z čehož patrno, že *subdeterminant soustavy přidružené stupně $(n-k)$tého rovná se $(n-k-1)$ní mocnině determinantu původního, znásobené s příslušným determinantem doplňkovým.*

Poznámka. Použijeme-li počtu differenciálního, můžeme tyto výsledky ještě kratším spůsobem vyjádřiti a sice soustavu vzorců (5) jednoduše nahraditi vzorci

$$\begin{aligned} \Delta^{n-1} &= \Delta', \\ a_1\, \Delta^{n-2} &= \frac{\partial \Delta'}{\partial A_1}, \\ (a_1\, b_2)\, \Delta^{n-3} &= \frac{\partial^2 \Delta'}{\partial A_1 B_2}, \\ (a_1\, b_2\, c_3)\, \Delta^{n-4} &= \frac{\partial^3 \Delta'}{\partial A_1 \partial B_2 \partial C_3}, \\ &\;\;\vdots \\ (a_1\, b_2\, c_3 \ldots i_{n-2})\, \Delta &= \frac{\partial^{n-2} \Delta'}{\partial A_1 \partial B_2 \ldots \partial I_{n-2}}, \end{aligned} \tag{7}$$

a všeobecný vzorec (6) jednoduše

$$(a_{11}\, a_{22} \ldots a_{kk})\, \Delta^{n-k-1} = \frac{\partial^k \Delta'}{\partial A_{11}\, \partial A_{22} \ldots \partial A_{kk}}; \tag{8}$$

považíme-li konečně, že

$$(a_{11}\, a_{22} \ldots a_{kk}) = \frac{\partial^{n-k} \Delta}{\partial a_{k+1,\, k+1} \ldots \partial a_{n,\, n}},$$

obdržíme z posledního vzorce ještě

$$\frac{\partial^k \Delta'}{\partial A_{11}\, \partial A_{22} \ldots \partial A_{kk}} = \Delta^{n-k-1} \cdot \frac{\partial^{n-k} \Delta'}{\partial a_{k+1,\, k+1} \ldots \partial a_{n,\, n}}, \tag{9}$$

z čehož ještě zřejměji vysvítá poměr mezi původním determinantem a přidruženým.

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí.*)

Mnohý horlivý učeň věd přírodních byl hned při prvním vstoupení do oboru mathematické krystallografie odstrašen překážkami pro něj zdánlivě nepřemožitelnými, poněvadž knihy o této nauce jednající jsou psány slohem a způsobem na mnoze nejasným a tudíž v skutku odstrašujícím.

Následující pojednání nechť vyvrátí předsudek stran domnělé obtížnosti, neboť se tu nepředpokládá než známost elementární algebry a trigonometrie.

První stať všeobecné krystallografie zde předložená obsahuje základní věty sférické trigonometrie a analytické geometrie v rouše krystallografickém, následující pak budou obsahovati stručný výklad jednoduchých tvarů jednotlivých soustav.

Všeobecná krystallografie.

Prvotvary.

Krystallografie jest dílo ducha francouzského. Znamenitý přírodoskumec *Hauy* založil ji na sklonku předešlého století, vtipný žák jeho *Lévy* rozvinul ji dále a posud žijící velký mineralog *Des Cloizeaux* upotřebil jí duchaplným spůsobem při popisech mineralií.

Přidržíme se tudíž francouzské methody kristallografické nejenom z úcty před tvůrci této nauky, nýbrž i z té příčiny, že jest methoda ta nejjednodušší a nejpřirozenější a že nám nikterak nevadí kráčeti cestou samostatnou.

Dle toho budeme všechny tvary odvozovati od *prvotvarů* jako Hauy a Lévy, jen že jim dáme pro jednoduchou přehlednost částečně jinou podobu, než krystallografové francouzští.

Poněvadž totiž *krystall* čili *tvar vyhraněný* není nic jiného než pravidelně uspořádaná skupenina hmotných prvočástek, obrátíme především zřetel k tomuto uspořádání, a shledáme, že podoba krystallů závisí od poměrů vzdálenosti prvočástek ve třech směrech a od vzájemného úklonu těchto směrů.

