Drobné zprávy.

O differenciálu povrchu.

(Podává *G. Blažek.*)

Výrazy pro differenciál povrchu, vyjádřené souřadnicemi pravoúhlými a polárními, dají se snadně s jediného hlediště vyvinouti, upotřebí-li se známé poučky, že čtverec obsahu rovinné plochy rovná se součtu čtverců obsahu pravoúhlých průmětů té plochy na tři kolmo na sobě stojící roviny.

Buďtež v pravoúhlé soustavě souřadnic M' a M'' (ob. 15.) pravoúhlé průměty bodu M v rovině xz na osy ox a oz, taktéž N' a N'' průměty bodu N v rovině yz ua osy oy a oz; pak máme podle poučky právě uvedené

$$\overline{MON}^2 = \overline{M'ON'}^2 + \overline{MON''}^2 + \overline{M''ON}^2,$$

z čehož jde, položíme-li $MM' = p$, $OM' = p'$, $NN' = q$, $ON' = q'$,

$$4\overline{MON}^2 = p'^2q'^2 + p'^2q^2 + p^2q'^2.$$

Sestrojíme-li rovnoběžník $MONP$, jehož průmětem do roviny xy jest obdélník $M'ON'P'$, pak jest patrně $MONP = 2MON$ a

$$MONP = \sqrt{p'^2q'^2 + p'^2q^2 + p^2q'^2}. \tag{1}$$

Abychom obdrželi k bodu $O(x, y, z)$ náležící differenciál povrchu v souřadnicích pravoúhlých, položme skrze bod O rovinu s osami x a y rovnoběžnou, udělme veličině x přírůstek $p' = dx$, veličině y přírůstek $q' = dy$ a sestrojme obdélník $M'ON'P'$ a na povrchu část $MONP$, jejíž průmětem právě jest $M'ON'P'$, (pro nekonečně malé rozměry můžeme ji považovati za rovinnou); nazveme-li ji dP, pak jest, poněvadž

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}dx, q = \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

podle (1)

$$dP = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \tag{2}$$

Abychom však obdrželi differenciál povrchu v souřadnicích polárních, položme skrze bod O (r, ϱ, ω) kouli, jejíž střed se v pólu nachází, a sestrojme na jejím povrchu obdélník $M'ON'P'$; přibývá-li veličiny ϱ o $d\varrho$, opisuje poloměr r na povrchu naší koule oblouk $p' = rd\varrho$, mění-li se však ω o $d\omega$, opisuje r oblouk $q' = r \sin \varrho \, d\omega$; položíme-li nyní skrze pól a skrze strany obdélníku $M'ON'P'$ čtyry roviny vytínající na povrchu plochy opět část $MONP = dP$, najdeme, poněvadž

$$p = \frac{\partial r}{\partial \varrho} d\varrho \,, q = \frac{\partial r}{\partial \varrho} d\omega \,,$$

podlé (1)

$$dP = r \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varrho}\right)^2\right] \sin^2 \varrho + \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2} d\varrho d\omega \, ^{*)}.$$

O kuželi druhého stupně.

(Poučka od *Ed. Weyra.*)

Každá z tří hlavních rovin kužele druhého stupně protíná jej ve dvou hranách, jež uzavírají úhel φ; jsou-li φ_1, φ_2 a φ_3 hodnoty tohoto úhlu vzhledem k řečeným třem rovinám, platí o nich

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_3 \cos \varphi_1 + 1 = 0.$$

Důkaz. Zvolíme-li osy kužele za osy souřadnic x, y, z, jest rovnice jeho, jak známo,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0\,;$$

položíme-li tu

$$\begin{aligned} x &= 0, \text{ bude } by^2 + cz^2 = 0, \\ y &= 0, \quad ,, \quad ax^2 + cz^2 = 0, \\ z &= 0, \quad ,, \quad ax^2 + by^2 = 0, \end{aligned}$$

kteréžto rovnice představují řečené hrany průsečné.

