

Werk

Label: Article

Jahr: 1872

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0001|log33

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Velmi elegantního tvaru nabude rovnice podmiňující (7), jsou-li X a Y úkony trigonometrické, na př. $X = \cos x$, $Y = \sin x$. Pak položme

$$a_k = m_k \cos v_k, \quad b_k = m_k \sin v_k.$$

Rovnice (5) přemění se v následující:

$$m_2 \cos(v_2 + x) y'' + m_1 \cos(v_1 + x) y' + m_0 \cos(v_0 + x) y = 0, \quad (10)$$

která bude mít částečný integrál $y = e^{\alpha x}$, je-li

$$\frac{\sin^2(v_0 - v_2)}{m_1^2} = \frac{\sin(v_1 - v_0)}{m_2} \cdot \frac{\sin(v_2 - v_1)}{m_0}. \quad (11)$$

Zároveň jest

$$\alpha = \frac{m_1 \sin(v_1 - v_0)}{m_2 \sin(v_0 - v_2)} = \frac{m_0 \sin(v_0 - v_2)}{m_1 \sin(v_2 - v_1)}. \quad (12)$$

Na objasnění řečeného stůjž zde následující příklad.
Součinitelové rovnice

$$(3 - x)y'' - (9 - 4x)y' + (6 - 3x)y = 0,$$

v které jest $X = 1$, $Y = x$, vyhovují skutečně rovnici (7),

$$\text{a } \alpha = 1, \text{ tedy } y = ue^x, \text{ a}$$

$$(3 - x)u'' - (3 - 2x)u' = 0,$$

$$u' = C'e^{2x}(3 - x)^3, \quad u = C + C' \int e^{2x}(3 - x)^3 dx,$$

z čehož jde konečně

$$y = Ce^x + C'e^{3x}(183 - 150x + 42x^2 - 4x^3).$$

O některých integrálech omezených.

(Podává Augustin Pánek.)

Abychom ustanovili hodnotu omezeného integrálu

$$J = \int_0^\infty y^{n-1} l(1 + xe^{-y}) dy$$

použijme vzorců

$$l(1 + xe^{-y}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} e^{-ky},$$

$$\int_0^\infty e^{-my} y^{n-1} dy = \frac{1}{m^n} \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} dy = \frac{\Gamma(n)}{m^n},$$

načež obdržíme

$$J = \Gamma(n) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k^{n+1}}.$$

Píšeme-li pak v tomto integrálu $n-1$ místo n , povstane podobně

$$\int_0^{\infty} y^{n-2} l(1 + xe^{-y}) dy = \Gamma(n-1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k^n};$$

zavedeme-li dále $e^{-y} = z$, konečně

$$(-1)^n \int_0^1 l(1+xz) \frac{l^{n-2}z}{z} dz = \Gamma(n-1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k^n}.$$

Dosadíme-li do tohoto integrálu

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

místo x , obdržíme z něho dva nové vzorce a sice

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^{kix}}{k^n} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 l(1+z \cos x + iz \sin x) \frac{l^{n-2}z}{z} dz,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^{-kix}}{k^n} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 l(1+z \cos x - iz \sin x) \frac{l^{n-2}z}{z} dz,$$

jichž součet a rozdíl vede ku vzorcům

$$\frac{\cos x}{1^n} - \frac{\cos 2x}{2^n} + \frac{\cos 3x}{3^n} - \frac{\cos 4x}{4^n} + \dots \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 l(1+2z \cos x + z^2) \frac{l^{n-2}z}{z} dz,$$

$$\frac{\sin x}{1^n} - \frac{\sin 2x}{2^n} + \frac{\sin 3x}{3^n} - \frac{\sin 4x}{4^n} + \dots \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{i \Gamma(n-1)} \int_0^1 l \frac{1+z(\cos x + i \sin x)}{1+z(\cos x - i \sin x)} \frac{l^{n-2}z}{z} dz.$$