Vzdálenosti prvočástek jsou buď stejné nebo nestejné a směry jejich vzájemně pravoúhelné neb šikmoúhelné, což dá *sedm prvotvarů*.

Tvary tyto jsou:

1. *Krychle* (Hexaëder) se stejnými vzdálenostmi a, b, c a vesměs stejnými hranami $A = B = C = 90^0$ *) Obr. 1.

---

*) Délky hran budeme naznačovati malými latinskými písmeny, úhly na hranách obdobnými velkými a úhly v rovinách ploch obdobnými řeckými.

2. *Stejnoklon* (Rhomboeder), se stejnými vzdálenostmi a, b, c a se stejnými hranami $A = B = C \gtrless 90^0$, kteréž se s vedlejšími hranami $A' = B' = C'$ doplňují na 180^0.

3. *Čtvercový prvotvar* se vzdálenostmi $a = b \gtrless c$ a s hranami $A = B = C = 90^0$.

4. *Pravoúhelný prvotvar* se vzdálenostmi rozličnými a, b, c a s hranami $A = B = C = 90^0$.

5. *Jednoklonný prvotvar* s hranami $B = C = 90^0$ a A, A', které se doplňují na 180^0.

6. *Dvouklonný prvotvar* s hranami $C = 90^0$, A, A' a B, B', které se doplňují na 180^0.

7. *Trojklonný prvotvar* s hranami rozličnými A, A', B, B', C, C', které nejsou pravoúhelné a se vzájemně doplňují na 180^0.

U tří posledních prvotvarů závisí ráz jejich jen od úhlů a nikoliv od délek hran.

Tvary odvozené.

Ze sedmi prvotvarů lze přikrojením hran neb rohů řady nesčíslného množství tvarů vyvinouti. Soujem tvarů z jednoho prvotvaru vyvinutých slove *krystallová soustava* a dle toho jest sedm *soustav* pojmenovaných dle prvotvarů.

Poněvadž přikrojení hran a rohů prvotvaru bývá mnohonásobné, objevují se vyhraněné tvary obyčejně co tvary mnohoploché.

V poloze těch ploch jeví se trojí rozdíl:

a) Buď jsou rovnoběžné s plochami prvotvaru a slovou, an každý prvotvar má šest ploch, *šestičetné* (hexaidické);

b) nebo jsou rovnoběžné s hranami prvotvaru a slovou, an každý prvotvar má dvanáct hran, *dvanáctičetné* (dodekaidické);

c) nebo odtínají rohy prvotvaru a slovou, an každý prvotvar má osm rohů, *osmičetné* (octaidické).

Hlavní zákon tvarů vyhraněných.

Poloha ploch v odvozených tvarech, ač nesmírně rozmanitá, řídí se přece všeobecným zákonem od Hauy-a nalezeným, kterýž v tom záleží, že úseky, jež plochy odvozené na hranách prvotvarů spůsobují, jsou k sobě na jedné a téže hmotě úměrné (racionalní).

Úměrnost úseků (racionalnost) jest tedy hlavním zákonem tvarů vyhraněných, a tím rozeznávají se krystally čili tvary přirozeně vyhraněné od tvarů vůbec pravidelných na př. od modellů, kteréž i neúměrné úseky na prvotvaru připouštějí.

Známky ploch.

Poloha ploch ustanovuje se dle délek, jež na hranách prvotvaru odtínají.

Čáry, které spojují středy protilehlých ploch prvotvaru, slovou jeho *osy*, a mají tentýž poměrný úklon a tu samu délku jako hrany prvotvaru, pročež je plochy odvozené odtínají v těch samých poměrech, jako hrany prvotvaru.

a) Plochy *šestičetné* (hexaidické), poznamenáme všeobecně písmenem h. Poměr úseků na hranách prvotvaru těmi plochami spůsobený jest

$a : b : c = 1 : \frac{1}{0} : \frac{1}{0}$ pro plochu, kteráž odtíná hranu a.

