Drobné zprávy.

Poznámka k theorii trochoid.

(Podává dr. *F. J. Studnička.*)

Na stránce 54. tohoto časopisu uveřejnil p. prof. *F. Hoza* „příspěvek k dějepisu trochoid,“ při kteréžto příležitosti jsem poznamenal, že v některém budoucím čísle připojím doplněk k theorii těchto křivek, k nimž se též vztahuje mathematická úloha 13. na str. 41. uvedená.

Vyjádříme-li půdici trochoidy AB — ob. 81. — rovnicí

$$y = f(x), \tag{1}$$

valenou křivku CDE rovnicí

$$r = F(\varrho) \tag{2}$$

a trochoidu příslušnou FI rovnicí

$$\eta = \varphi(\xi), \tag{3}$$

řeší kterou koli úlohu této theorie soustava rovnic*)

$$[\xi - x + (\eta - y)y'] \sqrt{r^2 + r'^2} + rr'\sqrt{1 + y'^2} = 0, \tag{4}$$

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = r^2, \tag{5}$$

$$\xi - x + (\eta - y)\eta' = 0, \tag{6}$$

již možná vyloučením rozdílu $(\xi - x)$ uvésti na

$$\frac{\eta' - y'}{1 + \eta' y'} = \frac{r'}{r}, \tag{7}$$

$$(\eta - y)^2 (1 + \eta'^2) = r^2, \tag{8}$$

jichž geometrický význam jest zcela patrný.

Vzorce tyto se valně zjednoduší pro ten případ, že hledá se trochoida nějaké křivky valené na přímce.

Zvolíme-li totiž tuto přímku za osu úseček, bude

$$y = 0, \quad y' = 0,$$

načež se poslední vzorce snadno přemění v jednodušší

$$\eta' = \frac{r'}{r}, \tag{9}$$

---

*) Srovnej *Studničky* „Základové vyšší mathem.“ Díl III. pag. 85.

$$\eta^2(1+\eta'^2)=r^2, \qquad (10)$$

z nichž jen třeba vyloučiti pomocí rovnice (2) veličiny r a r', aby se obdržela differenciální rovnice hledané trochoidy.

Podobné zjednodušení možná provésti pro ten případ, že se hledá půdice nějaké křivky, jejíž trochoida jest přímka.

Neb zvolíme-li i tu přímku tuto za osu úseček, bude

$$\eta=0,\ \eta'=0,$$

načež ze soustavy rovnic (7) a (8) obdržíme jednoduché vzorce

$$-y'=\frac{r'}{r}, \qquad (11)$$

$$y=r, \qquad (12)$$

jejichž geometrický význam jest tak patrný jako v případě předcházejícím.

O vzorci vyjadřujícím plochu trojúhelníku pomocí stran jeho.

(Podle Baltzera podává dr. *F. J. Studnička.*)

Značí-li a, b, c strany trojúhelníka a s poloviční obvod, est p locha jeho Δ určena vzorcem

$$\Delta^2=s\,.\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c),$$

což ponejprv se vyskytuje ve spisech Heronových, jichž alexandrinští užívali co kompendia praktické geometrie a považovali za doplněk elementů Euklidových, jakž *Letronne* a *Martin* dokázali.

Poučka tato obsažena jest v Heronově geodaesii bez důkazu, v úplném spisu geodaetickém *περὶ διόπτρας* s důkazem, jejž *Venturi* r. 1814 (Com. sopra le storia e le teorie dell' ottica t. 1.) uveřejnil, načež v původním znění od *Vincenta* (Notices et extraits de MS. de le bibl. impér. t. 19, II. pag. 286) a *Hultsche* (Heronis reliquiae p. 235 a Zeitschr. f. Mbth. IX. p. 225) byl uveden.

Jiný starý důkaz této poučky sdělil podlé *Pacioliho* ve své trigonometrii (p. 109 a 374) *Pfleiderer.* Důkaz tento, jejž Venturi nalezl u *Leonarda Pisana* (Practica geometriae 1220, ed. Boncampagni p. 40), jest velmi jednoduchý a zasluhuje, aby se ho více všímalo, nežli se dosud děje.