Zavedeme-li do vzorce (1) $\pi+x$ místo x a do (2) $\pi-x$ místo x , obdržíme z nich bezprostředně

$$\frac{\cos x}{1^n} + \frac{\cos 2x}{2^n} + \frac{\cos 3x}{3^n} + \frac{\cos 4x}{4^n} + \dots \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 l(1-2z \cos x + z^2) \frac{l^{n-2}z}{z} dz,$$

$$\frac{\sin x}{1^n} + \frac{\sin 2x}{2^n} + \frac{\sin 3x}{3^n} + \frac{\sin 4x}{4^n} + \dots \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{i \Gamma(n-1)} \int_0^1 l \frac{1-z(\cos x - i \sin x)}{1-z(\cos x + i \sin x)} \frac{l^{n-2}z}{z} dz.$$

Sečteme-li vzorce (1), (3) a (2), (4), zjednáme si dále

$$\frac{\cos x}{1^n} + \frac{\cos 3x}{3^n} + \frac{\cos 5x}{5^n} + \frac{\cos 7x}{7^n} + \dots \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 l \frac{1+2z \cos x + z^2}{1-2z \cos x + z^2} \frac{l^{n-2}z}{z} dz,$$

$$\frac{\sin x}{1^n} + \frac{\sin 3x}{3^n} + \frac{\sin 5x}{5^n} + \frac{\sin 7x}{7^n} + \dots \quad (6)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(-1)^n}{i \Gamma(n-1)} \int_0^1 l \frac{(1-z^2) \cos^2 x + 2i \sin x l^{n-2} z}{(1-z^2) \cos^2 x - 2i \sin x z} dz.$$

Zavedeme-li pak do řady (5) a (6) $\frac{\pi}{2} - x$ místo x , bude konečně

$$\frac{\sin x}{1^n} - \frac{\sin 3x}{3^n} + \frac{\sin 5x}{5^n} - \frac{\sin 7x}{7^n} + \dots \quad (7)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 \frac{l^{n-2} z}{z} l \frac{1 + 2z \sin x + z^2}{1 - 2z \sin x + z^2} dz,$$

$$\frac{\cos x}{1^n} - \frac{\cos 3x}{3^n} + \frac{\cos 5x}{5^n} - \frac{\cos 7x}{7^n} + \dots \quad (8)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(-1)^n}{i \Gamma(n-1)} \int_0^1 \frac{l^{n-2} z}{z} l \frac{(1-z^2) \sin^2 x + 2i \sin x}{(1-z^2) \sin^2 x - 2i \sin x} dz^*).$$

Ze lze tímto způsobem vzorce tyto i dále kombinovati, jde z předcházejícího dosti zřejmě na jevo.

Ze vzorce (1) a (3) vyplývá

$$\int_0^1 l^{n-2} z l (1 + 2z \cos x + z^2) \frac{dz}{z} = 2(-1)^n 1^{n-2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos kx}{k^n}, \quad (9)$$

$$\int_0^1 l^{n-2} z l (1 - 2z \cos x + z^2) \frac{dz}{z} = 2(-1)^n 1^{n-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^n}. \quad (10)$$

Derivujeme-li vzorce (9), (10) podle x , obdržíme

$$\int_0^1 l^{n-2} z \frac{dz}{1 + 2z \cos x + z^2} = \frac{(-1)^n 1^{n-2}}{\sin x} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k^n}, \quad (11)$$

$$\int_0^1 l^{n-2} z \frac{dz}{1 - 2z \cos x + z^2} = \frac{(-1)^n 1^{n-2}}{\sin x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^n}. \quad (12)$$

Přeseme-li do vzorce (9) a (10) $x=0$, zjednáme si nové dva vzorce

$$\int_0^1 l^{n-2} z l (1 + z) \frac{dz}{z} = (-1)^n 1^{n-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^n}, \quad (13)$$

*) Řady (5), (6), (7) a (8) uvádí též *Dienger*, „Ueber die Lagrange'sche Summirungsformel“, Crelle's J. Bd. 34.