Toho poměru užívá anglický kristalograf Miller k naznačení ploch, píše však jen jmenovatele těch poměrů v pořádku a b c, pročež

$$100 = h$$

pro plochu odtínající a ve vzdálenosti $= 1$;

$$010 = h'$$

pro plochu, odtínající b ve vzdálenosti $= 1$;

$$001 = h''$$

pro plochu odtínající c ve vzdálenosti $= 1$.

Osami a, b, c rozdělí se prostor v osm oktantů; osy od středu na pravo, nahoru a na před berou se v hodnotě kladmé, od středu na levo, dolů a dozadu v hodnotě záporné.

Miller vyznačuje polohu zápornou známkou —, již klade nad toho kterého jmenovatele, my pak připojíme zápornou známku —1 k písmenu h; pročež

$$\bar{1}00 = h_1,$$
$$0\bar{1}0 = h_1',$$
$$00\bar{1} = h_1''.$$

b) Plochy *dvanáctičetné* (dodekaidické) poznamenáme všeobecně písmenem *d*, jsou-li rovnoběžné se stranou *a*; *d'*, jsou-li rovnoběžné s hranou *b*, a *d''*, jsou-li rovnoběžné s hranou *c*.

Poměr těchto úseků jest

$$a : b : c = \frac{1}{0} : \frac{1}{n} : 1$$

pro plochu rovnoběžnou s *a*.

Pro plochy dle *a* a *b* připojíme k *d* a *d'* úsek hrany *c* kladouce druhý úsek $= 1$, pro plochy dle *c* připojíme k *d''* úsek hrany *a*; a dle toho odpovídá

$$d_{\pm n},\ d'_{\pm n},\ d''_{\pm n}$$

Millerovým známkám *0n1*, *n01*, *n10*, připojí-li se k nim dle polohy ploch, kde toho třeba záporná známka.

c) Plochy *osmičetné* (oktaidické) poznamenáme všeobecně písmenem *o*.

Poloha jejich dle oktantů naznačuje se u Millera jmenovateli úseků.

$$\left.\begin{array}{l} m\,n\,r,\ \bar{m}\,\bar{n}\,\bar{r} \\ m\,n\,\bar{r},\ \bar{m}\,\bar{n}\,r \\ \bar{m}\,n\,r,\ m\,\bar{n}\,\bar{r} \\ \bar{m}\,n\,\bar{r},\ m\,\bar{n}\,r \end{array}\right\} = 0s$$

kdežto $s = a_{\pm\ 1/m}\ b_{\pm\ 1/n}\ c_{\pm\ 1/r}$.

Jsou-li dva odseky $= 1$, znamená 0_n, že se přidaná předpona *n* vztahuje k straně *a*, při $0'_n$ k straně *b*, při $0''_n$ k straně *c*,

Naznačení ploch dle *Naumanna* bude vyloženo později.

Ustanovení ploch šestičetných.

Nejvšeobecnější případ jest *ustanovení ploch prvotvaru trojklonného*.

Polohu ploch těch v prostoru ustanoviti lze buď z úhlů v rovinách α, β, γ neb z hran *A*, *B*, *C*.

a) Jsou-li dány úhly α, β, γ a má-li se z nich ustanoviti úhel hrany *A*, obr. 2., vedou se kolmice *c*, *d* na hranu *a* tak aby $(e, d) = A$, načež *e* spojí se s *d* pomocí *f*.

V trojúhelnících *b c f* a *e d f* jest pak

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$f^2 = e^2 + d^2 - 2ed \cos A.$$

Vezmeme-li $a = 1$, jest

$$c = sec\,\beta,\; e = tang\,\beta$$
$$b = sec\,\gamma,\; d = tang\,\gamma$$

a tudíž

$$sec^2\beta + sec^2\gamma - 2\,sec\,\beta\,sec\,\gamma \,.\, cos\,\alpha = tang^2\beta + tang^2\gamma - 2\,tang\,\beta\,tang\,\gamma\,cos\,A$$

