li možná sříditi takovou souvislost hodnot parametru a příslušných bodů křivky, že každému bodu jen jediná hodnota parametru a naopak každé takovéto hodnotě jen jediný bod odpovídá, pak nazýváme křivku „*racionální*".

Takové racionální křivky jsou i *kuželosečky*. Vrcholová rovnice kuželoseček pro souřadnice pravoúhlé zní, jak známo,

$$y^2 = 2px + qx^2 \tag{1}$$

a příslušná kuželosečka jest *ellipsou, parabolou* neb *hyperbolou* dle toho, jest-li $q \lesseqgtr 0$.

Budiž u goniometrická tangenta úhlu, jejž tvoří osa x s přímkou spojující bod (xy) kuželosečky s bodem počátečním t. j. budiž:

$$\frac{y}{x} = u \tag{2}$$

Poněvadž každá počátkem procházející přímka kuželosečku jen v jediném bodu protíná (mimo pevný vrchol) a poněvadž naopak každý bod kuželosečky jen jedinou takovouto přímku určuje a poněvadž konečně hodnotou u ona přímka a přímkou hodnota veličiny u úplně určena jest, tu soudíme, že hodnoty poměru u určují *úplně* a *jednoznačně* (eindeutig, univocamente) body příslušné na kuželosečce. Veličina u jest tudíž parametr druhu výše vyznačeného a kuželosečky jsou tudíž skutečně křivky racionální.

Můžeme nyní krátce mluviti o bodu u naší křivky, čímž vyrozumíváme onen bod křivky, jehož parametr $\left(\frac{y}{x}\right)$ má zvláštní hodnotu u.

Pravoúhlé souřadnice x, y bodu u vyjadřují se velmi jednoduše pomocí parametru u. Neb z (2) plyne $y = ux$, což vloženo do (1) nám dá:

a dále:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2p}{u^2-q} \\ x &= \frac{2pu}{u^2-q} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Souřadnice stanou se současně nekonečně velkými, jest-liže $u^2 = q$ aneb $u = \pm\sqrt{q}$. Nekonečně vzdálené body naší kuželosečky mají tedy parametry $+\sqrt{q}$ a $-\sqrt{q}$. Již z tohoto vychází na jevo, že křivka jest *hyperbolou*, je-li $q > 0$, poněvadž pak $\sqrt{q}$ jest realná a tedy i oba nekonečně vzdálené body. Obdobně plyne, že pro $q < 0$ máme *ellipsu* a pro $q = 0$ *parabolu*.

Abychom mohli určiti též parametry vrcholů, sestrojme sobě nejdříve výraz pro směrnici přímky spojující dva body kuželosečky u_1 u_2.

Je-li β úhel přímky $\overline{u_1 u_2}$ s osou x, tu máme, jak známo,

$$tg\beta = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{u_1}{u_1^2-q} - \frac{u_2}{u_2^2-q}}{\frac{1}{u_1^2-q} - \frac{1}{u_2^2-q}},$$

aneb po snadné redukci,

$$tg\beta = \frac{u_1 u_2 + q}{u_1 + u_2} \qquad (4)$$

Z tohoto vzorce plyne, že přímka $\overline{u_1 u_2}$ rovnoběžnou bude s osou x, jest-liže

$$u_1 u_2 + q = 0,$$

a rovnoběžnou s osou y, je-li:

$$u_1 + u_2 = 0.$$

Jsou-li $u_1\ u_2\ u_3$ tři body naší kuželosečky a jest-li $\overline{u_1 u_3}$ // k ose x a $\overline{u_2 u_3}$ // k ose y, pak body $u_1\ u_2$ jsou body protilehlé, t. j. $\overline{u_1\ u_2}$ jest průměrem naší křivky.

Máme pro tento případ rovnice:

$$u_1 u_3 + q = 0,$$
$$u_2 + u_3 = 0,$$

z čehož ihned plyne:

$$u_1 u_2 = q$$

co podmínka, by body $u_1\ u_2$ byly body protilehlými.