---

*) Vzorec poslední byl poprvé podán *Eulerem*, jenž jej však zavedením nových proměnných ze vzorce (2) obdržel. Bezprostřední vyvinut uveřejnil *Grunert* v díle svém „Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Coordinatensysteme" p. 267 a v elegantnější formě *Unferdinger* v pojednání „Ableitung der Complanationsformel in Polarcoordinaten aus der Figur" Grunerts Arch. T. 48 p. 106.

Odvozování zde podané vysvětluje geometrický význam každého členu pod znamením odmocniny a nedá se snadně stručnějším nahraditi.

Poněvadž osy souřadnicové půlí úhly φ, jde z těchto rovnic

$$tg^2\,{}^1\!/_2\,\varphi_1 = -\frac{b}{c},\ tg^2\,{}^1\!/_2\,\varphi_2 = -\frac{c}{a},\ tg^2\,{}^1\!/_2\,\varphi_3 = -\frac{a}{b},$$

z kterýchžto vzorců znásobením se obdrží především

$$tg^2\,{}^1\!/_2\,\varphi_1\, tg^2\,{}^1\!/_2\,\varphi_2\, tg^2\,{}^1\!/_2\,\varphi_3 + 1 = 0$$

aneb

$$\sin^2{}^1\!/_2\,\varphi_1 \sin^2{}^1\!/_2\,\varphi_2 \sin^2{}^1\!/_2\,\varphi_3 + \cos^2{}^1\!/_2\,\varphi_1 \cos^2{}^1\!/_2\,\varphi_2 \cos^2{}^1\!/_2\,\varphi_3 = 0;$$

použijeme li pak známých vzorců goniometrických, abychom vyjádřili *sin* a *cos* polovičních úhlů *cos* celých, zjednáme si snadno

$$(1-\cos\varphi_1)(1-\cos\varphi_2)(1-\cos\varphi_3) + (1+\cos\varphi_1)(1+\cos\varphi_2)(1+\cos\varphi_3) = 0$$

aneb znásobíme-li, konečně

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + \cos\varphi_3 \cos\varphi_1 + 1 = 0,$$

což mělo býti dokázáno.*)

O přidružených zlomcích přibližných a jich upotřebení.

(Podává dr. *F. J. Studnička.*)

Ustanovíme-li k řetězovému zlomku

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1} \ldots)$$

podle známých pravidel zlomky přibližné a značí-li

$$\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}},\ \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}$$

dva krajní ze tří po sobě jdoucích, vyjádří se celá řada mezi ně připadajících zlomků přidružených vzorcem

$$\frac{r_k}{s_k} = \frac{\alpha_n k + \alpha_{n-1}}{\beta_n k + \beta_{n-1}},$$

zavede-li se do něho za k po sobě

$$0, 1, 2, \ldots, a_{n+1}-1, a_{n+1},$$

kdež značí a_{n+1} článkového dělitele, který vede k druhému z vytknutých zlomků.

Jelikož tu, jak známo,

$$r_k = \alpha_n k + \alpha_{n-1}, \qquad (1)$$

$$s_k = \beta_n k + \beta_{n-1}, \qquad (2)$$

---

*) Jedna z hodnot φ_1, φ_2, φ_3 jest patrně vždy ideální.

obdržíme, vyloučivše k, jako při hlavních zlomcích přibližných

$$\alpha_n s_k - \beta_n r_k = (-1)^{n-1}, \alpha_n < \beta_n. \tag{3}$$

A této relace možná použiti k řešení neurčitých rovnic stupně prvního čísly celistvými.

Značí-li a a b relativní prvočísla, jest základní tvar takovýchto rovnic

$$ax - by = c; \tag{4}$$

proměníme-li pak zlomek $a : b$ v řetězec, bude poslední přibližný zlomek, dejme tomu