Jelikož však

$$sec\,\beta = \frac{1}{cos\,\beta},\; tang\,\beta = \frac{sin\,\beta}{cos\,\beta} \text{ atd.;}$$

jest

$$\frac{1}{cos^2\beta} + \frac{1}{cos^2\gamma} - \frac{2\,cos\,\alpha}{cos\,\beta\,cos\,\gamma} = \frac{sin^2\beta}{cos^2\beta} + \frac{sin^2\gamma}{cos^2\gamma} - \frac{2\,sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos\,A}{cos\,\beta\,cos\,\gamma}$$

neb přeložíme li členy

$$\frac{1 - sin^2\beta}{cos^2\beta} + \frac{1 - sin^2\gamma}{cos^2\gamma} = \frac{2\,(cos\,\alpha - sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos\,A)}{cos\,\beta\,cos\,\gamma}$$

a jelikož $1 - sin^2\beta = cos^2\beta$ atd. jest

$$cos\,\beta\,cos\,\gamma = cos\,\alpha - sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos\,A,$$

z čehož jde

$$cos\,A = \frac{cos\,\alpha - cos\,\beta\,cos\,\gamma}{sin\,\beta\,sin\,\gamma} \qquad (1)$$

a tudíž podobně

$$cos\,B = \frac{cos\,\beta - cos\,\gamma\,cos\,\alpha}{sin\,\gamma\,sin\,\alpha},$$
$$cos\,C = \frac{cos\,\gamma - cos\,\alpha\,cos\,\beta}{sin\,\alpha\,sin\,\beta}.$$

b) Jsou-li dány úhly hran prvotvaru A, B, C, a má li se z nich ustanoviti úhel α, obr. 3., postaví se kolmo na hrany a, b, c plochy, kteréž se setkávají v hranách α', β', γ'.

Nový roh těmito hranami vytvořený slove *protipolární roh* a na něm jest

$$\alpha' = 180^0 - \alpha,\; A' = 180^0 - A,$$
$$\beta' = 180^0 - \beta,\; B' = 180^0 - B,$$
$$\gamma' = 180^0 - \gamma,\; C' = 180^0 - C,$$

a tudíž $cos\,\alpha' = -\,cos\,\alpha$, $cos\,A' = -\,cos\,A$ atd.

Poněvadž dle (1) jest

$$cos\,\alpha' = \frac{cos\,A' - cos\,B'\,cos\,C'}{sin\,B'\,sin\,C'},$$

bude tedy

$$\cos\alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}, \tag{2}$$

a podobně

$$\cos\beta = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A}$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$$

c) Spustíme-li v trojbokém odseku a, b, c z konce $a = 1$, kolmici k na plochu bc, obr. 4. a vedeme-li tou kolmicí plochy k b a c kolmé, tak aby s plochami prvotvaru se protínaly na čarách h, l a v hranách B, C, jest

$$l = \sin\beta,\ h = \sin\gamma,$$

a tudíž $k = l \sin C = \sin\beta \sin C$

$$k = h \sin B = \sin\gamma \sin B,$$

z čehož jde především

$$\sin\beta : \sin\gamma = \sin B : \sin C$$

a všeobecně

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin A : \sin B : \sin C. \tag{3}$$

d) Vložíme-li konečně do rovnice z (1) vyvinuté

$$\cos\alpha = \cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos A$$

místo $\cos\beta$ hodnotu jeho

$$\cos\beta = \cos\alpha \cos\gamma + \sin\alpha \sin\gamma \cos B$$

délíme-li pak pomocí $\sin\alpha$, a použijeme-li poměru

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin A}{\sin B},$$

objeví se pro dané A, B, γ

$$\cot\alpha = \frac{\cot A \sin B + \cos B \cos\gamma}{\sin\gamma} \tag{4}$$

a podobně

$$\cot\beta = \frac{\cot B \sin A + \cos A \cos\gamma}{\sin\gamma}$$

a pro dané α, β, C dle (2) pak

$$\cot A = \frac{\cot\alpha \sin\beta - \cos\beta \cos C}{\sin C} \tag{5}$$

a podobně

$$\cot B = \frac{\cot\beta \sin\alpha - \cos\alpha \cos C}{\sin C}.$$

Ve dvouklonné soustavě jest $C = 90^0$, pročež jest

$$cos\,\alpha = \frac{cos\,A}{sin\,B},\ cos\,\beta = \frac{cos\,B}{sin\,A},\ cos\,\gamma = cot\,A\,cot\,B.$$