Značí-li v trojúhelníku ABC (ob. 80) středy kruhů vepsaných D a D', poloměry jejich d a d' a délky tečen

$$AE = AF = \alpha,\ BF = BJ = \beta,\ CE = CJ = \gamma,$$
$$AL = AK = \alpha',\ BH = BK = \beta',\ CH = CL = \gamma'$$

a s poloviční objem, tu platí patrně

$$\alpha + \beta + \gamma = s,\ \alpha' - \beta' - \gamma' = s - a,$$

načež snadno si zjednáme, spojíme-li první rovnici tuto jednou s $\gamma = a - \beta$, na to s $\alpha = b - \gamma$, vzorce

$$\alpha = s - a,\ \beta = s - b,$$

a spojíme-li podobně druhou rovnici předešlou jednou s $\beta' + \gamma' = a$, podruhé s $\alpha' - \gamma' = b$, taktéž vzorce

$$\alpha' = s,\ \beta' = s - c;$$

a poněvadž $AED \sim AD'L$, bude

$$d : d' = \alpha : \alpha'$$

a mimo to, poněvadž $DFB \sim BKD'$, podobně

$$d : \beta = \beta' : d',$$

z kterýchžto dvou srovnalostí jde dále

$$\alpha' d^2 = \alpha \beta \beta',$$

aneb dosadíme-li známé hodnoty za α, α', β, β',

$$sd^2 = (s - a)(s - b)(s - c);$$

považíme-li konečně, že

$$ADB + BDC + CDA = \Delta$$
$$\text{tedy } ad + bd + cd = 2\Delta,$$

z čehož snadno si zjednáme

$$\Delta^2 = d^2 s^2,$$

obdržíme konečně, používše předposledního vzorce,

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Zároveň tu obdržíme pro úhly ještě vzorce známé

$$tg \frac{A}{2} = \frac{d}{s - a};\ tg \frac{B}{2} = \frac{d}{s - b},\ tg \frac{C}{2} = \frac{d}{s - c},$$

Méně jednoduchý jest důkaz Heronův, v němž se používá místo středu D' bodu proti A ležícího v kruhu vepsaném. Podobných pomůcek užívá též *Euler* (Variae demonstrationes in Nov. Comm. Petrop. 1), aby dokázal vzorec pro Δ^2. Bližší pomůcky volil *Castillon*, jehož důkaz opakuje *Baltzer* v Elem. der Math. II. pag. 122.

Ostatně sotva byl vzorec svrchu uvedený spůsobem tím vynalezen, jaký shledáváme u Herona, Eulera a Castillona; nejspíše přišlo se k němu pouhým počtem, nikoli ale cestou geometrickou. Neb známá početní dedukce pro Δ^2, jakou shledáváme u *Newtona* (Arithm. universalis probl. geom. 11.), a od té doby v rozmanitých knihách učebných, zakládá se na úkonech, kteréž byly starým geometrům velmi dobře známy. Kterážto domněnka ještě tím více nabývá váhy, povážíme-li, že staří Indové (Brahmegupta v VI. stol. po Kr.) obdobný vzorec pro plochu trojúhelníku do kruhu vepsaného znali.*) A že by indičtí geometrové byli neodvislí od řeckých předchůdců, nelze více tvrditi od té doby, co *Albrecht Webr* svými přednáškami o literatuře indické opak toho dokázal; nejspíše se ku vzorci pro čtyrúhelník platícímu přišlo počtem podobným tomu, jaký se provádí při trojúhelníku.**)

Zajímavé jsou též poznámky, jež prof. *Möbius* při svých přednáškách r. 1840 o vzorci pro Δ^2 učinil.

Poněvadž plocha jest co do znamení neodvislá od označení stran, musí býti Δ^2 funkcí veličin a^2, b^2, c^2 a sice souměrnou i stejnoměrnou. Plocha ABC stane se 0, leží-li body A, B, C na jedné přímce, platí-li tedy podmínka

$$BC + CA + AB = 0.$$

Je-li tedy Δ^2 celistvou funkcí veličin a, b, c, musí se dáti děliti trinomy

$$a + b + c,\ a - b + c,\ a + b - c,\ a - b - c$$

a tudíž i součinem těchto výrazů aneb míti od a, b, c neodvislý poměr k determinantu souměrnému

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & o \\ b, & a, & o, & c \\ c, & o, & a, & b \\ o, & c, & b, & a \end{vmatrix}$$

(Berichte über die Verhandl. der k. sächs. Gesellsch. der Wiss. zu Leipzig, math. phys. Classe, XVII. Bd. 1865. pag. 3.)

---

*) Porovnej řešení 7. úlohy mathematické v III. sešitu tohoto časopisu na str. 153 od K. Zahradníka uveřejněné, jakož i poznámku na str. 154. připojenou.

**) Srovnej „Arneth" Geschichte der reinen Mathematik, pag. 145 et seq.

O nepravidelném rozkladu světla.

