Drobné zprávy.

Poznámka k integrování některých differenciálních rovnic lineárních.

(Podává dr. *Aug. Seydler.*)

Jsou-li předloženy dvě lineární zkrácené rovnice $n$tého stupně

$$\sum_{k=n}^{0} a_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \quad \sum_{k=n}^{0} b_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \tag{1}$$

které mají společný integrál částečný $y = y_1$, bude, jak patrno, výraz ten též integrálem částečným nové rovnice

$$\sum_{k=n}^{0} (a_k X + b_k Y) \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \tag{2}$$

kde X, Y jsou libovolné úkony veličin x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy^2}{dx^2} \ldots$ Obsahují-li pouze x (je-li tedy rovnice [2] též lineární), můžeme si známou cestou — variací stálých — zjednati novou též lineární rovnici stupně $(n-1)$ho. Aby ale rovnice (1) měly společný integrál y_1, musí vyhověti součinitelové a_k, b_k jisté podmínce, tedy jakési rovnici, kterou si zjednáme vyloučením differenciálních poměrů $\frac{d^k y}{dx^k}$ z obou rovnic. Vyloučíme-li jednou y, jednou $\frac{d^n y}{dx^n}$, differencujíce zároveň druhou z rovnic takto vzniklých, obdržíme dvě nové rovnice tvaru

$$\sum_{k=n}^{1} A_k \frac{d^k y}{dx^n} = 0, \quad \sum_{k=n}^{1} B_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \tag{3}$$

v kterých není více y obsaženo. Z nich můžeme opět podobným spůsobem vyloučiti $\frac{dy}{dx}$, a pokračujíce takto zjednáme si konečně hledanou rovnici. Vyhovují-li tudíž této rovnici součinitelové předložené rovnice (2), jest to znamením, že má jeden integrál částečný společně s rovnicemi (1), kterýž to integrál snadno obdržíme na základě právě uvedeného eliminování.

Jsou-li součinitelové a_k, b_k stálé veličiny, bude míti integrál tvar $e^{\alpha x}$, kde musí α vyhověti oběma rovnicím $n$tého stupně:

$$\sum_{k=n}^{0} a_k\alpha^k = 0,\quad \sum_{k=n}^{0} b_k\alpha^k = 0, \tag{4}$$

Spůsob, jakým si (postupně eliminujíce) zjednáme jednak rovnici pro a_k a b_k, jednak hodnotu α, jest samozřejmý.

Tato podmiňující rovnice jest pro větší n tvaru velmi složitého, ač dosti přehledného; pro menší n, zvláště pro $n = 2$, můžeme jí však často s velkým prospěchem použíti. Máme-li tudíž rovnici 2. stupně

$$(a_2X + b_2Y)y'' + (a_1X + b_1Y)y' + (a_0X + b_0Y)y = 0, \tag{5}$$

bude částečný integrál její $y_1 = e^{\alpha x}$, vyhovuje-li α rovnicím

$$\left.\begin{aligned} a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 &= 0. \\ b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Co výsledek vyloučení veličiny α z obou rovnic zjednáme si rovnici podmiňující

$$(a_0b_1 - b_0a_1)(a_1b_2 - b_1a_2) - (a_2b_0 - b_2a_0)^2 = 0 \tag{7}$$

Zároveň jest

$$\alpha = \frac{a_0b_1 - b_0a_1}{a_2b_0 - b_2a_0} = \frac{a_2b_0 - b_2a_0}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

Z šesti veličin a a b jest tedy pět libovolných; šestá určena jest rovnicí (7), která jest vzhledem ke každé veličině v ní obsažené 2. stupně, tak že lze ke každé soustavě 5 hodnot pro součinitele a a b určiti dvě hodnoty šestého součinitele tak, aby předložená rovnice (5.) měla částečný integrál $y_1 = e^{\alpha x}$, kde α jest určeno rovnicí (8).

Položíme-li nyní $y = ue^{\alpha x}$ v rovnici (5), obdržíme

$$(a_2X + b_2Y)u'' + (\overline{a_1 + 2a_2\alpha}\,X + \overline{b_1 + 2b_2\alpha}\,Y)u' = 0, \tag{9}$$

kterouž rovnici lze bezprostředně integrovati.

Rovnici (7.) může býti vyhověno též tím, že oba její členy o sobě $= 0$ položíme; pak bude ale

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = m$$

a rovnice (5) má pak činitele $X + mY$, který když vyloučíme, obdržíme lineární rovnici se stálými součiniteli.