V jednoklonné soustavě jest $B = C = 90^0$, pročež

$$\alpha = A.$$

V pravoúhelných soustavách (t. v pravoúhelné, čtverečné a krychlové) jest $A = B = C = 90^0$ pročež

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^0.$$

V stejnoklonné soustavě jest $A = B = C \gtrless 90^0$, pročež

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Spojíme-li stejnohranné rohy osou t, obr. 5. a vedeme-li plochou stejnoklonu úhlopříčku r, jest v trojbokém výkrojku $^1/_2\,A$, $^1/_2\,R$, T, kdežto $^1/_2\,R = 90^0$, $T = 60^0$, $cos\,60^0 = {}^1/_2$, $sin\,60^0 = {}^1/_2\,\sqrt{3}$, dle (2)

$$cos\,{}^1/_2\,\gamma = \frac{cos\,T + cos\,\frac{1}{2}\,A\,cos\,\frac{1}{2}\,R}{sin\,\frac{1}{2}\,A\,sin\,\frac{1}{2}\,R}$$

neb

$$cos\,{}^1/_2\,\gamma = \frac{1}{2\,cos\,\frac{1}{2}\,A}. = \frac{1}{2\,sin\,kA}$$

Ustanovení ploch dvanáctičetných.

K ustanovení přípony ve známkách d_n, d'_n, d''_n jest v *trojklonné soustavě* nutno znáti dvě hrany té plochy s prvotvarem a dva úhly v rovinách ploch jeho.

Má-li se na př. ustanoviti dvanáctičetná plocha d''_n rovnoběžná se stranou c, obr. 6., jsou ve výkrojku Z, Z', C, průměty úseků a, b na vodorovné čáry a', b'

$$a' = a\,.\,sin\,\beta$$
$$b' = b\,.\,sin\,\alpha$$
$$a' : b' = sin\,Z : sin\,Z'$$

pročež také

$$a : b = sin\,Z\,sin\,\alpha : sin\,Z'\,sin\,\beta. \quad (6)$$

Jeden z těch úseků a neb b vezme se $= 1$, druhý $= n$, z čehož pak vychází hodnota d''_n.

Podobně se ustanoví d_n a d_n'.

V dvouklonné soustavě jest na př. pro d''_n, an $Z + Z' + C = 180^0$, $C = 90^0$, $cos\,Z = sin\,Z'$

zapotřebí znáti jednu hranu a dva úhly, pročež

$$a : b = tang\, Z \sin \alpha : \sin \beta.$$

V jednoklonné soustavě jest na př. pro d_n'' an $c = \beta = 90^0$ zapotřebí znáti jednu hranu a jeden úhel, pročež

$$a : b = \sin \alpha : \cot Z$$

V pravoúhelných soustavách jest na příklad pro d_n'', an $c = \alpha = \beta = 90^0$, zapotřebí znáti jen jednu hranu, pročež

$$a : b = 1 : \cot Z.$$

V stejnoklonné soustavě jest na př. pro d_n'', an $A = B = C$, $\alpha = \beta = \gamma$, zapótřebí znáti hranu prvotvaru a mimo to ještě jinou hranu, pročež

$$a : b = \sin (C + Z) : \sin Z.$$

Ustanovení ploch osmičetných.

Příponu ve známce Os, kdežto s všeobecně značí poměr úseků, $s = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$, ustanoviti lze *v soustavě trojklonné* z tří hran prvotvaru a dvou hran jiných, jež plocha osmičetná s prvotvarem vytvořuje.