(Podává *Jos. Janoušek.*)

Roku 1862 pozoroval fysik *Leroux*,*) když nechal světlo procházeti hranolem naplněným parou jódovou, že se paprsek červený více lámal než fialový, kterážto nepravidelnost vidma až dosud u žádné jiné hmoty pozorována nebyla. Věc ta zůstala dlouho nepovšimnuta, až teprvé r. 1870 *Christiansen***) v *Kodani*, naplniv dutý hranol, mající velmi ostrý úhel lámavý, roztokem alkoholovým fuchsinu neb anilinové barvy červené, shledal, že exponent lomu roste od Frauenhoferovy čárky *B* až k *D* a něco přes ni, sklesne pak pojednou velmi rychle až ku *G* a od této čárky opět roste. Největších však zásluh o tomto nepravidelném rozptylu světla u látek mnohých získal si *Kundt****), který velmi pilně tímto pozorováním se zabýval.

Téměř všechny látky, jež v hutném svém skupenství jeví na povrchu jakousi barvu, které tedy paprsky této barvy silněji odrážejí nežli barvy jiné, nechá-li se paprsek světla procházeti skleněným hranolem, naplněným čistým a procezeným roztokem těch látek, rozptylují paprsek ten nepravidelně. Nepravidelný rozklad nastává však nejen tenkráte, když se modrý paprsek více láme, než červený, nýbrž i když vůbec paprsek, mající kratší délku vlny, se více láme než jiný s větší délkou vlny.

Látky, které až posud proskoumány byly a při nichž nepravidelnost v lomnosti shledána byla, jsou: *fuchsin, všechny druhy anilinových barev modrých, fialových a zelených, indigo, karmín indigový, karthamin, murexid, cyanin, nadmanganan draselnatý, karmín, pak dále korallin, alizarin, orsellin, lakmus, jód, dřevo kampešské, červené, sandalové z Fernambuku, alkana, krev, haematin a chlorofyl* neb zeleň listová.

Všechny tyto látky lámou červené světlo více než modré a při látkách, u nichž převládá zelená barva povrchná a ve vidmu zřetelně se vidí, jest tato nejméně odchylena. Cyanin na př., anilinová barva fialová a zelená, též karmín indigový

*) Leroux, Pogg. Ann. sv. 117. p. 659.
**) Christiansen, Pogg. Ann. sv. 141 a 143.
***) Kundt, Pogg. Ann. sv. 142—145.

ukazují ve vidmu toto pořadí barev: zelená, modrá, červená, kdež barva zelená jest nejméně odchylena.

Nepravidelnost takovéhoto rozkladu světla bývá tím větší, čím jest hustší roztok látky té, kterou paprsek sluneční se propouští. Při velmi hustém roztoku jeví se spektrum, prochází-li paprsek sluneční velmi blízko hrany lámavé, na obou koncích velmi roztažené a vždy méně jasné; zvláště pak na straně méně odchýlené jest zelený pruh, jako při cyaninu, anilinové barvě fialové a j. velmi dlouhý. Poněvadž ale při velmi světlých vidmech těchto látek dvě neb i více barev na sebe dopadají, lze jen velmi zřídka a tu jen ty nejsilnější čárky Frauenhoferovy spatřiti. Dobře však jest je viděti, díváme-li se na vidmo takové barevnými skly, které jen paprsky určité barvy propouštějí. Při tom též pozorujeme, že jednotlivé barvy v nepravidelném tomto vidmu jsou velmi roztaženy, tak na př. červená barva ve fuchsinu, zelená v cyaninu; v těchto roztažených dílech spektra nelze však více Frauenhoferovy čárky rozeznati.

Mimo tuto uvedenou nepravidelnost v rozptylu světla a povrchní barvu ukazuje se u velmi mnohých nahoře zmíněných hmot i zvláštní optická vlastnost, totiž *dvojbarevnost* neb *dichroismus* tím, že již slabé vrstvy těchto látek ve světle procházejícím rozličnou barvu jeví; dvojbarevnost tato by patrna byla bez pochyby též u všech ostatních toho druhu hmot, kdyby se daly v malinké hlatě uvésti, což se až posud nepodařilo.

Poněvadž se některé paprsky na povrchu těchto látek silně odrážejí a tudíž v míře velmi skrovné do hmot těchto vnikají, nemůže exponent lomu pro tyto paprsky určen býti; avšak lze souditi, že na krajích těchto pohlcených paprsků exponentu lomu buď silně přibývá neb ubývá, což se též potvrzuje, upotřebí-li se tohoto spůsobu pozorování.