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{a}{b}$$

a předposlední tudíž

$$\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \frac{\alpha}{\beta},$$

vzorec (1), (2) a (3) promění se za tou příčinou v

$$r_k = ak + \alpha, \tag{5}$$

$$s_k = bk + \beta, \tag{6}$$

$$as_k - br_k = (-1)^{n-1}, a < b. \tag{7}$$

Znásobíme-li tedy poslední tuto rovnici činitelem $(-1)^{n-1} c$, povstane z ní

$$(-1)^{n-1} [acs_k - bcr_k] = c,$$

z čehož patrno, porovnáme-li s rovnicí (4), že

$$x = (-1)^{n-1} cs_k,$$

$$y = (-1)^{n-1} cr_k,$$

aneb dosadíme-li za r_k a s_k hodnoty ze vzorců (5) a (6),

$$x = (-1)^{n-1} [bp + \beta c], \tag{8}$$

$$y = (-1)^{n-1} [ap + \alpha c], \tag{9}$$

při čemž možná za $p = kc$ dosaditi jakékoli číslo celistvé.

Jestli $a > b$, píše se ve vzorci (8) a (9) n místo $n-1$.

O Eulerově vzorci, podle něhož možná konvergentní řady proměniti v rychleji konvergující.

(Příspěvek k počtu s operačními symboly od dra. *F. J. Studničky.*)

V klassickém díle svém o počtu differenciálním jednajícím zanáší se *Euler* též s převáděním řad na jiné [1]), které rychleji

[1]) Instit. calc. diff. Pars II. „De transformatione serierum" pag. 232. 1755.

konvergují, a přichází tu k zvláštnímu vzorci, podle něhož možná úkol tento snadno řešiti; k témuž vzorci, jiným však způsobem přišel později též *Hutton*[2]) a *Poncelet*[3]), podle nichž se řídí pozdější mathematikové.

Důkaz, jaký tu vedou, zakládá se na indukci a jest dosti rozvláčný; pomocí počtu s operačními symboly[4]) možná jej však co nejrychleji vyvinouti.

Chceme-li totiž řadu

$$s = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots, \tag{1}$$

kde o jednotlivých členech platí

$$u_1 > u_2 > u_3 \ldots > u_n > u_{n+1} \ldots,$$

proměniti v jinou rychleji konvergující, sestavme především

$$2s = u_1 + (u_1 - u_2) - (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) - \ldots \tag{2}$$

a zaveďme označení

$$u_k - u_{k+1} = \Delta u_k,$$

všeobecně pak

$$\Delta^m u_k - \Delta^m u_{k+1} = \Delta^{m+1} u_k,$$

načež z rovnice (2) povstane

$$2s = u_1 + \Delta u_1 - \Delta u_2 + \Delta u_3 - \ldots$$

aneb, porovnáme-li s řadou (1),

$$2s = u_1 + \Delta s, \tag{3}$$

jelikož patrně

$$\Delta s = \Delta u_1 - \Delta u_2 + \Delta u_3 - \Delta u_4 + \ldots$$

Vyjádříme-li pak rovnici (3) symbolickým tvarem

$$s(2 - \Delta) = u_1,$$

zjednáme si velmi jednoduchým obratem

$$s = u_1 : (2 - \Delta)$$

a provedeme-li naznačené dělení a vrátíme-li se pak k původnímu významu symbolu Δ, konečně

$$s = \frac{u_1}{2} + \frac{\Delta u_1}{2^2} + \frac{\Delta^2 u_1}{2^3} + \ldots$$

aneb použijeme-li symbolu Σ,

---

[2]) Tracts on mathematical and philosophical subjects. t. I. pag. 176, 1812.

[3]) Application de la méthode des moyennes à la transformation, au calcul numérique et à la détermination des limites du reste des séries. Crelle's J. Bd. XIII. pag. 1. 1835.

[4]) Srovnej „Třetí zpráva jednoty českých mathematiků.“

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k u_1}{2^{k+1}},$$

což se shoduje s Eulerovým vzorcem.

Podle toho možná na př. proměniti známou řadu Leibnicovu

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

v rychleji konvergující

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \ldots$$

O kvadratuře kruhu *)

(Podává dr. *F. J. Studnička.*)

Každým skoro rokem domnívá se někdo, že sestrojil *perpetuum mobile* aneb vynalezl *kvadraturu kruhu*, ač věda, do kteréž tyto otázky patří, dávno již dokázala, že i toto i ono jest nemožné.