Jsou-li tedy dány hrany prvotvaru A, B, C a dvě z hran X, Y, Z obr. 7., jež plocha osmičetná s prvotvarem zavírá, na př. X, Y, ustanoví se především dle (2)

$$\cos \nu = \frac{\cos Y + \cos X \cos C}{\sin X \sin C}$$

taktéž α, β, γ dle (2); a úhel $\nu' = 180 - (\nu + \alpha)$, načež jest

$$\cos Z = \sin B \sin X \cos \nu' - \cos B \cos X.$$

Ze známých nyní hran X, Y, Z a A, B, C ustanoví se dle (2) úhly μ, ν, ϱ, načež jest pro $a = 1$,

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = 1 : \frac{\sin (\mu + \gamma)}{\sin \mu} : \frac{\sin \varrho}{\sin (\varrho + \beta)}, \tag{7}$$

nebo pro $b = 1$,

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{\sin \mu}{\sin (\mu + \gamma)} : 1 : \frac{\sin (\nu + \alpha)}{\sin \nu},$$

nebo pro $c = 1$,

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{\sin (\varrho + \beta)}{\sin \varrho} : \frac{\sin \nu}{\sin (\nu + \alpha)} : 1.$$

K ustanovení polohy osmičetné plochy v soustavě *trojklonné* jest tudíž potřebí známosti pěti hran; v soustavě *dvou-*

klonné stačí známost čtyr hran; v soustavě *jednoklonné* tří hran, v soustavách *pravoúhelných* a *stejnoklonné* dvou hran.

Spustí-li se z rohu prvotvaru kolmice k na plochu osmičetnou, tak aby s hranami prvotvaru uzavírala úhly ξ, η, ζ, jest, an dle (3)

$$\frac{\sin(90^0-\xi)}{\sin\varrho} = \frac{\sin Y}{\sin 90^0},$$
$$\cos\xi = \sin Y \sin\varrho$$

a podobně

$$\cos\eta = \sin Z \sin\mu$$
$$\cos\zeta = \sin X \sin\nu.$$

Z kolmé postavy čáry k na ploše osmičetné vycházejí

$$a\,k = \cos\xi\,,\; b\,k = \cos\eta\,,\; c\,k = \cos\zeta,$$

pročež pro reciproky úseků, nebo pro Millerovy známky

$$a : b : c = \cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta, \tag{8}$$

V pravoúhelných soustavách jest

$$X = 180^0-\xi\,,\; Y = 180^0-\eta\,,\; Z = 180^0-\zeta,$$

za kteroužto příčinou

$$a : b : c = \cos X : \cos Y : \cos Z. \tag{9}$$

V stejnoklonné soustavě jest úklon všech tří hran stejnohraného rohu k rohové ose $= \xi$, obr. 8. Vezmeme-li pro úklon té rohové osy t k ploše osmičetné naproti $\frac{1}{a} = \varrho$, naproti $\frac{1}{b} = \sigma$, naproti $\frac{1}{c} = \tau$, platí pro úseky $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ srovnalost

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{\sin\varrho}{\sin(\varrho+\xi)} : \frac{\sin\sigma}{\sin(\sigma+\xi)} : \frac{\sin\tau}{\sin(\tau+\xi)}. \tag{10}$$

Mezi úhly ϱ, σ, τ jest takový poměr, že z dvou z nich lze třetí vypočísti.

Neb v trojbokém výkrojku A', B', T, v němž $T = 120^0$, a v trojbokém výkrojku A', D, T, v němž $T = 60^0$ jest dle (5)

$$\sin\sigma\cot\varrho = -\frac{1}{2}\cos\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cot A'$$

$$\sin\sigma\cot\tau = -\frac{1}{2}\cos\sigma - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cot A',$$

z čehož obdržíme sečtením

$$\sin\sigma\,(\cot\varrho + \cot\tau) = -\cos\sigma$$

nebo
$$\cot\varrho + \cot\sigma + \cot\tau = 0. \qquad (11)$$

Rovnice hran.

a) V soustavách pravoúhelných.