Z rovnice (4) plyne směrnice $tg\alpha$ pro tečnu bodu u, učiníme-li $u_2 = u_1 = u$, což nám dá:

$$tg\alpha = \frac{u^2 + q}{2u}, \tag{5}$$

Směrnice asymptot obdržíme, vložíme-li do tohoto vzorce $u = \pm\sqrt{q}$, což nám dá $tg\alpha = \pm\sqrt{q}$.

Spojíme-li kuželosečku s libovolným kruhem

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + m^2 = 0, \tag{6}$$

kde
$$m^2 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2,$$

a chceme-li určiti parametry $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$ čtyř bodů, v nichž kruh kuželosečku protíná, tu vložme hodnoty z (3) do rovnice kruhu (6), čímž po snadném zjednodušení obdržíme biquadratickou rovnici:

$$m^2 u^4 - 4\beta p\, u^3 + (4p^2 - 4\alpha p - 2m^2 q)\, u^2 + 4\beta p q u$$
$$+ (4p^2 + 4\alpha p q + m^2 q^2) = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou parametry průseků kruhu a kuželosečky. Poněvadž kruh jest třemi body úplně určen, nechá se očekávati, že mezi hodnotami $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$ řečených parametrů bude stávati takové souvislosti, že každá z nich ostatními třemi úplně určena bude.

Připomeneme-li si známou souvislost kořenů a činitelů rovnic, shledáme z poslední rovnice, že

$$(u)_1 = \frac{4\beta p}{m^2},\quad (u)_3 = -\frac{4\beta p q}{m^2},$$

tak že tedy

$$(u)_3 + q\,(u)_1 = 0, \tag{7}$$

při čemž

$$(u)_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4,$$
$$(u)_3 = u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4.$$

Rovnice (7) vyjadřuje souvislost, o které jsme se dříve zmínili a která nám dovoluje určiti jednoduchým spůsobem jeden z čtyř bodů u_1 u_2 u_3 u_4, známe-li ostatní tři. Rovnici (7) lze považovati za podmínku, by čtyry body u_1 u_2 u_3 u_4 naší kuželosečky na tomtéž kruhu se nalezaly.

Zajímavé jest upotřebení rovnice (7) k důkazu věty o kruzích zakřivenosti, vyřknuté slavným *Steinerem* (viz Crelle sv. ...) a dokázané analytickým spůsobem (však jen pro ellipsu) slovutným mathematikem *Joachimsthalem* (viz Crelle sv. ...) jakož i geometrický p. *Augustem* (ibid. sv. ...). Rovnice (7) nám dovoluje následující pro kuželosečky vůbec platnost mající větu dokázati.

„*Každým bodem kuželosečky procházejí tři kruhy zakřivenosti, které se dotýkají kuželosečky v třech bodech nalezajících se s původním bodem na obvodu téhož kruhu.*"

Budiž u_4 libovolný bod kuželosečky, kterým prokládáme kruhy zakřivenosti. Jest-li u bod, v němž se takovýto kruh kuželosečky dotýká, tu mezi u_4 a u stává relace, kterou obdržíme z rovnice (7), položíme-li $u_1 = u_2 = u_3 = u$. Tu jest především

$$(u)_1 = 3u + u_4,$$
$$(u)_3 = u^3 + 3u^2 u_4$$

a rovnice (7) přejde tudíž v následující:

$$u^3 + 3u^2 u_4 + 3uq + u_4 q = 0 \tag{8}$$

Rovnice tato jsouc stupně třetího nám praví, že každým bodem (u_4) procházejí tři kruhy zakřivenosti, (mimo kruh zakřivenosti, který se v tomto bodu u_4 dotýká), jejichž body styku mají kořeny rovnice (8) za parametry.

Označíme-li tyto kořeny u_1 u_2 u_3, tu plyne z rovnice (8) bezprostředně:

$$u_1 + u_2 + u_3 = -3u_4,$$
$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = 3q,$$
$$u_1 u_2 u_3 = -qu_4;$$

z prvních dvou rovnic dále plyne

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -2u_4,$$
$$u_1 u_2 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4 = 3qu_4.$$

Přičteme-li rovnici $u_1 u_2 u_3 = -qu_4$ k poslední, obdržíme

$$(u)_3 = 2qu_4$$