Co se zejmena tkne kvadratury kruhu, možná spůsobem dosti jednoduchým dokázati, že i π i π^2 značí *irracionální* číslo, a tím se přesvědčiti, že nelze u kruhu poměr obvodu k poloměru vyjádřiti číslem racionálním aneb že obvod jest nesměřitelný poloměrem.

Třebať tu jen znáti z theorie řetězců

a) vzorec $tg\,x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}}$

b) poučku, že nekonečný řetězec

$$\cfrac{a_1}{b_1 \pm \cfrac{a_2}{b_2 \pm \cfrac{a_3}{b_3 \pm \ldots}}}$$

---

*) Článek tento uveřejňujeme za tou příčinou, abychom mohli k němu poukázati, když nám někdo, jakž často se děje, oznámí, že se mu pomocí boží podařilo nalézti kvadraturu kruhu.

má irracionální hodnotu mezní, značí-li všeobecně a_k, b_k celistvá čísla positivní, o nichž platí aspoň od některého článku počínajíc

$$a_k < b_k.$$

Podle toho jest tangenta čísla racionálního veličinou irracionální; a poněvadž

$$tg\frac{\pi}{4} = 1,$$

musí býti $\frac{\pi}{4}$ a tudíž i π veličinou irracionální.

Podobně možná důkaz provésti o π^2; třebať jen použíti známého vzorce

$$2 = \cfrac{\pi^2}{6 - \cfrac{\pi^2}{10 - \cfrac{\pi^2}{14 - \ldots}}};$$

jen o vyšších mocninách π neví se dosud určitě, jsou-li též irracionální jako mocniny stálé e čili nic. K poučce *„každá racionální mocnina stálé e jest veličinou irracionální“* nejspíše se druží podobná *„každá racionální mocnina stálé π jest veličinou irracionální.“*

Docela jiného významu nabývá však otázka o kvadratuře kruhu, jedná-li se o to, aby se *vypočítala* neb *znázornila* hodnota tohoto stálého poměru π co možná nejurčitěji aneb tak určitě, jak kdo chce.

Co se tkne tohoto úkolu, zná se mnoho rozmanitých spůsobů, jakými se pomocí pravítka a kružidla dá sestrojiti přibližně až na 5 míst desetinných hodnota poměru π *); máme-li pak na zřeteli pouze přibližné vypočítání hodnoty π, tu nejlépe slouží nekonečné výrazy algebraické, jako nekonečné *součty* (řady), *součiny* aneb *podíly* (řetězce), jakými analysis vyjadřuje π a jichž ode dávna bylo též používáno.

Wallis na př. uveřejnil již r. 1655 vzorec součinový

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots,$$

krajan jeho *Brouncker* r. 1658 vzorec řetězcový

*) Viz *Tilšer* „Soustava deskriptivní geometrie“ pag. 40.

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ldots}}}}$$

a *Leibnic* r. 1682 jednoduchý vzorec řadový

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

od kteréžto doby poznala se hojnost podobných, mnohem však přiměřenějších vzorců na vypočítání hodnoty π.[1])

Jak se během času postupovalo v určitosti, jakou byla vyměřena tato hodnota, poznati lze nejlépe z tohoto sestavení: Určilť π

roku	250	př.	Kr.	*Archimedes* [2])	na	2	místa	desetinná
„	120	po	Kr.	*Ptolomæus*	„	3	„	„
„	1464	„	„	*Regiomontanus*	„	3	„	„
„	1580	„	„	*J. Rheticus*	„	8	míst	desetinných
„	1585	„	„	*A. Metius*	„	8	„	„
„	1579	„	„	*F. Vieta*	„	11	„	„
„	1597	„	„	*A. Romanus*	„	16	„	„
„	1616	„	„	*L. v. Ceulen* [3])	„	32	„	„
„	1621	„	„	*W. Snellius*	„	34	„	„
„	1717	„	„	*A. Sharp*	„	72	„	„
				Machin	„	100	„	„
„	1719	„	„	*de Lagny*	„	114	„	„
„	1742	„	„	*Euler* [4])	„	127	„	„
„	1790	„	„	*Vega*	„	136	„	„
„	1842	„	„	*Rutherford*	„	152	„	„
				(Anonymus)	„	154	„	„
„	1844	„	„	*Z. Dahse*	„	200	„	„
				Clausen	„	256	„	„
„	1853	„	„	*Shanks*	„	318	„	„
„	„	„	„	*Richter*	„	330	„	„
„	1854	„	„	*Richter*	„	400	„	„
„	1853	„	„	*Rutherford*	„	440	„	„
„	1855	„	„	*Richter*	„	500	„	„
„	1853	„	„	*Shanks*	„	530	„	„