Setkají-li se dvě plochy v pravoúhelné soustavě na hraně H, obr. 9., jest úhel té hrany výplňkem onoho úhlu H' na 180^0, jejíž dvě kolmice ze středu na ony plochy vedené spolu zavírají, tedy

$$\cos H' = -\cos H.$$

Poznamenáme-li kolmice písmeny k, k', vzdálenost obou kolmic od sebe písmenem v jest

$$\cos H' = \frac{k^2 + k'^2 - v^2}{2kk'}.$$

Délka kolmic rovná se úhlopříčce v pravoúhelném šestistěnu, obr. 10., obmezeném souřadnicemi x, y, z, x', y', z', konečného bodu jejího (totiž čárami rovnoběžnými s hranami nebo osami prvotvaru), tudíž

$$k^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$k'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Vzdálenost obou kolmic od sebe rovná se úhlopříčce onoho pravoúhelného šestistěnu, obr. 11., jehož strany se rovnají rozdílům stejnojmenných souřadnic $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, konečných bodů obou kolmic, tedy

$$v^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Dosadí-li se tyto výrazy do rovnice pro $\cos H'$, jest

$$\cos H' = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Za souřadnice lze dosaditi reciproky úseků

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ a } \frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}.$$

Neb průměty kolmic k, k' na roviny souřadnic jsou kolmé na hranách X, Y, Z, a X', Y', Z', obr. 10., obou ploch, tudíž

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = y : x \text{ nebo } a : b = x : y$$

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{c} = z : x \text{ nebo } a : c = x : z.$$

Pročež lze za x, y, z a x', y', z' dosaditi a, b, c, a a', b', c', načež jest

$$\cos H = -\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \tag{12}$$

V osmistěnu pravoúhelné soustavy, obr. 10., v němž hrany
X povstávají setkáním se ploch $abc, a'b'c' = \bar{a}bc$
Y „ „ „ „ $abc, a'b'c' = a\bar{b}c$
Z „ „ „ „ $abc, a'b'c' = ab\bar{c}$
jest, dosadí-li se tyto hodnoty úseků do rovnice před tím vytknuté

$$\cos X = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{S},$$

$$\cos Y = \frac{b^2 - c^2 - a^2}{S},$$

$$\cos Z = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{S},$$

při čemž $S = a^2 + b^2 + c^2$.

Sečtení těchto rovnic dá pak

$$\cos X + \cos Y + \cos Z = -1 \tag{13}$$

b) V soustavách kosoúhelných.

Rovnice hran pro tvary soustav kosoúhelných vyvine se jako pro plochy soustav pravoúhelných z výrazu

$$\cos H' = \frac{k^2 + k'^2 - v^2}{2kk'}.$$

Kolmice k, k' a vzdálenost v mají však jiné hodnoty.

Jsou-li totiž v rovinách ploch prvotvaru úhly α, β, γ; úklony kolmic k, k' k plochám osmičetným ξ, η, ζ a ξ', η', ζ' a souřadnice jejich x, y, z a x', y' a z'; jest dle známé poučky, že průměty lomených čar se stejným bodem začátečným a konečným na stejnou osu, jsou sobě rovny:

$$k = x \cos\xi + y \cos\eta + z \cos\zeta$$

a dle též poučky mimo to

$$x = k \cos\xi - z \cos\beta - y \cos\gamma,$$

$$y = k \cos\eta - x \cos\gamma - z \cos\alpha,$$

$$z = k \cos\zeta - x \cos\beta - y \cos\alpha.$$

Násobí-li se první rovnice veličinou k, druhá veličinou

$-x$, třetí veličinou $-y$, a čtvrtá veličinou $-z$, a sečteme-li ty rovnice, jest

$$k^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,yz\cos\alpha + 2\,xz\cos\beta + 2\,xy\cos\gamma,$$

a podobně

$$k'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2\,y'z'\cos\alpha + 2\,x'z'\cos\beta + 2\,x'y'\cos\gamma.$$

Pro vzdálenost obou kolmic od sebe jest dle obdoby s rovnicí pro pravoúhelnou soustavu

$$v^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + 2(y-y')(z-z')\cos\alpha$$
$$+ 2(x-x')(z-z')\cos\beta + 2(x-x')(y-y')\cos\gamma.$$