Na stolek spektrálního apparátu postaví se skleněný hranol, jehož lámavá hrana rovnoběžná jest s vodorovně postavenou štěrbinou, jíž světlo do kollimátoru vniká; dalekohled pak zařídí se tak, aby se vidělo jasné vidmo s čárkami Frauenhoferovými. Postavil-li by se nyní mezi tento hranol a předmětnici dalekohledu jiný hranol s hranou lámavou kolmou, vidělo by se po jistém otočení dalekohledu vidmo šikmé, při němž by červené světlo nejméně, modré pak nejvíce odchyleno bylo.

Kdybychom nyní místo druhého hranolu dali dutý hranol naplněný látkou, která nepravidelně světlo láme, spatřili bychom v tomto šikmém vidmu zvláštní zjev. U všech nahoře jmenovaných látek, které paprsky uprostřed vidma pohlcují, roste totiž odchylka červených paprsků, tedy těch s největší délkou vlny, velmi rychle, tak že při hustém roztoku červená barva jest nad pruhem pohlceným v dlouhý skoro vodorovný pruh roztažena; pod pruhem pohlceným, byl-li ve vidmu pohlcen hlavně paprsek žlutý a poněkud i zelený, nachází se též tak dlouhý pruh zelený s menší již odchylkou, kterážto odchylka při modrém paprsku jest as tak veliká, jako při pravidelném rozptylu.

Pokusy tyto zřejmě tedy ukazují, že při řadě hmot, které prostřední barvy vidma silně na povrchu odrážejí a zároveň tytéž paprsky pohlcují, lomnost paprsků velmi rychle roste, blížíme-li se se strany červené k pohlcenému pruhu; blížíme-li se však se strany modré, tedy se strany paprsků s kratší délkou vln k pohlcenému pruhu, tu lomnosti rychle ubývá, takže paprsky s větší délkou vlny se více od směru svého původního odchylují, než paprsky s kratší délkou vlny. Aby se při tomto pozórování rozptylu světla zamezil rušící vliv rozpouštědla upotřebeného, postavil *Soret**) skleněný hranolek naplněný látkou rozpuštěnou, při níž se rozklad světla pozoroval, do korýtka z rovnoběžných stěn ze skla shotoveného a rozpouštědlem, jehož se upotřebilo k rozpuštění látky skoumané, naplněného.

Abych čtenáři těchto řádků podal obrázek takovéhoto nepravidelného rozptylu, uvede zde nejnovější měření exponentu lomu n, jež provedl *Kundt***) při hustém roztoku cyaninu, látky to k prvnímu pokusu velmi se hodící, a porovnám jej s exponentem lomu alkoholu upotřebeného co rozpouštědla pro nejdůležitější čárky Frauenhoferovy:

---

*) Soret, Archives des sciences physiques. Mars 1871, pak Pogg. Ann. sv, 143. p. 325.

**) Kundt, Pogg. Ann. sv. 145. p. 73.

Cyanin $n =$		Alkohol $n =$		$\triangle a$
pro	A: 1·3732	pro	A: —	
„	a: 1·3756	„	a: 1·3636	+ 120
„	B: 1·3781	„	B: 1·3642	+ 139
„	C: 1·3831	„	C: 1·3649	+ 182
„	E: 1·3658	„	E: 1·3692	— 34
„	F: 1·3705	„	F: 1·3712	— 7
„	G: 1·3779	„	G: 1·3750	+ 29
„	H: 1·3821	„	H: —	—

($\triangle$ a značí rozdíly exponentu lomu roztoku a čistého alkoholu v jednotkách 4. dec. místa.)

Z čísel těchto patrně jde na jevo zákon o nepravidelném rozptylu nahoře uvedený.

Při hmotách, které více ostrých pohlcených pruhů ve vidmu jeví, jako jest nadmanganan draselnatý, jód a j., shledává se též na krajích každého z těchto pohlcených pruhů nepravidelnost lomu, o níž jsme se nahoře zmínili.

Jiné hmoty opět, které pohlcují ve vidmu modrý jeho konec, jako roztok chloridu železitého, kyselina chromová a j., jeví nápadné přibývání exponentu lomu od červené barvy ke žluté.

Ano nalezeno bylo i pevné jedno těleso, totiž silně zbarvené sklo kobaltové, z kteréhožto skla hranol shotovený jevil tutéž nepravidelnost v rozptylu světla procházejícího a možná že i více pevných těles toho druhu se ještě vyskytne.