Řadu (5) a (6) uvádí *Schlömilch* ve svém „Zeitschrift für Math. u. Physik. 1. Jahrg. „Ueber die Bernoulli'schen Funktion und deren Gebrauch bei der Entwicklung halbconvergenter Reihen.“

$$\int_0^1 l^{n-2} z l(1-z) \frac{dz}{z} = (-1)^n 1^{n-2} \cdot 1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} *). \quad (14)$$

Položíme-li do vzorce (3) $n=2$, povstane řada

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots;$$

nazveme-li ji $\varphi(x)$, obdržíme derivující

$$D\varphi(x) = -[\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots] = \frac{1}{2}(x-\pi)^{**}),$$

$$0 < x < 2\pi,$$

a integrujeme-li

$$\varphi(x) = B - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4},$$

značí-li B stálou integrační, kteráž podle metody *Bernoulli-ho* má hodnotu $\frac{\pi^2}{6}$ ***).

Integrál pro hořejší řadu podává vzorec (3)

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 l(1-2z \cos x + z^2) \frac{dz}{z},$$

načež z posledních těchto relací konečně jde, že

$$\int_0^1 l(1-2z \cos x + z^2) \frac{dz}{z} = \pi x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{3}. \quad (15)$$

Zavedeme-li tu za $x \dots \pi + x$, zjednáme si

$$\int_0^1 l(1+2z \cos x + z^2) \frac{dz}{z} = \frac{1}{6} \pi^2 - \frac{1}{2} x^2 \dagger), \quad (16)$$

kterýžto vzorec obdržíme také z (1), jest-li $n=2$.

Jest-li $x = \frac{\pi}{3}$, jde z (15) a (16)

$$\int_0^1 l(1-z+z^2) \frac{dz}{z} = -\frac{1}{18} \pi^2, \quad (17)$$

*) Vzorce (13), (14) jsou uvedeny v „Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Deel VIII. Amsterdam, 1862.“

**) Euler, Novi Commentarii Academiae Scient. Petropolitanae. Tom XIX., totéž Schlömilch, Compendium d. höh. Analysis. 2. Aufl. 2. Bd., pag. 129. a jinde.

***) Tuto hodnotu obdržel Euler jiným způsobem „L. Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung.“ Aus d. Lateinischen übersetzt v. J. Salomon. Wien, 1830. IV. Band, p. 123.

†) Viz též Verhandelingen, VIII.

$$\int_0^1 l(1+z+z^2) \frac{dz}{z} = \frac{1}{9} \pi^2 *). \quad (18)$$

Učiníme-li ve vzorci (16) $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, povstane

$$\int_0^1 l(1+z) \frac{dz}{z} = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 l(1+z^2) \frac{dz}{z} = \frac{\pi^2}{12.2},$$

tedy obecně

$$\int_0^1 l(1+z^n) \frac{dz}{z} = \frac{\pi^2}{12.n}. \quad (19)$$

Derivujeme-li vzorec (15) podle x , obdržíme

$$\int_0^1 \frac{\sin x dz}{1-2z \cos x + z^2} = \frac{\pi-x}{2} = \arctan \frac{\sin x}{1-\cos x}. \quad (20)$$

Zavedeme-li do vzorce (4) $n=2$, jest podobně

$$\psi(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots$$

a derivujeme-li,

$D\psi(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \dots$,
kterážto řada má hodnotu $-l(2 \sin \frac{1}{2} x)^{**})$, kdež $0 < x < \pi$,
načež integrováním vyplývá

$$\psi(x) = -x l 2 - \int l \sin \frac{1}{2} x . dx$$

a tedy

$$\int l \sin \frac{1}{2} x . dx = -x l 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^n};$$

zavedeme-li meze 0, π , pak 0, $\frac{\pi}{2}$, poznáme, že

$$\int_0^{\pi} l \sin \frac{1}{2} x . dx = 2 \int_0^{\pi/2} l \sin \frac{1}{2} x . dx = -\pi l 2^{***}), \quad (21)$$

Ze vzorce (7) plyne, jest-li $n=2$,

*) Grunert, Archiv d. Math. u. Phys., r. 1862, pojednání Oettinger-a „Ueber bestimmte Integrale“ pag. 175., má integrál (17) hodnotu $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2$ a pag. 171., integrál (18) pak $\frac{3l3}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 2$.

**) Euler, Novi Commentarii Acad. Scient. Petrop. T. XIX., totéž Schlämilch, Compendium, II. Bd., p. 130. a jinde.

***) Bezprostředně ustanovena tato relace v „Zákl. v. math.“ od Studničky díl II., pag. 110.