Dosadíme-li do rovnice pro $\cos H'$ hodnoty nalezené a položíme-li

$$yz' + y'z = \mathfrak{x},$$
$$zx' + z'x = \mathfrak{y},$$
$$xy' + x'y = \mathfrak{z},$$

obdržíme pak jednodušší vzorec

$$\cos H' = \frac{xx' + yy' + zz' + \mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\cos\beta + \mathfrak{z}\cos\gamma}{kk'}$$

Vyznačíme-li pak souřadnice x, y, z a x', y', z' pomocí úseků $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ a $\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}$ shledáme, že

$$x = \frac{a\sin^2\alpha - b\,C' - c\,B'}{G}$$
$$y = \frac{b\sin^2\beta - c\,A' - a\,C'}{G}$$
$$z = \frac{c\sin^2\gamma - a\,B' - b\,A'}{G}$$

a podobně pro x', y', z', při čemž

$$A' = \cos A \sin\beta \sin\gamma$$
$$B' = \cos B \sin\gamma \sin\alpha$$
$$C' = \cos C \sin\alpha \sin\beta$$
$$G = a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta + c^2\sin^2\gamma - 2bc\,A' - 2ac\,B' - 2ab\,C'.$$

Znamená-li konečně

$$G' = a'^2\sin^2\alpha + b'^2\sin^2\beta + c'^2\sin^2\gamma - 2b'c'\,A' - 2a'c'\,B' - 2a'b'\,C'$$
$$F = aa'\sin^2\alpha + bb'\sin^2\beta + cc'\sin^2\gamma - (bc' + b'c)\,A' - (ca' + c'a)\,B' - (ab' + b'a)\,C',$$

jest pro hranu H v soustavě trojklonné

$$\cos H = -\frac{F}{\sqrt{GG'}}. \tag{14}$$

V soustavách ostatních zjednoduší se výraz ten postupně, jak A, B, C přecházejí do pravého úhlu; pro praktickou krystallografií má však důležitost jen *rovnice hran v stejnoklonné soustavě* odvozená z této všeobecné rovnice vložením do ní $A=B=C, \alpha=\beta=\gamma$, čímž se obdrží

$$F=aa'+bb'+cc'-[(b'c+bc')+(c'a+ca')+(a'b+ab')]\cos A$$
$$G=a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ac)\cos A,$$
$$G'=a'^2+b'^2+c'^2-2(a'b'+b'c'+a'c')\cos A. \qquad (15)$$

Rovnice ploch.

Poloha ploch dá se v kterékoliv soustavě vyznačiti všeobecnou rovnicí.

Odtíná-li totiž plocha nějaká hrany neb osy prvotvaru v poměru $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$ a jsou-li úhly v rovinách ploch prvotvaru α, β, γ, úklon hran prvotvaru ke kolmici k na plochu onu z rohu prvotvaru spuštěné ξ, η, ζ, jest pro souřadnice x, y, z jakéhokoliv bodu oné plochy dle známé v předešlém odstavci vytknuté poučky

$$x\cos\xi+y\cos\eta+z\cos\zeta=k$$

nebo
$$\frac{x\cos\xi}{k}+\frac{y\cos\eta}{k}+\frac{z\cos\zeta}{k}=1.$$

Jelikož však

$$\frac{\cos\xi}{k}=a, \frac{\cos\eta}{k}=b, \frac{\cos\zeta}{k}=c$$

jest také

$$ax+by+cz=1. \qquad (16)$$

Přeneseme-li plochu do začátečného bodu, kdež to $k=0$, jest

$$ax+by+cz=0. \qquad (17)$$

Rovnice pásma ploch.

Plochy, které spolu mají rovnoběžné hrany, slovou *plochy jednoho pásma.*

Vzájemná závislost jejich dá se též vyznačiti rovnicí.

Platí-li totiž pro plochy p, p' a p'', obr. 12., rovnice

$$ax+by+cz=0,$$
$$a'x+b'y+c'z=0,$$
$$a''x+b''y+c''z=0,$$

obdrží se vyloučením souřadnic x, y, z