Z výsledků těchto poznáváme tedy tento zákon:

***Roste-li** při pevných a tekutých hmotách pro určité paprsky koëfficient absorpce s* $\left\{\begin{matrix}\textit{větším}\\ \textit{menším}\end{matrix}\right\}$ *počtem výchvějů* $\left\{\begin{matrix}\textit{roste}\\ \textit{klesá}\end{matrix}\right\}$ *též velmi silně s* $\left\{\begin{matrix}\textit{větším}\\ \textit{menším}\end{matrix}\right\}$ *počtem výchvějů exponent lomu a sice při silném pohlcování tak, že část paprsků s menším počtem výchvějů se vždy více odchyluje, než část ona s větším počtem výchvějů.* Ano nepravidelnost tato může býti i tak veliká, že ze dvou částí paprsků, oddělených od sebe paprsky silně pohlcenými, ona část s větším počtem výchvějů méně se láme, než celá druhá část s menším počtem výchvějů.

Zdá se též, že tento zákon platí nejen pro pevná a tekutá tělesa, nýbrž i, jak z nepravidelného rozptylu, jejž *Leroux* při páře jódové byl pozoroval, patrno, taktéž pro plyny. Podaří-li se však kdy odchylky ty při plynech, z nichž mnohé velký počet pohlcených pruhů jeví, stanoviti, jest velmi pochybno.

Theoretické vysvětlení tohoto zvláštního rozkladu světla podal *Sellmeier* *), který tuto zvláštnost tušil, ale marně hledal při roztoku fuchsinu již roku 1866, tedy dlouho ještě než skutečně byla vynalezena a postavil na základě svého bádání tuto větu, která vyslovuje odvislost mezi rozkladem světla a jeho pohlcováním: Chová-li hmota nějaká částky v sobě, jež pohlcují paprsky určité doby výchvějné, tu mění tyto částky při světle o jiné době výchvějné exponent lomu, zvětšujíce jej, je-li doba výchvějná větší, zmenšujíce však, je-li doba výchvějná menší než světla pohlceného; změna tato jest nejen větší, blíží-li se doba výchvějná světla zlomeného oné světla pohlceného, nýbrž přibývá jí i silně.

Dle toho musí tedy částky hmot, jež pohlcují paprsky tepelné neb pod červenou barvou ležící, exponent lomu ostatních paprsků zmenšiti, poněvadž všechny ostatní mají menší dobu výchvějnou, než ony paprsky pohlcené, nejmenší pak musí býti exponent ten na červené straně vidma. Látky pak, jež pohlcují paprsky chemické neb nad fialovou barvou ležící, zvětšují exponent lomu při ostatních paprscích a nejvíce na fialové straně vidma, poněvadž doba výchvějná ostatních paprsků větší jest než oněch pohlcených. Látky konečně takové, které pohlcují jak paprsky tepelné tak i fialové, zmenšují exponenty lomu na červené, zvětšují pak na fialové straně vidma.

Co se roztažení jednotlivých barev v takovémto nepravidelném vidmu týče, třeba tu též uvésti, že při hmotách prvého druhu jsou barvy na straně červené více roztaženy než na straně fialové, kde jsou stísněny; při látkách druhého druhu jest to právě naopak a při látkách třetího druhu jsou barvy na obou koncích vidma roztaženy, uprostřed pak více pohromadě.

---

*) Sellmeier, Poyg. Ann. sv. 143. p. 272.

Co zástupcové prvé třídy uvádí se *voda*, jež paprsky tepelné pohlcuje, druhé třídy *sirouhlík*, který pohlcuje paprsky chemické a konečně třetí třídy Frauenhoferovo *korunové sklo* čís. 9.; všechny tyto tři hmoty mění exponenty lomu ve smyslu právě vytknutém.

Pokračujeme-li dále, musí nezbytně látky takové, které pohlcují střední část vidma, tutéž změnu exponentu lomu při ostatních nepohlcených paprscích spůsobiti. Paprsky totiž na straně červené vidma musí míti exponent lomu bezprostředně při pruhu pohlceném větší, na straně fialové při pruhu pohlceném menší. Barvy pak před pruhem pohlceným i za ním ležící musí býti roztaženy, takže mnohdy i tmavý onen pruh pokryti a přes sebe padnouti mohou.

Dle dříve uvedených nepravidelností při vidmu patrno, že tato theorie se úplně shoduje s výskumy tam uvedenými a zajímavo zároveň, že výsledky, k nimž se došlo tou i onou cestou' tytéž jsou, ač neodvisle od sebe vynalezeny byly.

Oprava.

V sešitu III. na stránce 129, řádku 19 s hora jest chyba smysl rušící místo $= 121$ má státi $= 12\bar{1}$.