Výsledek posledně uvedeného výpočtu Shanksova zní takto:

$\pi = 3\cdot$ 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279
502 884 197 169 399 375 105 820 974 944
592 307 816 406 286 208 998 628 034 825
342 117 067 982 148 086 513 282 306 647
093 844 609 550 582 231 725 359 408 128
481 117 450 284 102 701 938 521 105 559
644 622 948 954 930 381 964 428 810 975
665 933 446 128 475 648 233 786 783 165
271 201 909 145 648 566 923 460 348 610
454 326 648 213 393 607 260 249 141 273
724 587 006 606 315 588 174 881 520 920
962 829 254 091 715 364 367 892 590 360
011 330 530 548 820 466 521 384 146 951
941 511 609 433 057 270 365 759 591 953
092 186 117 381 932 611 793 105 118 548
074 462 379 962 749 567 351 885 752 724
891 227 938 183 011 949 129 833 673 362
440 656 643 086 021 394 88...

O původu zemského magnetismu.

Stojí-li koule positivní elektřinou opatřená proti isolované kouli kovové, stane se indukcí polokoule odvrácená taktéž positivní, polokoule však k ní obrácená negativní. Otáčí-li se pak tato koule kolem své osy, pohybují se navedené elektřiny v opačném směru, čímž povstává elektrický proud, jdoucí tímto

---

[1]) Viz „O kvadratuře kruhu.“ Historicko-mathematické pojednání od Fr. Müllera. 1865.

[2]) *Archimedes* dokázal, že hodnota π jest mezi $3\frac{10}{71}$ a $3\frac{10}{70}$. *Eudoxus* komentator praví, že *Apollonius* a *Claudius Ptolomæus* ustanovili určitěji π, že tím ale není zastíněna sláva Archimedova, poněvadž poměr jím vyšetřený jest jednoduchý a „*πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον.*“

[3]) Po *Ludolfu* v. C. nazváno π též číslem Ludolfovým aneb zkrátka Ludolfínou.

[4]) „De variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi“ Comm. Petrop. T. VIIII. pag. 227.

opačným směrem, jak professor *Marco* jednoduchým pokusem dokázal.

Poněvadž slunce podle učení astronomův a fysikův jest těleso positivně elektrické, musí býti za tou příčinou polokoule zemská od něho odvrácená taktéž elektro-positivní, kdežto polokoule k němu obrácená jest elektro-negativní. A poněvadž se země točí kolem své osy od západu k východu, musí v ní touto sluneční indukcí povstati elektrický proud jdoucí opačným směrem, tedy od východu k západu.

V slunci tedy hledati sluší zřídlo elektrických proudů, kterými se podle Ampère-ovy theorie vykládá úkaz zemského magnetismu.

Nestejnost zemského magnetismu v přísluní a odsluní, denní jeho variace, odvislost těchto změn od periody slunečních skvrn [1]) a vliv měsíce, podléhajícího podobné indukci, na tyto změny vykládá [2]) prof. Marco co jednoduché nutné výsledky této své theorie.

---

[1]) Prof. Hornstein, ředitel pražské hvězdárny, dokázal touto cestou, že čas jednoho otočení slunce obnáší 24·55 dne, jelikož perioda proměn zemského magnetismu od slunce závisícího trvá 26.33 dne; proslulý pozorovatel slunce prof. Spoerer udává podle jiných úkazů 24·241 dne, z čehož poznati lze, jak málo se liší výsledky rozličnými spůsoby obdržené.

[2]) „Il nuovo Cimento“ T. III. pag. 369.